# ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $f(u, t+1)$ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΗΛΙΚΩΝ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

ΥΠΟ Π. Ι. ΣΤΕΡΙΩΤΗ, ΥΦΗΓΗΤΟΥ

***Εἰσαγωγή.*** Ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ποσοτικῆς μεταβολῆς ὁμάδος τινός, ἧς τὰ συνιστῶντα ταύτην ἄτομα δύνανται ν' ἀπαλειφθῶσιν ἐκ ταύτης δι' αἰτίαν τινὰ (κίνδυνον), μεγίστην σημασίαν ἔχουσι τὰ *πηλίκα ἀπαλοιφῆς*, ἤτοι ἡ *πιθανότης ἀπαλοιφῆς* καὶ τὸ *ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς*.

Τὰς διαφόρους ὁμάδας διακρίνουσιν εἰς *κλειστάς*, ὅταν εἰς ταύτας δὲν εἰσέρχονται νέα ἄτομα ἀλλ' οὔτε καὶ ἐξέρχονται δι' αἰτίαν διάφορον ἐκείνης ἣν ἐξ ἀρχῆς θεωροῦσιν (π.χ. θάνατον, γῆρας, ἀνικανότητα κτλ.), καὶ εἰς *ἀνοικτὰς* (μὴ κλειστάς). Δι' ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν πηλίκων ἀπαλοιφῆς, συναντῶμεν δυσχερείας λόγῳ τοῦ ὅτι παραμένει ἄγνωστος ἡ συχνότης ἀπαλοιφῆς ἐκ τῆς ὁμάδος δι' ὡρισμένην αἰτίαν κατὰ τὰς διαδοχικὰς χρονικὰς στιγμάς, ἡ πορεία τῶν εἰσελθόντων καὶ ἐξελθόντων τῆς ὁμάδος δι' αἰτίαν διάφορον ἐκείνης ἣν ἐξ ἀρχῆς ἔχομεν ὑπ' ὄψιν, καὶ ἡ πιθανότης ἀπαλοιφῆς τῶν τελευταίων κατά τινα στιγμὴν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος εἰς ὃ γίνεται ἡ σπουδὴ τῆς ὁμάδος.

Αἱ ὡς ἄνω δυσχέρειαι παρακάμπτονται διὰ πρακτικῶν μεθόδων βασιζομένων ἐπὶ ὑποθέσεων γενομένων ὑπὸ τῶν διαφόρων μελετητῶν.

Αἱ μέχρι σήμερον γενόμεναι ὑποθέσεις δὲν «ἔκλεισαν» τὸ σχετικὸν θέμα καὶ δι' αὐτὸ μεγάλοι ἐπιστήμονες ἐξακολουθοῦν τὴν ἔρευναν καὶ κριτικήν των, γεγονὸς ὅπερ καθιστᾷ τὸ θέμα τῶν πηλίκων ἀπαλοιφῆς πάντοτε ἐπίκαιρον. Αἱ γενόμεναι ὑποθέσεις εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων *ὑποθέσεων ἀφετηρίας*[1] καὶ τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἐπηρεάζονται, σὺν τοῖς ἄλλοις, καὶ ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης βουλήσεως, ἥτις ὡς μαθηματικὴ ἔκφρασις δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς πολυσύνθετος συνάρτησις[2], ἧς ἡ μορφὴ παραμένει ἄγνω

1. Ἴδε Θ. Βορέα, Λογική, Τόμ. Α', Ἀθῆναι, 1932, σ. 244.
2. Ἴδε Π. Στεριώτη, Στοιχεῖα Γενικῶν Μαθηματικῶν διὰ τοὺς σπουδάζοντας Οἰκονομικὰς Ἐπιστήμας, Ἀθῆναι, σ. 150.

στος καὶ συνεπῶς ἡ σπουδὴ ἀνέφικτος. Δι' ὃ καὶ αἱ γενόμεναι ὑποθέσεις θὰ ἰσχύωσι μέχρις οὗ τεθῇ ἡ ὑπόθεσις ἥτις θὰ ἑρμηνεύσῃ ἐπακριβῶς τὰ φαινόμενα καὶ θὰ κυρωθῇ (verificatio).

Ἐξ ἄλλου δέον ἐν προκειμένῳ νὰ μὴ λησμονῶμεν ὅτι αἱ ἐφηρμοσμέναι ἐπιστῆμαι, ὧν κλάδος εἶναι τὰ Ἀσφαλιστικὰ Μαθηματικά[1], δὲν εἶναι ἡ ἀφῃρημένη Μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἡ ἐπιζητοῦσα τὴν ἰδεατὴν ἀκρίβειαν ἐκπεφρασμένην εἰς ἑτέραν μαθηματικὴν ἔκφρασιν. Ἐν ταῖς ἐφηρμοσμέναις ἐπιστήμαις τὰ μαθηματικὰ εἶναι ὄργανον δι' οὗ ἐπιτυγχάνεται μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις, πρᾶγμα ὅπερ δὲν τὰς ἐμποδίζει νὰ συνεχίζουν τὴν ἀνελικτικήν των πορείαν, ἐπιλύουσαι ἐπιτυχῶς τὰ ἐκ τῆς πράξεως ἀνακύπτοντα προβλήματα.

Ἐν τῇ παρούσῃ μελέτῃ γίνεται σύντομος εἰσαγωγὴ ἐπὶ τῶν κυριωτέρων ὑποθέσεων καὶ σύγκρισις τῶν σχετικῶν τύπων, ἐξ ἧς συνάγονται οὐσιώδη συμπεράσματα. Δίδεται *μία νέα μορφὴ τῆς πιθανότητος ἀπαλοιφῆς* $q_t$ (τύπος $1 \cdot 8_1$) ἥτις, καθ' ἡμᾶς, ἐμφανίζει ἔναντι τῶν ἄλλων μορφῶν, αἵτινες τῆς ἐδόθησαν, ὡρισμένα πλεονεκτήματα.

Περαιτέρω, δεχόμενοι τὴν ἀρχὴν τοῦ *Cantelli*, καθ' ἣν ὁ λόγος τῆς πιθανότητος ἀπαλοιφῆς ἐν τῷ διαστήματι $(u, t+1)$ πρὸς τὴν πιθανότητα ἀπαλοιφῆς ἐν τῷ διαστήματι $(t, t+1)$ εἶναι συνάρτησις $f(u, t+1)$ πληροῦσα ὡρισμένας συνθήκας, ἤτοι $q(u, t+1) = q(t, t+1)\ f(u, t+1)$, δίδομεν, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, τὸ πρῶτον ἡμεῖς συγκεκριμένας μορφὰς εἰς τὴν συνάρτησιν $f(u, t+1)$ (§ 3, 1ον, 2ον, 3ον, 4ον) διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὴν μορφὴν (3.14) ἥτις, ὡς ἀποδεικνύομεν πλὴν τῶν δύο συνθηκῶν ἃς θέτει ὁ *Cantelli*, πληροῖ καὶ τὴν τρίτην συνθήκην ἣν ἀπαραιτήτως δέον, καθ' ἡμᾶς, νὰ πληροῖ ἡ συνάρτησις $f(u, t+1)$ καὶ ἥτις συνίσταται εἰς τὸ νὰ δίδῃ τὸ στιγμιαῖον ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς αὐξανόμενον σὺν τῇ παρόδῳ τοῦ χρόνου, ὡς ἄλλως τε συμβαίνει ἐν τοῖς πράγμασι ὅσον ἀφορᾷ τὴν θνησιμότητα. Εἰς τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον ἤχθημεν ἐν τῇ διερευνήσει τῆς γραμμικῆς, παραβολικῆς καὶ ὑπερβολικῆς μορφῆς τῆς $f(u, t+1)$.

***Συμβολισμὸς - Ὁρισμοί*** : Παριστῶμεν διὰ $l_t$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀτόμων τῶν συνιστώντων ὁμάδα τινὰ $O$ κατὰ τὸν χρόνρν $t$, διὰ $d_u\, du$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπαλειφθέντων ἐκ τῆς ὁμάδος δι' αἰτίαν $\alpha$ κατὰ τὸ μεταξὺ $u$ καὶ $u + du$ χρονικὸν διάστημα, διὰ $K_u\, du$ τὸν ἀριθμὸν ὅστις δίδει τὴν διαφορὰν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) μεταξὺ τῶν εἰσελθόντων εἰς τὴν ὁμάδα ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν ἐξελθόντων ταύτης ἀφ' ἑτέρου δι' οἵανδήποτε αἰτίαν διάφορον τῆς $\alpha$.

---

1. Ἴδε Τ. Κεραμιδᾶ, Στοιχεῖα Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν, Ἔκδ. Β', Ἀθῆναι 1959, σ. 12.

Παριστῶμεν ὁμοίως: διὰ $q_t$ τὴν *πιθανότητα ἀπαλοιφῆς*, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $d_t$ τῶν ἀπαλειφθέντων ἐν τῷ διαστήματι $t \vdash t+1$ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ $E_t$ τῶν δυναμένων νὰ ἀπαλειφθῶσιν ἐν τῷ αὐτῷ μοναδιαίῳ χρονικῷ διαστήματι ἕνεκα τῆς αἰτίας $a$, διὰ $S_t$ τὸ *ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς*, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ $d_t$ διὰ τοῦ $M_t$, ὅπερ παριστᾷ τὸν μέσον ἀριθμὸν τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸν κίνδυνον τῆς ἀπαλοιφῆς ἐν τῷ διαστήματι $t \vdash t+1$.

## § 1. ΟΜΑΣ ΥΠΟ ΠΛΗΡΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΝ

Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὴν μίαν ὁμάδα ἀτόμων $O$ εἰς ἣν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t \vdash t+1$ δὲν ἔχομεν εἰσόδους νέων ἀτόμων, ἀλλ' οὔτε καὶ ἐξόδους ἕνεκα αἰτιῶν διαφόρων μιᾶς καθωρισμένης τοιαύτης $a$, π.χ. θανάτου. Ἡ ὁμὰς αὕτη, ὡς εἴπομεν, εἶναι μία κλειστὴ ὁμάς. Λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ ὁμὰς $O$ εὑρίσκεται ὑπὸ *πλήρη παρατήρησιν*.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ πορεία ἀπαλοιφῆς εἶναι ἄγνωστος, καταφεύγομεν, ὡς ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἐλέχθη, εἰς διαφόρους ὑποθέσεις, αἵτινες θὰ βοηθήσουν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν πηλίκων ἀπαλοιφῆς.

Ὡς πρώτην ὑπόθεσιν ἔχομεν τὴν ὑπόθεσιν *Ackland*, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαλειφομένων (θνησκόντων) παραμένει σταθερὸς κατὰ τὰς διαδοχικὰς στιγμὰς τοῦ διαστήματος $t \vdash t+1$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι τὸ στιγμιαῖον ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς[1] βαίνει αὐξανόμενον κατὰ πρόοδον ἁρμονικὴν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν πρὸς τὸ τέλος τοῦ διαστήματος.

Βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἔχομεν τὸν τύπον τοῦ *Becker*[2].

$$E_t = M_t + \frac{d_t}{2}, \tag{1.1}$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸν τύπον:

$$q_t = \frac{2\,S_t}{2+S_t}. \tag{1.1$_1$}$$

Δευτέρα ὑπόθεσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ὅλαι αἱ ἀπαλοιφαὶ λαμβάνουσι χώραν τὴν πρώτην στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως, ὅτε:

$$M_t = E_t - d_t \tag{1.2}$$

καὶ

$$q_t = \frac{S_t}{1+S_t}. \tag{1.2$_1$}$$

---

1. Ἐν τοῖς ἑπομένοις, χάριν συντομίας, θὰ συμβολίζωμεν τὸ στιγμιαῖον ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς μὲ *σ.π.α.*

2. Ἴδε Becker, Zur Berechnung von Sterbetafeln und die Bevölkerungstatistik zu stellende Anforderungen, Berlin, 1874.

Τρίτη, τέλος, ὑπόθεσις εἶναι ἡ ὑπόθεσις Gini[1], καθ' ἣν τὸ σ.π.α. παραμένει σταθερὸν καθ' ὅλον τὸ διάστημα $t \vdash t+1$. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης προκύπτει ἡ *μέθοδος τῶν ἐπακριβῶν ἡλικιῶν τοῦ Gini* (Metodo delle durate esatte del Gini).

Σημειωτέον ὅτι ἡ ὑπόθεσις καθ' ἣν τὸ σ.π.α. παραμένει σταθερὸν ἐχρησιμοποιήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ *Wittstein*[2] ἐπὶ τῷ σκοπῷ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸν κίνδυνον κατὰ τρόπον προσεγγιστικόν, μὴ ἀνταποκρινόμενον ὅμως εἰς τὴν πρᾶξιν.

Βάσει τῆς ὑποθέσεως τοῦ *Gini* θὰ ἔχωμεν, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι οἱ ἐκτεθέντες εἰς τὸν κίνδυνον τὴν πρώτην στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως εἶναι $E_t$, ὅτι ὁ μέσος ἀριθμὸς τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸν κίνδυνον κατὰ τὴν $\nu$ στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως εἶναι:

$$(1.3) \qquad M'_t = \frac{1}{\nu} E_t \sum_{i=0}^{i=\nu-1} {}_i \left(1 - \frac{S_t}{\nu}\right)^i$$

ἢ καὶ

$$(1.3_1) \qquad M'_t = \frac{E_t}{S_t} \left[ 1 - \left(1 - \frac{S_t}{n}\right)^n \right]$$

ἢ διὰ $\nu \rightarrow \infty$

$$(1.3_2) \qquad \lim_{\nu \rightarrow \infty} M'_t = M_t = \frac{E_t}{S_t} \left(1 - e^{-S_t}\right)$$

καὶ δι' ἁπλῶν ἀντικαταστάσεων εὑρίσκομεν:

$$(1.3_3) \qquad q_t = 1 - e^{-S_t}.$$

Μεταξὺ τῶν τιμῶν τοῦ $q_t$, αἵτινες προκύπτουσι βάσει τῶν τεθεισῶν ὑποθέσεων, ὑφίστανται αἱ ἀνισότητες:

$$(1.4) \qquad \frac{2S_t}{2+S_t} > 1 - e^{-S_t} > \frac{S_t}{1+S_t}$$

---

1. C. Gini, Su la determinazione dei quozienti di elimiminazione e in particolare sui metodi delle durate esatte e delle durate medie nell' ipotesi di saggi instantanei di eliminazione constanti, « Metron », Vol. XII, n. 3, 1935.

2. T. Wittstein, Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausschreitenden Mitgliedern, εἰς « Grunert's Archiv der Mathematik und Physik », Bd 39, 1862.

ἡ ἀλήθεια τῶν ὁποίων καταδεικνύεται ἄν, ἀντὶ τοῦ σχετικοῦ πίνακος τιμῶν [1], λάβωμεν τὰς ἰσοδυνάμους των:

$$(1.4_1) \qquad \frac{2 - S_t}{2 + S_t} < e^{-S_t} < \frac{1}{1 + S_t} \qquad \text{ἤ,}$$

τὰ ἀναπτύγματα τῶν ὅρων:

$$(1.4_2) \qquad 1 - S_t + \frac{S_t^2}{2} - \frac{S_t^3}{2^2} + \frac{S_t^4}{2^3} - \ldots < 1 - S_t + \frac{S_t^2}{2!} - \frac{S_t^3}{3!} + $$
$$+ \ldots < 1 - S_t + S_t^2 - S_t^3 + \ldots$$

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι καὶ αἱ τρεῖς προμνημονευθεῖσαι ὑποθέσεις περικλείουν ἐν ἑαυταῖς τὸ στοιχεῖον τοῦ αὐθαιρέτου. Αἱ a priori τεθεῖσαι ἀρχαὶ πειραματικῶς δὲν ἐπηλήθευσαν ἀπολύτως. Στατιστικῶς ἓν μόνον πρᾶγμα ἐπηλήθευσεν: ὅτι οὐδεὶς τῶν τριῶν τύπων δίδει ἀπόλυτον ἀκρίβειαν καὶ ὅτι ἡ ἀποχὴ τῶν τριῶν τιμῶν ἐκ τῆς ἀληθοῦς τοιαύτης κυμαίνεται ἀναλόγως τοῦ φαινομένου.

Πρὸς σύγκρισιν τῶν τριῶν μορφῶν τοῦ $q_t$ ἐλάβομεν τὰ ὅρια τῶν διαφορῶν θεωροῦντες ὅτι τὸ $S_t$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν:

$$(1.5) \qquad \lim_{S_t \to 0} \left( \frac{2S_t}{2 + S_t} - 1 + e^{-S_t} \right) = \lim \left( \frac{S_t - 2}{S_t + 2} + e^{-S_t} \right) = 0$$

$$(1.6) \qquad \lim_{S_t \to 0} \left( \frac{2S_t}{2 + S_t} - \frac{S_t}{1 + S_t} \right) = \lim \frac{S^2_t}{S^2_t + 3S_t + 2} = 0$$

$$(1.7) \qquad \lim_{S_t \to 0} \left( 1 - e^{-S_t} - \frac{S_t}{1 + S_t} \right) = 0$$

Ἐκ τῶν (1.5), (1.6), (1.7) συνάγεται ὅτι, ἐφ' ὅσον τὸ ποσοστὸν ἀπαλοιφῆς μειοῦται, αἱ διαφοραὶ τῶν τιμῶν τῆς πιθανότητος ἀπαλοιφῆς, αἱ διδόμεναι βάσει τῶν γενομένων τριῶν ὑποθέσεων, μειοῦνται συνεχῶς καὶ ἔχουσιν ὅριον τὸ μηδέν.

---

1 Ἴδε C. Gini, op. cit.

Ἐὰν ἀντὶ τῶν τιμῶν τοῦ $q_t$ λάβωμεν τὰ ἀναπτύγματά των, αἱ ἀνωτέρω διαφοραὶ δίδουσιν:

$$(1.5_1)\qquad S_t^3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3!}\right)-S_t^4\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4!}\right)+S_t^5\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{5!}\right)-\ldots.$$

$$(1.5_2)\qquad S_t^2\left(1-\frac{1}{2}\right)-S_t^3\left(1-\frac{1}{4}\right)+S_t^4\left(1-\frac{1}{8}\right)-\ldots.$$

$$(1.5_3)\qquad S_t^2\left(1-\frac{1}{2!}\right)-S_t^3\left(1-\frac{1}{3!}\right)+S_t^4\left(1-\frac{1}{4!}\right)-\ldots.$$

Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τοὺς πρώτους ὅρους τῶν τριῶν τελευταίων σειρῶν, διὰ $S_t = 0{,}1$ λαμβάνομεν, ἀντιστοίχως, 0,00008, 0,005 0,005 καὶ διὰ $S_t = 0{,}01$, 0,0000008, 0,00005, 0,00005. Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τιμὰς τοῦ $S_t$ μικροτέρας τοῦ 0,01 αἱ διαφοραὶ τῶν τιμῶν εἶναι πολὺ μικραί, καὶ βαίνουσι συνεχῶς μειούμεναι μετὰ τοῦ $S_t$.

Κατ᾽ ἐξαίρεσιν πρὸς τοὺς τύπους $(1.2_1)$ καὶ $(1.3_3)$, ὁ τύπος $(1.1_1)$ δίδει διὰ τὸ $q_t$ τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος ἐφ᾽ ὅσον $S_t > 2$ καὶ συνεπῶς τὸ $q_t$ χάνει τὴν ἔννοιαν τῆς πιθανότητος. Διὰ τὴν θνησιμότητα ὅμως, ἥτις ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἔτους τῆς ἡλικίας δὲν ὑπερβαίνει τὸ 10%, καὶ αἱ τρεῖς ὑποθέσεις παρέχουσιν ἱκανοποιητικὰς προσεγγίσεις.

Τὸ καθ᾽ ἡμᾶς, ἐφ᾽ ὅσον δὲν ὑφίσταται περιορισμός, ἀλλ᾽ οὔτε καὶ ἔνδειξις διὰ τὴν ἀνάγκην τῆς προτιμήσεως τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ὑποθέσεως, ἡ ὑπόθεσις *Gini*, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ παρεχομένη τιμὴ τοῦ $q_t$ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, εἶναι προτιμητέα. Βάσει δὲ τοῦ κριτηρίου τούτου, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ γενικὴν ἀρχήν, ἤχθημεν εἰς τὴν σκέψιν νὰ λάβωμεν μίαν μέσην τιμὴν τῶν προηγουμένων, ἐφ᾽ ὅσον ἡ μορφὴ ταύτης θὰ ἦτο ἁπλῆ καὶ ὁ ὑπολογισμός της εὔκολος. Ἐξ ὅλων τῶν μέσων τιμῶν ἐπελέξαμεν τὴν *μέσην ἁρμονικὴν* τῶν $(1.1_1)$ καὶ $(1.2_1)$. Ἤτοι:

$$(1.8)\qquad q_t = \frac{2}{\dfrac{2+S_t}{2S_t}+\dfrac{1+S_t}{S_t}},\qquad \text{ἐξ ἧς}$$

$$(1.8_1)\qquad q_t = \frac{S_t}{1+\dfrac{3}{4}S_t}.$$

Μεταξὺ τῶν τεσσάρων τιμῶν αἵτινες ἐλήφθησαν διὰ τὸ $q_t$ ὑφίστανται αἱ ἀνισότητες:

$$(1.9) \qquad \frac{2S_t}{2+S_t} > 1-e^{-S_t} > \frac{S_t}{1+\frac{3}{4}S_t} > \frac{S_t}{1+S_t}$$

διὰ $S_t < 4$ ἢ αἱ ἀνισότητες:

$$(1.9_1) \qquad \frac{2S_t}{2+S_t} > \frac{S_t}{1+\frac{3}{4}S_t} > 1-e^{-S_t} > \frac{S_t}{1+S_t}$$

διὰ $S_t \geqq 4$.

Διότι, ἐὰν αἱ ληφθεῖσαι τιμαὶ τοῦ $q_t$ παρασταθῶσι, κατὰ σειράν, διὰ $q_{t_1}$, $q_{t_2}$, $q_{t_3}$, $q_{t_4}$, θὰ ἔχωμεν:

ἀφ' ἑνὸς $q_{t_1} > q_{t_3} > q_{t_2}$, λόγῳ τῆς (1.4), καὶ ἀφ' ἑτέρου $q_{t_1} > q_{t_4} > q_{t_2}$, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ $q_{t_4}$ ἐλήφθη ὡς μέση ἁρμονικὴ τῶν $q_{t_1}$, $q_{t_2}$. Ἐπὶ πλέον ἡ ἀνισότης

$$1-e^{-S_t} > \frac{S_t}{1+\frac{3}{4}S_t}$$

ἢ ἡ ἰσοδύναμός της

$$e^{-S_t} < \frac{1-\frac{1}{4}S_t}{1+\frac{3}{4}S_t}$$

ἰσχύει, ἐφ' ὅσον $e^{-S_t} > 0$ καὶ $S_t > 0$, διὰ $S_t < 4$, ἐνῷ διὰ $S_t \geqq 4$ ἰσχύει ἡ ἀντίστροφός της.

Λάβωμεν τὴν παράγωγον τοῦ $q_t$ ὡς πρὸς $S_t$. Διὰ τὰς τέσσαρας τιμὰς τοῦ $q_t$ ἔχομεν:

$$q'_{t_1} = \frac{4}{(2+S_t)^2}, \quad q'_{t_2} = \frac{1}{(1+S_t)^2},$$

$$q'_{t_3} = \frac{1}{e^{S_t}}, \quad q'_4 = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{4}S_t\right)^2}.$$

Ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι ἡ $q_t$ καὶ εἰς τὰς τέσσαρας περιπτώσεις εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ $S_t$.

ΠΙΝΑΞ 1. *ΔΙΑΦΟΡΑΙ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ* $q_t$

| $S_t$ | $\frac{2S_t}{2+S_t} - \frac{S_t}{1+S_t}$ | $\frac{2S_t}{2+S_t} - (1-e^{-S_t})$ | $\frac{2S_t}{2+S_t} - \frac{4S_t}{4+3S_t}$ | $\frac{S_t}{1+S_t} - (1-e^{-S_t})$ | $\frac{S_t}{1+S_t} - \frac{4S_t}{4+3S_t}$ | $(1-e^{-S_t}) - \frac{4S_t}{4+3S_t}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 0,001 | 0,0000005 | 0,0000000 | 0,0000003 | — 0,0000005 | — 0,0000002 | 0,0000003 |
| 0,005 | 0,0000124 | 0,0000000 | 0,0000063 | — 0,0000124 | — 0,0000561 | 0,0000063 |
| 0,01 | 0,0000493 | 0,0000001 | 0,0000247 | — 0 0000492 | — 0,0000246 | 0,0000246 |
| 0,05 | 0,0011615 | 0,0000099 | 0,0005877 | — 0,0011516 | — 0,0005738 | 0 0005778 |
| 0,1 | 0,00434 | 0,00008 | 0,00222 | — 0,00426 | — 0,00212 | 0,00214 |
| 0,2 | 0,0151 | 0,0005 | 0,0079 | — 0,0146 | — 0,0072 | 0,0074 |
| 0,3 | 0,0301 | 0,0017 | 0,0160 | — 0,0284 | — 0,0219 | 0,0143 |
| 0,4 | 0,0476 | 0,0036 | 0,0257 | — 0,0440 | — 0,0303 | 0,0221 |
| 0,5 | 0,0667 | 0,0065 | 0,0364 | — 0,0602 | — 0,0714 | 0,0299 |
| 1 | 0,1667 | 0,0346 | 0,0953 | — 0,1321 | — 0,0790 | 0,0607 |
| 1,1 | 0,1859 | 0,0424 | 0,1069 | — 0,1435 | — 0,0862 | 0,0645 |
| 1,2 | 0,2046 | 0,0511 | 0.1184 | — 0,1535 | — 0,0930 | 0,0673 |
| 1,3 | 0,2226 | 0.0603 | 0,1296 | — 0,1623 | — 0,0991 | 0,0693 |
| 1,4 | 0,2397 | 0,0701 | 0,1406 | — 0,1696 | — 0,1058 | 0,0705 |
| 1,5 | 0,2571 | 0,0802 | 0,1513 | — 0,1769 | — 0,1333 | 0.0711 |
| 2 | 0,3333 | 0,1353 | 0,2000 | — 0,1980 | — 0,1553 | 0,0647 |
| 2,5 | 0,3969 | 0,1931 | 0,2416 | — 0,2038 | — 0,1553 | 0,0485 |
| 3 | 0,4500 | 0,2429 | 0 2770 | — 0,2071 | — 0,1730 | 0,0341 |
| 3,5 | 0,4950 | 0,3028 | 0,3072 | — 0,1922 | — 0,1878 | 0 0044 |
| 4 | 0,5333 | 0,3516 | 0,3333 | — 0,9817 | — 0,2000 | — 0,0183 |
| 5 | 0,5952 | 0,4352 | 0,3759 | — 0,1600 | — 0,2193 | — 0,0593 |
| 10 | 0,75757 | 0,66670 | 0,49049 | — 0,09087 | — 0,26738 | — 0,17651 |

Ἐκ τοῦ πίνακος 1 παρατηροῦμεν ὅτι αὐξανομένου τοῦ $S_t$ αἱ διαφοραὶ τῶν $q_t$ αὐξάνουσιν ἀπολύτως. Αἱ διαφοραὶ τῶν $q_{t_1}$ καὶ $q_{t_3}$ αὐξάνουσιν ὀλιγώτερον ταχέως τῶν ὑπολοίπων διαφορῶν. Ὡς πρὸς τὴν βραδύτητα αὐξήσεως τῶν διαφορῶν ἡ $(q_{t_3} - q_{t_4})$ ἕπεται τῆς $(q_{t_1} - q_{t_3})$ μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ $S_t = 1{,}5$. Ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ $S_t$ ἡ διαφορὰ $(q_{t_3} - q_{t_4})$ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $(q_{t_1} - q_{t_3})$ μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ $S_4 = 4$, ὅτε ἡ διαφορὰ $(q_{t_3} - q_{t_4})$ γίνεται ἀρνητική, μένουσα πάντως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $(q_{t_1} - q_{t_4})$.

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις μᾶς ἄγουσιν εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων τύπων τῶν παρεχόντων τὸ $q_t$ *οὐδεὶς εἶναι συμβουλεύσιμος διὰ πάσας τὰς περιπτώσεις*. Ὁ τύπος δὲ (1.8,) ὃν ἡμεῖς προτείνομεν, ἔχει πάντα τὰ πλεονεκτήματα ἅτινα εὑρίσκει ὁ *Gini*[1] διὰ τὸν ἰδικόν του τύπον $(1.3_3)$.

## § 2. ΟΜΑΣ ΥΠΟ ΜΗ ΠΛΗΡΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΝ

Ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ὑπετέθη ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου παρακολουθήσεως τῆς ὁμάδος $O$ οὐδὲν νέον ἄτομον εἰσῆλθεν εἰς αὐτὴν καί, ἐπὶ πλέον, οὐδὲν ἄτομον ἐξῆλθεν ἐκ ταύτης συνεπείᾳ αἰτίας διαφόρου τῆς ἀρχικῶς θεωρηθείσης τοιαύτης $a$. Ὁ περιορισμὸς οὗτος δὲν ὑφίσταται συνήθως εἰς τὰς ἐν τῇ πράξει ὁμάδας.

Ἐὰν ἔν τινι ὁμάδι δύνανται νὰ εἰσέλθωσι νέα ἄτομα, ἵνα ἀποτελέσωσι μέρος ταύτης καθ' ὃν χρόνον ἡ ὁμὰς εὑρίσκεται ὑπὸ παρατήρησιν, καὶ ταυτοχρόνως δύνανται νὰ ἐξέλθωσι ταύτης ὡρισμένα ἄτομα ἕνεκα ἄλλης ἢ ἄλλων αἰτιῶν διαφόρων τῆς $a$, ἡ ὁμὰς αὕτη εἶναι μία *ἀνοικτὴ ὁμάς*. Ἐν τῇ πράξει, συνήθως, ἔχομεν τοιαύτας ὁμάδας.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι αἰτία ἐξόδου (ἀπαλοιφῆς) ἀτόμου ἔκ τινος ὁμάδος δὲν εἶναι μόνον ὁ θάνατος. Ἐάν, π.χ., θεωρήσωμεν ὁμάδα ἐργαζομένων γυναικῶν, αἰτία ἀπαλοιφῆς ἐκ τῆς ὁμάδος εἶναι ὁ θάνατος, τὸ γῆρας, ὁ τοκετός, ἡ ἀνικανότης κ.τ.λ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς φοιτητὰς τῆς Α.Σ.Ο. & Ε Ε. ὡς αἰτία ἀπαλοιφῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ ἀπόκτησις πτυχίου.

Αἱ ὁμάδες εἶναι πολυάριθμοι. Αἱ περιπτώσεις ἀπαλοιφῆς πολλαπλάσιαι τῶν ὁμάδων. Ὁ νόμος τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ἀτόμων ἐκ τῆς ὁμάδος ἄγνωστος καὶ εἰς τὰς περισσοτέρας τῶν περιπτώσεων ἄγνωστος ἡ στιγμὴ εἰσόδου καὶ ἐξόδου ἐκ τῆς ὁμάδος δι' αἰτίας διαφόρους τῆς $a$.

Ἡ ἔλλειψις τῶν ἀναγκαίων στοιχείων ἀντιμετωπίζεται, ὡς ἐν τῇ εἰσαγωγῇ εἴπομεν, διὰ πρακτικῶν μεθόδων βασιζομένων ἐπὶ ὑποθέσεων προ

1. Ἴδε C. Gini, op. cit.

κυπτουσῶν κυρίως ἐκ τῆς ἐμπειρίας. Αἱ κυριώτεραι τῶν μεθόδων εἶναι αἱ τῆς Ἀγγλικῆς καὶ τῆς Γερμανικῆς Σχολῆς [1].

Αἱ μέθοδοι τῆς Ἀγγλικῆς Σχολῆς εἶναι: Ἡ *τῶν ἐπακριβῶν ἡλικιῶν* (exact duration method), ἡ *τῶν μέσων ἡλικιῶν* (mean duration method) καὶ ἡ *τῶν πλέον γειτονικῶν ἡλικιῶν* (nearest duration method) [2]. Αἱ μέθοδοι τῆς Γερμανικῆς Σχολῆς εἶναι γνωσταὶ ὡς τύποι τῶν *Wittstein*, *Zeuner* καὶ *Heym*.

Ἤδη πρὸς εὕρεσιν τῶν πηλίκων ἀπαλοιφῆς ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Ἐὰν $\xi$ παριστᾷ χρονικὴν στιγμὴν τοῦ διαστήματος $t \vdash t+1$, δοθέντος ὅτι ὁ μέσος ἀριθμὸς τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸν κίνδυνον κατὰ τὸ ὡς ἄνω χρονικὸν διάστημα δίδεται ὑπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_t^{t+1} E_\xi \, d\xi$, θὰ ἔχωμεν:

$$M_t = l_t + \int_t^{t+1} \int_t^{\xi} (K_u - d_u)\, du\, d\xi =$$

$$= l_t + \left[ \xi \int_t^{\xi} (K_u - d_u)\, du \right]_t^{t+1} - \int_t^{t+1} \xi (K_\xi - d_\xi)\, d\xi =$$

$$= l_t + (t+1) \int_t^{t+1} (K_u - d_u)\, du - \int_t^{t+1} u (K_u - d_u)\, du, \quad \text{καὶ}$$

$$M_t = l_t + \int_t^{t+1} (K_u - d_u)(t+1-u)\, du, \quad \text{ὅτε} \tag{2.1}$$

$$S_t + \frac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} (K_u - d_u)(t+1-u)\, du} \quad \text{καί,} \tag{2.2}$$

ἐν συνεχείᾳ, βάσει τοῦ τύπου (1.3₁), λαμβάνομεν τὴν πιθανότητα ἀπαλοιφῆς ἥν, πρὸς διάκρισιν, σημειοῦμεν δι' ἑνὸς ἀστερίσκου:

$$q_t^* = 1 - \frac{1}{e^{\,\text{ἐκθ.}} \dfrac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} (K_u - d_u)(t+1-u)\, du}} \tag{2.3}$$

---

1. Ἴδε R. Cultrera, Lezioni di Matematica Attuariale (Disp) Roma, 1953, σ. 103—121.

2. T. G. Ackland, An investigation of some Methods for deducing the Rates of Mortality κ.τ.λ. «Journal of the Institute of Actuaries», London, V. XXXIII, 1896 (Μέρος I), 1897 (Μέρος II). Ὁμοίως T. B. Sprague, On the construction of a combined marriage and mortality table, «Journal of the Inst. of Actuaries», London, V. XXI, 1879.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τύπων (2.2) καὶ (2.3) οὐδεμία ὑπόθεσις ἐτέθη· πλὴν ὅμως ἐν τῇ πράξει, ἐφ' ὅσον δὲν εἶναι γνωστὸς ὁ ἀκριβὴς ἀριθμὸς εἰσόδου καὶ ἐξόδου ἐκ τῆς ὁμάδος δι' αἰτίαν $\beta \neq \alpha$ ὡς καὶ ὁ χρόνος ἀπαλοιφῆς ἑκάστου ἀτόμου δι' αἰτίαν $\alpha$, καταφεύγομεν εἰς τὰς γνωστὰς ὑποθέσεις πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος.

Εὕρωμεν ἤδη τὴν πιθανότητα ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς μεθόδου *τῶν ἐπακριβῶν ἡλικιῶν*[1], ἤ, ὡς ἄλλως λέγεται, *τῶν ἐπακριβῶν διαρκειῶν*, ἥτις θεωρεῖ ὅτι $n$ ἄτομα ὑπὸ μὴ πλήρη παρατήρησιν, ἅτινα εἰσῆλθον εἰς τὴν παρατήρησιν τὴν στιγμὴν $u$ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος $t \vdash t+1$ καὶ παρηκολουθήθησαν μέχρι τέλους τοῦ διαστήματος, ἰσοδυναμοῦν πρὸς $(t+1-u)n$ ἄτομα ὑπὸ πλήρη παρατήρησιν. Θὰ ἔχωμεν :

$$q_t = \frac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} K_u (t+1-u)\, du}. \tag{2.4}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (2.2) διαφέρει τοῦ (2.4) κατὰ τὸ ὅτι ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ ἀπαλοιφὴ διὰ τὴν αἰτίαν $\alpha$[2].

Ὁ τύπος (2.4) δύναται νὰ ἐξαχθῇ ὡς ἀκολούθως :

Ἔχομεν :

$$\int_t^{\xi} d_u\, du = l_t\, q(t,\xi) + \int_t^{\xi} K_u\, q(u,\xi)\, du \tag{2.5}$$

ἢ καὶ

$$d_t = l_t\, q_t + \int_t^{t+1} K_u\, q(u, t+1)\, du. \tag{2.6}$$

Ὁ *Cantelli*[3] θέτει :

$$q(u, t+1) = q_t\, f(u, t+1), \tag{2.7}$$

ἔνθα $f(u, t+1)$ μία συνάρτησις *θετική, μὴ αὔξουσα, μεταβαλλομένη ἀπὸ 1 ἕως 0.*

---

1. Δὲν εἶναι ἐξηκριβωμένον ποῖος πρῶτος ἐχρησιμοποίησε τὴν μέθοδον τῶν ἐπακριβῶν ἡλικιῶν, παρ' ὅλον ὅτι πολλοὶ συγγραφεῖς ὀνομάζουσι ταύτην μέθοδον τοῦ Ackland.

2. Ἴδε C. Gini, op. cit.

3. F. P. Cantelli, Genesi e costruzione delle tavole di mutualità, « Bollettino di notizie sul Crediro o sulla Previdenza », 1914 N. 3. Ὁμοίως F. Cantelli, Sulla costruzione delle tavole di Mortalità, « Atti della III Riunione Scientifica » Ἰούνιος - Ἰούλιος 1941, σ. 18.

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (2.6) ἀντικαταστήσωμεν τὸ $q(u, t+1)$ διὰ τοῦ ἴσου του (2.7), θὰ λάβωμεν :

$$d_t = l_t\, q_t + \int_t^{t+1} K_u\, q_t\, f(u, t+1)\, du. \tag{2.8}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν :

$$q_t = \frac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} K_u\, f(u, t+1)\, du}. \tag{2.9}$$

Ἐφ' ὅσον ληφθῇ :

$$f(u, t+1) = t + 1 - u, \tag{2.10}$$

ἤτοι *ἐφ' ὅσον δεχθῶμεν ὅτι ἡ πιθανότης ἀπαλοιφῆς ἀπὸ τῆς στιγμῆς* $u$ *ἕως τὴν στιγμὴν* $t+1$ *εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ διάστημα* $t+1-u$, ὁ τύπος (2.9) μετασχηματίζεται εἰς τὸν τύπον (2.4). *Τοῦτο ὅμως γενικῶς δὲν ἰσχύει, διότι θὰ ἔδει, μειουμένου τοῦ διαστήματος εἰς ὃ γίνεται ἡ παρατήρησις, νὰ μειοῦται καὶ ἡ πιθανότης ἀπαλοιφῆς.* Ἐάν, π.χ., πρόκειται διὰ τὴν πιθανότητα ἀπαλοιφῆς λόγῳ θανάτου θὰ ἔδει νὰ δεχθῶμεν ὅτι *προϊούσης τῆς ἡλικίας τοῦ ἀτόμου ἡ πιθανότης μειοῦται, ὅπερ δὲν εἶναι ἀληθές.*

Οἱ ἀναλογισταὶ χρησιμοποιοῦσι τὸν τύπον (2.4) ὡς παρέχοντα ἀρκοῦσαν προσέγγισιν, καίτοι ὡς βεβαιοῦν οἱ *Gini* καὶ *Cantelli* δι' αἰτίας ἀπαλοιφῆς διαφόρους τῆς τοῦ θανάτου ἡ γενομένη ὑπόθεσις δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς σοβαρὰ σφάλματα.

## § 3. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $f(u, t+1)$

Ὁ *Cantelli* [1] ὑπὸ ἔποψιν λογισμοῦ πιθανοτήτων ὀρθῶς λέγει ὅτι διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς (2.7) δέον ὅπως ἡ $f(u, t+1)$ πληροῖ τὰς ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἀναφερθείσας συνθήκας. Πλὴν ὅμως, νομίζομεν ὅτι *αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι μὲν ἀναγκαῖαι οὐχὶ ὅμως καὶ ἱκαναί*, διὰ τὸν λόγον ὅτι *ὑπάρχουν ἄπειροι συναρτήσεις μὴ αὔξουσαι, μεταβαλλόμεναι ἀπὸ 1 ἕως 0, μὴ δίδουσαι ὅμως αὐξανόμενον τὸ σ.π.α. Θὰ πρέπει, συνεπῶς, ἡ* $f(u, t+1)$ *νὰ πληροῖ καὶ τὴν τελευταίαν ταύτην συνθήκην, ἰδίᾳ διὰ τὰς περιπτώσεις ἀπαλοιφῆς λόγῳ θανάτου, διὰ νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «ἀρκούντως ρεαλιστική» (abbastanza realistica).*

1. Ἴδε Cantelli, op. cit.

Θεωρήσωμεν ἤδη ὡρισμένας μορφὰς τῆς συναρτήσεως $f(u, t+1)$ ἤ, ἄνευ ἀπωλείας τῆς γενικότητος, τῆς $f(u, 1)$.

1ον ***Γραμμικὴ μορφή*** : $f(u, 1) = 1 - u$. Αὕτη εἶναι ἡ ἁπλουστέρα μορφή, πλὴν ὅμως, ὡς εἴπομεν, δίδει τὸ σ.π.α. ὡς συνάρτησιν φθίνουσαν[1].

2ον ***Παραβολικὴ μορφή***[2] : $f(u, 1) = 1 - u^{\nu}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι φθίνουσα καὶ λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1 καὶ 0 διὰ $u = 0$ καὶ $u = 1$. Ἄρα ἡ μορφὴ αὕτη τῆς συναρτήσεως πληροῖ τὰς δύο συνθήκας.

Εὕρωμεν τὸ σ.π.α βάσει τῆς σχέσεως :

$$q(u, 1) = q_0 (1 - u^{\nu}) \tag{3.1}$$

Ἔχομεν[3] :

$$q(u, 1) = 1 - e^{\int_u^1 \mu(s)ds} \tag{3.2}$$

καί, λόγῳ τῆς (3.1),

$$q_0 (1 - u^{\nu}) = 1 - e^{-\int_u^1 \mu(s)ds} \tag{3.3}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν :

$$\mu(u) = \frac{\nu q_0 u^{\nu-1}}{1 - q_0 + q_0 u^{\nu}}, \quad \text{καὶ} \tag{3.4}$$

$$\mu'(u) = \frac{\nu(\nu - 1) q_0 u^{\nu-2} (1 + q_0 u^{\nu}) - \nu q_0 u^{\nu-2} (\nu - 1 + \nu u^{\nu})}{(1 - q_0 + q_0 u^{\nu})^2} \tag{3.5}$$

Ἵνα ἔχωμεν $\mu'(u) > 0$, δέον νὰ εἶναι $\nu - 1 > q_0 (u^{\nu} + \nu - 1)$. Δοθέντος δὲ ὅτι τὸ $u$ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1, ἵνα ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $u$ ἐν τῷ διαστήματι $(0, u)$ δέον νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης :

$$q_0 < 1 - \frac{1}{\nu}.$$

3ον ***Ὑπερβολικὴ μορφή*** : $f(u, 1) = \dfrac{1 - u}{1 + u}$.

---

1. Ἴδε σχετικὴν ἀπόδειξιν παρὰ R. Cultrera, op. cit. σ. 111.
2. Παραβολὴν δευτέρου βαθμοῦ ἀναφέρει ὁ I. Messina, Le probabitità parziali nella Matematica Attuariale, « Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio » 1916, ἄνευ ἰδιαιτέρας σπουδῆς ταύτης.
3. Ἴδε Π. Ι. Στεριώτη, op. cit.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι φθίνουσα καὶ λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1 καὶ 0 διὰ $u=0$ καὶ $u=1$. Πληροῖ, κατὰ συνέπειαν, τὰς δύο πρώτας συνθήκας τὰς τεθείσας διὰ τὴν $f(u,1)$.

Ἐὰν ληφθῇ:

$$(3.6)\qquad q(u,1)=q\,\frac{1-u}{1+u}$$

καὶ ἀκολουθήσωμεν τὴν αὐτήν, ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει, πορείαν, θὰ εὕρωμεν:

$$(3.7)\qquad q_0\,\frac{1-u}{1+u}=1-e^{-\int_0^1 \mu(s)ds}, \qquad \text{ἐξ ἧς}$$

$$(3.8)\qquad \mu(u)=\frac{2q}{(1+u)(1+u-q_0+uq_0)} \quad \text{καὶ}$$

$$(3.9)\qquad \mu'(u)=\frac{-4q_0(1+u+uq_0)}{(1+u)^2(1+u-q_0+uq_0)^2}.$$

Ἐντεῦθεν, ἐπειδὴ $\mu'(u)<0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν $u$ καὶ $q_0$ εἰς τὸ διάστημα (0,1), συνάγεται ὅτι ἡ $\dfrac{u-1}{u+1}$ μολονότι εἶναι φθίνουσα καὶ λαμβάνει τὴν τιμὴν 1 διὰ $u=0$ καὶ τὴν τιμὴν 0 διὰ $u=1$, δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἱκανοποιητικὴ μορφὴ τῆς $f(u,1)$, καθ' ὅσον ἐν τῷ διαστήματι (0,1) *τὸ σ.π.α εἶναι μὴ αὔξουσα συνάρτησις τοῦ $u$.*

4ον **Μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν $1-u$ καὶ $1-u^\nu$:** $f(u,1)=$ $=1-\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^\nu}{2}$.

Ἐν τῇ ἀναζητήσει συγκεκριμένης μορφῆς διὰ τὴν συνάρτησιν $f(u,1)$, ἥτις νὰ πληροῖ καὶ τὰς τρεῖς συνθήκας, εὕρομεν τὴν ἀνωτέρω μορφήν, ἥτις προκύπτει ὡς μέση ἀριθμητικὴ τῆς γραμμικῆς καὶ παραβολικῆς μορφῆς καὶ ἥτις πληροῖ καὶ τὰς τρεῖς συνθήκας. Πράγματι, ἔχομεν:

$$(3.10)\qquad q_0=\left(1-\frac{u}{2}-\frac{u^\nu}{2}\right)=1-e^{-\int_0^1 \mu(s)ds}.$$

Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν ταῖς προηγουμέναις περιπτώσεσιν εὑρίσκομεν:

$$(3.11) \qquad \mu(u) = \frac{\nu q_0 u^{\nu-1} + q_0}{q_0 u^\nu + q_0 u - 2q_0 + 2}$$

$$(3.12) \quad \mu'(u) = -\frac{-\nu q_0^2 u^{2\nu-2} + \nu q_0^2 (\nu-3) u^{\nu-1} + 2(1-q_0)\nu(\nu-1) q_0 u^{\nu-2} - q_0^2}{(q_0 u^\nu + q_0 u - 2q_0 + 2)^2}$$

Ἵνα τὸ $\sigma.\pi.\alpha$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ $u$ δέον νὰ ὑφίσταται ἡ ἀνισότης $\mu'(u) > 0$, ἤτοι δέον

$$(3.13) \quad \nu^2 q_0 u^{\nu-1} + 2\nu(\nu-1) u^{\nu-2} > \nu q_0 u^{2\nu-2} + 3\nu q_0 u^{\nu-1} + 2\nu(\nu-1) q_0 u^{\nu-2} + q_0$$

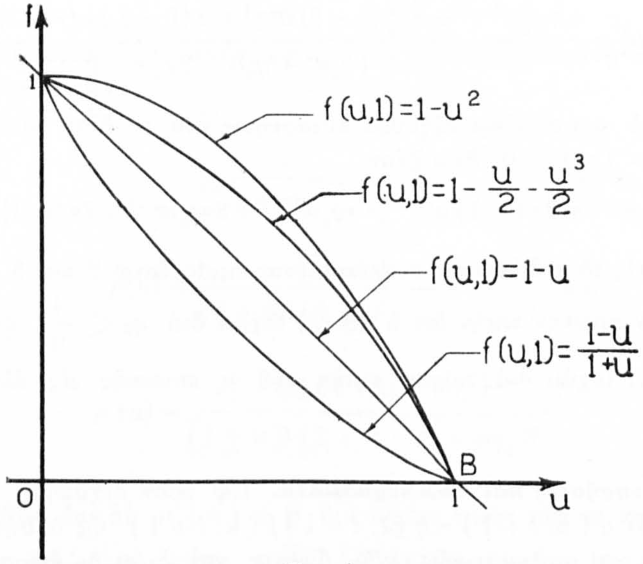
Ἐὰν εἰς τὸ $\nu$ δώσωμεν συγκεκριμένας τιμάς, ἔστω 2 καὶ 3, εὑρίσκομεν διὰ μὲν τὴν πρώτην τιμὴν ὅτι ἡ (3.13) ἰσχύει διὰ $q_0 < \frac{4}{9}$, διὰ δὲ τὴν δευτέραν ὅτι ἰσχύει *διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $u$, συνεπῶς εἰς ὁλόκληρον τὸ διάστημα.*

***Παρατηρήσεις καὶ συμπεράσματα.*** Ἐφ' ὅσον δεχθῶμεν τὴν σχέσιν τοῦ *Cantelli* $q(u, t+1) = q(t, t+1) f(u, t+1)$ ὡς ὀρθήν, ὅπως καὶ εἶναι, διότι καὶ μαθηματικῶς εἶναι ἄψογος καὶ διότι δι' ἑτέρας ὁδοῦ, τῆς μεθόδου τῶν ἐπακριβῶν διαρκειῶν, φθάνομεν εἰς τὴν αὐτὴν μορφὴν τῆς $q_t$, θὰ πρέπει νὰ καθορισθῇ καὶ ἡ συγκεκριμένη ταύτης μορφή. Διότι ἄλλως ἡ ἐμφάνισις τῆς $f(u, t+1)$ θὰ εἶχε μόνον θεωρητικὴν ἀξίαν, πρᾶγμα ὅπερ δὲν ἐμφανίζει ἄμεσον ἐνδιαφέρον διὰ τὸν ἀναλογιστήν, ὅστις θέτει ἀμέσως τὰ θεωρητικὰ ἐπιτεύγματα ἐν ἐφαρμογῇ.

Ἐξ ὅσων γνωρίζομεν τὸ πρῶτον ἐνταῦθα δίδεται ἡ συγκεκριμένη μορφὴ (3.14) $f(u, t+1) = 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2}$, *ἥτις πληροῖ καὶ τὰς τρεῖς συνθήκας τὰς τεθείσας διὰ τὴν* $f(u, t+1)$.

Ἐκ τῆς γραμμικῆς παραστάσεως τῶν τεσσάρων συναρτήσεων (Σχ. 1) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\frac{1-u}{1+u}$ εὑρίσκεται πλησιέστερον τῆς $1-u$ ἢ ἡ $1-u^2$. Ἡ $1 - \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2}$ πλησιέστερον τῆς $1-u$ ἢ ἡ $1-u^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς δευτέρας καὶ τετάρτης συναρτήσεως εἶναι ἀρνητική, ἡ δὲ τῆς τρίτης εἶναι θετικὴ καὶ ἔχουσιν ἅπασαι κοινὰ σημεῖα (1,0) καὶ (0,1) συνάγεται ὅτι ἡ τρίτη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἡ δευτέρα καὶ τετάρτη στρέφουσι τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω καὶ ἔχουσι καὶ αἱ τρεῖς καμπύλαι κοινὴν χορδὴν τὴν $f(u, 1) = 1 - u$.

Ἔχομεν ἐπὶ τούτοις νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἡ παρατήρησις τοῦ *Cantelli*[1], καθ' ἣν τὸ σφάλμα ὅπερ διαπράττεται ἐφ' ὅσον ἡ $f(u, t+1)$ δὲν εἶναι




Σχ. 1.

«abbastanza realistica» δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῶν πραγματικῶν θανάτων τοῦ ἀρχικοῦ πλήθους $l_t$, δὲν μᾶς εὑρίσκει ἀπολύτως συμφώνους, καθ' ὅσον ἀμέσως μὲν δὲν ἐπηρεάζεται, ἐμμέσως ὅμως ἐπηρεάζεται, καὶ τοῦτο διότι ἐφ' ὅσον θὰ ἐξακολουθήσωμεν νὰ θεωρῶμεν ὡς ἰσχύουσαν τὴν (2.8) θὰ ἔχωμεν μίαν μεταβολὴν εἴτε ἐπὶ τοῦ $d_t$ εἴτε ἐπὶ τοῦ $l_t\ q(t, t+1)$. Τὰ $d_t$ καὶ $l_t$ εἶναι στατιστικὰ δεδομένα καὶ συνεπῶς ἡ μεταβολὴ θὰ ἐπηρεάσῃ τὸ $q(t, t+1)$, ἄρα τὸν ἀριθμὸν τῶν θανάτων τοῦ ἀρχικοῦ πλήθους. Ἐξ ἄλλου ὁ *Cantelli* λέγει ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις $f(u, t+1)$ δὲν εἶναι ἡ ἐνδεδειγμένη τὰ ἀποτελέσματα θὰ εἶναι ἐσφαλμένα, τουτέστιν ἡ τιμὴ τοῦ $q(t, t+1)$ θὰ εἶναι ἐσφαλμένη, ἄρα καὶ τὸ $l_t(t, t+1)$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἐσφαλμένον.

Δὲν νομίζομεν δὲ ὅτι ἐφ' ὅσον τὸ $K_u$ εἶναι 0 ἐνισχύει τὴν ἀντίθετον ἄποψιν, καθ' ὅσον ἐὰν $K_u = 0$ δὲν ἔχομεν πλέον ἀνοικτὴν ὁμάδα[2]. Ἡ παραδοχὴ δὲ ὅτι ἐφ' ὅσον τὸ $K_u$ εἶναι ἀρκούντως μικρὸν ἡ προκύπτουσα τιμὴ τῆς πιθανότητος θανάτου εἶναι ἀρκούντως ἱκανοποιητική, ἔστω

1. C a n t e l l i, Sulla costruzione κ.τ.λ. op cit, σ. 19, παράγρ. 6.

2. Ἴδε σχετικῶς V. C a s t e l l a n o, Sui quozienti di eliminazione, « Metron », Vol. XVI, N, 1—2, 1951.

καὶ ἐὰν ἡ $f(u, t+1)$ δὲν εἶναι ἡ ἐκ τῶν πραγμάτων ἐνδεδειγμένη, ἀφήνει κενόν τι, διότι τότε, πρὸς ἀποφυγὴν αὐθαιρεσιῶν, θὰ πρέπει νὰ καθορίσωμεν τὰ ὅρια τῶν τιμῶν τοῦ $K_u$.

## § 4. ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΟΥ σ.π.α.

Ἤδη θὰ ἀναζητήσωμεν τὸν προσδιορισμὸν τῆς πιθανότητος ἀπαλοιφῆς διὰ τοῦ σ.π.α.

Ἡ ἐξίσωσις ἡ συνδέουσα τὸ σ.π.α. μετὰ τῆς πιθανότητος ἀπαλοιφῆς εἶναι, ὡς εἴδομεν (3.2),

$$q(t,t+1) = 1 - e^{-\int_t^{t+1} \mu(u)du}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ συνάρτησις $\mu(u)$ εἶναι ἄγνωστος, καταφεύγομεν εἰς διαφόρους μεθόδους, μία τῶν ὁποίων εἶναι καὶ ἡ τοῦ *Gini*, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ ὅτι $\mu(u) = c$ [1]. Ἐνταῦθα θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ἠκολούθησεν ὁ *Cantelli*, διότι ἐπ' αὐτῆς ἔχομεν ὡρισμένας παρατηρήσεις.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαλειφθέντων κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ $t$ ἕως $t+1$ δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου [2]:

$$d_t = \int_t^{t+1} l_u \mu(u) du \tag{4.1}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$l_u = l_t + \int_t^u (K_u - d_u) d_u, \tag{4.2}$$

ἐξ ἧς διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$l'_u = K_u - d_u, \quad \text{ἐὰν τεθῇ} \tag{4.3}$$

$$\varphi(u) = -\int_u^{t+1} \mu(s) ds + C \tag{4.4}$$

ὁ τύπος (4.1) μετασχηματίζεται εἰς τὸν ἰσοδύναμόν του:

$$d_t = \int_t^{t+1} l_u \varphi'(u) du. \tag{4 5}$$

---

1. Ἴδε ἑτέραν μέθοδον T. Salvemini, Su la determinazione dei quozienti di eliminazione, « Metron », V. XII. N—2, σ. 254.
2. Ἴδε W. Lewi, Mathematik der Lebens - und Rentenversicherung Wien, 1937, σ. 21.

Ἐκ τοῦ (4.5), δι' ὁλοκληρώσεως κατὰ παράγοντας, λαμβάνομεν:

$$(4\ 6)\qquad d_t = l_t \int_t^{t+1} \mu(u)du + \int_t^{t+1} (K_u - d_u) \left( \int^{t+1} \mu(s)ds \right) du$$

καὶ ἐκ τούτου λαμβάνομεν:

$$(4.7)\qquad \int_t^{t+1} \mu(u)du = \frac{d_t}{l_t = \int_t^{t+1} (K_u - d_u) \dfrac{\int_u^{t+1} \mu(s)ds}{\int_t^{t+1} \mu(s)ds} du} .$$

Καὶ ἐνταῦθα ὁ *Cantelli*[1] χρησιμοποιεῖ μίαν συνάρτησιν $f_1(u, t+1)$, ἣν θεωρεῖ ὡρισμένην, θετικήν, φθίνουσαν, ἱκανοποιοῦσαν τὰς συνθήκας $f_1(t, t+1) = 1$, $f_1(t+1, t+1) = 0$ καὶ προκύπτουσαν ἐκ τῆς σχέσεως:

$$(4.8)\qquad \int_u^{t+1} \mu(s)ds = \int_t^{t+1} \mu(s)ds \cdot f_1(u, t+1) \cdot$$

Βάσει τῆς σχέσεως ταύτης ἡ (4.7) μετασχηματίζεται εἰς τήν:

$$(4.9)\qquad \int_t^{t+1} \mu(u)du = \frac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} (K_u - d_u) f_1(u, t+1)\, du} .$$

Ἐὰν ἤδη ἐν τῷ τύπῳ τῷ παρέχοντι τὴν πιθανότητα ἀπαλοιφῆς ἀντικαταστήσωμεν τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_t^{t+1} \mu(u)du$ διὰ τοῦ ἴσου του θὰ λάβωμεν:

$$(4.10)\qquad q_t^{**} = 1 - e \text{ ἐκθ.} \left[ - \frac{d_t}{l_t + \int_t^{t+1} (K_u - du)\, f_1(u, t+1)\, du} \right] .$$

Οἱ δύο ἀστερίσκοι ἐτέθησαν πρὸς διάκρισιν τοῦ $q_t$, ὅπερ εὑρέθη ἐν τῇ § 2.

Οἱ τῆς Σχολῆς *Cantelli*[2] προτιμοῦν τὸν τύπον (2.9) τοῦ (4.10) διότι,

---

1. Cantelli, Sulla costruzione κ.τ.λ. op. cit.
2. Ἴδε A. Del Chiaro, Sui tassi centralli di mortalità, «Giornale dall' Istituto Italiano degli Attuari», n. 3—4, 1941 καὶ G. Ottaviani, Sulle tavole di mortalità, «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari» n. 1—4, 1942.

λέγουσι, τὸ σφάλμα ὅπερ διαπράττεται ἐκ τῆς μὴ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς $f(u, t+1)$ δὲν ἀντανακλᾷ μόνον ἐπὶ τοῦ πλήθους τῶν ἀτόμων τῶν εἰσελθόντων καὶ ἐξελθόντων τῆς ὁμάδος δι᾽ ἄλλας αἰτίας πλὴν τοῦ θανάτου, μεταξὺ τῆς ἡλικίας $t$ καὶ $t+1$, ἀλλ᾽ ἐπίσης καὶ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν θανάτων τῶν ἐπισυμβάντων εἰς τὸ ἀρχικὸν πλῆθος $l_t$.

Παρὰ ταῦτα ἡ προέλευσις τοῦ τύπου (2.9) δικαιολογεῖ, ὡς εἴδομεν, τὴν ἄποψίν μας καθ᾽ ἣν ἡ μορφὴ τῆς $f(u, t+1)$ θὰ ἐπηρεάσῃ καὶ τοὺς λόγῳ θανάτου ἀπαλειφθέντας ἐκ τῶν $l_t$.

Ἀναμφισβήτητος παραμένει ἡ ἀλήθεια ὅτι ἡ ἀτυχὴς ἐκλογὴ τῶν $f(u, t+1)$, $f_1(u, t+1)$ δύναται νὰ δώσῃ ἀποτελέσματα ἀπαράδεκτα διὰ τὸ $q_t$. Δέον, κατὰ συνέπειαν, ἡ ἐκλογὴ τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως νὰ γίνεται μετὰ περισκέψεως καὶ κατὰ περίπτωσιν.

Καὶ ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρώτην τῶν συναρτήσεων ἐδώσαμεν μορφὴν πληροῦσαν ἁπάσας τὰς τεθείσας διὰ ταύτην συνθήκας. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν δευτέραν συνάρτησιν προτείνομεν τὴν συνάρτησιν

(4.11) $$f(u, t+1) = (t+1-u)^2$$ διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους:

α) Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι φθίνουσα καὶ ἐπὶ πλέον πληροῖ τὰς συνθήκας $f_1(t, t+1) = 1$, $f_1(t+1, t+1) = 0$.

β) Ἐὰν τὰ ὡρισμένα ὁλοκληρώματα τοῦ ἀντικαθισταμένου κλάσματος θεωρηθῶσι, προσεγγιστικῶς, ὡς παριστῶντα τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων πολυγώνων θὰ ἔχωμεν:

(4.12) $$\frac{\int_u^{t+1} \mu(s)ds}{\int_t^{t+1} \mu(s)ds} = \frac{(t+1-u)^2}{(t+1-t)^2}.$$

Νομίζομεν ὅμως ὅτι καὶ ἡ πλέον ἐπιτυχὴς ἐκλογὴ τῶν συναρτήσεων δὲν δίδει λύσεις μὲ ἰδεώδη ἀκρίβειαν. Εἴπομεν, ἄλλως τε, καὶ ἐξ ἀρχῆς ὅτι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει εἶναι ἡ εὕρεσις λύσεως μὴ ἀφισταμένης τῆς ἀληθείας καὶ διδούσης μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν τὰς τιμὰς τῶν πηλίκων ἀπαλοιφῆς. Τίνι ὅμως τρόπῳ θὰ ἠδύνατο νὰ ἐπιτευχθῇ τοῦτο, ἐφ᾽ ὅσον δὲν εἶχε καθορισθῆ μία συγκεκριμένη μορφὴ διὰ τὰς $f$ καὶ $f_1$; Αἱ ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ δοθεῖσαι συγκεκριμέναι μορφαὶ διὰ τὰς δύο ὑπ᾽ ὄψιν συναρτήσεις καθιστῶσι τὸ πρόβλημα ὅπερ ἔθεσεν ὁ Cantelli συγκεκριμένον καὶ προσηρμοσμένον πρὸς τὴν πραγματικότητα, πρᾶγμα ὅπερ ἐνδιαφέρει ἀμέσως τὸν ἀναλογιστήν.