Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΞΙΩΝ

ΥΠΟ

Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

I. Εἰς ἀξιόλογον μελέτην τοῦ κ. Μ. Τσιμάρα, δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ Α΄ (1931) τεῦχος τοῦ «Ἀρχείου,» ἐξητάσθη τὸ νόμιμον ἢ μὴ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ Λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων εἰς τὴν ἔρευναν τῶν καθόλου χρηματιστηριακῶν διακυμάνσεων. Εἰς τὴν ἔρευναν ταύτην, χωρὶς νὰ θέλω νὰ ἀμφισβητήσω τὰ συμπεράσματα, θὰ ἤθελα νὰ προσθέσω ὀλίγα τινὰ πρὸς ἐπίρρωσιν τῆς γνώμης τοῦ κ. Τσιμάρα ὅτι αἱ χρηματιστηριακαὶ διακυμάνσεις, ἐξαιρέσει μεμονωμένων καὶ συνεπῶς σπανίων περιπτώσεων, ὑπείκουσιν ὁλοκληρωτικῶς εἰς τοὺς νόμους τοῦ τυχαίου. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσω τὰς μεθόδους τῆς Μαθηματικῆς Στατισικῆς ἵνα καταστήσω ἀπολύτως ἐναργῆ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἄποψιν. Πρὶν ὅμως προβῶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κυρίου θέματος, θὰ διαλάβω τινὰ περὶ τῆς χρηματιστηριακῆς κερδοσκοπίας, καθ' ὅσον, ὡς εἶναι ἄλλως τε παγκοίνως γνωστόν, τὸ πλεῖστον τῆς παραγωγῆς καὶ τοῦ ἐμπορίου ἀποτελεῖ ἀντικείμενον ἐκμεταλλεύσεως οὐχὶ προσώπων φυσικῶν, ἀλλὰ νομικῶν τοιούτων, τῶν Ἑταιριῶν δηλ. ὧν οἱ τίτλοι διαπραγματεύονται ἐν τῷ χρηματιστηρίῳ τῶν ἀξιῶν. Οἱ καθόλου κερδοσκόποι, τῆς σημασίας τῆς λέξεως ταύτης λαμβανομένης ὑπὸ τὴν μᾶλλον ἀγαθὴν ἔννοιαν, ὡς τηρούμενοι ἐνήμεροι τῆς γενικῆς προόδου ἑκάστης τῶν ἐπιχειρήσεων (Τραπεζικῆς, Βιομηχανικῆς κ.λ.π.), τῶν διαφόρων συνθηκῶν τῆς παραγωγῆς καὶ τῆς ἀγορᾶς, προσαρμόζουσι ἀναλόγως τούτων τὰς ἐνεργείας αὐτῶν. Ἐὰν νῦν αἱ ὑποθέσεις ἐπιχειρήσεώς τινος εὐδοκιμοῦσι, αὐτονόητον εἶναι, ὅτι αἱ ἀξίαι ταύτης θὰ ὑποστῶσιν αὔξησιν καὶ οἱ κερδοσκόποι θὰ πωλήσωσιν. Τὸ ἀντίθετον θὰ συμβῇ ἂν αἱ ἐργασίαι τῆς ἐπιχειρήσεως ὑποστῶσιν μείωσιν. Κατ' ἀκολουθίαν ἐπειδὴ κατὰ τὴν μίαν περίπτωσιν ἔχομεν αὔξησιν τῆς τιμῆς τῶν ἀξιῶν κατὰ δὲ τὴν ἄλλην πτῶσιν, τὸ πλάτος τῶν διακυμάνσεων τούτων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὑποδοχῆς ἣν εὑρίσκουσιν αἱ προβλέψεις τῶν κερδοσκόπων παρὰ τοῖς κατόχοις τῶν ἀξιῶν τούτων καὶ τοῖς προσώποις ἅτινα διαθέτουσιν ἀποταμιεύματα πρὸς τοποθέτησιν ἢ ἐνοικίασιν. Ἐκ τῶν ἄνω ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος ἢ θὰ ἀποδώσῃ τὰ ἀποταμιεύματα αὐτοῦ εἰς ἀξίας ἀνθουσῶν ἐπιχειρήσεων (περίπτωσις ὑψώσεως τιμῶν) ἢ τοὐναντίον θὰ ῥευστοποιήσῃ ταύτας πρὸς καλυτέραν τοποθέτησιν (περίπτωσις πτώσεως τιμῶν). Διὰ τῆς κερδοσκοπίας ὅθεν ἐνεργοῦνται αἱ ἄνω δυὸ ἁπλαῖ φαινομενικῶς, ἀλλὰ ἐν τῇ πραγματικότητι ὑπεράγαν πολυσύνθετοι, πράξεις, τῆς προσαγωγῆς δηλ. τῶν ἀποταμιευμάτων τοῦ πλήθους εἰς τὰς ἀνθούσας ἐπιχειρήσεις καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τούτων ἐκ τῶν ἀποτυγχανουσῶν ὁπωσδήποτε. Ἡ χρῆσις τῶν πλεοναζόντων ἀποταμιευμάτων εἰς τὰς ἀνθούσας ἐπιχειρήσεις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τῆς πτώσεως τοῦ τόκου ἢ τοῦ καθαροῦ ἐνοικίου τῶν κεφαλαίων ἅτινα προμηθεύονται διὰ τὴν προαγωγὴν καὶ ἐπέκτασιν τοῦ κύκλου τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν.

'Αντιθέτως ἡ σπάνις διαθεσίμων κεφαλαίων δρᾷ ἀντιστρόφως ἐπὶ τοῦ τόκου. Διὰ τῆς διπλῆς ταύτης κινήσεως ἣν προκαλοῦσι οἱ κερδοσκόποι, ἀπαρτίζοντες τὴν συνισταμένην πασῶν τῶν αἰτιῶν τῆς αὐξομειώσεως τῶν ἀξιῶν, τὸ ἐνοίκιον ὅπερ καταβάλλουσιν αἱ ἐπιχειρήσεις διὰ τὰ ἐνοικιασθέντα κεφάλαια τείνει νὰ καταστῇ ἴσον πρὸς τὸν συνήθη τόκον. Τὰ ἀνωτέρω, ὡς εἰκός, ἰσχύουσιν καὶ διὰ τὰς Κρατικὰς ἀξίας, ὧν ἡ αὐξομείωσις τῆς τιμῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μεταβολῶν τῶν συνθηκῶν τῆς ἀγορᾶς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς ἀποταμιεύσεως, ἔτι δὲ ἐκ τῶν μεταβολῶν τῆς πολιτικῆς καὶ οἰκονομικῆς καταστάσεως τοῦ Κράτους. Χωρὶς ὅθεν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς περαιτέρω λεπτολόγον ἔρευναν τοῦ ζητήματος τῶν χρηματιστηριακῶν διακυμάνσεων, θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ἂν αὗται ὀφείλωνται εἰς τὸ τυχαῖον ἢ ὄχι. Καθ' ὅσον ἂν ἤθελε διαπιστωθῇ τὸ τοιοῦτον τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων διὰ τὴν σπουδὴν αὐτῶν ἐνδείκνυται, καθ' ὅσον τεκμαίρεται πλέον ἡ σταθερότης τῆς γενεσιουργοῦ αἰτίας τῶν διακυμάνσεων τῶν ἀξιῶν.

II. Αἱ χρηματιστηριακαὶ διακυμάνσεις ἀξίας τινός, ἐν τῇ παρούσῃ ἐξετάζονται διὰ δεδομένην χρονικὴν περίοδον, ἀνεξαρτήτως τοῦ εὔρους αὐτῶν ἀλλὰ μόνον ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν ἢ μείωσιν τῆς τιμῆς ἀξίας τινος καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμὴν τῆς αὐτῆς ἀξίας κατὰ τὴν προηγουμένην. 'Επὶ βάσει ὅθεν τῶν δεδομένων τοῦ κ. Μ. Τσιμάρα θὰ δημιουργήσωμεν μίαν διχοτόμον Στατιστικὴν κατάταξιν, θεωροῦντες ἐν αὐτῇ δύο διακεκριμένας ἰδιότηιας, τάς, τῆς αὐξήσεως καὶ πτώσεως τῆς τιμῆς τῶν ἀξιῶν. Ἂν ὅθεν καλέσωμεν A τὴν ἰδιότητα τῆς αὐξήσεως και α τὴν τῆς πτώσεως, θὰ ἔχωμεν κατὰ θεμελιῶδες δόγμα τῆς 'Αλγεβρικῆς Λογικῆς

$$A + \alpha = I \qquad (1)$$

τοῦθ' ὅπερ δηλ. ὅτι τὸ σύνολον I ἀνήκει εἴτε εἰς τὸ σύνολον A εἴτε εἰς τὸ α. Καλοῦμεν (A) τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου (I) τῶν κεκτημένων τῆς ἰδιότητος A καὶ (α), ὁμοίως τοῦ συνόλου (I), τῶν κεκτημένων τῆς ἰδιότητος α, N δὲ τὸ ὁλικὸν πλῆθος τῶν στοιχείων ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$(A) + (\alpha) = N$$

θεωροῦμεν ὡς εὐνοϊκὴν περίπτωσιν, τὴν ἰδιότητα τῆς αὐξήσεως. Συνεπῶς ἡ στατισιικὴ ἢ ἐμπειρικὴ πιθανότης ἔσται $\Pi = \frac{(A)}{N.}$

Κατόπιν τῶν ἄνω ἔχομεν

Μετοχαὶ	A	α	N
Τραπέζης Ἀθηνῶν	56	43	99
» Ἀνατολῆς	45	48	93
» Πειραιῶς	4	6	10
» Ἐθν. Οἰκονομίας	29	43	72
» Χίου	4	5	9
Ἑταιρίας Οἰνοποιΐας	44	41	85
» Οἴνων	56	43	99
» Ἡσαΐα	43	41	84
» Ἐριουργίας	55	46	101
» Βέρμιον	51	48	99
» Ἐρίων	42	47	89
» Ταπητουργίας	16	17	33
» Λιπασμάτων	55	45	100
» Βιὸ	44	41	85
» Μακρῆς	51	44	95
» Τιτὰν	12	12	24
» Ἄτλας	26	27	53
» Ἐργοληπτικῆς	50	34	84
» Γ. Ἀποθηκῶν	8	2	10
		Σύνολον	1324

Διαθέτομεν ὅθεν 19 σειρὰς παρατηρήσεων καὶ ἐπειδὴ ἡ πιθανότης μιᾶς εὐνοϊκῆς περιπτώσεως (περίπτωσις ἢ ἰδιότης αὐξήσεως) εἶναι

$$\Pi i = \frac{\nu i}{N}$$

ἔνθα ν_i ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων ἐν τῇ i σειρᾷ καὶ N τὸ ὁλικὸν πλῆθος τῶν ἐν αὐτῇ περιπτώσεων. Ὅθεν εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ἐὰν ἡ κατανομὴ τῶν ὡς εἴρηται ἐμπειρικῶν πιθανοτήτων εἶναι κανονικὴ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον.

Σχηματίζομεν ὅθεν τὸν ἑπόμενον πίνακα

Ἰδιότης Α (1)	Σύνολον περιπτώσεων (2)	Ἐμπειρ. πιθανότης στήλη (1) / στήλη (2) Π_i	Σχετικαὶ Ἀποκλίσεις ἢ Σχετικὰ σφάλματα $E_i = \Pi_i - p$
56	99	0,565	0,046
45	93	0,483	—0,036
4	10	0,400	—0,119
29	72	0,402	—0,117
4	9	0,444	—0,075
44	85	0,517	—0,002
56	99	0,565	0,046
43	84	0,511	—0,008
55	101	0,544	0,025
51	99	0,515	—0,004
42	89	0,471	—0,048
16	33	0,484	0,035
55	100	0,550	0,039
44	85	0,517	—0,002
51	95	0,536	0,017
12	24	0,500	—0,019
26	53	0,490	—0,029
50	84	0,595	0,076
8	10	0,800	0,281
691	1324	9,889	

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς κατανομῆς τῶν ἐμπειρικῶν πιθανοτήτων δὲν παρέχουσιν ἐναργῆ τὴν εἰκόνα τῆς μεταβολῆς αὐτῶν, ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σταθεράς.

1) τὸν μέσον τῶν Π_i ἤτοι $p = A\,(\Pi_i) = 0{,}520$

2) τὰ σχετικὰ σφάλματα $E_i = \Pi_i - p$ διὰ $i = 1, 2, \ldots, 19$ ἅτινα τάσσομεν κατ' αὔξουσαν τάξιν μεγέθους καὶ συναρτήσει τῆς οὑτωσὶ σχηματισθείσης σειρᾶς τῶν E_i προσδιορίζομεν

3) τὴν Διάμεσον ἤτοι: $\Delta\mu = -\,0{,}008$

4) τὰ δύο Τεταρτημόρια $T_1 = -\,0{,}042$, $T_3 = 0{,}028$

5) τὴν Τεταρτημοριακὴν διασπορὰν ἢ ἐμπειρικὴν πιθανότητα

$$\bar{\varrho} = \pm\,0{,}035$$

6) τὸ Μέσον Σχετικὸν σφάλμα $A \mid E_i \mid = 0{,}053$ καὶ τέλος

7) τὸ Μέσον Σχετικὸν σφάλμα τετραγώνου

$$\sigma = \sqrt{A\,(E^2)} = 0{,}08285$$

Ἡ ἐπιτευχθεῖσα προσέγγισις εἶναι ἀσθενὴς διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν εἶναι πολὺ μικρὸς (19), οὐχ ἧττον ὅμως φαίνεται ὅτι ἡ σειρὰ εἶναι ἐλαφρῶς ἀσυμμετρική, καθ' ὅσον ὁ συντελεστὴς ἀσυμμετρίας

(SK) = 0,027 εἶναι μόλις 27 χιλιοστά.

Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὰ ὑπ' ὄψιν φαινόμενα ἐν τῇ ἐκδηλώσει αὐτῶν ἐπείκουσιν εἰς τὸν νόμον τοῦ τυχαίου, καίτοι τῆς πιθανότητος οὔσης διαφόρου ἀπὸ σειρᾶς εἰς σειράν.

Τοῦτο ἄλλως φαίνεται καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς:

Τὸ ἐμπειρικὸν πιθανὸν σφάλμα p=0,035.

Τὸ θεωρητικὸν πιθανὸν σφάλμα 0,6745 σ= 0,040.

Τὸ ἐμπειρικὸν μέσον σχετικὸν σφάλμα = 0,053.

Τὸ θεωρητικὸν τοιοῦτον 0,7977 σ= 0,047.

Τὸ πηλῖκον τοῦ μέσου ἐμπειρικοῦ σχετικοῦ σφάλματος τετραγώνου διὰ τοῦ μέσου σχετικοῦ σφάλματος εἶναι $\sqrt{1,26}$

Τὸ πηλῖκον τοῦ θεωρητικοῦ μέσου σχετικοῦ σφάλματος τετραγώνου διὰ τοῦ θεωρητικοῦ μέσου σχετικοῦ σφάλματος εἶναι $\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{1,57}$ τοὐθ' ὅπερ δικαιολογεῖ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα.

III. Ἵνα νῦν ἡ σειρὰ παρουσιάζῃ κανονικότητα, δηλ. ὅπως τὰ διὰ παρατηρήσεως διαπιστωθέντα σφάλματα ὀφείλωνται εἰς τὸ τυχαῖον, ὡς ἐὰν εἶχον προκύψῃ διὰ κληρώσεων ἐκ καλπῶν τινων, θὰ πρέπῃ τότε νὰ ὁρίσωμεν τὴν σύνθεσιν τῶν ὡς εἴρηται καλπῶν καὶ τοὺς κανόνας τῆς ἀντιστοιχούσης κληρώσεως πρὸς τὴν στατιστικὴν σειράν, ἵνα οὕτω τὰ ἐξαγόμενα τῆς παρατηρήσεως ἐκφρασθῶσι διὰ μαθηματικῶν τύπων, κατὰ τὴν βασικὴν ἀποστολὴν τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς, καὶ ἀνεξαρτήτως τοῦ μήκους τῆς σειρᾶς.

Παριστῶμεν διὰ μ τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν ἑκάστῃ σειρᾷ περιλαμβανομένων περιπτώσεων καὶ διὰ ν_i τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων (ἰδιότης αὐξήσεως) ἐν τῇ i σειρᾷ, M ὄντος τοῦ ὁλικοῦ πλήθους τῶν σειρῶν. Ἡ ἐμπειρικὴ πιθανότης τοῦ εὐνοϊκοῦ γεγονότος ἐν τῇ i σειρᾷ εἶναι

$\Pi i=\frac{\nu_i}{\mu}$ Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ἑκάστης σειρᾶς διαφέρει, ἀπονέμομεν εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἴδιον βάρος ἢ συντελεστὴν ἐνδιαφέροντος ὅστις εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ πλῆθος τῶν παρατηρήσεων τῆς ὑπ' ὄψει σειρᾶς.

Κατ' ἀκολουθίαν $\mu=$ 69,68 ἢ 70 καθ' ὑπεροχὴν καὶ συνεπῶς

$$p=\frac{\Sigma\nu_i}{\Sigma\mu_i}=0,5219$$

$$\text{ὅθεν } A\,(\varepsilon^2)=\frac{pq}{\mu}=\frac{0,5219.\ 0,4781}{70}=0,003564 \text{ ἢ}$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}003564} = 0{,}059699.$$

δηλ. ἡ θεωρητικὴ τιμὴ τοῦ μέσου σχετικοῦ σφάλματος τετραγώνου εἶναι ἡ αὐτὴ ὥς ἐὰν πᾶσαι αἱ σειραὶ περιλαμβάνωσιν, $\mu \doteq 70$, παρατηρήσεις ἑκάστη.

Ὁρίζομεν νῦν τὸν μέσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν παρατηρηθέντων σφαλμάτων, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει καὶ τὸν συντελεστὴν ἐνδιαφέροντος ἑκάστου τούτων.

$$\sigma_\pi^2 = A\,(\Pi_i - p)^2 = \frac{\Sigma\mu_i\,(\Pi_i - p)^2}{\Sigma\mu_i} = 0{,}002627 \text{ ἢ}$$

$$\sigma_\pi = 0{,}0512542$$

ὅθεν $\sigma \mid = \sigma_\pi$ καὶ ἐπειδὴ $\sigma_\pi^2 < \frac{pq}{\mu}$ ἡ σειρὰ εἶναι ὑποκανονικὴ ἢ τοῦ Poisson, ἐλαφρῶς ὅμως, ὡς τοῦτο δῆλον ἐκ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Lexis.

$$L = \frac{\sigma\pi}{\sigma} = 0{,}858$$

Ἐπειδὴ νῦν ἡ πιθανότης ἵνα τὸ γεγονὸς εἶναι εὐνοϊκὸν εἰς τὴν πρώτην δοκιμασίαν εἶναι p_1 εἰς τὴν δευτέραν p_2 καὶ ἐφεξῆς οὕτω, θὰ ζητήσωμεν τὴν πιθανότητα ἵνα εἰς τὸ σύνολον τῶν δοκιμασιῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι ν. Δηλ. θὰ ζητήσωμεν τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τοῦ ν ὅθεν

$$A\,(\nu) = Np = 690{,}9958$$

ἑπομένως θὰ ἔχωμεν.

$$\sigma_\pi^2 = A\,(\varepsilon^2) = \frac{pq}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \sum (\Pi_i - p)^2 \text{ ἢ}$$

$$pq - \sigma_\pi^2\,\mu = \frac{1}{\mu^2} \sum (\Pi_i - p)^2 = \frac{\gamma^2}{3}$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐμπειρικαὶ πιθανότητες δύναται νὰ κυμαίνωνται μεταξὺ τῶν ὁρίων α καὶ β ὥστε ἡ πιθανότης ἵνα Π_i περιλαμβάνηται μεταξὺ x καὶ $x + dx$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{dx}{\beta - \alpha},$ διότι ὁ μέσος τῶν Π_i

$$\text{δηλ. ὁ } p = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta x\,dx = \left| \frac{x^2}{2(\beta - \alpha)} \right|_\alpha^\beta = \frac{(\beta + \alpha)}{2} \text{ καὶ}$$

$$\text{πλέον } \frac{1}{\mu} \sum (\Pi_i - p)^2 = \frac{\gamma^2}{3} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta (x - p)^2\,dx \text{ ἢ}$$

$$\frac{\gamma^2}{3}=\frac{1}{\beta\text{-}\alpha}\left|\frac{x^3}{3}-x^2p+p^2x\right|_{\alpha}^{\beta} \qquad (1)$$

λαμβανομένου νῦν ὑπ' ὄψει ὅτι $p=\frac{(\beta+\alpha)}{2}$, ἔχομεν τελικῶς ἐκ τῆς (1).

$$\frac{\gamma^2}{3}=\frac{(\beta\text{-}\alpha)}{12} \quad \text{ἢ} \quad \gamma=\frac{\beta\text{-}\alpha}{2.} \text{ ὅθεν}$$

$$\alpha=p-\gamma$$

$$\beta=p+\gamma$$

$$\text{ἀλλὰ } \frac{\gamma^2}{3}=\frac{1}{\mu}\sum(\Pi_i-p)^2=0{,}001863 \text{ ἢ}$$

$\gamma=0{,}0754$ ὅθεν

$\alpha=0{,}5219-0{,}0754=0{,}4465$ (α)

$\beta=0{,}5219+0{,}0754=0{,}5973$ (β)

Οὕτω ἐὰν πᾶσαι αἱ πιθανότητες ἔχωσιν ἴσην πιθανότητα νὰ εὑρίσκωνται μεταξὺ ὁρίων τινων, ἀδιαφόρως ποίων, ταῦτα θὰ ὦσι τὰ (α) καὶ (β).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν κανονικότητα τῆς σειρᾶς θέτομεν $2\gamma=0{,}1508$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ σειρὰ εἶναι μᾶλλον κανονικὴ καθόσον εἰς τὰς κανονικὰς τὸ $2\gamma=0$, εἰς δὲ τὰς ὑπερκανονικὰς (μέγιστον), $2\gamma=1$.

Διὰ τῆς ἀσταθείας τῶν πιθανοτήτων τὴν μέτρησιν χρώμεθα τῷ συντελεστῇ τοῦ Charlier.

$$C=\frac{100\,\gamma}{p\sqrt{3}}=\frac{7{,}54}{0{,}902}=8{,}35$$

τοῦθ' ὅπερ ἐμφαίνει καὶ ἐπικυροῖ τὰ ἀρχικῶς λεχθέντα ἐπὶ τῆς κανονικότητος τῆς σειρᾶς.

IV.—Ἐφ' ὅσον ὅθεν ἡ σειρὰ εἶναι ἐλαφρῶς ὑποκανονική, ἀναλυτικῶς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἡ πιθανότης ἑνὸς σφάλματος ὅπως τοῦτο περιλαμβάνηται μεταξὺ ε καὶ $\varepsilon+d\varepsilon$ διὰ τῆς προσεγγιζούσης ἐκφράσεως τοῦ Laplace, $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ ἔνθα $t=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ καὶ $\sigma=\sqrt{\frac{pq}{\mu}}=0{,}059$

Ἡ δὲ πιθανότης σφάλματος μικροτέρου τοῦ x δίδεται ὑπὸ

$$P(x)=\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x/\sigma}e^{-t^2/2}dt=\frac{N}{2}\left[1+\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] \qquad (1)$$

τοῦ $t=\frac{x}{\sigma}$ καὶ N τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σειρῶν.

Οὕτω ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν $p = 0,5173$ καὶ $q = 0,4827$ δηλ. $\varepsilon = -0,046$ εἶναι διὰ $t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = -0,77$

$$y = 0,29659.$$

Ἴδωμεν νῦν ἂν ἡ κατανομὴ τῶν σφαλμάτων ἀκολουθῇ τὸν νόμον τοῦ Gauss. Θὰ ἔχωμεν οὕτω

Μεγέθη ε	Παρατηρηθέντα σφάλματα μικρότερα ε	Ὑπολογισθέντα σφάλματα μικρότερα ε
0	11	9,5
0,06	6	6,5
0,12	1	2,5
0,300	1	0,4
Σύνολον σφαλμάτων	19	18,9

Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς πίνακας τοῦ Dr Sheppard τοὺς δίδοντας τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος (1).

Ὡς φαίνεται μεταξὺ τοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ τῆς παρατηρήσεως ὑφίσταται ἱκανὴ προσέγγισις, ἥτις θὰ ἦτο μείζων ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαλμάτων ἦτο μέγας. Δυνάμεθα ὅθεν κατόπιν τούτου νὰ προσθέσωμεν ὅτι αἱ χρηματιστηριακαὶ διακυμάνσεις διέπονται ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ τυχαίου ἢ τῆς πιθανότητος τῶν σφαλμάτων.

Τέλος ἐπειδὴ $p = \frac{\nu}{N} = 0,5219$ καὶ $q = 0,4781$ ὁ πιθανώτερος ἀριθμὸς τῶν παρατηρηθησομένων αὐξήσεων ἐπὶ 100 περιπτώσεων εἶναι

$$A(\nu) = 0,5219 .\ 100 = 52,19$$

$$\text{καὶ } \sigma = \sqrt{100 .\ 0,5219 .\ 0,4781} = 4,99$$

ὅθεν ἡ πιθανότης σφάλματος μικροτέρου τοῦ

$$\xi = 60 - 52,19 = 7,81 \text{ εἶναι, διὰ } t = \frac{\xi}{\sigma} = 1,56$$

$$P(\xi) = 0,9406$$

δηλ. ἐπὶ 100 περιπτώσεων ὑφίσταται πιθανότης 94 κατὰ 6 ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρηθησομένων αὐξήσεων ἔσται μεταξὺ 44,38 τὸ ἐλάχιστον καὶ 60 τὸ μέγιστον κ.λ.π.