ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΕΠΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΩΣ

ΥΠΟ
Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

---

1. Εἰς πλεῖστα δημοσιεύματα ἰδόντα τὸ φῶς παρ' ἡμῖν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη καὶ ἀφορῶντα τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας γίνεται κατάχρησις τοῦ καλουμένου συντελεστοῦ συσχετίσεως (coefficient de correlation), ἐπὶ σκοπῷ τῆς διὰ τούτου ἐπιρρώσεως—ἀναλόγως τῆς ὑψηλῆς ἢ χαμηλῆς τιμῆς αὐτοῦ—τῆς ὡρισμένης ἀπόψεως, ἣν ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἀσπάζεται ἢ υἱοθετεῖ ὁ κάθε ἐρευνητής.

Διὰ τῆς τοιαύτης ὅμως παρερμηνείας τῆς ἀποστολῆς καὶ τῆς σημασίας τοῦ ρηθέντος συντελεστοῦ, καθίσταται ἢ μᾶλλον ἀποβαίνει οὗτος, τὸ μοναδικὸν κριτήριον τῆς ποσοτικῆς διαπιστώσεως τῆς τεθείσης ὑποθέσεως αἰτιότητος, κατόπιν οὗτινος, ὁ μὴ πειθόμενος εἰς τὸ ἔλλογον τῆς υἱοθετουμένης ὑποθέσεως, δὲν δικαιοῦται νὰ ἀπιστῇ, ἐφ' ὅσον ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως, ὡς χρησιμοποιεῖται, ἐμφανίζεται ἀπηχῶν πλέον τὸν ὑφιστάμενον ποσοτικὸν σύνδεσμον ἤτοι τὴν ἔντασιν ἐξαρτήσεως τῶν ὑπ' ὄψει φαινομένων.

Φυσικὰ εἰς τὴν Στατιστικὴν θεωρίαν ἀνατίθεται ἡ ἀποστολὴ νὰ παράσχῃ εἰς τὸν ἐρευνητὴν τὸ μέσον τῆς μεταβάσεως ἐκ τῶν κυβευτικῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς στοιχεῖα συνοψίζοντα τὸν νόμον τῆς ἐξαρτήσεως ἐκ τῶν προτέρων ἄγνωστον καὶ τοῦτο κατὰ τρόπον ἐπιτρέποντα εἰς τὸν ἐρευνητὴν νὰ ὠθήσῃ ἀπωτέρω τὰς ἐρεύνας αὐτοῦ. Οὐχ ἧττον ὅμως ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως δὲν δίδει, ὡς θεωρεῖται, τὸ μέτρον τοῦ ὑφισταμένου συνδέσμου τῆς αἰτίας πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα. Καθ' ὅσον, ἄν, πράγματι, ἡ τοιαύτη ἄποψις ἠλήθευεν, ὥστε διὰ τῶν ὑπ' ὄψει ἡμῶν ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων δύο φαινομένων ἐν τῷ διαστήματι ἢ ἐν τῷ χρόνῳ, νὰ ἦτο δυνατή, δι' ἑνὸς ἀριθμητικοῦ συντελεστοῦ καὶ οἱονεὶ μηχανικῶς, ἡ ἀνεύρεσις τῆς μεταξὺ τούτων ὑφισταμένης ἢ μὴ ἐξαρτήσεως, τὸ τοιοῦτον τότε θὰ ἀπετέλει τὴν μεγαλειτέραν κατάκτησιν τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, μεγαλειτέραν ἴσως καὶ αὐτῆς ταύτης τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Λεβεριέ, κατάκτησιν ἀνυπολογίστου σημασίας διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῶν νόμων οἵτινες διέπουσι τὰ διάφορα φαινόμενα, καθ' ὅσον τότε θὰ ἦτο εὐχερές, κάθε ὑπόθεσις αἰτιότητος νὰ δοκιμάζεται, οἱονεὶ πειραματικῶς, διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ συντελεστοῦ, ***τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως.***

Δυστυχῶς τὸ τοιοῦτον δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀληθές, καίτοι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ἔχει καταστῆ τὸ μᾶλλον πολύτιμον ὄργανον ἐρεύνης διά τινας πειραματικὰς ἐπιστήμας καὶ παρέχει, ἐπίσης, ἀνεκτιμήτους ὑπηρεσίας, εἰς τὴν καθόλου οἰκονομικὴν ἔρευναν, οὐχ ἧττον ὅμως ἀπέχει ἀκόμη πολὺ διὰ νὰ παράσχη κατηγορηματικὴν τὴν διαπίστωσιν τῆς ἐνυπαρχούσης ἢ μὴ αἰτιότητος μεταξὺ δύο ἢ πλείστων φαινομένων ἢ καὶ τῆς ὑφισταμένης ἢ μὴ ἐξαρτήσεως μεταξὺ αὐτῶν.

2. Οἱ πλεῖστοι τῶν Στατιστικῶν, Μαθηματικοὶ καὶ μή, ἀπὸ πολλοῦ ἐπέστησαν τὴν προσοχὴν τῶν ἐρευνητῶν ἐπὶ τῆς μετὰ μεγίστης συνέσεως χρησιμοποιήσεως τοῦ καλουμένου συντελεστοῦ συσχετίσεως καὶ τῶν ἐντεῦθεν συμπερασμάτων, ἅτε τούτου δυναμένου νὰ παρασύρῃ, ἰδίᾳ ὅταν εὑρίσκεται λίαν ὑψηλὴ ἢ ἀντιθέτως λίαν χαμηλὴ τιμὴ αὐτοῦ, εἰς πεπλανημένας καὶ ἀτόπους ἑρμηνείας ὡς ἐκ τῆς τεκμαιρομένης ἀλληλεξαρτήσεως τῶν δύο φαινομένων. Ὁ L. March (1) ἐτόνιζεν ὅτι «τὸ ἐξαγόμενον ἑνὸς ὑπολογισμοῦ δὲν δύναται νὰ μετρήσῃ τὴν πράγματι ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ δύο φαινομένων, ἅτινα ἀναπαρίστανται ποσοτικῶς διὰ σειρῶν. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, δυνατόν, ὄντως νὰ ἐμφανίσῃ σχέσιν, φαινομενικῶς, λίαν στενήν, ἐν ᾧ ἡ πραγματικὴ τοιαύτη εἶναι ἀνύπαρκτος ἢ καὶ φορᾶς ἀντιθέτου τῆς φαινομενικῆς τοιαύτης. Ἡ σχέσις, ἐξ ἄλλου, δύο σειρῶν δύναται νὰ ἑρμηνεύεται διαφοροτρόπως, διότι ἂν ἀναλύσωμεν τὴν κίνησιν τῶν ὅρων χρονολογικῆς τινος σειρᾶς, εἰς μεταβολὰς μακροχρονίους τὸ μέν, βραχυχρονίους τὸ δὲ ὑπ' ἔποψιν περιόδου, ἡ σχέσις δυνατὸν τότε νὰ ἔχῃ ἄλλην ἔννοιαν διὰ τὰς πρώτας καὶ ἄλλην διὰ τὰς δευτέρας».

Ἀλλαχοῦ ὁ αὐτὸς Στατιστικὸς γράφει «ἐν τούτοις ἐνδιαφέρει ὅπως μὴ χάνωμεν ἀπὸ τῆς ὄψεως ἡμῶν τὴν ἀρχικὴν ὑπόθεσιν καθ' ἣν ἡ ὁμοιότης τῶν μεταβολῶν τῶν δύο φαινομένων ἅτινα συγκρίνονται, διαπιστοῦται ἑνιαίως ὑπὸ τὴν μορφὴν σχέσεώς τινος γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς, ἥτις ἐπαληθεύεται διά τινα ἀριθμὸν παρατηρήσεων. Ἑπομένως ἐκ τοῦ γεγονότος τῆς ἐντελοῦς ὁμοιότητος, ὅπου ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ἰσοῦται τῇ μονάδι, δὲν προκύπτει, κατ' ἀνάγκην, τὸ πόρισμα ὅτι τὰ δύο φαινόμενα συνέχονται διὰ νόμου ἰσχύοντος δι' ὅλας τὰς δυνατὰς παρατηρήσεις τῆς αὐτῆς τάξεως.

Οὕτω, ἂν ἔν τινι χώρᾳ ἡ αὔξησις τοῦ διαπιστουμένου ἐθνικοῦ πλούτου, ἀνὰ δεκαετεῖς περιόδους, εἶναι παράλληλος τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ, δὲν συνάγεται ὅτι τὰ δύο ταῦτα φαινόμενα συνέχονται ἀδιασπάστως, ὥστε νὰ ἐξαρκῇ ἡ γνῶσις τοῦ πληθυσμοῦ κατά τι ἔτος, οἱονδήποτε, ἵνα πορισθῶμεν τὴν κίνησιν τοῦ πλούτου.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως εἶναι μηδέν, κατ' οὐδένα τρόπον συνάγεται ὅτι τὰ δύο συγκρινόμενα φαινόμενα εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.

---

1) L. March «De l'application des procédés Mathématiques a la comparaison des Statistiques» 1909. XVIII. B.I.I S.

Πράγματι, ἂν ὑπολογίσωμεν τὸν συντελεστὴν συσχετίσεως μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν μετακινήσεων ἀτμαμάξης τινος καὶ τῶν θέσεων τοῦ ἐμβόλου, εὑρίσκομεν συντελεστὴν συσχετίσεως μηδέν, ἂν καὶ ἡ ἀλληλεξάρτησις τῶν δύο τούτων κινήσεων εἶναι ἀπόλυτος σχεδόν.

Τὸ ὄργανον τῆς συγκρίσεως — ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως — εἶναι ἐλαττωματικόν, ἀλλὰ πρὸς τὸ παρὸν δὲν διαθέτομεν ἕτερον πρὸς καθοδήγησιν καὶ κατεύθυνσιν τοῦ δεξιοῦ παρατηρητοῦ τῶν γεγονότων, ἅτινα δὲν δύνανται νὰ ἐρευνηθῶσιν διὰ μεθόδων ἀπομονώσεως(1).

3. Ὁ πολὺς Κ. Pearson, ὁ συστηματοποιήσας καὶ διαμορφώσας τὴν θεωρίαν τῆς συσχετίσεως παρατηρεῖ ὅτι «φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως φυσικὸν ὅπως δύο φαινόμενα, ἐξαρτώμενα ἀμφότερα ἐκ τοῦ χρόνου, ἐξαρτῶνται ἀναγκαίως τὸ μὲν τοῦ δέ, δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῆς μεταβλητῆς χρόνος. Ἀλλὰ βαθύτερον σκεπτόμενοι, βλέπομεν ὅτι τὰ δύο φαινόμενα ἅτινα ἐν τῷ χρόνῳ ἐκδηλοῦνται δὲν εἶναι συναρτήσεις κατὰ τὴν φυσικὴν σημασίαν, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ φυσικοῦ νόμου. Καταλήγομεν εἰς πάσας τὰς μεμονωμένας παρατηρήσεις ὅτι ἡ ἐμπειρικὴ ἀναπαράστασις εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, ἀλλὰ δὲν θὰ καταστῇ ἐφικτὸν ἐκ τούτου νὰ γνωρίσωμεν τὴν χρονολογίαν προβλέψεως τοῦ φαινομένου (2).

Ὁ G. Darmois, προσθέτει εἰς τὰς ἄνω ἀπόψεις τοῦ Pearson ὅτι «δύο οἱαδήποτε φαινόμενα, δύο ἱστορικὰ ἀναπτύγματα π.χ. ἅτινα ἐκδηλοῦνται ἐν τῷ χρόνῳ, πλειστάκις θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα, καίπερ ἡ παρατήρησις, ἥτις θὰ ἔχῃ γίνει, θὰ ἐμφανίζῃ ἀμφότερα ὡς συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Ἐν συνόψει, ἀφορμώμεθα ἐκ θεωρητικῶν σκέψεων, μᾶλλον ἢ ἧττον ἀπηκριβωμένων, ἀπόψεων τινων ἐπὶ τῶν δύο φαινομένων. Αἱ ἀπόψεις αὗται ἄγουσι νὰ πιστεύσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς εἰς συναρτησιακὴν σχέσιν, ἥτις θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἡ ἀναλογικότης. Ὑπολογίζομεν τὸν συντελεστὴν ρ. Ἐὰν εἶναι ἐγγὺς τῆς 1, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἐνθαρρυντικὸν καὶ ὀφείλομεν διὰ βαθυτέρας θεωρίας νὰ δοκιμάσωμεν νὰ ἀντιληφθῶμεν τοὺς λόγους μιᾶς τοιαύτης προσεγγιζούσης ἀναλογικότητος. Ἄλλως, πρέπει νὰ ἀναθεωρήσωμεν τὰς ἀπόψεις ἡμῶν. Τί πρέπει ὅμως νὰ σκεφθῶμεν ἐάν, ἐν παντελῇ ἐλλείψει λογικῶν ἀπόψεων ἐπὶ τοῦ συνδέσμου δύο φαινομένων, εὕρωμεν διὰ τοῦ τυπικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ρ, τιμήν τινα τούτου ἐγγύτατα τοῦ 1; Θὰ συμπεράνωμεν ἐκ τούτου ὅτι ἀπεδείξαμεν φυσικόν τινα νόμον, τὸν νόμον τῆς ἀναλογικότητος τῶν δύο φαινομένων x καὶ y; Τοιαύτη ἄποψις θὰ ἦτο παράλογος. Πρέπει τοῦτο νὰ λεχθῇ ἐντόνως, ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω περίπτωσις ἀπαντᾷ συχνάκις.

Ἐὰν ἡ αὔξησις τῶν δύο φαινομένων δύναται νὰ ἀναπαρασταθῇ ἐν

---

1) L. March «Revue de Metaphysique et de Morale», σελ. 170 καὶ ἐφ᾽ ἑξῆς.
2) K. Pearson and E. Elderton: Biometrika 14,281.

τῇ παρατηρηθείσῃ περιόδῳ, διὰ καμπύλης τεταμένης, αἰσθητῶς εὐθυγράμμου, εἶναι προφανές, κατὰ τὴν σημασίαν τοῦ ϱ, ὅτι αἱ δύο χρονολογικαὶ γραμμικαὶ συναρτήσεις ἐπειδὴ εὕρηνται εἰς γραμμικὴν σχέσιν, θὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ ϱ λίαν ἐγγὺς τοῦ 1. Θὰ εἶναι αὕτη ἐγγύτατα τοῦ—1, ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν φαινομένων ὑφίσταται μέσην τινὰ αὔξησιν, ἐνῷ τὸ ἕτερον μέσην τινὰ μείωσιν, αἱ ὁποῖαι, ἀμφότεραι, θὰ εἶναι εὐθύγραμμοι (1).

4. Ὁ γνωστὸς οἰκονομολόγος στατιστικὸς A. Aftalion ἀφιεροῖ ἐπίτηδες κεφάλαιον ἐπὶ τῆς σημασίας τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως καὶ τῶν ληπτέων ἀναγκαιουσῶν ἐπιφυλάξεων κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτοῦ συνιστῶν, κατ' ἀρχήν, εἰς τοὺς ἐρευνητὰς ὅπως μὴ παραβλέπωσιν ὅτι ἡ ὕπαρξις συσχετίσεως μεταξὺ δὺο φαινομένων δὲν συνεπάγεται μοιραίως καὶ τὴν ὕπαρξιν μεταξὺ αὐτῶν σχέσεως αἰτιότητος καθὼς καὶ ἡ ἀνυπαρξία συσχετίτίσεως δὲν ἐμφαίνει τὴν ἔλλειψιν οἱασδήποτε μεταξὺ αὐτῶν ἐξαρτήσεως (2).

Ὁ μνημονευθεὶς L. March ἀλλαχοῦ ἐπαναλαμβάνει ὅτι· ἐὰν δύο φαινόμενα ἐμφανίζωνται στενῶς συνεχόμενα πρὸς ἄλληλα, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι τὸ ἕτερον αὐτῶν εἶναι ἡ αἰτία τοῦ ἄλλου. Συχνάκις ὁ σύνδεσμος οὗτος εἶναι ἔμμεσος, ἀμφοτέρων τῶν φαινομένων ἐξαρτωμένων ἐκ τῶν αὐτῶν αἰτιῶν. Μόνον ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει δέον νὰ διαστείλωμεν τὰς γενικὰς αἰτίας, αἵτινες στεροῦνται ἐνδιαφέροντος καθ' ὅσον οὐδὲν νεώτερον προσθέτουσι, τῶν εἰδικῶν αἰτιῶν ἃς ἐνδιαφέρει νὰ ἀποκαλύψωμεν. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως δὲν ἐπιτρέπει τοιαύτην διάκρισιν. Ἐξαντλητικὴ ἀνάλυσις τῶν γεγονότων, τῶν σχέσεων αὐτῶν μετὰ σχέσεων ἤδη γνωστῶν εἶναι ἀπαραίτητος. Πλειστάκις ὁ λογισμὸς θὰ θέσῃ πρὸ ἡμῶν ἐμμέσους σχέσεις ἃς ἡ μεταγενεστέρα ἀνάλυσις θὰ ἐπιτρέψῃ νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ἀμέσους σχέσεις (3).

6. Ἡ τοιαύτη παρανόησις ἐπὶ τῆς σημασίας τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως προέρχεται κυρίως ὡς ἐκ τῆς μὴ διακρίσεως τῶν δύο ἐννοιῶν : Συναρτησιακὴ Σχέσις καὶ Συσχέτισις, καθ' ὅτι ἡ μὲν πρώτη συνεπάγεται ἀπόλυτον ντετερμινισμὸν ἀπορρέοντα ἐκ τοῦ μαθηματικοῦ τύπου, ἡ δὲ δευτέρα ὑποθέτει ἄμεσον ἢ ἔμμεσον σύνδεσμον, μᾶλλον ἢ ἧττον ἐλαστικόν, μεταξὺ δύο ἢ πλειόνων μεταβλητῶν. Ἡ πρώτη οὐδὲν μέτρον ἐπικαλεῖται, ἡ δευτέρα ἔχει ἔννοιαν, ἐφ' ὅσον εἶναι ἐφικτὸν νὰ ἀποδόσωμεν εἰς τὸν σύνδεσμον βαθμόν τινα, μέτρον τι ἐπιτρέπον τὴν σύγκρισιν πλειόνων σχέσεων. Φυσικὸν εἶναι ὅτι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως οὐδὲν προσθέτει εἰς τὴν προσωπικὴν ἐντύπωσιν, οὐχ ἧττον ὅμως ἐπακριβώνων τὸν ὑφιστάμενον σύνδεσμον, καθιστᾷ τοῦτον ἀνεξάρτητον τοῦ ἐρευνητοῦ. Εἶναι ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως ὅτι ἡ ἔννοια τῆς συσχετίσεως ἀπορρέει ἐκ τῆς αὐτῆς πηγῆς ἐξ ἧς καὶ ἡ αἰτιότης. Ἡ τελευταία γεννᾶται ἐκ

1) G. Darmois : Statistique Mathématique σελίς 268 καὶ ἐφεξῆς.
2) A. Aftalion, Cours de Statistique σελ. 182 καὶ ἐφεξῆς.
3) L. March, Les Principes de la Méthode de Statistique σ. 589, 605.

τῆς ἐλλόγου παρατηρήσεως τῶν ποσοτικῶν μεταβολῶν αἵτινες ἐμφανίζουσι τελείαν σταθερότητα ἢ μᾶλλον εὐστάθειαν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ φορὰ αὐτῶν ὡς καὶ τὸ ἐνδιαφέρον τούτων καὶ ἐκδηλοῦσι αὐστηρὰν ἀλληλουχίαν. Ἡ ἔννοια τῆς συσχετίσεως ἐπίσης, ἀπορρέει ἐκ τῶν ποσοτικῶν μεταβολῶν, ἀλλὰ αὗται δὲν εἶναι σταθεραὶ καὶ δυνάμεθα γενικῶς νὰ ὑποθέσωμεν ὡς ἐμμέσως ὑφισταμένην τὴν ἀλληλουχίαν. Εἶναι δυνατὸν νὰ μετρήσωμεν τὴν συμμεταβολὴν τῶν μεταβολῶν τούτων, τοῦθ' ὅπερ καταλήγει εἰς τὴν μέτρησιν τῆς ὁμοιότητος τῶν καμπύλων αἵτινες ἀναπαριστῶσι τὰς μεταβολὰς ταύτας. Ἡ ὁμοιότης ὅμως αὕτη οὐδὲν δύναται νὰ πληροφορήσῃ ὅσον ἀφορᾷ τὸν αἰτιώδη σύνδεσμον. Ἐμφαίνει ἁπλῶς ὅτι σύνδεσμός τις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἀναπαριστωμένων φαινομένων, εἴτε τὸ ἕτερον τούτων εἶναι ἡ αἰτία τῶν ἄλλων, εἴτε ἀμφότερα ὑπείκουσιν εἰς τὴν ἐπίδρασιν κοινῶν αἰτιῶν. Ἀκριβέστερον ὅμως, ἡ μέτρησις τοῦ συνδέσμου τούτου εἶναι ἀνέφικτος. Διὰ τοῦτο κρίνεται ἐπάναγκες ὅπως συνδέεται πρὸς τὸ μέτρον τῆς συμμεταβολῆς ἡ ἀνάλυσις τῶν περιστάσεων αἵτινες εἶναι δυνατὸν νὰ δικαιολογῶσι ταύτην. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη θὰ δεικνύῃ ταὐτοχρόνως, ἐφ' ὅσον εἶναι πειστική ἐὰν ὁ σύνδεσμος εἶναι ἀμέσως αἰτιώδης, ἐὰν ἡ αἰτιότης εἶναι ἔμμεσος, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐὰν εἶναι σημαντικὴ ἢ ὄχι.

6. Διὰ νὰ καταδείξωμεν τὸ ἐπικίνδυνον, τῆς, ἄνευ ἐπιφυλάξεως, χρησιμοποιήσεως τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ὡς μέτρου τῆς ὑφισταμένης ἐξαρτήσεως αἰτιότητος μεταξὺ δύο φαινομένων θὰ δείξωμεν ὅτι οὗτος οὐδὲν ἕτερον μετρεῖ ἐκτὸς τῆς μεταξὺ τούτων ὑφισταμένης γραμμικότητος.

Πράγματι, ἔστωσαν δύο μεταβλητὰ Χ καὶ Ψ καὶ μεταξὺ τούτων ὑφιστάμεναι αἱ σχέσεις:

$$\Psi = \alpha\, X + \beta \qquad \text{καὶ } X = \lambda\, \Psi + \mu$$

δηλοῦσαι, ἡ μὲν πρώτη ὅτι τὸ Ψ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ Χ, ἡ δὲ δευτέρα ὅτι τὸ Χ εἶναι συνάρτησις τοῦ Ψ, χωρὶς ἡ ἐκ τῆς δευτέρας προκύπτουσα ἐξίσωσις δι' ἐπιλύσεως πρὸς Ψ νὰ εἶναι ἀπολύτως ὁμοία πρὸς τὴν πρώτην, καθ' ὅσον $\frac{1}{\lambda} \neq \alpha$.

Συναρτήσει τῶν τιμῶν Χ καὶ Ψ καὶ ἐπὶ βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων προσδιορίζομεν τὰς παραμέτρους α καὶ β ἀφ' ἑνός, λ καὶ μ ἀφ' ἑτέρου, ὡς κάτωθι.

$$\alpha = \frac{\nu\, \Sigma X\Psi - \Sigma\Psi\, \Sigma X}{\nu\, \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}, \qquad \beta = \frac{\Sigma X^2\, \Sigma\Psi - \Sigma X\, \Sigma X\Psi}{\nu\, \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$\lambda = \frac{\nu\, \Sigma X\Psi - \Sigma\Psi\, \Sigma X}{\nu\, \Sigma\Psi^2 - (\Sigma\Psi)^2}, \qquad \mu = \frac{\Sigma\Psi^2\, \Sigma X - \Sigma X\, \Sigma X\Psi}{\nu\, \Sigma\Psi^2 - (\Sigma\Psi)^2}$$

Καθ' ὁρισμὸν ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ρ θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\alpha^2 = \alpha\,\lambda$ ἢ

$$\varrho = \frac{\nu\, \Sigma X\Psi - \Sigma\Psi\, \Sigma X}{\sqrt{\nu\, \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\, \sqrt{\nu\, \Sigma\Psi^2 - (\Sigma\Psi)^2}}$$

ἀλλὰ $\bar{x}=\frac{\Sigma X}{\nu}$, $\bar{y}=\frac{\Sigma \Psi}{\nu}$, οἱ μέσοι τῶν μεταβλητῶν Χ καὶ Ψ, ἐνῷ οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ β' μέλους εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν δευτέρων ῥοπῶν τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν ὡς πρὸς τὸ μέσον ἀριθμητικὸν ἑκάστης ἐξ αὐτῶν, δηλ. τὰ μέσα σφάλματα τετραγώνου αὐτῶν, καὶ ἑπομένως, ὁ ἄνω τύπος γράφεται :

$$\varrho=\frac{\frac{\Sigma X\Psi}{\nu}-\frac{\Sigma\Psi}{\nu}\frac{\Sigma X}{\nu}}{\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{\nu}-\left(\frac{\Sigma X}{\nu}\right)^2}\sqrt{\frac{\Sigma\Psi^2}{\nu}-\left(\frac{\Sigma\Psi}{\nu}\right)^2}}=\frac{\Sigma X\Psi-\nu\,\bar{x}\,\bar{y}}{\nu\,\sigma_1\,\sigma_2}$$

ἀλλὰ ἂν τεθῇ $x=X-\bar{x}$ καὶ $y=\Psi-\bar{y}$, τὰ x καὶ y θὰ παριστῶσιν τὰς ἀπὸ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἀποκλίσεις (διαφορὰς) τῶν Χ καὶ Ψ ἀντιστοίχως, ἑπομένως

$$X=x+\bar{x},\quad \Psi=y+\bar{y}\ \text{καὶ ἄρα}$$

$$\Sigma X\Psi=\Sigma\,(x+\bar{x})\,(y=\bar{y})=\Sigma xy+\bar{x}\,\Sigma y+\bar{y}\,\Sigma x+\nu\bar{x}\,\bar{y}$$

ἀλλὰ $\Sigma x=o$, $\Sigma y=o$, ὡς ἐκ τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀποκλίσεων τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ, ἑπομένως

$$\Sigma X\Psi-\nu\bar{x}\,\bar{y}=\Sigma xy$$

καὶ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως θὰ δίδεται ὑπὸ

$$\varrho=\frac{\Sigma\,x\,y}{\nu\,\sigma_1\,\sigma_2}=\frac{\Theta}{\sigma_1\,\sigma_2},\quad \Theta=\frac{\Sigma\,x\,y}{\nu}$$

7. Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἄνω οἱ γωνιώδεις συντελεσταὶ α καὶ λ ὡς καὶ αἱ τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν β καὶ μ, δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν συναρτήσει τοῦ ϱ καὶ σ_1, σ_2 (ὅπου σ_1, σ_2, ὡς προελέχθη, τὰ μέσα σφάλματα τετραγώνου τῶν Χ καὶ Ψ). Πράγματι, λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν ἄνω σχέσεων εὑρίσκομεν

$$\alpha=\frac{\nu\,\Sigma\,x\,y+\nu^2\,\bar{x}\,\bar{y}-\Sigma X\,\Sigma\Psi}{\nu\,\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}=\frac{\frac{\Sigma xy}{\nu}+\bar{x}\,\bar{y}-\bar{x}\,\bar{y}}{\frac{\Sigma X^2}{\nu}-\bar{x}^2}=\frac{\Sigma\,x\,y}{\nu\,\sigma_1^2}$$

ἐπίσης, $\lambda=\frac{\Sigma xy}{\nu\,\sigma_2^2}$

ἔτι δὲ $\beta=\bar{y}-\bar{x}\,\varrho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, $\mu=\bar{x}-\bar{y}\,\varrho\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

ἀλλὰ $\varrho\,\sigma_1\,\sigma_2=\frac{\Sigma xy}{\nu}$, ὅθεν $\alpha=\varrho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, $\lambda=\varrho\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

ἑπομένως αἱ δύο ἐξισώσεις $\Psi = \alpha X + \beta$ καὶ $X = \lambda \Psi + \mu$ γράφονται

$$\Psi = \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X + \bar{y} - \bar{x}\, \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \bar{y} + \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \bar{x})$$

καὶ $$X = \varrho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \Psi + \bar{x} - \bar{y}\, \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \bar{x} + \varrho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\Psi - \bar{y})$$

ἂν δὲ τεθῶσιν $\beta_1 = \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, $\beta_2 = \varrho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, τότε γράφονται

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \bar{y} + \beta_1 (X - \bar{x}) \\ X &= \bar{x} + \beta_2 (\Psi - \bar{y}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

τῶν β_1, β_2 καλουμένων συντελεστῶν παλινδρομήσεως, τῶν δὲ ἐξισώσεων (1), ἐξισώσεων παλινδρομήσεως.

Οἱ β_1, β_2 συνδέονται μετὰ τοῦ ϱ διὰ τῆς σχέσεως $\varrho^2 = \beta_1 \beta_2$.

Ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων (1) παριστᾷ στοιχεῖον τι, οἱονδήποτε τῆς ἀντιστοίχου σειρᾶς συναρτήσει τοῦ ἀντιστοιχοῦντος στοιχείου τῆς ἄλλης καὶ πάντων τῶν στοιχείων ἀμφοτέρων τῶν σειρῶν, εἶναι δὲ γραμμαὶ μέσαι, διερχόμεναι ὡς ἐκ τούτου ἐκ τοῦ κέντρου βαρύτητος τῶν X καὶ Ψ, τοῦ Γ $(\bar{x}, \bar{y})$ καὶ πράγματι, ἐπειδὴ εἶναι μέσαι, πάντα τὰ σημεῖα (τὰ ἐκ παρατηρήσεως δηλ.) δὲν θὰ εὑρίσκωνται ἐπ' αὐτῶν. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν σημείων, π. χ. τῆς πρώτης εὐθείας, παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ y, εἶναι

$\Sigma\, [(\Psi - \bar{y}) - \beta_1 (X - \bar{x})]^2 = \Sigma y^2 - 2\beta_1 \Sigma xy + \beta_1^2 \Sigma x^2 = \nu s_2^2$, ἐπειδὴ $\Psi - \bar{y} = y$ καὶ $X - \bar{x} = x$, ὅπου, νs_2^2 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὡς εἴρηται ἀποκλίσεων. Κατ' ἀκολουθίαν, ἐπειδὴ s_2 θὰ παριστᾷ τὴν ὁλικὴν ἀπόκλισιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τῆς ἀληθοῦς σχέσεως τῶν Ψ καὶ X καὶ τῆς γενομένης δεκτῆς γραμμικῆς, ἐξ ὑποθέσεως, ὡς ἀληθοῦς τοιαύτης, διὰ τοῦτο εἰδικώτερον θά καλεῖται συντελεστὴς ἀποπλανήσεως. Ἑπομένως

$$s^2 = \frac{\Sigma y^2}{\nu} - \beta_1 \frac{\Sigma xy}{\nu} + \beta_1{}^2 \frac{\Sigma x^2}{\nu} = \sigma_2{}^2 - 2\beta_1 \varrho \sigma_1 \sigma_2 + \beta^2 \sigma_1{}^2$$

τὸ ἐλάχιστον τοῦ β′ μέλους ὑφίσταται διὰ $\beta_1 = \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ δηλ. διὰ τὸν γωνιώδη συντελεστὴν α τῆς εὐθείας, ὅτε διὰ $\beta_1 = \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ τὸ β′ μέλος γίνεται

$\sigma_2{}^2 - 2\varrho^2 \sigma_2{}^2 + \varrho^2 \sigma_2{}^2 = \sigma_2{}^2 (1 - \varrho^2)$ ἤτοι:

$$s_2 = \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2}$$

Τὸ s_2 ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ταὐτοχρόνως μετὰ τοῦ ὅρ. $(1 - \varrho^2) = 0$ ἤτοι διὰ $\varrho = 1$, ἑπομένως αἱ τιμαὶ ἃς δύναται νὰ λάβῃ τὸ ϱ δίδονται ὑπὸ $-1 \leq \varrho \leq +\varrho$.

Ἐφ᾿ ὅσον ὅθεν $|\varrho|$ τείνει πρὸς 1, ἐπὶ τοσοῦτον τεκμαίρεται ὅτι ὑφίσταται γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ Ψ καὶ Χ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποπλανήσεως τῶν Χ πρὸς Ψ εἶναι $s_1 = \sigma_1 \sqrt{1-\varrho^2}$

9. Αἱ ἐξισώσεις $\Psi = \bar{y} + \beta_1 (X - \bar{x})$ καὶ $X = \bar{x} + \beta_2 (\Psi - \bar{y})$ γράφονται καὶ $\frac{\Psi - \bar{y}}{\sigma_2} = \varrho \frac{X - \bar{x}}{\sigma_1}$ καὶ $\frac{X - \bar{x}}{\sigma_1} = \varrho \frac{\Psi - \bar{y}}{\sigma_2}$ (2)

ἀντικαθισταμένων τῶν β_1 καὶ β_2 ὑπὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς.

Αἱ ἄνω ἐξισώσεις (2) γράφονται καὶ

$$\mathcal{M} = \varrho \mathcal{X} \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{X} = \mathcal{M} \varrho \qquad (3)$$

τεθέντος $\frac{\Psi - \bar{y}}{\sigma_2} = \mathcal{M}$ καὶ $\frac{X - \bar{x}}{\sigma_1} = \mathcal{X}$

Διὰ $\varrho = 0$ αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστῶσι ἀντιστοίχως τοὺς ἄξονας $\mathcal{M} = 0$, τὸν ἄξονα τῶν x καὶ $\mathcal{X} = 0$, τὸν ἄξονα τῶν y, εἶναι δὲ αἱ ἐξισώσεις παλινδρομήσεως κάθετοι ἐπ᾿ ἀλλήλας.

Διὰ $|\varrho| = 1$, αἱ ἐξισώσεις (3) συμπίπτουσι πρὸς τὰς διχοτόμους τῆς πρώτης καὶ τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων. (πρώτη γωνία $\varrho = +1$, τρίτη γωνία $\varrho = -1$) καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις (3) ὡς πρὸς $\mathcal{M}$ ἔχουσι γωνιώδεις συντελεστὰς ἀντιστρόφους, αἱ ἐξισώσεις αὗται, κατὰ τὴν περίπτωσιν $|\varrho| = 1$, εἶναι συναρτησιακαὶ ἐξισώσεις, καθ᾿ ὅσον καὶ μονότιμοι καὶ ἀνατρέψιμοι εἶναι, διότι παρέχουσι τὴν τιμὴν $\mathcal{M}$ ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ $\mathcal{X}$ καὶ ἀντιστρόφως.

10. Ἐὰν ἐπανέλθωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις $\Psi = \alpha X + \beta$ καὶ $X = \lambda \Psi + \mu$ ἐπειδὴ τὸ μὲν α παριστᾷ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ πρώτη εὐθεῖα μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ δὲ λ παριστᾷ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ δευτέρα εὐθεία μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν y, τῶν ἀξόνων ὑποτιθεμένων ἀρχῆθεν ὀρθογωνίων θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \text{ἐφ}\omega \quad \text{καὶ} \quad \lambda = \text{ἐφ.}\ \varphi.$$

Ἀλλ᾿ ἡ γωνία ἣν σχηματίζει μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν x ἡ δευτέρα εὐθεία εἶναι $\varphi' = \frac{\Pi}{2} - \varphi$. Ἑπομένως ἡ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, σχηματιζομένη γωνία $V = \frac{\Pi}{2} - (\varphi + \omega)$

$$\text{καὶ ἄρα ἐφ } V = \text{ἐφ}\left[\frac{\Pi}{2} - (\varphi + \omega)\right] = \frac{\text{σφ.φ σφω} - 1}{\text{σφ. φ.} + \text{σφ,ω}}$$

$$\text{ἀλλὰ σφ} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{σφω} = \frac{1}{\alpha}, \text{ ὅθεν}$$

$$\text{ἐφ } V = \frac{1 - \alpha\lambda}{\alpha + \lambda}$$

Διὰ $V=90^o$, ἐφ $V=\infty$, ὅθεν $\alpha = -\lambda$ ἢ $\varrho\,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)=0$

ἥτις ἐπαληθεύεται διὰ $\varrho=0$

Διὰ $V=0^o$, ἐφ $V=0$ ἤτοι $1=\alpha\lambda=\varrho^2$, καὶ $\varrho=+1$

Διὰ $V=180^o$, ἐφ $V=0$ ἤτοι $1=\alpha\lambda=\varrho^2$ καὶ $\varrho=-1$

Διὰ $V=0^o$ αἱ δύο γραμμαὶ παλινδρομήσεως ταὐτίζονται

Διὰ $V=180^o$, αἱ δύο γραμμαὶ παλινδρομήσεως ἀποτελοῦσι προέκτασιν ἡ μία τῆς ἄλλης.

Διὰ $V=90^o$, αἱ δύο γραμμαὶ παλινδρομήσεως εἶναι κάθετοι ἀπ' ἀλλήλας.

Ἑπομένως ἡ μεγίστη τιμὴ ἣν δύναται νὰ λάβῃ ὁ ϱ εἶναι $|\varrho|=1$.

11. Διὰ τῶν συντελεστῶν ἀποπλανήσεως s_1, s_2 καὶ ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ ϱ, φαίνεται ἂν αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν X καὶ Ψ, Ψ καὶ X εἶναι γραμμικαὶ ἢ ὄχι καὶ μόνον τοῦτο, καθ' ὅσον δυνατὸν αἱ γραμμαὶ παλινδρομήσεως νὰ εἶναι μορφῆς παραβολικῆς ἢ ἄλλης τινος, ἐπειδὴ δὲ

$$\varrho = \frac{\Sigma\, x\, y}{\nu\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{\Sigma\, x\, y}{\sqrt{\Sigma x^2}\,\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{\Sigma(x+y)^2 - \Sigma(x-y)^2}{4\sqrt{\Sigma x^2}\,\sqrt{\Sigma y^2}}$$

Διὰ $x=y$, $\varrho=+1$, ἤτοι αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστου μεταβλητοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου του εἶναι ἴσαι καὶ ὁμόσημοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ ἄλλου.

Διὰ $x=-y$, $\varrho=-1$, ἤτοι αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστου μεταβλητοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου του εἶναι ἴσαι καὶ ἑτερόσημοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ ἄλλου.

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ὑφίσταται ἄμεσος συμμεταβολὴ τῶν δύο μεταβλητῶν, κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔμμεσος συμμεταβολή, χωρὶς διὰ τοῦτο οὐδὲν νὰ τεκμαίρεται ὅτι τὸ ἕτερον τῶν μεταβλητῶν εἶναι ἀπότοκον τῶν μεταβολῶν τοῦ ἄλλου ἢ ἀμφότερα ὑπείκουσι εἰς κοινὰς αἰτίας· ἁπλῶς καὶ μόνον διαπιστοῦται ἂν ἡ υἱοθετηθεῖσα σχέσις ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν εἶναι γραμμικὴ ἢ ὄχι καὶ τὸ τελευταῖον κυρίως διὰ τῶν συντελεστῶν ἀποπλανήσεως.

Ἑπομένως ἡ τιμὴ μηδὲν τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως δὲν ἀποδεικνύει οὔτε τὴν ἀνεξαρτησίαν τῶν θεωρηθέντων μεταβλητῶν X καὶ Ψ (φαινομένων) οὔτε, ἐπίσης, τὴν μὴ συσχέτισιν τοῦ Ψ πρὸς X, ἐὰν ἡ παλινδρόμησις δὲν εἶναι γραμμική.

Κατ' ἀκολουθίαν, πάντοτε, ἐφ' ὅσον δὲν καθίσταται δυνατή, ἡ ἀπόδειξις ἢ ἐπαλήθευσις τῆς ὑφισταμένης γραμμικότητος τῶν μεταβλητῶν, ἡ χρῆσις τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως δέον νὰ ἀποφεύγηται, καίτοι οὗτος κέκτηται τῆς ἰδιότητος νὰ παρέχῃ χονδρικῶς, κατὰ προσέγγισιν μᾶλλον ἢ ἧττον ἀκριβῆ, τὴν εἰκόνα τῆς γενικῆς τροχιᾶς τῆς κλιτύος τῆς γραμμῆς παλινδρομήσεως. Ἀποτελεῖ ἁπλῆν πληροφορίαν ὡς πρὸς τὴν ἀληθῆ μέσην γραμμήν, οὐχ ἧττον ὅμως πολύτιμον ὡς ἐκ τῆς ἁπλότητος τῆς μεθόδου ὑπολογισμοῦ τῆς ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν. Ἐὰν αἱ δύο παλινδρομήσεις, γραμμικαὶ οὖσαι, παρίστανται ὅμως ὑπὸ εὐθειῶν διακε κριμένων, δυνάμεθα εὐκόλως καὶ ἀκριβῶς νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐξάρτησιν, καθ' ὅσον $\varrho^2 = \alpha\lambda$.

Ἐὰν $\varrho = o$, διαπιστοῦται ἡ μὴ συσχέτισις τῶν δύο ὑπ' ὄψει μεταβλητῶν.

Ἐὰν αἱ δύο παλινδρομήσεις δὲν εἶναι γραμμικαί, ὁ λογισμὸς τοῦ ρ ἐπιτρέπει τὴν κατασκευὴν τῶν δύο ἐξομαλυνθεισῶν εὐθειῶν, διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἰς γραμμὰς παλινδρομήσεως, ἀλλὰ τότε ἡ τιμὴ τοῦ ρ δὲν ἐπιτρέπει τὴν συναγωγὴν θετικῶν συμπερασμάτων, καθ' ὅσον ὑποτιμᾷ πάντοτε τὴν ἔντασιν τοῦ συνδέσμου, τοῦ τοιούτου ἐξαρτωμένου ἐκ τῆς μορφῆς τῶν γραμμῶν παλινδρομήσεως.

Ἐὰν νῦν ὑφίσταται συναρτησιακὸς σύνδεσμος αἱ δύο γραμμαὶ παλινδρομήσεως δέον νὰ ταὐτίζωνται εἰς μίαν, κατὰ τὰ πρόσθεν λεχθέντα.

12. Διὰ πάντα ταῦτα, ὀρθῶς, ὁ M. Frechet (1) τονίζει ὅτι ὑπάρχουσι νεκροὶ τοὺς ὁποίους πρέπει τις πλειστάκις νὰ φονεύσῃ: τοιοῦτος εἶναι ὁ ἐπικαλούμεννος συντελεστὴς συσχετίσεως.

Δὲν εἶναι πλέον δυνατόν, συνεχίζει, νὰ ἀφίνωνται νὰ παρέρχωνται ἀπαρατήρητα παρόμοια σφάλματα, χωρὶς νὰ τίθεται ἐν κινδύνῳ ἡ ἐκτίμησις ἣν δέον νὰ παρέχωσι τὰ συμπεράσματα τῶν Στατιστικῶν καὶ ἐπειδὴ εἶναι σφάλμα νὰ βεβαιοῦται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως δίδει τὸ μέτρον τῆς ἀμοιβαίας ἐξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν, καθ' ὅσον δυνατὸν νὰ εἶναι ἐλαχίστη ἢ μηδὲν καὶ ὅταν ὑφίσταται πράγματι ἐξάρτησις, διὰ τοῦτο πρέπει ὁ ὅρος συντελεστὴς συσχετίσεως νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ὅρου σ υ ν τ ε λ ε σ τ ὴ ς γ ρ α μ μ ι κ ό τ η τ ο ς

Συμπέρασμα: Ὁ συντελεστὴς ὅθεν ρ ἐπιτρέπει τὴν ἐκτίμησιν τῆς ὑφισταμένης σχέσεως εὐθυγραμμικότητος μεταξὺ x καὶ y. ὁμοίως τὸ $\sqrt{1-\varrho^2}$ τὴν διαπίστωσιν τοῦ ὁλικοῦ σφάλματος μεταξὺ τῆς ἀληθοῦς σχέσεως καὶ τῆς ἐξ ὑποθέσεως ὡς ἀληθοῦς ληφθείσης εὐθυγραμμικῆς τοιαύτης τῶν δύο μεταβλητῶν.

---

1) Διεθνὲς Συνέδριον Στατιστικῆς 1934 ἐν Λονδίνῳ