ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΟΥ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΙΜΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Σταματία Αθ. Σπανοπούλου

ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής

του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική

Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2012

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Στον Καθηγητή μου Κώστα Καλούδη…

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Φράγκο Νικόλαο που με βοήθησε και με υποστήριξε καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τον ευχαριστώ ειλικρινά για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα αντικείμενο του ενδιαφέροντος και της αρεσκείας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού αυτού Προγράμματος της Ειδίκευσης στη Στατιστική που με βοήθησαν να ανοίξω τους ορίζοντες μου και να εμβαθύνω σε έννοιες, εμπλουτίζοντας τις γνώσεις μου.

Δεν θα μπορούσα σε καμία περίπτωση να παραλείψω να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την κ.Κουσκουνά Ευφροσύνη, Πρόεδρο της Εθνικής Αναλογιστικής Αρχής, και την Αγγελική Ζουλάκη, Μέλος της Εθνικής Αναλογιστικής Αρχής, για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν καθόλη τη διάρκεια της ολοκλήρωσης της εργασίας μου.

Τέλος, περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο, ευχαριστώ ολόψυχα τους γονείς μου και την αδελφή μου Ευαγγελία. Τους ευχαριστώ, ιδιαιτέρως τη μητέρα μου, που στάθηκαν δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας μου.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Γεννήθηκα το 1985 στην Αθήνα. Αποφοίτησα στο 13ο Ενιαίο Λύκειο Περιστερίου. Σπούδασα στο τμήμα «Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης» στο Πανεπιστήμιο Πειραιά. Εργάστηκα στον ιδιωτικό τομέα στο τμήμα M.I.S ως βοηθός Project Manager για τρία χρόνια. Συμμετείχα, στην Ομάδα Εργασίας της Εθνικής Αναλογιστικής Αρχής, για την Αναλογιστική Μελέτη του «Εθνικού Δελτίου Συνταξιοδοτικού Συστήματος της Ελλάδας» για την Ομάδα Γήρανσης του Πληθυσμού (Ageing Working Group/EC-FIN). Μιλάω Αγγλικά, Γαλλικά και έχω άριστη γνώση στο πρόγραμμα Microsoft Office, ειδικότερα στο Excel και ικανότητα χειρισμού στατιστικών και μαθηματικών προγραμμάτων.

ABSTRACT

Stamatia Spanopoulou

CONSTRUCTION AND GRADUATION OF LIFE TABLES OF DEMOGRAPHIC AND INSURABLE POPULATION

September 2012

One of the most important items that concern not only the Demographic Analysis but also the Actuarial Science is the construction of life tables. The physiognomy of a population's death rate is analytically impressed at the function cluster of the life table. The quality of the life tables depends on the inventory and registered data classified by age and sex.

This kind of data should firstly go through solvency checks so that the credibility of the statistics used can be ensured. Apart from the life tables or the mortality tables, as they are called elsewise, we can also construct insurance life tables which may be established based on the insurable team.

Both types of tables, examine the decrease of the observed population due to mortality. However, there are tables that examine further causes of exit except for physical death, known as table of multiple decrements. This thesis deals with the way the life tables are structured.

In order for this to be accomplished, a necessary condition is the computation of the initial estimation of mortality percentages or the force of mortality of the primary data. As the initial estimations are subjected to sample errors the grading procedure is followed which is imperative for the eliminator of random statistical errors and the securing smoother rating.

The review procedure of the initial estimations is achieved by the use of technical methods of grading which will be presented in this thesis. The technical methods of grading are separated in two categories, the parametric and the non-parametric ones. The basic idea is developed for each one of them and the methodology used at its implementation.

Next, a life table of demographic population is constructed according to the data issued by Eurostat for the year 2010 for Greece. Based on this data per age and sex an appropriate method of graduation is applied by constructing a graduation life table anew.

Because of the utility of life tables in the short-run and long-run prospects, population projections are also mentioned. The population projections are essential not only for the population analysis but also for the economic and social contingency planning.

Overall, the present study aims to have provided a challenging approach to the construction and graduation of life tables. The methodology of this thesis can be useful for the application of demographic assumptions and further research in actuarial science.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σταματία Σπανοπούλου

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΟΥ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΙΜΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Σεπτέμβριος 2012

Ένα από τα σημαντικοτέρα αντικείμενα τόσο της Δημογραφικής Ανάλυσης όσο και της Αναλογιστικής Επιστήμης είναι η κατασκευή πινάκων επιβίωσης. Η φυσιογνωμία της θνησιμότητας ενός πληθυσμού αποτυπώνεται αναλυτικά στη δέσμη των συναρτήσεων του πίνακα επιβίωσης. Η ποιότητα αυτών των πινάκων εξαρτάται από τα απογραφικά και ληξιαρχικά δεδομένα ταξινομημένα κατά ηλικία και φύλο.

Τα δεδομένα αυτά, πρωτίστως, πρέπει να υποστούν ελέγχους φερεγγυότητας ώστε να εξασφαλιστεί η αξιοπιστία του χρησιμοποιημένου στατιστικού υλικού. Εκτός από τους πίνακες επιβίωσης ή θνησιμότητας, όπως τους αποκαλούμε αλλιώς, μπορούμε να κατασκευάσουμε και ασφαλιστικούς πίνακες θνησιμότητας οι οποίοι καταρτίζονται με βάση τα στατιστικά στοιχεία που αναφέρονται σε μια ασφαλισμένη ομάδα.

Και οι δυο παραπάνω τύποι πινάκων, εξετάζουν τη μείωση του παρατηρημένου πληθυσμού λόγω της θνησιμότητας. Υπάρχουν όμως πίνακες, οι οποίοι εξετάζουν περισσότερα αίτια εξόδου εκτός του θανάτου, οι λεγόμενοι πίνακες πολλαπλών κινδύνων. Η παρούσα εργασία ασχολείται με την κατασκευή των πινάκων επιβίωσης.

Για να επιτευχθεί αυτό, απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο υπολογισμός των αρχικών εκτιμήσεων των ποσοστών θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας από τα πρωτογενή δεδομένα. Επειδή οι αρχικές εκτιμήσεις υποβάλλονται σε δειγματικά λάθη ακολουθείται η διαδικασία της εξομάλυνσης, η οποία είναι αναγκαία για να απαλειφθούν τα τυχαία στατιστικά λάθη και να πάρουμε ομαλότερες εκτιμήσεις.

Η διαδικασία αναθεώρησης των αρχικών εκτιμήσεων επιτυγχάνεται με τη χρήση τεχνικών μεθόδων εξομάλυνσης όπου και θα παρουσιαστούν σε αυτή την εργασία. Οι τεχνικές μέθοδοι εξομάλυνσης χωρίζονται σε δυο κατηγορίες,

τις παραμετρικές και τις μη παραμετρικές μεθόδους. Για κάθε μια από αυτές που αναφέρονται παρουσιάζεται η βασική ιδέα και η μεθοδολογία κατά την εφαρμογή της.

Στη συνέχεια, κατασκευάζεται ένας πίνακας επιβίωσης δημογραφικού πληθυσμού σύμφωνα με τα δημοσιευμένα στοιχεία της Eurostat που αφορούν το έτος 2010 για την Ελλάδα. Βάσει αυτών των δεδομένων ανά ηλικιακή κατανομή και φύλο, εφαρμόζεται κατάλληλη μέθοδος εξομάλυνσης, κατασκευάζοντας εκ νέου έναν εξομαλυμένο πίνακα επιβίωσης.

Λόγω της χρησιμότητας των πινάκων επιβίωσης για βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες προβλέψεις, γίνεται αναφορά στις πληθυσμιακές προβολές. Οι πληθυσμιακές προβολές είναι απαραίτητες τόσο για τις πληθυσμιακές αναλύσεις όσο και για τους οικονομικούς και κοινωνικούς σχεδιασμούς. Τέλος, η παρούσα μελέτη στοχεύει στη δυναμική προσέγγιση της κατασκευής και εξομάλυνσης των πινάκων θνησιμότητας. Η μεθοδολογία της μπορεί να φανεί χρήσιμη στην εφαρμογή δημογραφικών υποθέσεων και σε περαιτέρω έρευνα στην αναλογιστική επιστήμη.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εννοιολογικό Πλαίσιο Οριοθέτησης

Με τον όρο Δημογραφία εννοούμε την περιγραφή των ανθρώπινων πληθυσμών. Το περιεχόμενό της είναι κατά πολύ ευρύτερο από την ετυμολογική της σημασία και περιλαμβάνει όχι μόνο το κάθε τι που έχει σχέση με την περιγραφή των ανθρώπινων πληθυσμών, αλλά και το σύνολο των ερευνών που έχουν ως αντικείμενο τη μέτρηση των σχέσεων και τον καθορισμό των νόμων στους οποίους υπακούουν τα πληθυσμιακά φαινόμενα.

Η Δημογραφία, τόσο κατά την περιγραφική εξέταση των ανθρώπινων πληθυσμών όσο και κατά τις γινόμενες έρευνες στον τομέα της, χρησιμοποιεί κατά κανόνα στατιστικές μεθόδους. Η ιστορική της εξέλιξη στάθηκε παράλληλη με την αντίστοιχη εξέλιξη της Στατιστικής και πιο συγκεκριμένα της Αναλογιστικής Στατιστικής της οποίας οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται από τους αναλογιστές όπως θα δούμε και παρακάτω. Ένα μεγάλο πεδίο εφαρμογής των μεθόδων της «Δημομετρίας» και ειδικότερα όσον αφορά τη θνησιμότητα απασχολούν εκτός της Αναλογιστικής Επιστήμης και την Επιδημιομετρία και τη βιοστατιστική έρευνα.

Το πρώτο βήμα για τη μελέτη της δομής και της εξέλιξης ενός πληθυσμιακού συνόλου είναι η συλλογή στατιστικών δεδομένων που αφορούν τον πληθυσμό αυτό. Στη συνέχεια τα δεδομένα αυτά ταξινομούνται και παρουσιάζονται με την εφαρμογή τεχνικών της Περιγραφικής Στατιστικής (κατασκευή πινάκων και διαγραμμάτων, υπολογισμός δεικτών), ώστε ο ερευνητής να αποκτήσει μια εικόνα της μορφής αυτών των δεδομένων. Τέλος, τα δεδομένα αυτά αναλύονται έτσι ώστε να δοθούν απαντήσεις στα ερωτήματα και στις υποθέσεις που θέτει ο ερευνητής, με την εφαρμογή στατιστικών υποδειγμάτων για την περιγραφή δημογραφικών φαινομένων, την κατασκευή πινάκων επιβίωσης, όπου και θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία.

1.2 Πηγές Πληροφόρησης και Πληθυσμός

Για τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων που αφορούν τον πληθυσμό υπάρχουν διάφορες πηγές όπου μπορούμε να αντλήσουμε τα στοιχεία, οι οποίες διακρίνονται σε στατικές και δυναμικές. Οι δημογραφικές συλλογές στατικού χαρακτήρα έχουν ως αντικείμενο τον καθορισμό της φυσιογνωμίας ενός ανθρωποσύνολου σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, ενώ αντίθετα οι δημογραφικές συλλογές με δυναμικό χαρακτήρα έχουν ως αντικείμενο την παρακολούθηση των μεταβολών του ίδιου ανθρωποσύνολου και των χαρακτηριστικών του στο χρόνο.

Οι πηγές πληροφόρησης έχουν ως κύρια αποστολή την παροχή επαρκών και αξιόπιστων στοιχείων ποσοτικής και ποιοτικής φύσεως. Γι αυτό, λοιπόν, η εκάστοτε κεντρική κρατική στατιστική υπηρεσία, ασχολείται συστηματικά με όλες τις φάσεις του κυκλώματος της πληροφόρησης, όπως από την επισήμανση των αναγκών σε στατιστική ενημέρωση και γνώση μέχρι τη συγκέντρωση, την επεξεργασία, τη δημοσίευση, τη γνωστοποίηση και τη διακίνηση του στατιστικού υλικού στους ενδιαφερόμενους χρήστες και φορείς, παράγοντες που θεωρούμε ως επίσημες στατιστικές.

Οι στατιστικές αυτές στηρίζονται σε κάποιες Αρχές Στατιστικής Δεοντολογίας οι οποίες συνοπτικά είναι οι ακόλουθες: αμεροληψία, αξιοπιστία, διαφάνεια, εμπιστευτικότητα, αποτελεσματικότητα, καταλληλότητα και συγκρισιμότητα.

Οι βασικές πηγές άντλησης στατιστικών δεδομένων για τις ανάγκες της πληθυσμιακής ανάλυσης είναι οι εξής:

- οι απογραφές πληθυσμού
- οι ληξιαρχικές καταγραφές
- τα μητρώα πληθυσμού και
- οι ειδικές δειγματοληπτικές έρευνες.

Η βασικότερη πηγή συλλογής εγκάρσιων δεδομένων που αφορούν το μέγεθος και τη σύνθεση του πληθυσμού και έχει στατικό χαρακτήρα είναι η *απογραφή του πληθυσμού*. Η απογραφή προϋποθέτει την καθολική και ταυτόχρονη καταγραφή όλων όσων βρίσκονται κατά την ημέρα διεξαγωγής της σε ένα οριοθετημένο γεωγραφικό χώρο, που συνήθως είναι η εθνική επικράτεια και οι διοικητικές υποδιαιρέσεις της. Οι απογραφές πρέπει να επαναλαμβάνονται με κανονικότητα στο χρόνο, να γίνονται σε τακτές περιόδους, όπου υπάρχει διεθνούς σχεδόν αποδοχή.

Στην Ελλάδα η απογραφή γίνεται κατά τα έτη που λήγουν σε 1, δηλαδή το 2001 και το 2011 καθώς η περίοδος των απογραφών είναι δεκαετής. Γενικά, από την απογραφή επιδιώκεται η εξακρίβωση του πληθυσμού της εκάστοτε χώρας τη δεδομένη χρονική στιγμή. Ο πληθυσμός διακρίνεται σε νόμιμο και πραγματικό τη συγκεκριμένη στιγμή και η σχέση που τους συνδέει είναι η ακόλουθη:

(νόμιμος πληθυσμός) = + (πραγματικός πληθυσμός) – (αλλοδαποί) + (προσωρινά απόντες σε άλλες χώρες) + (διπλωματικές & στρατιωτικές αποστολές σε άλλες χώρες)[1] .

Επιπλέον, για τη συλλογή στατιστικών δεδομένων χρησιμοποιούμε τα μητρώα πληθυσμού, όπου υπάρχουν καταχωρημένα στοιχεία των πολιτών σε ατομικό και οικογενειακό επίπεδο και αντικατοπτρίζουν την τρέχουσα πληθυσμιακή κατάσταση του υπόψη χώρου. Στην Ελλάδα λειτουργούν διάφορα επίσημα μητρώα πληθυσμού για τις ανάγκες του πολυδιάστατου μηχανισμού της δημόσιας διοίκησης τα οποία συγκεντρώνονται σε διάφορους δημόσιους φορείς για την κάλυψη των ειδικών αναγκών τους (μητρώα αρρένων, εκλογικά μητρώα, δηματολόγια κλπ).

Εκτός από τα επίσημα στοιχεία απογραφών, και επίσημων καταγραφών, συμπληρωματική πηγή δημογραφικών δεδομένων αποτελούν και οι ειδικές δειγματοληπτικές έρευνες οι οποίες διεξάγονται για διάφορους σκοπούς όπως : να καλύψουν τις ελλείψεις ή/και την ανυπαρξία άλλων πηγών πληροφόρησης, ιδιαίτερα σε υποανάπτυκτες χώρες, να ελέγξουν την αξιοπιστία των κύριων πηγών, να υποκαταστήσουν τις απογραφές πληθυσμού όταν η δαπάνη της απογραφής είναι αδύνατη, να συλλέξουν συμπληρωματικά στοιχεία για τις ανάγκες ειδικών δημογραφικών διερευνήσεων (π.χ. έρευνες εργατικού δυναμικού, έρευνες διανομής εισοδήματος, δημοσκοπήσεις, έρευνες εκλογικής συμπεριφοράς κλπ.).

Τέλος, μια από τις σπουδαιότερες πηγές συλλογής δημογραφικών στοιχείων είναι οι ληξιαρχικές καταγραφές. Πρόκειται για τις καταγραφές που

[1] Παπαδάκης, Μ.Ε, Τσίμπος, Κ.Χ (2004). Δημογραφική Ανάλυση: Αρχές-Μέθοδοι-Υποδείγματα. Αθήνα:Α. Σταμούλης

συνιστούν την κύρια και στις περισσότερες χώρες τη μοναδική πηγή άντλησης πληροφοριών σχετικά με τη φυσική κίνηση του πληθυσμού. Η φυσική κίνηση του πληθυσμού αποτελεί την κύρια συνιστώσα της δημογραφικής εξέλιξης και αφορά γεγονότα βιολογικής προέλευσης (γεννήσεις, θάνατοι) αλλά και γεγονότα κοινωνικής φύσης (γάμοι, διαζύγια) που επενεργούν θετικά ή αρνητικά στη διαμόρφωση της κίνησης αυτής. Στη συγκεκριμένη εργασία θα αναφερθούμε στα γεγονότα βιολογικής προέλευσης και συγκεκριμένα στους θανάτους, όπου μέσω των ληξιαρχικών πράξεων θανάτου, καταρτίζεται η συγκεκριμένη πληροφορία.

1.3 Είδη και Διόρθωση Δημογραφικών Σφαλμάτων

Είναι προφανές ότι η αξία και η χρησιμότητα των ερευνητικών ευρημάτων και των πληθυσμιακών εκτιμήσεων εξαρτώνται άμεσα από την ποιότητα των αρχικών δεδομένων. Συνεπώς, προτού τα δημογραφικά στοιχεία χρησιμοποιηθούν επιβάλλεται να υποστούν ελέγχους φερεγγυότητας, ώστε να αντιμετωπιστούν και να εκτιμηθούν οι τυχόν αδυναμίες που θα προκύψουν. Τα σφάλματα των δημογραφικών στοιχείων διακρίνονται σε:

- σφάλματα κάλυψης, όπως η μη καταγραφή κάποιων γεγονότων που συμβαίνουν στη χώρα στο σύστημα των ληξιαρχικών καταγραφών, για παράδειγμα ορισμένοι θάνατοι βρεφών που συμβαίνουν λίγες ώρες ή μέρες μετά τη γέννηση τους
- σφάλματα περιεχομένου τα οποία οφείλονται κατά κύριο λόγο στην αδυναμία ή την απροθυμία των ερωτώμενων να απαντήσουν ή ακόμα και στην εσφαλμένη δήλωση πληροφοριών ακούσια ή εκούσια. Τέτοιου είδους σφάλματα σχετίζονται κατά κανόνα με τη στρογγυλοποίηση των ηλικιών ενώ σπανιότερα με τη μετατόπιση της ηλικίας ειδικότερα στους ηλικιωμένους
- σφάλματα δειγματοληψίας και εκτίμησης προκαλούνται αρχικά από το γεγονός ότι οι στατιστικές πληροφορίες συλλέγονται από ένα τμήμα και όχι από το σύνολο του πληθυσμού και κατά δεύτερον από τα μη δειγματοληπτικά σφάλματα τα οποία οφείλονται σε λόγους που σχετίζονται με την ατελή παρατήρηση των στατιστικών μονάδων.

Για την ανίχνευση και τη διόρθωση των δημογραφικών σφαλμάτων δεν υπάρχει τυποποιημένος και μοναδικός τρόπος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ηλικιακές ανακρίβειες καθώς η ηλικία όπως και το φύλο αποτελούν σημαντικές μεταβλητές που εμπλέκονται σε κάθε δημογραφική και αναλογιστική μελέτη.

Τα σφάλματα κάλυψης και περιεχομένου αντιμετωπίζονται μέσω τριών μεθοδολογικών προσεγγίσεων:

- τη διεξαγωγή μετά-απογραφικών ερευνών, δηλαδή την επανακαταμέτρηση των μελών των νοικοκυριών σε ένα δείγμα πληθυσμού λίγο μετά τη διεξαγωγή της απογραφής
- την αντιπαραβολή των απογραφικών εγγραφών με στοιχεία που προέρχονται από ανεξάρτητες πηγές πληροφόρησης και
- την εφαρμογή ειδικών τεχνικών και μεθόδων δημογραφικής ανάλυσης.

Μεταξύ των τελευταίων, όπου θα ασχοληθούμε εκτενώς σε αυτή την εργασία, η περισσότερη γνωστή είναι η μέθοδος επιβίωσης κοορτών κατά τα μέσο-απογραφικά διαστήματα και με χρονολογική ανάλυση προσθέτοντας και τεχνικές εξομάλυνσης των δεδομένων, δηλαδή υπολογισμός αστάθμητων και σταθμικών κινητών μέσων, εφαρμογή μαθηματικών υποδειγμάτων, γραφικές εξομαλύνσεις κλπ. που θα δούμε αναλυτικά σε παρακάτω κεφάλαια.

1.4 Παράγοντες ερευνητικού ενδιαφέροντος

Παρακολουθώντας τα δημοσιευμένα στοιχεία ανά χώρα αλλά και εσωτερικά σε κάθε χώρα τόσο στο δημογραφικό πληθυσμό όσο και σε δείγμα πληθυσμού ασφαλισμένων από ασφαλιστικές εταιρείες παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ όσον αφορά το επίπεδο και τα πρότυπα θνησιμότητας μεταξύ των διαφόρων πληθυσμιακών ομάδων. Αυτό συμβαίνει διότι το φαινόμενο της θνησιμότητας επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες που πρέπει να λάβουμε υπόψη κατά τη μελέτη και την ερμηνεία μιας έρευνας.

Οι κυριότεροι παράγοντες κατηγοριοποιημένοι είναι οι ακόλουθοι:

- Χαρακτηριστικά του θανόντος, όπως ηλικία, φύλο, οικογενειακή κατάσταση, τόπος διαμονής, επάγγελμα, εκπαίδευση, αστικότητα, υπηκοότητα, αιτία θανάτου.

- Χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος, όπως υψόμετρο, μόλυνση του περιβάλλοντος, διατροφή, ποιότητα νερού, συνθήκες νοικοκυριού, πρόσβαση στις υπηρεσίες υγείας.
- Χαρακτηριστικά της καταγραφής του γεγονότος, όπως η ημερομηνία συμβάντος, το μέρος που συνέβη ο θάνατος (κλινική, νοσοκομείο, ιδιωτική κατοικία, ίδρυμα, κλπ) και το άτομο που πιστοποίησε το θάνατο (θεράπων ιατρός ή άλλος ιατρός).

Πιο συγκεκριμένα, *η ηλικία* του ασφαλισμένου είναι ο σημαντικότερος παράγων θνησιμότητας. Ταυτόχρονα, η μεταβλητή αυτή, δηλαδή η δημογραφική ηλικία, είναι ένα ουσιώδες στοιχείο της οργάνωσης της κοινωνικής ζωής. Στις αναπτυγμένες χώρες, όπου τα άτομα γνωρίζουν -κατά κανόνα!- την ημερομηνία γεννήσεώς τους, θα μπορούσαμε να προβούμε σε μια ταξινόμησή τους κατά ακριβή ηλικία.

Ειδικότερα, στην δημογραφία χρησιμοποιούνται οι κάτωθι προσδιορισμοί της ηλικίας (ακριβής ηλικία η ηλικία σε ακριβή έτη, ηλικία σε συμπληρωμένα έτη, τελική ηλικία στα τελευταία γενέθλια **)**.

- *Ηλικία σε ακριβή έτη:* Η ηλικία ενός ατόμου που υπολογίζεται ως διαφορά μεταξύ της τρέχουσας ημερομηνίας (έτος, μήνας, ημέρα) και της ημερομηνίας της γέννησης του.
- *Ηλικία σε συμπληρωμένα έτη:* Εκφράζεται σαν η ηλικία κατά την τελευταία επέτειο γενεθλίων, προσμετρούμενη στην διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους. Πρόκειται επομένως για μια στρογγυλοποίηση της ηλικίας «προς τα κάτω».
- *Ηλικία στα τελευταία γενέθλια:* Εκφράζεται σαν η ηλικία κατά την τελευταία επέτειο γενεθλίων για τα άτομα μιας γενεάς. Πρόκειται και εδώ επομένως για μια στρογγυλοποίηση «προς τα κάτω».
- *Ηλικία τελική (ηλικία που επιτεύχθηκε εντός ενός ημερολογιακού έτους, ηλικία σε τρέχοντα έτη):* Η ηλικία που συμπληρώνουν τα άτομα μιας γενεάς στη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους η μιας σειράς ημερολογιακών ετών. Στην περίπτωση που προσμετράτε στην διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους,

προκύπτει ως διαφορά μεταξύ του εξεταζόμενου έτους και του έτους γέννησης.

Το φύλο και αυτό με τη σειρά του είναι απαραίτητη δημογραφική μεταβλητή καθώς διάφορες αναλογιστικές μελέτες κατά καιρούς έχουν δείξει ότι οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερο δείκτη νοσηρότητας από τους άνδρες αλλά παρουσιάζουν μια αισθητά χαμηλότερη θνησιμότητα και αυτό συμβαίνει σε κάθε ηλικία. Ακόμα και ο τρόπος διαβίωσης επηρεάζει τη θνησιμότητα εξαιτίας των αυξημένων κινδύνων που έχει η εκάστοτε περιοχή που διαμένουμε, το επάγγελμα και οι ενασχολήσεις που μπορεί να έχουμε καθώς επίσης ο χαρακτήρας και οι συνήθειες μας.

Σε κάποιες χώρες, όπως ΗΠΑ και Αγγλία, υπάρχουν ξεχωριστοί πίνακες θνησιμότητας για καπνιστές και μη καπνιστές. Τέλος, στις ασφαλιστικές εταιρείες δίνουν μεγάλη σημασία στην υγιεινή κατάσταση του υποψήφιου ασφαλισμένου καθώς ελέγχεται με σειρά υγειονομικών εξετάσεων (Medical), που κλιμακώνονται ανάλογα με την ηλικία (ο σημαντικότερος παράγοντας) και το ασφαλισμένο κεφάλαιο, είτε σε περιπτώσεις καλυπτόμενων κεφαλαίων μικρού ύψους και ατόμων μικρής ηλικίας με δήλωση καλής υγείας και μόνο (Non-Medical).

1.5 Θνησιμότητα

Η θνησιμότητα είναι ένα βιολογικό φαινόμενο με πολλές κοινωνικές και οικονομικές προεκτάσεις. Διαφοροποιείται ανάλογα με το φύλο, την ηλικία, την οικογενειακή κατάσταση, τον τόπο διαμονής, διάφορες επιβλαβείς συνήθειες (κατανάλωση αλκοόλ, κάπνισμα), την διατροφή, τις επικρατούσες συνθήκες ιατροφαρμακευτικής περίθαλψης και την κληρονομικότητα.

Η θνησιμότητα είναι ένας από τους τρεις παράγοντες. Οι άλλοι δύο είναι η γεννητικότητα και η μετανάστευση, οι οποίοι διαμορφώνουν το μέγεθος και τη σύνθεση κάθε πληθυσμού. Αποτελεί πρωταρχικής σπουδαιότητας δημογραφικό φαινόμενο που ιστορικά έχει παρουσιάσει σαφείς τάσεις καθοδικής εξέλιξης σε όλες τις ανθρώπινες κοινωνίες, επηρεάζοντας αποφασιστικά τόσο το μέγεθος και την αύξηση όσο και την κατά ηλικία σύνθεση του πληθυσμού. Είναι δηλαδή ένα σημαντικό δημογραφικό φαινόμενο το οποίο επηρεάζει την εξέλιξη και τη μορφή του πληθυσμού.

Το επίπεδο και η διαχρονική πορεία της θνησιμότητας εξαρτώνται και επηρεάζονται από ένα ευρύ φάσμα παραγόντων βιολογικής και περιβαλλοντικής προέλευσης. Οι παράγοντες αυτοί συναρτώνται οργανικά και λειτουργικά με τη διαδικασία της οικονομικής ανάπτυξης και του κοινωνικού εκσυγχρονισμού, η οποία εξασφάλισε καλύτερες συνθήκες διαβίωσης του πληθυσμού και συνέβαλε στη θεαματική εξέλιξη της τεχνολογίας και της ιατρικής επιστήμης καθώς και στην αναβάθμιση των υπηρεσιών υγείας.

Οι μετρήσεις της θνησιμότητας έχουν τεράστιο ενδιαφέρον από την πλευρά της πολιτείας γιατί έτσι γίνονται μακροχρόνια σχέδια για την υγεία, την εργασία και τη κοινωνική ασφάλιση. Οι αλλαγές στα ποσοστά θνησιμότητας στην πάροδο του χρόνου πρέπει να μετρηθούν και να προβλεφθούν με ακρίβεια, προκειμένου να ενημερωθούν διάφοροι επιστημονικοί κλάδοι, όπως για παράδειγμα στον τομέα των ασφαλίσεων ζωής και των συνταξιοδοτικών (ιδιωτικών και κοινωνικών) σχημάτων. Ειδικότερα, στην ασφαλιστική επιστήμη θα πρέπει να μετρηθούν καθώς γίνεται εκτίμηση της πιθανολογούμενης μέσης διάρκειας ζωής και άλλων χρήσιμων βιομετρικών συναρτήσεων.

Ο θάνατος ως δημογραφικό γεγονός είναι αναπόφευκτος, δηλαδή είναι βέβαιος ότι θα συμβεί αλλά δεν γνωρίζουμε το πότε θα συμβεί ακριβώς και από ποια αιτία θα προκληθεί, και μη επαναλαμβανόμενος, δηλαδή θα συμβεί μια και μόνο φορά σε όλους τους ανθρώπινους οργανισμούς.

Σύμφωνα με το σύγχρονο ορισμό της Παγκόσμιας Οργάνωσης υγείας, «ο θάνατος είναι η διαρκής και οριστική εξαφάνιση κάθε ένδειξης ζωής, η οποία επέρχεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετά τη γέννηση ζώντος ανθρώπινου οργανισμού». Από αυτό τον ορισμό εξαιρείται ο θάνατος εμβρύου. Γενικά, οι θάνατοι, σα δημογραφικό φαινόμενο, έχουν, κάτω από οποιαδήποτε άποψη και αν εξεταστούν, μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον.

Το ενδιαφέρον αυτό, που μπορεί να είναι δημογραφικό, κοινωνικό, βιολογικό, οικονομικό και καλύπτει συχνά όχι μόνο τους θανάτους που επέρχονται μετά τη γέννηση, που διακρίνονται στους θανάτους εμβρύου αλλά και στους βρεφικούς θανάτους, αλλά και τους θανάτους που επέρχονται κατά την προγεννητική θνησιμότητα, δηλαδή στις γεννήσεις νεκρών συνυπολογίζονται και οι αποβολές που έχουν λάβει χώρα την ίδια χρονική περίοδο και στον ίδιο βιότοπο.

Ο θάνατος εμβρύου ή αλλιώς γέννηση νεκρού ορίζεται ως η γέννηση νεογνού το οποίο δεν ανέπνευσε κατά την έξοδό του από το σώμα της μητέρας του και επήλθε μετά από κύηση 28 πλήρων εβδομάδων και άνω, πριν από την πλήρη έξοδο και τον αποχωρισμό του από τη μητέρα. Με τον όρο βρεφικό θάνατο εννοούμε το θάνατο που επέρχεται σε ένα βρέφος πριν συμπληρώσει το πρώτο έτος της ζωής του.

Τέλος, ο θάνατος γυναίκας που συνδέεται με την εγκυμοσύνη, την κύηση και τις επιλόχειες συνθήκες καλείται μητρικός θάνατος. Μοναδική πηγή πληροφόρησης των στοιχείων θνησιμότητας όπως έχουμε ήδη προαναφέρει είναι οι ληξιαρχικές καταγραφές της εκάστοτε χώρας, όπου συγκεντρώνονται όλα τα διεθνή στοιχεία και δημοσιεύονται από τον ΟΗΕ καθώς και σε ορισμένα δημοσιεύματα από τη Eurostat[2].

1.6 Μετρήσεις ή Δείκτες Θνησιμότητας

Τα δημογραφικά μέτρα αυτά που μετρούν συγκεφαλαιωτικά ή αναλυτικά το επίπεδο της θνησιμότητας αποτελούν μια σειρά από χρονολογικούς ή ετήσιους δείκτες. Οι δείκτες αυτοί στη γενική τους μορφή υπολογίζονται άμεσα από τα διαθέσιμα στοιχεία τα οποία συνήθως είναι:

- ο αριθμός των θανάτων που παρέχεται κατά το έτος παρατήρησης
- η ηλικία σε συμπληρωμένα έτη (βλέπε ενότητα 1.4) και
- το μέγεθος του πληθυσμού που αντλείται είτε από τις απογραφές του πληθυσμού ή προέρχεται από εκτιμήσεις
- το μέγεθος ενός πρότυπου πληθυσμού ή μιας σειράς πρότυπων δεικτών θνησιμότητας (οι προτυποποιημένοι δείκτες απλώς αναφέρονται σαν έννοια δίχως βαθύτερη ανάλυση).

Ορισμένοι βασικοί δείκτες που χρησιμοποιούμε για τις διάφορες μετρήσεις μας είναι οι παρακάτω:

- *Ακαθάριστος Συντελεστής Θνησιμότητας (Crude Death Rate),* ο οποίος υπολογίζεται σαν τον λόγο του συνόλου των θανάτων (D) προς το μέσο

[2] http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/themes

πληθυσμό της χρονικής περιόδου αναφοράς $\left(\overline{P}\right)$. Πολλαπλασιασμένος με το 1000 εκφράζει το μέσο αριθμό θανάτων στα 1000 άτομα του πληθυσμού. Μπορεί να υπολογιστεί για όλες τις ηλικίες, για όλες τις πιθανές αιτίες (αρκεί να υπάρχουν τα στατιστικά στοιχεία) και για τα δυο φύλα ξεχωριστά.

$$CDR_t = \frac{D_t}{\overline{P}_t} * 1000$$

- *Ο Ειδικός Κατά Ηλικία Συντελεστής Θνησιμότητας (Age-specific Mortality Rate),* ο οποίος υπολογίζεται από τον λόγο του αριθμού θανάτων ατόμων ηλικίας [x, x+n) που συνέβησαν το έτος t, προς το μέσο πληθυσμό ατόμων του ίδιου διαστήματος ηλικίας το ίδιο έτος $\left({}_n^t\overline{P}_x\right)$.

$${}_n^t m_x = \frac{{}_n^t D_x}{{}_n^t\overline{P}_x}$$

Πολλαπλασιασμένος με το 1000 εκφράζει το μέσο αριθμό θανάτων στα 1000 άτομα του πληθυσμού ηλικιών του διαστήματος [x, x+n) . Σημειώνεται ότι ο δείκτης n κάτω αριστερά πχ (${}_nP$, ${}_nD$) δεν αναφέρεται στη γενεά αλλά στο εύρος του διαστήματος ηλικιών, δηλαδή σε ομάδες ηλικιών γιατί συνήθως αναφερόμαστε σε δεδομένα περιόδου αν και συνήθως είναι ενός έτους. Μπορεί να υπολογιστεί για όλες τις ηλικίες, για όλες τις πιθανές αιτίες (αρκεί να υπάρχουν τα στατιστικά στοιχεία) και για τα δυο φύλα ξεχωριστά.

- *Δείκτης Βρεφικής Θνησιμότητας (Infant Mortality Rate),* ο οποίος υπολογίζεται από το λόγο των βρεφικών θανάτων που σημειώθηκαν στη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους (D_{0-365}) προς τον αριθμό των γεννήσεων ζώντων (B) του έτους αυτού πολλαπλασιαζόμενος με το 1000

$$IMR = \frac{D_{0-365}}{B} * 1000$$

Συνεπώς ο δείκτης αυτός εκφράζει την αναλογία των θανάτων βρεφών κάτω του έτους σε 1000 γεννήσεις ζώντων σε ετήσια βάση.

Για τις ανάγκες της μέτρησης του δείκτη βρεφικής θνησιμότητας ώστε να έχουμε πιο ακριβείς αποτελέσματα καθώς έχουμε διαχωρισμό των θανάτων του πρώτου έτους ανά εβδομάδα και ανά ημέρες υπολογίζουμε τους εξής συντελεστές (δείκτες):

- *Συντελεστής πρώιμης νεογνικής θνησιμότητας:* ο λόγος των θανάτων της πρώτης εβδομάδας ζωής προς τις γεννήσεις του ημερολογιακού έτους αναφοράς.
- *Συντελεστής όψιμης νεογνικής θνησιμότητας:* ο λόγος των θανάτων της $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ εβδομάδας ζωής προς τις γεννήσεις του ημερολογιακού έτους αναφοράς.
- *Συντελεστής νεογνικής θνησιμότητας:* το άθροισμα των δυο προηγουμένων.
- *Συντελεστής περιγεννητικής θνησιμότητας:* ο λόγος των γεννήσεων νεκρών και θανάτων της πρώτης εβδομάδας ζωής προς τις γεννήσεις του ημερολογιακού έτους αναφοράς.

1.7 Συναρτήσεις Θνησιμότητας

Ένα άτομο χαρακτηρίζεται ηλικίας x (όπου x φυσικός αριθμός) εάν και μόνο αν η πραγματική ακριβής ηλικία του είναι ένας αριθμός που ανήκει στο διάστημα των πραγματικών αριθμών [x,x+1). Θεωρητικά, η μεταβλητή x μπορεί να πάρει τιμές από το μηδέν μέχρι το άπειρο. Συνήθως στην αναλογιστική πρακτική θεωρούμε ότι το άπειρο ορίζεται ως $\omega \approx 110$ ή 120. Μια πολύ σημαντική συνάρτηση στη θεωρία θνησιμότητας είναι η συνάρτηση επιβίωσης S(x).

Η συνάρτηση επιβίωσης S(x) αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας ακριβώς μηδέν (0) να επιβιώσει μέχρι την ηλικία x, δηλαδή Pr(0)=S(x) άτομο ηλικίας ακριβώς 0 να επιβιώσει μέχρι την ηλικία ακριβώς x. Επίσης γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι S(0) = 1 και S(ω) = 1, όπου ω είναι η καταληκτική ηλικία του πίνακα και ότι η S(x) είναι μια συνεχής συνάρτηση και γνησίως φθίνουσα. Οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνάρτηση επιβίωσης.

Έστω T η συνεχής (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει την διάρκεια ζωής ενός ατόμου ή την μελλοντική ζωή ενός νεογέννητου ή ισοδύναμα εκφράζει την ανθρώπινη ηλικία στον θάνατο. Και ως Kx να ορίσουμε τον ακέραιο αριθμό ετών που θα ζήσει ο (x). Τα ακέραια χρόνια απομένουσας ζωής είναι μια διακριτή (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή και διαφέρει από την Tx κατά το ότι η Kx αγνοεί οποιοδήποτε κλάσμα έτους ζήσει πριν από το θάνατο ο (x). Έτσι, έχουμε ότι Kx = [Tx] και Tx = Kx + Sx όπου η διακριτή τυχαία μεταβλητή Kx παίρνει ακέραιες τιμές από το σύνολο {0, 1, 2, …,ω-x-1} και η συνεχής τυχαία μεταβλητή Sx παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1), δηλαδή 0≤Sx<1, και η Sx αντιπροσωπεύει το κλάσμα έτους που ζει ο (x) κατά τη χρονιά του θανάτου του.

Ακολούθως μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της διάρκειας ζωής της τυχαίας μεταβλητής T ως $F_T(x) := P(T \leq x)$ και $\forall\ 0 \leq x \leq \omega$ να δηλώνει την πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει έως την ηλικία x. Ισχύει δηλαδή το εξής:

$$F_T(0) = P(T \leq 0) = P(T = 0) = 0$$

$$F_T(\omega) = P(T \leq \omega) = 1$$

$$S_T(x) = 1 - F_T(x)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας της διάρκειας ζωής της τυχαίας μεταβλητής T ορίζεται ως:

$$f_T(x) = \frac{d}{dx} F_T(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x + dx)}{dx} \ \forall\ 0 \leq x \leq \omega$$

με $f_T(x) * dx \cong F_T(x + dx) - F_T(x) = P(x < T \leq x + dx)$ να δηλώνει την πιθανότητα ότι ο θάνατος ενός νεογέννητου θα συμβεί στο απειροελάχιστο χρονικό-ηλικιακό διάστημα (x, x+dx). Η πιθανότητα δηλαδή ότι ένα νεογέννητο θα αποβιώσει μεταξύ των ηλικιών x_1 και x_2 είναι

$$P(x_1 \leq T \leq x_2) = S_T(x_1) - S_T(x_2)\ \forall\ \ x_1 < x_2$$

και η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ένα νεογέννητο θα αποβιώσει μεταξύ των ηλικιών x_1 και x_2 δεδομένου επιβίωσης στην ηλικία x_1 είναι

$$P(x_1 \leq T \leq x_2 / T > x_1) = \frac{S_T(x_1) - S_T(x_2)}{S_T(x_1)}\ \forall\, x_1 < x_2$$

Σημειώνεται ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις μπορούν να υπολογιστούν για οποιαδήποτε ηλικία θέλουμε να δούμε την πιθανότητα αποβίωσης που υπάρχει μεταξύ των ηλικιών x_1 και x_2.

Μια από τις βασικότερες συναρτήσεις τόσο στην ανάλυση επιβίωσης όσο και στη δημογραφία είναι η συνάρτηση κινδύνου (hazard function) της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Τ όπου την ορίζουμε ως συνάρτηση κινδύνου και συμβολίζεται και ισούται με το όριο:

$$h_T(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x + dx / T > x)}{dx} \ \forall \, x \geq 0$$

Στην αναλογιστική επιστήμη, τη συνάρτηση κινδύνου την ονομάζουμε ένταση ή ισχύς θνησιμότητας (force of mortality), για άτομα ηλικίας ακριβώς x, και την συμβολίζουμε ως

$$h_T(x) \equiv \mu_T(x) \equiv \mu_x$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

$$\mu_x = \lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x + dx)}{P(T > x) * dx}$$

αλλά επειδή όμως ισχύει:

$$f_T(x) = \frac{dF_T(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x + dx)}{dx}$$

καταλήγουμε ότι:

$$\mu_x = \frac{f_T(x)}{P(T > x)} = \frac{f_T(x)}{S_T(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} S_T(x)}{S_T(x)} = -\frac{d}{dx} ln\big(S_T(x)\big)$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι:

$$S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu u * du}$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω εξισώσεις ότι η ένταση θνησιμότητας έχει ερμηνεία δεσμευμένης μάζας πιθανότητας. Για κάθε ηλικία x, η ένταση θνησιμότητας δίνει την τιμή της δεσμευμένης μάζας πιθανότητας της διάρκειας ζωής στην ακριβή ηλικία x, δεδομένου επιβίωσης ως την ηλικία αυτή, και έτσι το γινόμενο $\boldsymbol{\mu_x * d_x}$ δηλώνει την πιθανότητα ότι άτομο ηλικίας ακριβώς x (δηλαδή άτομο που έχει ζήσει ως την ηλικία x) θα αποβιώσει αμέσως μετά στο διάστημα dx, δηλαδή μεταξύ των ηλικιών (x, x+dx). Η συνάρτηση κινδύνου όμως είναι ρυθμός και όχι πιθανότητα όπως η ένταση για αυτό μπορεί και να πάρει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας.

Στην αναλογιστική επιστήμη την δεσμευμένη πιθανότητα ή την δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης τη συμβολίζουμε ως ${}_tp_x$ που ερμηνεύεται ως η πιθανότητα ότι άτομο ηλικίας *x* θα επιβιώσει *t* χρόνια. Ισοδύναμα, ως δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης διάρκειας ζωής της τυχαίας μεταβλητής Τ μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση επιβίωσης απομένουσας ζωής (της τυχαίας μεταβλητής T_x) που συμβολίζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ενός ατόμου ως εξής:

$$ {}_tp_x = S_{Tx}(t) = P(T_x > t) = P(T > x + t | T > x) \qquad \forall \ 0 \leq t \leq \omega - x $$

δηλαδή την πιθανότητα άτομο ηλικίας x να επιβιώσει τουλάχιστον t χρόνια. Η σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις κατανομής τόσο της τυχαίας μεταβλητής T όσο και της Tx είναι η:

$$ F_x(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} $$

ενώ η αντίστοιχη σχέση για τις συναρτήσεις επιβίωσης είναι η :

$$ S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} $$

Η συνάρτηση πυκνότητας της Tx δίνεται από τον γνωστό τύπο του ορισμού:

$$ f_x(t) = \frac{\theta}{\theta t} F_x(t) $$

και συνδέεται με την ένταση θνησιμότητας μέσω της σχέσης:

$$ f_x(t) = {}_tp_x * \mu_{x+t} $$

οπότε όπως έχουμε ήδη αναφέρει ισχύει:

$$ \mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{{}_tp_x} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)} $$

Από την παραπάνω σχέση που ορίσαμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως εξής

$$ S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu u * du} $$

καταλήγουμε ότι: $$ {}_np_x = S_{Tx}(n) = \frac{S_T(x+n)}{S_T(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+n} \mu u * du}}{e^{-\int_0^{x} \mu u * du}} = e^{-\int_0^{x+n} \mu u * du} $$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής διάρκειας ζωής η οποία συμβολίζεται ως ${}_tq_x$,δηλαδή την πιθανότητα ότι το άτομο ηλικίας x θα πεθάνει μέσα σε t χρόνια (θα πεθάνει δηλαδή πριν φτάσει στην ηλικία x+t) και είναι:

$$ {}_tq_x = F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T \leq x + t | T > x) \qquad \forall \ 0 \leq t \leq \omega - x $$

Φυσικά θα ισχύουν οι ιδιότητες $F_{Tx}(0) = 0$ και $F_{Tx}(\omega\text{-}x) = 1$ καθώς και η σχέση

$${}_tp_x + {}_tq_x = 1$$

$$\forall t \geq 0$$

Μια από τις σημαντικότερες συναρτήσεις που ασχολείται η αναλογιστική επιστήμη είναι η προσδόκιμη ζωή ατόμου ηλικίας x ,δηλαδή είναι η μαθηματική ελπίδα της απομένουσας ζωής Tx, ατόμου ηλικίας x, ο αναμενόμενος μελλοντικός χρόνος μέχρι το θάνατο του (x). Συμβολίζεται ως $\dot{e}_x$ και ισχύει η εξής ισότητα:

$$\dot{e}_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t * f_{T_x}(t)\,dt = \int_0^{\omega-x} t * {}_tp_x * \mu_{x+t}\,dt$$

Δεδομένου από πριν μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει:

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x} = \frac{-\frac{\theta}{\theta t}\,{}_tp_x}{{}_tp_x} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta t}\,{}_tp_x = -{}_tp_x * \mu_{x+t}$$

συνεπώς αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στην παραπάνω καταλήγουμε ότι η προσδόκιμη ζωή ισούται με:

$$\dot{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευτεί διαισθητικά ως εξής: η πιθανότητα ότι η στοιχειώδης χρονική περίοδος από την διάρκεια t έως την διάρκεια $t+dt$ (μήκους dt) θα προστεθεί στο χρόνο ζωής του (x) είναι τελικά ${}_tp_x$ (η πιθανότητα επιβίωσης στη διάρκεια t). Τότε ο συνολικός αναμενόμενος μελλοντικός χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x είναι

$$\dot{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt$$

Έτσι, ο μέσος αριθμός ετών που αναμένεται να ζήσει άτομο ηλικίας x είναι $\dot{e}_x$ οπότε η αναμενόμενη μέση ηλικία στον θάνατο ατόμων ηλικίας x είναι x + $\dot{e}_x$. Η αναμενόμενη μέση τιμή της διάρκειας ζωής, δηλαδή ή τιμή $\dot{e}_x$, γνωστή στη διεθνής βιβλιογραφία, και με τους όρους Μέσος Όρος Ζωής , Μέση Ζωή , Μέσος Χρόνος Επιβίωσης , Αναμενόμενη Ζωή ή Μέση Ζωή , και

Πλήρης Μέση (ή αναμενόμενη) Ζωή είναι ένα μέτρο κεντρικής τάσης των τιμών της διάρκειας ζωής ή ο μέσος όρος της κατανομής της διάρκειας ζωής.

Οι τιμές της αναμενόμενης ζωής εκφράζονται στις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται και οι τιμές της μεταβλητής της διάρκειας ζωής και ερμηνεύονται με τον ίδιο τρόπο που ερμηνεύονται οι τιμές της αναμενόμενης μέσης τιμής κάθε τυχαίας μεταβλητής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται συνοπτικά οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες των συναρτήσεων της θνησιμότητας μεταξύ τους που αναφέραμε παραπάνω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1: Σχέσεις μεταξύ των Ποσοτήτων f(t), F(t) ,S(t), h(t), H(t)

	f(t)	**F(t)**	**S(t)**	**h(t)**	**H(t)**
f(t)	-	F΄(t)	-S΄(t)	h(t)exp$\left(-\int_0^t h(u)du\right)$	H΄(t)$^{e^{-H(t)}}$
F(t)	$\int_0^t f(u)du$	-	1- S(t)	1- exp$\left(-\int_0^t h(u)du\right)$	$1-e^{-H(t)}$
S(t)	$\int_t^\infty f(u)du$	1-F(t)	-	exp$\left(-\int_0^t h(u)du\right)$	$e^{-H(t)}$
h(t)	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)du}$	$\frac{F'(t)}{1-F(t)}$	-(log S(t))΄	-	H΄(t)
H(t)	-log$\left(\int_t^\omega f(u)du\right)$	-log (1-F(t))	-log S(t)	$\int_0^t h(u)du$	-

1.8 Πίνακες Επιβίωσης / Θνησιμότητας

Ένα από τα βασικότερα θέματα της αναλογιστικής επιστήμης είναι η κατασκευή μοντέλων επιβίωσης (ή θνησιμότητας), όπως τα αποκαλούμε, τα οποία περιγράφουν το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας κάποιου πληθυσμού όπου πάνω σε αυτά στηρίζεται ο υπολογισμός διάφορων ασφαλιστικών ποσοτήτων όπως ασφάλιστρα , αποθεματικά κ.ο.κ τόσο στους δημόσιους ασφαλιστικούς φορείς όσο και στους ιδιωτικούς.

Ένας πίνακας επιβίωσης είναι μια στατιστική-αναλογιστική μέθοδος η οποία μας βοηθάει να εκφράσουμε συνολικά τις πιθανότητες επιβίωσης καθώς και τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας ομάδας ανθρώπων. Στον ιδιωτικό τομέα υπάρχει η ανάγκη της γνώσης και της εξέλιξης του πληθυσμού καθώς στον ασφαλιστικό κλάδο απαιτείται ο σχεδιασμός ασφαλιστικών προγραμμάτων και ο καθορισμός ασφαλίστρων και αποζημιώσεων.

Οι πίνακες θνησιμότητας χρησιμοποιούνται για ποικίλους σκοπούς, όπως στη δημογραφία για την πρόβλεψη πληθυσμών, στις ασφαλίσεις ζωής για τον υπολογισμό των μαθηματικών ασφαλίστρων καθώς και στον προσδιορισμό των εισφορών σε ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Οι πίνακες αυτοί χρησιμοποιούνται στην ανάλυση της θνησιμότητας του πληθυσμού στον οποίο αναφέρονται , καθώς και στην εκτίμηση της επιβίωσης του ίδιου πληθυσμού, αφού θνησιμότητα και επιβίωση συνδέονται άμεσα. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση της θνησιμότητας ή επιβίωσης μεταξύ δυο διαφορετικών πληθυσμών, όπως δημογραφικού και ασφαλίσιμου πληθυσμού.

Η μέθοδος ενός πίνακα θνησιμότητας είναι εφαρμόσιμη όχι μόνο στην ανάλυση της θνησιμότητας αλλά και σε πολλές άλλες μετρήσιμες διαδικασίες, εκτός από αυτές που έχουμε ήδη προαναφέρει, όπως στην κλινική μελέτη των ανθρώπων ή στις εργαστηριακές μελέτες των ζώων. Συνεπώς ο πίνακας θνησιμότητας εξελίχθηκε σε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τους αναλογιστές, τους βιολόγους, τους φυσικούς, τους δημογράφους, τους κατασκευαστές, τους ερευνητές δημόσιας υγείας και τους ερευνητές σε πολλά ακόμη πεδία.

Τα πλεονεκτήματα στη θεωρία πιθανοτήτων και της στατιστικής καθώς και οι ομοιότητες των πινάκων θνησιμότητας με τη θεωρία της αξιοπιστίας και της ανάλυσης επιβίωσης έκαναν εφικτή την παρουσίαση του πίνακα θνησιμότητας από την καθαρά στοχαστική σκοπιά μέσα σε ένα αυστηρά θεωρητικό πλάνο. Η ανάλυση του πίνακα θνησιμότητας αναδύθηκε σαν μια αυστηρή και ακριβής στατιστική μέθοδος.

1.8.1 Πίνακες Ανάλυσης Επιβίωσης

Ο πίνακας επιβίωσης (ή αλλιώς πίνακας θνησιμότητας), την ιδέα δημιουργίας του οποίου πρώτος συνέλαβε ο J. Graunt επιτρέπει την ακριβή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο «εξαφανίζονται» προοδευτικά τα μέλη γενεάς εξαιτίας της θνησιμότητας. Οι πίνακες επιβίωσης διακρίνονται σε:

α) Πίνακες επιβίωσης περιόδου (συγχρονική ανάλυση), οι οποίοι βασίζονται σε δεδομένα για τους κατά ηλικιακή ομάδα θανάτους μιας περιόδου (έτους, πενταετίας κ.τ.λ.) και στον κατά ηλικιακή ομάδα πληθυσμό στο μέσον της ίδιας περιόδου. Οι πίνακες αυτοί αποτελούν την αποτύπωση της κατά ηλικίας θνησιμότητας ενός πληθυσμού εντός μια συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Δεν αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη γενεά αλλά κατασκευάζονται από μια σύνθεση γενεών, δημιουργώντας πρόβλημα ομοιογένειας.

β) Πίνακες επιβίωσης γενεάς (διαγενεακή ανάλυση), οι οποίοι βασίζονται στους συντελεστές θνησιμότητας, οι οποίοι προκύπτουν από τη διαχρονική παρακολούθηση των μελών μιας γενεάς. Το είδος αυτό των πινάκων επιβίωσης προϋποθέτει ότι είμαστε σε θέση να παρακολουθήσουμε τη θνησιμότητα των ατόμων της συγκεκριμένης γενεάς από το σημείο εκκίνησης (γέννηση) μέχρι την εξαφάνισή της με το θάνατο και του τελευταίου μέλους της. Κατά συνέπεια, οι διαγενεακοί πίνακες επιβίωσης αποτελούν κατά κάποιο τρόπο το μέσο για την ιστορική περιγραφή της θνησιμότητας, αφού δεν είναι δυνατόν να υπολογισθούν πριν οι γενεές εξαφανιστούν ολοκληρωτικά (δηλαδή 100-110 περίπου χρόνια μετά τη γέννηση των μελών τους).

Οι πίνακες θνησιμότητας δημιουργούνται συνήθως ξεχωριστά για κάθε φύλο, λόγω των σημαντικά διαφορετικών κατά ηλικία επιπέδων θνησιμότητας στους άνδρες και τις γυναίκες και διακρίνονται αναλόγως του εύρους των ηλικιακών ομάδων στις οποίες αναφέρονται σε: α) πλήρεις ή αναλυτικοί πίνακες επιβίωσης, όπου τα δεδομένα των θανάτων και του πληθυσμού δίδονται κατά μονοετείς ηλικιακές ομάδες, δηλαδή οι συναρτήσεις εκφράζονται κατά ακέραια έτη ηλικιών και β) συνεπτυγμένους ή συνοπτικούς πίνακες επιβίωσης, όπου τα δεδομένα δίδονται για ευρύτερες ηλικιακές ομάδες (συνήθως πενταετείς ή δεκαετείς), δηλαδή οι συναρτήσεις εκφράζονται σε διαστήματα ηλικιών εκτός του πρώτου έτους ζωής, την ηλικία μηδέν (0), που λόγω της ιδιαιτερότητας της εμφανίζεται και υπολογίζεται ξεχωριστά. Σημειώνεται ότι στους πίνακες επιβίωσης ο χρόνος αποτελεί σημείο αναφοράς είτε αναφερόμαστε στην αρχή της κάθε ηλικίας είτε σε διαστήματα ηλικιών.

Τέλος, οι πίνακες επιβίωσης (αναλυτικοί ή συνεπτυγμένοι) δύνανται να δημιουργηθούν και ανά αιτία θανάτου. Για την ταξινόμηση των θανάτων ανά αιτία χρησιμοποιείται το πρότυπο ταξινόμησης του *Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας (Manual of the International Statistical Classification of Diseases, Injuries and Causes of Death)*, το οποίο ταξινομεί τους θανάτους σε μεγάλες ομάδες αιτιών.

Τον πίνακας επιβίωσης περιόδου τον θεωρούμε σαν πίνακα επιβίωσης μιας υποθετικής γενεάς ο οποίος αποτελεί μια θεωρητική επινόηση με δεδομένες τις κάτωθι συνθήκες:

α) Έχουμε μια υποθετική αρχική γενεά 100.000 ατόμων (γεννήσεις ζώντων). Ο πληθυσμός των ατόμων αυτών καλείται «ρίζα» του πίνακα.

β) Η υποθετική αυτή γενεά έχει την ίδια κατά ηλικία θνησιμότητα με αυτήν του πληθυσμού της περιόδου αναφοράς. Έτσι, σε κάθε ηλικία τα μέλη της γενεάς αυτής αποβιώνουν σύμφωνα με τους συντελεστές θνησιμότητας του πραγματικού πληθυσμού (είναι δε προφανές ότι σε μια ληκτική, τελική χρονολογία όλα τα μέλη της θα αποβιώσουν).

γ) Ο υπό παρατήρηση πληθυσμός είναι «κλειστός» (δεν υπάρχουν δηλαδή έξοδοι και είσοδοι) και επομένως οι όποιες μεταβολές του οφείλονται αποκλειστικά στους θανάτους.

1.8.2 Ασφαλιστικοί πίνακες Θνησιμότητας

Οι πίνακες θνησιμότητας περιγράφουν τη θνησιμότητα ενός γενικού πληθυσμού ενώ οι ασφαλιστικοί πίνακες καταρτίζονται με βάση τα στατιστικά στοιχεία που αναφέρονται σε έναν ασφαλισμένο ή μια ομάδα ασφαλισμένων (στοιχεία και αναφορά στην Ένωση Αναλογιστών Ελλάδος)[3].

[3] http://www.actuaries.org.gr/drastiriotitesErga.htm

Οι ασφαλιστικοί πίνακες αναφέρονται σε κάποια ομοειδή ομάδα που συντάσσονται με τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνουν την πιθανότητα που έχει ένα στοιχείο της ομάδας να πληγεί από έναν ορισμένο «κίνδυνο» κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου.

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε ένα σύνολο ανθρώπων που θα την θεωρούμε πλέον ως «ασφαλισμένη ομάδα», τότε ο κίνδυνος για τον κάθε ασφαλιστικό φορέα μπορεί να αναφέρεται στο θάνατο ενός ασφαλισμένου ή στην επιβίωση του κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Πιο συγκεκριμένα, ο ασφαλιστικός πίνακας συντάσσεται με τέτοιο τρόπο που σε κάθε ηλικία x να αντιστοιχίζεται μια πιθανότητα q_x ή μια πιθανότητα p_x που έχει ένα άτομο της ασφαλισμένης ομάδας να πεθάνει ή να ζήσει κατά τη διάρκεια της ηλικίας αυτής.

Ο ασφαλιστής της εκάστοτε ασφαλιστικής εταιρείας θα πρέπει πριν την έκδοση του ασφαλιστηρίου, να είναι βέβαιος ότι ο υποψήφιος προς ασφάλιση θα πρέπει να έχει όλα τα απαιτούμενα κριτήρια ώστε να ασφαλιστεί. Σαν αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας επιλογής, μια ομάδα ασφαλισμένων ατόμων βάσει κάποιου κριτηρίου δεν συνιστούν μια τυχαία ομάδα, αλλά απεναντίας μια ομάδα επιλογής της οποίας όλα τα μέλη πληρούν αρχικά μερικά κριτήρια ασφαλίσεως. Στη συνέχεια, η θνησιμότητα σε μια τέτοια ομάδα θα μεταβάλλεται όχι μόνο βάσει της ηλικίας, αλλά και βάσει της διάρκειας παραμονής στην ασφάλιση. Είναι κατανοητό ότι η ομάδα αυτή έχει διαφορετική θνησιμότητα από το γενικό ή αλλιώς δημογραφικό πληθυσμό.

Οι ασφαλιστικοί πίνακες θνησιμότητας, διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες: τους γενικούς πίνακες, τους ειδικούς πίνακες και τους μικτούς πίνακες.

Οι γενικοί πίνακες θνησιμότητας συντάσσονται με βάση μόνο την ηλικία των ασφαλισμένων. Οι ειδικοί πίνακες συντάσσονται βάσει διάφορων χαρακτηριστικών όπως η ηλικία ή ο χρόνος παραμονής των ασφαλισμένων στο πρόγραμμα ασφάλισης. Τέλος, οι μικτοί πίνακες λαμβάνουν υπόψη τους την ηλικία και το χρόνο παραμονής των ασφαλισμένων στην ασφάλιση, ο οποίος κυμαίνεται μεταξύ 5 και 10 χρόνια και διαφέρει από εταιρεία σε εταιρεία ανάλογα με το πόση σημασία δίνει η κάθε μια ασφαλιστική εταιρεία στις ιατρικές εξετάσεις των ασφαλισμένων της.

Οι πίνακες αυτοί παρακολουθούν όχι μόνο τις μεταβολές της θνησιμότητας από ηλικία σε ηλικία, αλλά και τις μεταβολές της θνησιμότητας μέσα στην κάθε ηλικία, ανάλογα με το χρόνο παραμονής στην ασφάλιση. Συνήθως οι ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούν τους μικτούς πίνακες θνησιμότητας ή αλλιώς όπως τους ονομάζουμε ασφαλιστικούς πίνακες επιλογής. Η διάρκεια της περιόδου επιλογής εξαρτάται από τη φύση των στοιχείων που υπάρχουν ενώ τα αποτελέσματα της επιλογής μπορούν να εξακολουθούν να είναι αξιόλογα για πολλά έτη. Παραδείγματα πινάκων επιλογής έχουμε στους Αμερικάνικους πίνακες, όπου έχουν περίοδο επιλογής 5 έτη ενώ η περίοδος επιλογής στον Αγγλικό πίνακα ασφαλίσεων ζωής A1967/70 [4] έχουν περίοδο επιλογής 2 έτη.

1.8.3 Πίνακες Πολλαπλών Κινδύνων

Οι πίνακες που έχουμε ήδη αναφέρει εξετάζουν τη μείωση του παρατηρούμενου πληθυσμού εξαιτίας της θνησιμότητας. Δηλαδή, το μοναδικό αίτιο εξόδου του πληθυσμού είναι ο θάνατος. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα άτομα εγκαταλείπουν την υπό ομάδα μελέτης για άλλους διάφορους λόγους εκτός του θανάτου καθώς σκοπός των μελετών είναι να εξετάσουν από κοινού τα συνδυασμένα αίτια εξόδου του παρατηρούμενου πληθυσμού. Αυτοί οι πίνακες στην Αναλογιστική Ορολογία ονομάζονται πίνακες με πολλαπλά αίτια εξόδου ή πίνακες πολλαπλών κινδύνων (multiple decrement tables) .

Έχουμε διάφορους τύπους πινάκων με πολλαπλά αίτια εξόδου στην αναλογιστική πρακτική. Τέτοιοι πίνακες είναι οι εξής:

- Πίνακες υπηρεσίας (οι πιο κλασικοί πίνακες εφαρμογής). Η ομάδα προς εξέταση είναι τα άτομα εν υπηρεσία με αιτίες εξόδου την θνησιμότητα, την ανικανότητα, την παραίτηση από την εργασία και τέλος τη συνταξιοδότηση.
- Πίνακες ζωής με διάφορα αίτια θανάτου όπως για παράδειγμα θάνατος από ατύχημα ή ασθένεια.

[4] I. Papaconstantinou: AN ACTUARIAL INVESTIGATION INTO THE MORTALITY OF IMPAIRED INSURED LIVES, «ΣΠΟΥΔΑΙ», Τόμος 44, Τεύχος 1ο-2ο, Πανεπιστήμιο Πειραιώς / «SPOUDAI», Vol. 44, No 1-2, University of Piraeus

- Πίνακες που συνδυάζουν τη θνησιμότητα με την ολική ανικανότητα. Ο πληθυσμός αφορά τους ζώντες και τους ικανούς ενώ τα αίτια εξόδου είναι ο θάνατος και η ολική ανικανότητα.
- Πίνακες γάμου όπου η ομάδα εξέτασης είναι οι ζώντες-άγαμοι με αίτια εξόδου το θάνατο και το γάμο.

Στα συνταξιοδοτικά προγράμματα χρησιμοποιούνται οι πίνακες υπηρεσίας, καθώς ο υπολογισμός του ύψους των παροχών εξαρτάται από την αιτία με την οποία αποχώρησε από την ομάδα. Ακολούθως, στα προγράμματα ασφάλισης εισοδήματος λόγω ανικανότητας χρησιμοποιούμε τους πίνακες που συνδυάζουν τη θνησιμότητα με την ολική ανικανότητα καθώς το ύψος των παροχών εξαρτάται από την αιτία που προκλήθηκε η ανικανότητα (ατύχημα ή ασθένεια).

Ανακεφαλαιώνοντας, το κεφάλαιο αυτό είχε εισαγωγικό χαρακτήρα προκειμένου να γίνουν στον αναγνώστη κατανοητοί κάποιοι βασικοί ορισμοί και έννοιες που χρησιμοποιούνται στην αναλογιστική επιστήμη. Είχε πιο πολύ θεωρητικό χαρακτήρα για την πληρέστερη ενημέρωση του αναγνώστη. Τα επόμενα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα έχουν πιο αναλυτικό χαρακτήρα των δημογραφικών φαινομένων.

Πιο συγκεκριμένα, το Κεφάλαιο που ακολουθεί ασχολείται με τη δομή και την κατασκευή των πινάκων επιβίωσης (θνησιμότητας) του δημογραφικού και ασφαλίσιμου πληθυσμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ / ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

2.1 Δεδομένα και Υποθέσεις Πινάκων Επιβίωσης

Ο πίνακας επιβίωσης ή θνησιμότητας είναι μια τυποποιημένη διάταξη αριθμών που αντιπροσωπεύει ένα διακριτό πρότυπο περιγραφής της κατανομής που συνδέεται με τον κίνδυνο της απώλειας της ζωής ενός ατόμου. Συνήθως είναι μια σειρά από ετήσιες πιθανότητες θανάτου από μια ελάχιστη ηλικία 0 και άνω. Είτε χρησιμοποιούμε τον όρο πίνακα επιβίωσης είτε πίνακα θνησιμότητας είναι ακριβώς το ίδιο καθώς δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός.

Όλες οι συναρτήσεις που εκτίθενται και περιγράφουν τους πίνακες επιβίωσης χρησιμοποιούν στοιχεία του πληθυσμού και των θανάτων από τις ανάλογες πηγές πληροφόρησης ώστε να είναι αξιόπιστα. Βάσει των δεδομένων που έχουμε διαθέσιμα, προσεγγίζουμε και υπολογίζουμε αναλόγως τις συναρτήσεις θνησιμότητας που κατ’ επέκταση χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των πινάκων επιβίωσης. Ο τρόπος υπολογισμού των συναρτήσεων θνησιμότητας διαφέρει αναλόγως με το πώς θέλουμε να προσεγγίσουμε τη θνησιμότητα, δηλαδή με τι τρόπο θέλουμε να τη μελετήσουμε. Σύμφωνα με το πώς η συλλογή των δεδομένων ποικίλει.

Όταν μας ενδιαφέρει η θνησιμότητα σε σχέση με το χρόνο και την ημερομηνία γέννησης μιλάμε για διατομεακές μελέτες (cross-sectional studies). Στις μελέτες αυτές, η έναρξη ενός συμβάντος ταυτίζεται με την ημερομηνία γέννησης ενός ατόμου και ο χρόνος επιβίωσης είναι συνδεδεμένος με την ηλικία του ατόμου σε κάποιο ημερολογιακό χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια της έρευνας. Σε τέτοιου είδους έρευνες θνησιμότητας (ασφαλιστικές, εθνικές, κ.λ.π) παρατηρούμε τον πληθυσμό σε συγκεκριμένη περίοδο, συνήθως ένα έτος για τις εθνικές μελέτες όπου μέσα σε αυτό το έτος καταμετράμε τους θανάτους που έχουν συμβεί βάσει των παραγόντων που έχουμε ορίσει για το διαχωρισμό (π.χ ηλικία, φύλο).

Ουσιαστικά, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η θνησιμότητα σε σχέση με το χρόνο και την ημερομηνία γέννησης. Συνεπώς, ομαδοποιούμε τον πληθυσμό με βάση την ηλικία και το φύλο και εξετάζουμε όσο το δυνατόν να υπάρχει κοινό ποσοστό θνησιμότητας ή ένταση θνησιμότητας προσπαθώντας να πετύχουμε ακριβή αποτελέσματα. Επισημαίνεται ότι υπάρχει η δυνατότητα κάποιος να εισέρθει ή να αποχωρήσει κατά τη διάρκεια της έρευνας για διαφορετικό λόγο εκτός του θανάτου.

Όταν τα δεδομένα είναι διαθέσιμα σε πλήρη μορφή τότε γνωρίζουμε: α) την ημερομηνία γέννησης, β) την ημερομηνία που το άτομο εισήρθε στην έρευνα και γ) την ακριβή ηλικία στον θάνατο ή την αποχώρηση από την έρευνα. Αλλιώς λέμε ότι τα δεδομένα είναι μη πλήρη ή έχουν μερική μορφή. Σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα αφορούν πληθυσμό που είναι πολύ μεγάλος, (π.χ εθνικές μελέτες, μελέτες ασφαλιστικών φορέων όπως τα συνταξιοδοτικά ταμεία κ.λ.π) είναι γνωστά μόνο ο αριθμός των θανάτων της περιόδου που εξετάζουμε και όχι ο αριθμός αυτών που αποχώρησαν ή εισήρθαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Τα δεδομένα αυτά χαρακτηρίζονται ως απογραφικά δεδομένα (census data) όπου βάσει αυτών εκτιμάμε τους πίνακες θνησιμότητας περιόδου και τους γενεαλογικούς πίνακες. Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των θανάτων είναι διαθέσιμος ανά ηλικία και έτος θανάτου ενώ στη δεύτερη περίπτωση ανά ηλικία και έτος γέννησης.

Ο σκοπός της δημιουργίας των παραπάνω πινάκων είναι η αναλυτική παρουσίαση της ειδικής κατά ηλικία θνησιμότητας ενός πληθυσμού. Όσον αφορά τους γενεαλογικούς πίνακες, θα πρέπει η γενεά να παρακολουθείται για μεγάλο χρονικό διάστημα. Αυτό μπορεί να εξασφαλιστεί με τη χρήση διαθέσιμων πηγών ανά έτος, όπως είναι οι ληξιαρχικές καταγραφές των θανάτων αυτής της γενεάς.

Κύριο προτέρημα της χρήσης γενεαλογικών πινάκων είναι η αναφορά σε πραγματική γενεά, γεγονός το οποίο απαιτεί μεγάλο χρονικό διάστημα καταγραφής και τελικά τα αποτελέσματα να αναφέρονται σε μια γενεά που δημιουργήθηκε πριν από 100 χρόνια και άνω περίπου. Αυτό σημαίνει ότι η θνησιμότητα με την πάροδο του χρόνου μπορεί να έχει μεταβληθεί καθώς υπάρχουν παράγοντες που την επηρεάζουν όπως οι αλλαγές στις συνήθειες στην καθημερινότητα, η βελτίωση της ιατροφαρμακευτικής περίθαλψης κ.λ.π.

Από την άλλη, με τη χρήση πινάκων θνησιμότητας περιόδου σαν γενεαλογικούς πίνακες με πλασματική γενεά, αποτυπώνουμε και εξετάζουμε τι συμβαίνει τώρα, προβάλλοντας τι θα συνέβαινε σε μια γενεά διατηρώντας τις συνθήκες με τις οποίες είχε εξαρχής αμετάβλητες. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τους πίνακες επιβίωσης περιόδου οι οποίοι κάνουν αναφορά σε μια πλασματική γενεά με αφετηρία μια σειρά πιθανοτήτων θανάτου που εκτιμώνται από τα τρέχοντα, συνήθως ετήσια, ληξιαρχικά και απογραφικά δεδομένα.

Πρόκειται για ένα πολύτιμο εργαλείο της δημογραφικής ανάλυσης και κατ΄επέκταση μέσω του φαινόμενου της θνησιμότητας και της αναλογιστικής επιστήμης.

Η διαχρονική και θεωρητική θεμελίωση του πίνακα επιβίωσης σχετίζεται με την έννοια και τη χρήση ενός κλειστού ή στάσιμου πληθυσμού, μια από τις πιο απλές περιπτώσεις του πληθυσμού. Υπάρχει και η περίπτωση του ανοιχτού πληθυσμού όπου επιτρέπεται κάποιος να εισέλθει ή να εξέλθει κατά τη διάρκεια της έρευνας, αποτελώντας την γνώση του ακριβού χρόνου εισαγωγής ικανή και όχι αναγκαία συνθήκη. Ένας πληθυσμός θεωρείται *στάσιμος* όταν δεν επιτρέπεται να εισέλθουν ή να αποχωρήσουν άτομα από αυτόν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Η μόνη έξοδος, όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, οφείλεται στη θνησιμότητα. Συνεπώς, το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού και η κατά ηλικιακή δομή του θεωρούμε ότι παραμένουν διαχρονικά και αμετάβλητα στην περίοδο της έρευνας.

Οι κυριότερες υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζονται οι πίνακες επιβίωσης περιόδου μιας πλασματικής γενεάς είναι οι ακόλουθες:

- Η υπό παρατήρηση πλασματική γενεά ορίζεται ως ένας σταθερός αριθμός γεννήσεων που κατά σύμβαση είναι ίσος με 100.000 και καλείται ρίζα του πίνακα. Η ρίζα του πίνακα συνιστά τον αρχικό πληθυσμό και συμβολίζεται με l_0.
- Η γενεά είναι κλειστή σε μεταναστευτικές εισροές και εκροές
- Η αρχική γενεά με την πάροδο του χρόνου μειώνεται σταδιακά σύμφωνα με τα προκαθορισμένα και διαχρονικά αμετάβλητα κατά ηλικία πρότυπα θνησιμότητας. Η ηλικία όπου όλη η γενεά έχει εκλείψει ονομάζεται οριακή ηλικία και συμβολίζεται με ω. Προφανώς θα ισχύει ότι $l_\omega = 0$
- Οι θάνατοι ισοκατανέμονται κατά τη διάρκεια κάθε ηλικίας εκτός των δυο πρώτων ετών ζωής (βρεφική θνησιμότητα από 0 έως 1 έτους)

- Ο συνολικός αριθμός των θανάτων του πίνακα επιβίωσης είναι ίσος με το συνολικό αριθμό των γεννήσεων του πληθυσμού, δηλαδή ίσος με τη ρίζα l_0 του πίνακα
- Η γενεά παρουσιάζει ομοιογένεια, δηλαδή παρουσιάζει μέλη ενός μόνο φύλου, λόγω των διαφορών που παρατηρούνται στα επίπεδα και στα πρότυπα θνησιμότητας μεταξύ των δυο φύλων.

Αν και κάποιες από τις παραπάνω υποθέσεις δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, με τη χρήση των πραγματικών ληξιαρχικών και απογραφικών δεδομένων μπορούμε και κατασκευάζουμε τους γενεαλογικούς πίνακες ή τους πίνακες επιβίωσης περιόδου. Οι πρώτοι περιγράφουν τι πραγματικά συμβαίνει στη γενεά με το πέρας του χρόνου ενώ στους δεύτερους το τι θα συμβεί στα μέλη μιας υποθετικής γενεάς αν οι παραπάνω συνθήκες παραμείνουν διαχρονικά σταθερές και αμετάβλητες.

2.2 Δομή και Συναρτήσεις Πινάκων Επιβίωσης

Ας υποθέσουμε ότι σε μια δεδομένη χρονική στιγμή έχουμε έναν ιδεατό πληθυσμό που τον παρατηρούμε από τη στιγμή της γέννησης του. Με την πάροδο του χρόνου (ζωής) κάποιοι θα επιβιώσουν και κάποιοι όχι. Για την κατασκευή ενός πίνακα θνησιμότητας ή επιβίωσης χρησιμοποιούμε κάποιες συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται ακολούθως όπως και οι έννοιες των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται.

Στον πίνακα επιβίωσης η φθορά που επιφέρει σωρευτικά η θνησιμότητα στον πληθυσμό αποτυπώνεται με ορισμένες συναρτήσεις οι τιμές των οποίων εκτιμώνται για όλο το διάστημα ζωής των μελών της γενεάς, δηλαδή τόσο από την αρχική ηλικία, όσο και μέχρι την οριακή ηλικία x=ω. (για την Ελλάδα θεωρείται ω=110)

Αρχικά, ορίζεται ο αριθμός γεννήσεων των ατόμων υπό παρατήρηση της υποθετικής γενεάς l_0 κατά σύμβαση ίσος με 100.000 (l_0=100.000). Η αρχική γενεά l_0 μειώνεται σταδιακά λόγω της φθοράς που υφίσταται από την επίδραση της θνησιμότητας. Ο αριθμός των ατόμων που φτάνουν την ακριβή ηλικία x συμβολίζεται με l_x . Δηλαδή, με l_x συμβολίζουμε τους επιζώντες στην αρχή της ηλικίας x. Η μείωση του αριθμού των επιζώντων είναι μεν συνεχής αλλά δεν πραγματοποιείται με σταθερό ρυθμό σε όλες τις ηλικίες.

Στη συνέχεια, εφόσον η αρχική γενεά μειώνεται σταδιακά λόγω θνησιμότητας, από την αρχή της ηλικίας x μέχρι την αρχή της ηλικίας x+1 πεθαίνουν dx άτομα. Δηλαδή, dx είναι ο συνολικός αριθμός θανάτων στο διάστημα [x, x+1]. Αυτός ο αριθμός των θανάτων δεν μπορεί από μόνος του να εκφράσει τη θνησιμότητα αφού αυτή εξαρτάται κάθε φορά και από το μέγεθος του πληθυσμού στον οποίο αναφέρεται. Ουσιαστικά ο αριθμός αυτός αποτελεί τον αναμενόμενο αριθμό θανάτων στο διάστημα μεταξύ των ηλικιών x και x+1.

Οι σχέσεις που ισχύουν είναι

$$l_{x+1} = l_x - d_x \quad \kappa\alpha\iota$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Κατά τη βρεφική και παιδική ηλικία (0 και 1-4 έτη) η επίδραση της θνησιμότητας είναι εμφανής ενώ στις γηραιότερες ηλικίες παρατηρείται έντονη βαθμιαία μείωση του αριθμού των επιζώντων.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι τιμές l_x και d_x που δίνονται σε έναν πίνακα επιβίωσης δεν έχουν καμία απόλυτη έννοια, εφόσον εξαρτώνται από την τιμή που εκλέγουμε για βάση του πίνακα.

Η πιθανότητα επιβίωσης κατά τη διάρκεια της ηλικίας x συμβολίζεται με p_x και δηλώνει την πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να επιβιώσει και τον επόμενο χρόνο δηλαδή στο [x, x+1]. Η σχέση με την οποία υπολογίζεται το p_x για την ηλικία x είναι:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} .$$

Το κλειδί του πίνακα επιβίωσης αποτελεί τη στήλη με τις πιθανότητες θανάτου και συμβολίζεται με το q_x , όπου είναι η πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να πεθάνει μέσα στον επόμενο χρόνο [x, x+1]. Το ενδεχόμενο της ζωής και το ενδεχόμενο του θανάτου είναι δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους γεγονότα γι' αυτό μεταξύ των δύο παραπάνω πιθανοτήτων ισχύει η σχέση:

$$p_x + q_x = 1 \quad ή$$

$$q_x = 1 - p_x \quad ή$$

$$q_x = 1 - \frac{lx+1}{lx} = \frac{lx+1}{lx} = \frac{dx}{lx}$$

Κάθε μέλος του πληθυσμού που βιώνει στο διάσημα ηλικίας από [x, x+1] συμβάλλει στον υπολογισμό του Lx όπου δηλώνει το συνολικό αριθμό ετών ζωής που βιώνονται από τα άτομα του πληθυσμού στο συγκεκριμένο διάστημα. Έστω ότι συμβολίζουμε με a_x το χρόνο που κατά μέσο όρο έζησαν οι θανόντες d_x στη διάρκεια της ηλικίας x και δίνεται από τη συνάρτηση

$$L_x = l_{x+1} + a_x d_x = l_x - a_x d_x$$

Δηλαδή, το L_x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των άνθρωπο-ετών ζωής που πραγματοποιείται στη διάρκεια της ηλικίας x από την αρχική γενεά των l_o ατόμων.

Για να είμαστε πιο ακριβείς, ο προσδιορισμός της συνάρτησης L_x γίνεται μόνο και αν είναι γνωστή η κατανομή των θανόντων κατά τη διάρκεια των ηλικιών, δηλαδή τον προσδιορισμό του συντελεστή a_x.

Ως βασική παραδοχή, θεωρούμε ότι οι θάνατοι ισοκατανέμονται από την ηλικία των δύο ετών και άνω, δηλαδή το $a_x = \frac{1}{2}$ και ισχύει:

$$L_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

Από την παραπάνω ισότητα το L_x δηλώνει τους επιζώντες στο μέσο της ηλικίας x και εκφράζει την κατά ηλικία δομή του στάσιμου πληθυσμού.

Μια άλλη συνάρτηση που συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα θνησιμότητας είναι η

$$T_x = \sum_{x}^{\omega} L_x = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{\omega-1}$$

που προκύπτει $T_x = L_x + T_{x+1}$, όπου με T_x συμβολίζουμε τον αναμενόμενο συνολικό αριθμό των ετών που έχουν επιζήσει l_x άτομα ηλικίας x μετά από αυτή την ηλικία. Προφανώς το T_o εκφράζει το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού του πίνακα επιβίωσης.

Τέλος, η περισσότερο ενδιαφέρουσα στήλη του πίνακα επιβίωσης είναι η στήλη της προσδοκώμενης ζωής ή της αναμενόμενης ζωής ή της μέσης διάρκειας ζωής $\dot{e}_x$ (Expectation of life, life expectancy). Η συνάρτηση $\dot{e}_x$ εκφράζει την αναμενόμενη (μέση) υπολειπόμενη ζωή των ατόμων ηλικίας x του πληθυσμού στον οποίο αναφέρεται ο πίνακας επιβίωσης.

Η τιμή της συνάρτησης αυτής δίνεται από τον τύπο

$$\dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

και η αναμενόμενη ηλικία θανάτου κάποιου ατόμου ηλικίας x ισούται με (x+$\dot{e}_x$).

Η προσδοκώμενη ζωή κατά τη γέννηση ($\dot{e}_0$) αποτελεί το αντιπροσωπευτικότερο μέτρο εκτίμησης του μέσου επιπέδου θνησιμότητας του συνολικού πληθυσμού και προσφέρεται κατά τον καλύτερο τρόπο για συγκρίσεις.

Οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας θεωρούνται απαραίτητοι για τη δομή του κατά ηλικία πίνακα επιβίωσης και συμβολίζονται με m_x και υπολογίζονται από τον τύπο

$$\dot{m}_x = \frac{dx}{Lx}$$

Συνοψίζοντας, οι στήλες οι οποίες απαρτίζουν έναν ολοκληρωμένο πλήρους πίνακα επιβίωσης, είναι οι εξής:

- $\boldsymbol{l_x}$ **:** ο αριθμός των επιζώντων στην αρχή της ηλικία x
- $\boldsymbol{dx}$ **:** ο αριθμός των θανάτων μεταξύ των ηλικιών x και x+1
- $\boldsymbol{p_x}$**:** η πιθανότητα ατόμου ηλικίας x να επιζήσει μέχρι την αρχή της ηλικίας x+1
- $\boldsymbol{q_x}$ **:** η πιθανότητα ατόμου ηλικίας x να πεθάνει μέσα στον επόμενο χρόνο, δηλαδή πριν φθάσει στην αρχή της ηλικίας x+1
- $\boldsymbol{L_x}$ **:** ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που βιώνονται από τα άτομα του πληθυσμού στο διάστημα [x, x+1]
- $\boldsymbol{T_x}$ **:** ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που πρόκειται να βιώσουν τα l_o άτομα στο διάστημα ηλικίας [x, ω]

- $\dot{e}_x$: η προσδοκώμενη ή αναμενόμενη ή μέση διάρκεια ζωής ατόμου ηλικίας x (δηλαδή ο μέσος αριθμός ετών που αναμένεται να ζήσει ακόμα άτομο ηλικίας x μέχρι το θάνατό του)
- m_x : ο κεντρικός δείκτης θνησιμότητας για την ηλικία x

Στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμα ή ακριβή στατιστικά στοιχεία ώστε να κατασκευαστών οι πλήρεις ή οι συνεπτυγμένοι πίνακες επιβίωσης, χρησιμοποιούνται οι πρότυποι πίνακες επιβίωσης.

2.3 Κατασκευή Πινάκων Επιβίωσης

Στην αναλογιστική πρακτική ο πίνακας θνησιμότητας ή ισοδύναμα ένας πίνακας επιβίωσης (ζωής) κατασκευάζεται αφού εκτιμηθούν πρώτα οι δεσμευμένες πιθανότητες για ακέραιες ηλικίες αρχίζοντας από μια συγκεκριμένη ελάχιστη ηλικία (συνήθως από την ηλικία 0). Κατά συνέπεια ένας τέτοιος πίνακας ορίζει πλήρως την κατανομή των ακέραιων ηλικιών καθώς οι πιθανότητες διακρίνονται για κάθε ακέραια ηλικία x.

Η κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης, από τη στιγμή που έχουν εκτιμηθεί οι πιθανότητες θανάτου , ακολουθείται μια απλή υπολογιστική διαδικασία εκτιμήσεων και των υπολοίπων συναρτήσεων, σύμφωνα με τις σχέσεις που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Τα βήματα για την κατασκευή ενός πλήρους ή ενός συνεπτυγμένου πίνακα είναι όμοια και η διαδικασία συνοψίζεται ως εξής

- **Βήμα 1^{ο}**: Υπολογισμός κεντρικών δεικτών θνησιμότητας (κατά ηλικία ή διάστημα ηλικιών)
- **Βήμα 2^{ο}**: Μετατροπή των κεντρικών δεικτών θνησιμότητας σε πιθανότητες θανάτου
- **Βήμα 3^{ο}**: Εξομάλυνση των εμπειρικών πιθανοτήτων θανάτου
- **Βήμα 4^{ο}**: Εκτίμηση των συναρτήσεων του πίνακα

Συνήθως με βάση τα τρέχοντα ληξιαρχικά και πληθυσμιακά δεδομένα που υπάρχουν διαθέσιμα κατά το έτος περιόδου που θέλουμε να εξετάσουμε, οι ειδικοί κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας υπολογίζονται από τη σχέση:

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}$$

όπου D_x είναι ο ετήσιος αριθμός των θανόντων συμπληρωμένης ηλικίας x και P_x ο πληθυσμός της συμπληρωμένης ηλικίας x στο μέσο του έτους αναφοράς. Σε επόμενη ενότητα θα επεξηγήσουμε ακριβώς πώς ορίζεται ο πληθυσμός βάσει των δεδομένων, πώς ορίζεται το διάστημα κατάταξης, δηλαδή πώς ορίζεται επακριβώς η έννοια της *έκθεσης στον κίνδυνο* όπου βάσει αυτού υπολογίζονται οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας.

Όσον αφορά το δεύτερο βήμα, έχουμε δεχθεί για τη διευκόλυνση των υπολογισμών, ότι η γενεά είναι κλειστή σε μεταναστευτικές κινήσεις και ότι στη διάρκεια της ηλικίας x οι θάνατοι ισοκατανέμονται. Υπάρχουν όμως διάφοροι τρόποι προσέγγισης μεταξύ των m_x και των q_x και διάφορες τεχνικές δημογραφικές τεχνικές όπου θα αναλύσουμε παρακάτω.

Η εξομάλυνση στο τρίτο βήμα γίνεται διότι η διαγραμματική απεικόνιση των εμπειρικών πιθανοτήτων αποκαλύπτει σε ορισμένες ηλικίες την ύπαρξη σοβαρών ακανόνιστων κυμάνσεων οι οποίες διαταράσσουν σημαντικά την ομαλή εξέλιξη της καμπύλης θνησιμότητας. Οι ασυνέπειες αυτές αποδίδονται κατά κύριο λόγο σε ηλικιακές ανακρίβειες και τυχαίες γενικά κυμάνσεις που εμφανίζουν τα ληξιαρχικά και τα πληθυσμιακά δεδομένα, αλλά μπορεί ως ένα βαθμό να οφείλονται και στη μέθοδο που έχει χρησιμοποιηθεί για τη μετατροπή των κεντρικών δεικτών m_x σε q_x εξομάλυνση των εμπειρικών πιθανοτήτων θανάτου q_x. Στα επόμενα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα γίνει λεπτομερής ανάλυση σχετικά με το τι είναι εξομάλυνση.

Τέλος, οι εξομαλυνθείσες τιμές αποτελούν το στοιχείο εισόδου πάνω στο οποίο στηρίζεται η κατασκευή του πίνακα επιβίωσης. Οι συναρτήσεις του πίνακα εκτιμώνται για όλες τις διαθέσιμες ηλικίες με τις αλυσιδωτές σχέσεις που τις συνδέουν.

2.3.1 Προσδιορισμός της Έννοιας της Έκθεσης στον Κίνδυνο

Στον πίνακα επιβίωσης το σημαντικότερό του μέγεθος είναι ο υπολογισμός των παρατηρούμενων ποσοστών θνησιμότητας δηλαδή η έκθεση στον κίνδυνο. Άρα είναι κρίσιμο και απαραίτητο κάθε φορά πριν από οποιοδήποτε υπολογισμό αναλόγως τη δομή των δεδομένων που έχουμε διαθέσιμα να ορίζεται ακριβώς το μέγεθος που σχετίζεται με την έκθεση κινδύνου. Όταν τα δεδομένα είναι σε απογραφική μορφή κατά κανόνα ο πληθυσμός είναι διαθέσιμος ανά ηλικία x και έτος θανάτου ή ανά ηλικία x και έτος γέννησης.

Έστω $P_x(t)$ είναι ο πληθυσμός τη στιγμή t για ζωές με ηλικία x τελευταίων γενεθλίων κατά τη διάρκεια της περιόδου έρευνας [0, T]. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο ηλικίας x τελευταίων γενεθλίων εννοούμε την ηλικία μεταξύ x και x+1. Αν κάποιος από τον πληθυσμό $P_x(t)$ τη στιγμή t αποβιώσει τότε θα καταμετρηθεί στους παρατηρούμενους θανάτους θ_x ως ηλικία x τελευταίων γενεθλίων τη στιγμή του θανάτου. Δηλαδή, το $P_x(t)$, τη χρονική στιγμή t, αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό ηλικίας x τελευταίων γενεθλίων που είναι εκτεθειμένος στον κίνδυνο τον οποίο συνεισφέρει στους θανάτους θ_x και έτσι ζωές και θάνατοι ομαδοποιούνται κάτω από την ίδια ετικέτα σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας.

Δηλαδή από τον τύπο $q_x = \frac{dx}{Lx}$ όπου είναι η ορθή εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας το dx αντιστοιχίζεται με το θ_x, πλήθος θανάτων ατόμων ηλικίας x μέσα στην περίοδο έρευνας και το L_x με το E_x την παρατηρούμενη αρχική έκθεση στον κίνδυνο.

Συνεπώς, σε κάθε μικρό διάστημα χρόνου [t, t+dt), το κάθε άτομο από τον πληθυσμό $P_x(t)$ με ηλικία x τελευταίων γενεθλίων θα συνεισφέρει στην κεντρική έκθεση στον κίνδυνο ένα μικρό διάστημα dt. Θεωρούμε βέβαια ότι σε αυτό το μικρό διάστημα το $P_x(t)$ παραμένει σταθερό. Άρα, το γινόμενο $P(t)dt$ αντιπροσωπεύει το χρόνο συνεισφοράς στην κεντρική έκθεση στον κίνδυνο στο μικρό χρονικό διάστημα dt από όλα τα άτομα του πληθυσμού $P_x(t)$.

Το άθροισμα όλων αυτών των διαστημάτων κατά τη διάρκεια της έρευνας, θα μας δώσει τη συνολική κεντρική έκθεση στον κίνδυνο για άτομα x τελευταίων γενεθλίων. Όσο μικρότερο θα είναι το χρονικό διάστημα dt τόσο η παραπάνω προσέγγιση θα είναι κοντύτερα στην ακριβή τιμή. Καταγράφοντας, λοιπόν, τη συγκεκριμένη συνάρτηση κάνοντας συνεχείς μετρήσεις για όλες τις δυνατές χρονικές στιγμές t τότε η κεντρική έκθεση στον κίνδυνο δίνεται από τον τύπο

$$E_x^c = \int_0^T P_x(t)dt$$

Η παραπάνω ισότητα δίνει το συνολικό χρόνο έκθεσης σε κίνδυνο, κατά τη διάρκεια της περιόδου έρευνας [0, T] πληθυσμού ηλικίας x τελευταίων γενεθλίων. Κάθε άτομο συνεισφέρει στον κεντρικό χρόνο έκθεσης αν είναι εν ζωή στην ηλικία x των τελευταίων γενεθλίων.

Για τον υπολογισμό της κεντρικής έκθεσης στον κίνδυνο, όσον αφορά τις απογραφές του πληθυσμού, γνωρίζουμε τον πληθυσμό $P_x(t)$ σε κάποια διακριτά χρονικά διαστήματα για τις ομαδοποιημένες ηλικίες κάτω από κάποιες υποθέσεις για την εξέλιξη του πληθυσμού $P_x(t)$ μεταξύ δύο διαδοχικών απογραφών εκτιμώντας την κεντρική έκθεση στον κίνδυνο.

Αν υπάρχουν διαθέσιμες απογραφές στην αρχή κάθε έτους κατά τη διάρκεια της έρευνας και υποθέτοντας ότι ο πληθυσμός $P_x(t)$ μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ δύο διαδοχικών απογραφών, διότι και ο πληθυσμός στις απογραφές κατανέμεται ομοιόμορφα στο ηλικιακό διάστημα [x, x+1), τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$E_x^c = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{2}[P_x(t) + P_x(t+1)] = \frac{1}{2}P_x(0) + \sum_{t=1}^{T-1} P_x(t) + \frac{1}{2}P_x(T)$$

Ο παραπάνω τύπος κάνει αναφορά στην ομοιόμορφη κατανομή μέσα σε κάθε έτος όλων των εισόδων και εξόδων. Στην ειδική περίπτωση, όπου οι έξοδοι ή οι είσοδοι συμβαίνουν αποκλειστικά και μόνο σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή μέσα στο κάθε έτος , έστω ότι τη χρονική στιγμή αυτή τη συμβολίζουμε με z μέσα στο έτος τότε έχουμε

$$E_x^c = zP_x(0) + \sum_{t=1}^{T-1} P_x(t) + (1-z)P_x(T) \quad όπου\ 0 \le z \le 1$$

Αν τώρα η περίοδος της έρευνας είναι ένα έτος τότε ισχύει

$$E_x^c = \frac{1}{2}[P_x(0) - P_x(1)]$$

Διαφορετικά, αν γνωρίζουμε την τιμή του $P_x(t)$ στο μέσο κάθε έτους τότε η προσέγγιση της κεντρικής έκθεσης στον κίνδυνο γίνεται

$$E_x^c = \sum_{t=0}^{T-1} P_x\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

δηλαδή η κεντρική έκθεση στον κίνδυνο προσεγγίζεται από τον πληθυσμό στο μέσο του έτους.

Εκτός της κεντρικής έκθεσης στον κίνδυνο, υπάρχει και η αρχική έκθεση στον κίνδυνο στην αρχή του χρόνου T όπου μελετάμε. Ο τύπος της αρχικής έκθεσης στον κίνδυνο που συμβολίζεται με E_x είναι ο εξής:

$$E_x = E_x^c + \sum_{i=1}^{\theta x} (1 - si)$$

όπου si το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τα x-οστά γενέθλια ενός ατόμου, που απεβίωσε εντός της περιόδου έρευνας ενώ ήταν ηλικίας x, μέχρι τη στιγμή του θανάτου. Προφανώς και ισχύει ότι $0 \leq si < 1$.

Άρα η σχέση μεταξύ της κεντρικής και της αρχικής έκθεσης στον κίνδυνο, υπό την προϋπόθεση πάντα της ομοιόμορφης κατανομής, ισοδυναμεί με

$$E_x = E_x^c + \frac{1}{2}\,\theta x$$

Η σχέση αυτή πολλές φορές ερμηνεύεται και διαισθητικά, καθώς με την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων μέσα σε κάθε έτος ηλικίας, η περαιτέρω έκθεση στον κίνδυνο που χρειαζόμαστε από την κεντρική έκθεση για τον ορισμό ης αρχικής μπορεί να προσεγγιστεί από τους μισούς θανάτους που παρατηρήσαμε στο διάστημα και να προκύψει η παραπάνω σχέση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η μέθοδος αυτή τόσο για την αρχική όσο και για την κεντρική έκθεση είναι ευσταθής και αποτελεσματική για μεγάλους πληθυσμούς όπου αποτελεί και τη βασικότερη συνθήκη υπολογισμού των κεντρικών δεικτών θνησιμότητας.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στον υπολογισμό της κεντρικής έκθεσης κινδύνου στην περίπτωση όπου το διάστημα κατάταξης των δεδομένων είναι ημερολογιακό, όπως για παράδειγμα όταν ορίζουμε ότι κάποιος είναι ηλικίας x τελευταίων γενεθλίων την 1η Ιανουαρίου του τρέχοντος ημερολογιακού έτους. Βάσει αυτού του ορισμού αλλάζει η ηλικία του με την αλλαγή του έτους, αν κάποιος κατά τη διάρκεια ενός έτους έχει ηλικία x τελευταίων γενεθλίων την $1^η$ Ιανουαρίου του τρέχοντος ημερολογιακού έτους τότε το επόμενο έτος θα είναι ηλικίας x+1 τελευταίων γενεθλίων την $1^η$ Ιανουαρίου του επόμενου ημερολογιακού έτους, δηλαδή ισχύει

$$E_x^c = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{2} [P_x(t) + P_{x+1}(t+1)]$$

και αν η περίοδος της έρευνας είναι ένα έτος προφανώς ισχύει

$$E_x^c = \frac{1}{2} [P_x(0) - P_{x+1}(1)]$$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι όποια μέθοδος και αν χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της πιθανότητας θανάτου, το διάστημα κατάταξης στο οποίο θα αναφέρεται αυτή η πιθανότητα θα εξαρτάται από τον ορισμό της ηλικίας. Συγκεκριμένα εδώ, το διάστημα κατάταξης είναι διάστημα ηλικιακό και η ηλικία προσδιορίζεται στην αρχή του διαστήματος κατάταξης.

Στην περίπτωση που τα άτομα έχουν ηλικία x τελευταίων γενεθλίων την $1^η$ Ιανουαρίου του τρέχοντος ημερολογιακού έτους, τότε στην αρχή του διαστήματος η μικρότερη ηλικία που μπορεί να έχει κάποιος αν καταμετρηθεί στους θανάτους ή στην έκθεση του κινδύνου είναι x και η μεγαλύτερη δυνατή ηλικία που μπορεί να έχει κάποιος σύμφωνα με την κατάταξη αυτή είναι x+1.

Άρα, υποθέτοντας ότι οι γεννήσεις των ατόμων αυτών είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα τότε η μέση ηλικία στην αρχή του διαστήματος θα είναι $x + \frac{1}{2}$ οπότε έχουμε εκτίμηση της πιθανότητας θανάτου $q_x + \frac{1}{2}$.

Τέλος, ένας εύκολος εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του κεντρικού χρόνου, τον οποίο χρησιμοποιούμε όταν επιλέγουμε δείγμα από τον πληθυσμό, είναι να προσθέσουμε το χρόνο παραμονής στην έρευνα κάθε ατόμου που συμμετέχει σε αυτή. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται ευθεία. Για παράδειγμα, αν το ι-οστό άτομο αρχίσει να παρατηρείται στην ηλικία $x+\alpha_i$ και φύγει από την έρευνα είτε λόγω θανάτου είτε για οποιοδήποτε άλλο λόγο στην ηλικία $x+b_i$, τότε ο χρόνος παραμονής του στην έρευνα θα είναι $b_i - \alpha_i$. Άρα, ο κεντρικός χρόνος έκθεσης στον κίνδυνο του θανάτου ισούται με

$$E_x{}^c = \sum_i (b_i - \alpha_i)$$

2.3.2 Προσεγγιστικές Σχέσεις του m_x και του q_x

Στους πίνακες επιβίωσης καθοριστικό ρόλο έχουν οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας κατά ηλικία $(\dot{m}_x)$ οι οποίοι καλούνται κεντρικοί διότι συνδέουν ους θανάτους που συμβαίνουν στη διάρκεια της ηλικίας x με τους επιζώντες στο μέσο της υπόψη ηλικίας. Η τιμή της $\dot{m}_x$ δίνεται από τη συνάρτηση $\dot{m}_x = \frac{dx}{Lx}$ όπως προαναφέραμε όπου χαρακτηρίζεται και ως κεντρικός ρυθμός θνησιμότητας.

Ο κεντρικός ρυθμός θνησιμότητας είναι πιο σημαντικός δείκτης σε σχέση με την πιθανότητα θνησιμότητας $q_x = \frac{dx}{Lx}$ διότι:

α) οι αναμενόμενες τιμές θανάτων , που προέρχονται από μία έρευνα ενός πραγματικού πληθυσμού ατόμων έχουν καλύτερες στατιστικές ιδιότητες όταν εκτιμούμε τις m_x τιμές παρά τις q_x ως προς την αποδοτικότητα της εκτίμησης και των ασυμπτωτικών καλών ιδιοτήτων τους καθώς και

β) η q_x έχει αδυναμία στο ότι εκφράζει μόνο το συνολικό αποτέλεσμα της θνησιμότητας μέσα στο έτος ηλικίας x έως x+1. Δηλαδή, μας δίνει τελικά πόσοι πέθαναν στο τέλος του έτους και δεν επηρεάζεται από τον τρόπο που αυτοί οι θάνατοι είναι κατανεμημένοι στο αντίστοιχο έτος ζωής.

Από τον ορισμό και μόνο ο κεντρικός δείκτης θνησιμότητας m_x μπορεί να ερμηνευθεί ως σταθμισμένος μέσος της ποσότητας μ_{x+t} στο διάστημα x ως x+1, με τα βάρη να αναφέρονται σε πληθυσμό που είναι παρόν σε ηλικίες x+1 δηλαδή l_{x+t} . Σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού του Lx δηλαδή $L_x = l_x - a_x d_x$ και ερμηνεύοντας την ποσότητα a_x , έχουμε ότι a_x είναι ο μέσος χρόνος ζωής στο [x, x+1) από άτομα ηλικίας x , για αυτούς που θ αποβιώσουν μέσα στο διάστημα [x, x+1).

Για την εκτίμηση του a_x , λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση του m_x και του q_x αντικαθιστώντας το Lx ώστε να ισχύουν

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - d_x a_x} \quad \text{αλλά} \quad d_x = l_x q_x$$

$$\text{άρα} \quad m_x = \frac{q_x}{1 - q_x a_x} \quad \text{και} \quad q_x = \frac{m_x}{1 + a_x m_x}$$

Έχουμε τις εξής συνήθεις υποθέσεις:

- Θεωρούμε ότι οι θάνατοι κατανέμονται ομοιόμορφα στο έτος ζωής από [x, x+1) ή ισοδύναμα σύμφωνα με την UDD μέθοδο (uniform distribution of deaths), η συνάρτηση l_{x+t} είναι γραμμική συνάρτηση του t καθώς και η συνάρτηση επιβίωσης της απομένουσας ζωής του (x) $s_{T_x}(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ είναι γραμμική συνάρτηση του t, τότε $\int_0^1 l_{x+1}\, dt = l_x - \frac{1}{2} dx$ για $0 \le t \le 1$ άρα $m_x = \frac{dx}{\int_0^1 l_{x+1} dt} \cong \frac{dx}{l_x - \frac{1}{2} dx} \cong \frac{q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}$ ή λόγω προσέγγισης του m_x του q_x έχουμε $q_x = \frac{m_x}{1+\frac{1}{2}m_x}$.

Σύμφωνα με την υπόθεση UDD γνωρίζουμε ότι ${}_tP_x * \mu_x + t = q_x$, οπότε $\alpha(x) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ και από τις προσεγγιστείς σχέσεις $m_x \cong \frac{q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}$ και $\mu_x + t \cong \frac{q_x}{1-\tau q_x}$ παίρνουμε ότι $\mu_{x+\frac{1}{2}} = \frac{q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}$ άρα κάτω από την υπόθεση UDD καταλήγουμε ότι $m_x \cong \mu_{x+\frac{1}{2}}$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την ερμηνεία που δώσαμε στο m_x , δηλαδή ως σταθμισμένος μέσος της $\mu_x + t$ με βάρη τον πληθυσμό που είναι παρόν, διότι αν η συνάρτηση l_{x+t} που αντιπροσωπεύει τον παρόντα πληθυσμό, είναι γραμμική, οπότε ο σταθμισμένος μέσος του $\mu_x + t$ θα πρέπει προσεγγιστικά να είναι ίσος με το $\mu_{x+\frac{1}{2}}$.

- Δεν θεωρούμε καμία συνάρτηση για τη συνάρτηση επιβίωσης της απονέμουσας ζωής $S_t(x+t)$ ή για την ένταση θνησιμότητας $\mu_x + t$ σε κάθε έτος ηλικίας, οπότε γενικεύοντας σύμφωνα με τα προηγούμενα το $m_x = \frac{d_x}{l_x-(1-a_x)dx} = \frac{q_x}{1-(1-a_x)qx}$ και $q_x = \frac{dx}{l_x} = \frac{dx}{L_x+(1-a_x)dx} = \frac{m_x}{1+(1-a_x)m_x}$.

Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε και για ομαδοποιημένες ηλικίες (για τους συνεπτυγμένους πίνακες) όπου τα a_x ορίζονται ως m^{ax} δηλαδή για το διάστημα ηλικίας [x, x+n). Ορίζουμε ως ${}_nf_x = \frac{1}{n}\, n\, a_x$ το αναμενόμενο κλάσμα του διαστήματος ζωής που αφορά τα τελευταία έτη ζωής του x. Έτσι το nL_x , ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που θα βιώσουν από τα l_x άτομα στο διάστημα ηλικιών [x, x+n) αποτελείται από:

- n αριθμό ετών για κάθε άτομο που βίωσε όλο το διάστημα [x, x+n), δηλαδή για l_{x+n} άτομα.
- n a_x αριθμό ετών για κάθε έναν από αυτούς που πεθαίνουν κάποτε μέσα στο ίδιο διάστημα ηλικιών, δηλαδή για $_n dx$ άτομα.

Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα:

$$ {}_nL_x = n\left[l_x - {}_nd_x\left(1 - {}_nf_x\right)\right] $$

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nq_x}{n\left[1 - {}_nq_x\left(1 - {}_nf_x\right)\right]} $$

και

$$ {}_nq_x = \frac{n\,{}_nm_x}{1 + n(1 - {}_nf_x)\,{}_nm_x} $$

Αν ${}_na_x = n/2$ ή ${}_nf_x = 1/2$ από ομοιόμορφη κατανομή τότε αντικαθιστούμε και παίρνουμε τους νέους τύπους.

Θεωρούμε ότι η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή σε κάθε έτος ηλικίας (δηλαδή ισχύει η εκθετική παρεμβολή, CFM μέθοδος) όπου η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής T_x ισούται με

$$ {}_tP_x = S_{T_x}(t) = e^{a_x + b_x t} \quad ,\text{για } 0 \le t < 1 $$

και

$$ {}_tP_x = e^{-\int_0^t \mu_x + u du} = e^{a_x + b_x t} = \mu_x + t = -b_x \quad ,\text{για } 0 \le t < 1 $$

Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύουν οι:

$$ 1 - q_x = e^{\int_0^1 \mu_x + t dt} = e^{-\mu_x} $$

και

$$ m_x = \frac{\int_0^1 l_x + t\,\mu_x + t dt}{\int_0^1 l_x + t dt} $$

έχουμε $m_x \equiv \mu_x$ και άρα καταλήγουμε ότι $m_x = -\log(1-q_x)$

Επίσης έχουμε ότι το α_x ισούται με

$$\alpha_x = \frac{\int_0^1 t\ {}_tP_x\mu_x + tdt}{\int_0^1 {}_tP_x\mu_x + tdt} = \frac{\int_0^1 te^{-t\mu_x}\mu_x dt}{q_x}$$

άρα αντικαθιστώντας τελικά έχουμε

$$\alpha_x = -\frac{q_x + p_x\log(p_x)}{q_x\log(p_x)}$$

➢ Θεωρούμε ότι το α_x ακολουθεί την αρμονική παρεμβολή. Με την Balducci μέθοδο η υπόθεση στηρίζεται στο ότι το αντίστροφο της συνάρτησης επιβίωσης $S_T(x+t)$ είναι γραμμική συνάρτηση του t, δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{S_T(x+t)} = \alpha_x + b_x t$$
$$\text{για } 0 \leq t < 1$$

Άρα από τις σχέσεις που ισχύουν ${}_tP_x = \frac{p_x}{p_x+q_x}$ καθώς και $\theta x = \frac{tq_x}{p_x+tq_x}$ και τη σχέση του m_x καταλήγουμε ότι ισχύουν οι

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 \frac{P_x}{p_x+tq_x}dt}$$

Όπου λύνοντάς την παίρνουμε το m_x ίσο με

$$m_x = \frac{-q_x{}^2}{(1-q_x)\log(1-q_x)}$$

Άρα τελικά ισχύει

$$\alpha_x = \frac{\int_0^1 t\ {}_tP_x\mu_x + tdt}{\int_0^1 t\ {}_tP_x\mu_x + tdt} = \frac{\int_0^1 t\frac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2}dt}{q_x} = -\frac{p_x}{q^2{}_x}[q_x + \log p_x]$$

Συνοψίζοντας τις βασικές σχέσεις των προηγούμενων υποθέσεων για $0 \leq t \leq 1$ που ισχύουν ώστε μέσω αυτού να προσδιοριστεί το α_x (την κατανομή των θανόντων κατά τη διάρκεια των ηλικιών) καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1: Βασικές Σχέσεις Υποθέσεων UDD, CFM και BALDUCCI[5]

Συναρτήσεις	**Υπόθεση UDD**	**Υπόθεση CFM**	**Υπόθεση Balducci**
${}_tq_x$	${}_tq_x$	$1-(p_x)^t$	$\dfrac{tq_x}{p_x+tq_x}$
μ_{x+1}	$\dfrac{q_x}{1-tq_x}$	μ_x	$\dfrac{q_x}{p_x+tq_x}$
${}_{1-t}q_{x+1}$	$\dfrac{q_x(1-t)}{1-tq_x}$	$1-(p_x)^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_{t/1-t}q_x$	$(1-t)q_x$	$(p_x)^t-p_x$	$\dfrac{(1-t)p_xq_x}{p_x+tq_x}$
${}_tp_x\mu_{x+1}$	q_x	$e^{-t\mu_x}\mu_x$	$\dfrac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$
q_x	$\dfrac{m_x}{1+\frac{1}{2}m_x}$	———	———
m_x	$\dfrac{q_x}{1-\frac{1}{2}q_x}$	$-\log(1-q_x)$	$\dfrac{-q^2}{(1-q_x)}\log(1-q_x)$
α_x	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{-q_x+p_x\log(p_x)}{q_x\log(p_x)}$	$-\dfrac{p_x}{{q_x}^2}[q_x+\log(p_x)]$

2.3.3 Δημογραφικές Τεχνικές Κατασκευής Πινάκων Επιβίωσης

Οι πιθανότητες θανάτου ανάμεσα στην ακριβή ηλικία x και στην ακριβή ηλικία x+1 του πίνακα επιβίωσης αποτελούν το απαραίτητο και πιο βασικό στοιχείο πινάκων επιβίωσης. Ο υπολογισμός τους στηρίζεται στον υπολογισμό των ειδικών συντελεστών θνησιμότητας ανά μονοετείς ηλικιακές ομάδες. Γι' αυτό το λόγο υπάρχουν ορισμένες δημογραφικές τεχνικές που

[5] Χατζόπουλος Π. Ανάλυση Θνησιμότητας Σημειώσεις Μαθήματος Πανεπιστημίου Αιγαίου.

υπολογίζουν τις πιθανότητες θανάτου με τη βοήθεια των ειδικών συντελεστών και είναι οι ακόλουθες:

Α. Μέθοδος Ισοκατανομής των Θανάτων

Αυτή η μέθοδος είναι η πιο συνήθης μέθοδος που χρησιμοποιείται στα απογραφικά δεδομένα, όπως αναλύσαμε λεπτομερώς σε προηγούμενη ενότητα. Θεωρούμε ότι οι θάνατοι είναι ισοκατανεμημένοι σε κάθε ηλικία. Ο τύπος που δίνει τη σχέση P_x *πληθυσμός στο μέσο του έτους* και D_x ο αριθμός θανάτων, συνδυασμού των q_x με τα m_x, είναι

$$q_x = \frac{D_x}{p_x + \frac{1}{2}D_x} = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x} = \frac{2m_x}{2 + m_x}$$

Αυτός ο τύπος συνήθως εφαρμόζεται για τις ηλικίες $x \geq 2$.Στις πρώτες ηλικίες της ζωής δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον προαναφερθέντα τύπο για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων θανάτων καθώς η υπόθεση της ισοκατανομής των θανάτων στις ηλικίες αυτές δεν ισχύει. Η πιθανότητα q_0 εκτιμάται από το γνωστό δείκτη βρεφικής θνησιμότητας

$$q_0 = \frac{D_0^{t-1} + D_0^t + D_0^{t+1}}{B_{t-1} + B_t + B_{t+1}} \qquad , B_t\text{: ο αριθμός γεννήσεων στο εκάστοτε έτος}$$

ενώ για την εκτίμηση του q_1 λαμβάνεται υπόψη ότι στο πρώτο εξάμηνο της ηλικίας x=1 συμβαίνει το 65% (λίγο παραπάνω από το 50% που συμβαίνει στις υπόλοιπες ηλικίες).

Αφού υπολογιστούν οι πιθανότητες θνησιμότητας και προσδιοριστεί η ρίζα του πίνακα l_0 , τότε προσδιορίζονται και υπολογίζονται και οι επιζώντες στην αρχή των ηλικιών καθώς και οι θάνατοι από τους τύπους

$$l_{x+1} = l_x - d_x \quad \text{και} \qquad d_x = l_x - l_{x+1}$$

και ο αριθμός των ανθρωπο-ετών με τις σχέσεις

$$L_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) \quad \text{και} \quad {}_\infty L_{85} = \frac{l_{85}}{{}_\infty m_{85}}$$

Οι υπόλοιπες συναρτήσεις υπολογίζονται σύμφωνα με τις συναρτήσεις που έχουν αναφερθεί παραπάνω στο κεφάλαιο που διανύουμε.

Β. Μέθοδος των Reed-Merrell

Στη μέθοδο αυτή οι πιθανότητες θανάτου q_x εκτιμώνται συναρτήσει εμπειρικών δεικτών m_x με μαθηματικές εκφράσεις από τους Reed-Merrell (1939), οι οποίες ύστερα από επεξεργασία και στατιστική ανάλυση πολυπληθών στοιχείων κατέληξαν στις σχέσεις:

$$ {}_nq_x = 1 - exp\left[-n * {}_nm_x - 0,008 * n^3 * {}_nm_x^2\right] $$

οι οποίοι για n=1

$$ q_0 = 1 - exp[-m_0(0,9539 - 0,5509m_0)] $$

$$ {}_1q_1 = 1 - exp\left[- {}_1m_1 - 0,008 * {}_1m_1^2\right] $$

$$ {}_1q_2 = 1 - exp\left[- {}_1m_2 - 0,008 * {}_1m_2^2\right] $$

$$ {}_1q_3 = 1 - exp\left[- {}_1m_3 - 0,008 * {}_1m_3^2\right] $$

$$ {}_1q_4 = 1 - exp\left[- {}_1m_4 - 0,008 * {}_1m_4^2\right] $$

Συνήθως αυτή τη μέθοδος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων θανάτου για τις ηλικίες 1-4 έτη. Για περαιτέρω ανάλυση του υπολογισμού των υπολοίπων συναρτήσεων του πίνακα επιβίωσης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Τσίμπο – Παπαδάκη (2004).

Γ. Μέθοδος του Greville

Η βασική υπόθεση της μεθόδου αυτής είναι ότι οι ειδικοί δείκτες θνησιμότητας στον πραγματικό πληθυσμό είναι ίσοι με τους αντίστοιχους ειδικούς κεντρικούς δείκτες του πίνακα επιβίωσης. Όταν θεωρούμε ότι ο πληθυσμός είναι στάσιμος τότε η μέθοδος αυτή τηρεί επακριβώς την ιδιότητα.

Για τη βρεφική ηλικία θανάτου ισούται με το δείκτη βρεφικής θνησιμότητας ενώ για τις υπόλοιπες ηλικίες από τον τύπο

$$q_x = \frac{\mu_x}{m_x\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{12}(m_x - lnc)\right]}$$

$$\mu\varepsilon\ 1{,}08 \leq c \leq 1{,}10 \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ 0{,}07696 \leq lnc \leq 0{,}09531$$

Συνήθως πάνω από την ηλικία των 85 ετών τα δεδομένα είναι ανεπαρκή ή ακόμα και ανύπαρκτα. Θέτουμε την πιθανότητα θανάτου ίση με το 1. Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού του αριθμού των ανθρωπο-ετών ζωής εκτιμάται άμεσα από τη σχέση

$$L_x = \frac{d_x}{m_x}$$

Δ. Μέθοδος του Keyfitz

Από τη γνωστή έκφραση των ανθρωπο-ετών ζωής $L_x = (l_x - d_x) + \alpha_x d_x$ λαμβάνουμε $l_x = L_x + (1 - \alpha_x)d_x$. Αντικαθιστώντας στη γνωστή σχέση της πιθανότητας θανάτου $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ λαμβάνουμε την ισότητα προσέγγισης q_x με m_x και είναι

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - \alpha_x)m_x}$$

Δηλαδή, ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει τη σύνδεση των πιθανοτήτων θανάτων με τους κεντρικούς δείκτες θνησιμότητας είναι το α_x , δηλαδή ο αριθμός των ανθρωπο-ετών που έζησαν οι θανόντες. Αν οι ποσότητες του α_x δεν είναι γνωστές μπορούν να υπολογισθούν είτε από έναν κατάλληλο πρότυπο πίνακα, είτε από μια παραβολή δευτέρου βαθμού είτε και από τον τύπο

$$\alpha_x = \frac{-\frac{1}{24}d_{x-1} + \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{24}d_{x+1}}{d_x}$$

Για περαιτέρω ανάλυση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Preston (1972)[6]
Η μέθοδος Keyfitz δίνει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις όπου οι πληθυσμοί έχουν σχετικά ομαλή κατά ηλικία δομή. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις εκτιμώνται με τους τύπους που αναφέρονται στην ενότητα 2.2.

Ε. Αναφορά σε Τυπικό Πίνακα Επιβίωσης

Στη μέθοδο αυτή μέσω των στοιχείων του υπό μελέτη πληθυσμού και του πληθυσμού αναφοράς, εκτιμώνται οι πιθανότητες θανάτου και κατ' επέκταση υπολογίζονται όλες οι συναρτήσεις που απαρτίζουν τον πίνακα επιβίωσης. Ουσιαστικά, γίνεται η επιλογή ενός πληθυσμού με παρόμοιες προς τον εξεταζόμενο συνθήκες θνησιμότητας γι' αυτό και τον λαμβάνουμε και ως πίνακα αναφοράς.

Έστω m_x οι ειδικοί κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας του υπό μελέτη πληθυσμού και q_x οι πιθανότητες θανάτου τους. Μέσω των $\widehat{q_x}$ και $\widehat{m_x}$ του πληθυσμού αναφοράς έχουμε την εξής σχέση:

$$q_x = m_x\left(\frac{\widehat{q_x}}{\widehat{m_x}}\right)$$

Η πιθανότητα θανάτου στη βρεφική ηλικία υπολογίζεται βάσει της φυσικής κίνησης του πληθυσμού ενώ ισχύει
η σχέση

$$_{\infty}q_{85} = 1$$

για ευκολία στους υπολογισμούς.

Για την εκτίμηση του αριθμού των ανθρωπο-ετών ζωής εφαρμόζονται οι τύποι:

$$L_0 = l_0 - \left(\frac{\hat{l}_0 - \hat{L}_0}{\hat{d}_0}\right) do$$

$$L_x = l_x - \left(\frac{\hat{l}_x - \hat{L}_x}{\hat{d}_x}\right) dx$$

$$_{\infty}L_{85} = l_{85}\,\dot{e}_{85}$$

θεωρώντας $\dot{e}_{85} = \hat{\dot{e}}_{85}$

[6] Preston, S.H.N. Keyfitz, R Schoen (1972) Causes of Death: Life Tables for National Populations, New York & London, Seminar Press

Οι υπόλοιπες συναρτήσεις υπολογίζονται εφαρμόζοντας τους προηγούμενους τύπους που έχουμε ήδη αναφέρει.

2.4 Κατασκευή Ασφαλιστικών Πινάκων Θνησιμότητας

Αρχικά, για την κατασκευή των ασφαλιστικών πινάκων απαιτείται η συγκέντρωση και ο έλεγχος του κατάλληλου στατιστικού-δημογραφικού υλικού. Μια πρώτη προσέγγιση θα ήταν η χρήση μιας κοορτής, δηλαδή μιας γενιάς ατόμων που έχουν γεννηθεί την ίδια χρονιά Με αυτό τον τρόπο καταγράφεις τον αριθμό των θανάτων και των επιζώντων σε κάθε ηλικία, μέχρι να πεθάνει και το τελευταίο μέλος της κοορτής.

Σύμφωνα και με τον πίνακα επιβίωσης γενεάς, γνωρίζοντας τον αριθμό των επιζώντων και των θανάτων σε κάθε ηλικία, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ποσοστά θνησιμότητας. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι χρονοβόρα καθώς απαιτεί εκατό και πλέον χρόνια για να ολοκληρωθεί.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ασφαλισμένη ανθρωποομάδα Α και τη θέτουμε υπό παρατήρηση για μια χρονική περίοδο της εκλογής μας: (1/1/m – 31/12/m+n). Η περίοδος αυτή ονομάζεται στατιστική και χρονικά δεν είναι καθορισμένη, εκτείνεται από 3 μέχρι 5 χρόνια. Δηλαδή αντί να παρακολουθούμε μια κοορτή, παρακολουθούμε μια σειρά από κοορτές.

Έστω ότι βρισκόμαστε στο τέλος της στατιστικής περιόδου 31/12/m+n, λαμβάνοντας υπόψη τον κάθε ασφαλισμένο καταφέρνουμε να συλλέξουμε εύκολα τα στατιστικά στοιχεία που μας είναι απαραίτητα για την κατασκευή του πίνακα.

Τα στατιστικο-δημοφραφικά στοιχεία είναι τα εξής:

- Ο αριθμός των ασφαλισμένων b_x που βρέθηκαν στην αρχή της περιόδου να είναι ηλικίας x ετών.
- Ο αριθμός των ατόμων c_x που μπήκαν στην ασφαλισμένη ομάδα κατά τη διάρκεια της περιόδου σε ηλικία x ετών.
- Ο αριθμός των ασφαλισμένων d_x που πέθαναν κατά τη διάρκεια της περιόδου σε ηλικία x ετών.

- Ο αριθμός ασφαλισμένων α_x που κατά τη διάρκεια της περιόδου και σε ηλικία x ετών βγήκαν από την ασφαλισμένη ομάδα για οποιοδήποτε άλλο λόγο (σύνταξη, παραίτηση, ανικανότητα) εκτός από το θάνατο.
- Ο αριθμός των ασφαλισμένων e_x που βρέθηκαν στο τέλος της περιόδου να ανήκουν ακόμα στην ασφαλισμένη ομάδα και να έχουν ηλικία x ετών.

Σημειώνεται, ότι υπάρχει συγκεκριμένη ηλικία x+α όπου επιτρέπεται να μπει ένα άτομο στην ασφαλισμένη ομάδα καθώς και συγκεκριμένη ηλικία x+b ώστε να παραμείνει σε αυτή. Σύμφωνα με τα παραπάνω διαθέσιμα στοιχεία, ο αριθμός των ασφαλισμένων L_x που κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου φτάνει την x επέτειο της γέννησής του και την ξεπερνά δίνεται από τον τύπο:

$$L_x = L_{x-1} + b_{x-1} + c_{x-1} - d_{x-1} - \alpha_{x-1} - e_{x-1}$$

και αν αθροίσουμε κατά ηλικία θα έχουμε

$$L_x = \sum_{i=\alpha}^{x-1} (b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i)$$

Για να προσδιορίσουμε την έκθεση κινδύνου των ασφαλισμένων E_x θεωρούμε αρχικά, ότι τα άτομα d_x παραμένουν υπό το καθεστώς του κινδύνου για ολόκληρη την ηλικία x και πεθαίνουν στο τέλος της ηλικίας x. Οι υπόλοιποι ασφαλισμένοι δεν παραμένουν καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου υπό το καθεστώς του κινδύνου για ολόκληρη την ηλικία x. Άρα, εκτιμάται, σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση ότι οι d_x περιλαμβάνονται στο σύνολο των L_x.Αν δεχτούμε θεωρητικά ότι ισχύει $b_x = c_x = \alpha_x = e_x = 0$ τότε θα ισχύει και $E_x = L_x$.

Πρακτικά όμως αυτό δεν μπορεί να ισχύει καθώς είμαστε υποχρεωμένοι να λάβουμε υπόψη τους b_x, c_x, α_x, e_x και να τους αναγάγουμε σε ανθρωποέτη για τους υπολογισμούς μας.

Για τα b_x και c_x υπολογίζουμε το συνολικό χρόνο των ασφαλισμένων που δεν παρέμειναν κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου κάτω από το καθεστώς του κινδύνου σε ηλικία x, όπου το χρόνο αυτό τον εκφράζουμε τελικά σε ανθρωποέτη.

Σε αντίθεση, στις περιπτώσεις των $\alpha_x\, και\, e_x$, οι ασφαλισμένοι κατά ένα μέρος της ηλικίας x παρέμειναν στην ασφαλισμένη ομάδα για την στατιστική περίοδο που εξετάζουμε. Άρα, και εδώ ο συνολικός χρόνος παραμονής των $\alpha_x\, και\, e_x$ στην ασφάλιση να εκφραστεί σε ανθρωποέτη και στη συνέχεια να αφαιρεθούν.

Έστω ότι τα υπόψη ανθρωποέτη τα συμβολίσουμε ως b'_x ,c'_x,a'_x και e'_x αντίστοιχα για τους $b_x, c_x, \alpha_x\, και\, e_x$ ασφαλισμένους, η έκθεση στον κίνδυνο θα είναι ίση με

$$E_x = L_x + (b_x + c_x - a_x - e_x) - (b'_x + c'_x - a'_x - e'_x)$$

Παραπάνω, προσδιορίσαμε την έννοια της έκθεσης στον κίνδυνο στους ασφαλιστικούς πίνακες. Για τον υπολογισμό της έκθεσης αυτής χρησιμοποιείται η μέθοδος των ηλικιών με ακρίβεια καθώς και άλλες προσεγγιστικές μεθόδους σχετικές με την ακριβή ηλικία.

Αρχικά, για τη μέθοδο των ηλικιών με ακρίβεια ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις με $0 \leq t \leq 1$

- $f_1 = b(x+t)dt$, ο αριθμός των ασφαλισμένων που βρέθηκαν στην αρχή της στατιστικής περιόδου να έχουν ηλικία από x+t μέχρι x+t+dt
- $f_2 = c(x+t)dt$, ο αριθμός των ατόμων που μπήκαν στην ασφάλιση κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου με ηλικία από x+t μέχρι x+t+dt
- $f_1 = a(x+t)dt$ ο αριθμός των ασφαλισμένων που βγήκαν από την ασφάλιση κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου με ηλικία από x+t μέχρι x+t+dt και
- $f_2 = e(x+t)dt$ ο αριθμός των ασφαλισμένων που στο τέλος της στατιστικής περιόδου βρέθηκαν να έχουν ηλικία από x+t μέχρι x+t+dt .

Αν δεχτούμε ότι η συνάρτηση $f_1 = b(x+t)$ είναι συνεχής ως προς τη μεταβλητή t, τότε θα είναι

$$\int_0^1 b(x+t)dt = b_x$$

Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι παραπάνω συναρτήσεις, δηλαδή έχουμε:

$$\int_0^1 c(x+t)\,dt = c_x \ , \int_0^1 a(x+t)dt = a_x \text{ και } \int_0^1 e(x+t)dt = e_x.$$

Τα αντίστοιχα ανθρωποέτη που ορίσαμε παραπάνω θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\int_0^1 b(x+t)(1-t)dt \int_0^1 c(x+t)(1-t)dt$$

$$\int_0^1 a(x+t)(1-t)dt, \int_0^1 e(x+t)(1-t)dt$$

Άρα , τα άτομα (ανθρωποέτη) E_x που εκτέθηκαν για ολόκληρη την ηλικία x στον κίνδυνο του θανάτου κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου θα είναι

$$E_x = L_x + \int_0^1 b(x+t)(1-t)dt + \int_0^1 c(x+t)(1-t)dt$$
$$- \int_0^1 a(x+t)(1-t)dt - \int_0^1 e(x+t)(1-t)dt$$

Όπου κάνοντας τις πράξεις και τις αντικαταστάσεις θεωρώντας ότι ισχύουν

$$\int_0^1 b(x+t)tdt = b'_x \quad \int_0^1 c(x+t)tdt = c'_x$$

$$\int_0^1 a(x+t)tdt = a'_x, \int_0^1 e(x+t)tdt = e'_x$$

Καταλήγουμε στην αρχική σχέση

$$E_x = L_x + (b_x + c_x - a_x - e_x) - (b'_x + c'_x - a'_x - e'_x)$$

που σύμφωνα με τη σχέση

$$L_x = \sum_{i=\alpha}^{x-1} (b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i)$$

έχουμε

$$E_x = \sum_{i=\alpha}^{x} (b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i) + d_x - (b'_x + c'_x - a'_x - e'_x)$$

Μετά τον υπολογισμό των ασφαλισμένων που εκτέθηκαν κατά τη διάρκεια της στατιστικής περιόδου στον κίνδυνο του θανάτου για ολόκληρη την ηλικία x, υπολογίζουμε από τη γνωστή σχέση την πιθανότητα θανάτου q_x που αντιστοιχεί στην ηλικία x του ασφαλιστικού πίνακα θνησιμότητας και ισούται με

$$q_x = \frac{d_x}{E_x} = \frac{d_x}{\sum_{i=\alpha}^{x}(b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i + d_x) - (b'_x + c'_x - a'_x - e'_x)}$$

Η μέθοδος των ηλικιών με ακρίβεια στους ασφαλιστικούς πίνακες θεωρείται η πιο ορθή μέθοδος υπολογισμού των ποσοστών θνησιμότητας q_x καθώς λαμβάνεται υπόψη η ηλικία παραμονής των ασφαλισμένων κάτω από το καθεστώς του κινδύνου με απόλυτη ακρίβεια. Στην πράξη όμως δεν χρησιμοποιείται συχνά γιατί παρουσιάζει δυσκολίες στην εφαρμογή της.

Στην ασφαλιστική πρακτική οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι η άμεση μέθοδος, η μέθοδος των μέσων ηλικιών και η μέθοδος των πλησιέστερων ηλικιών. Όλες ξεκινάνε από τη σχέση

$$E_x = \sum_{i=\alpha}^{x}(b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i) + d_x - (b'_x + c'_x - a'_x - e'_x)$$

και έχουν ως σκοπό την εκτίμηση των b'_x ,c'_x, a'_x και e'_x.

Με την άμεση μέθοδο υπολογίζουμε τον αριθμό των μηνών που το κάθε άτομο από τα b_x , κατά τη διάρκεια της ηλικίας x , δεν είχε την ιδιότητα του ασφαλισμένου. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το άθροισμα των υπόψη μηνών απουσίας από την ασφάλιση όλων των ατόμων της ομάδας b_x. Έστω ότι ο συνολικός αριθμός των μηνών απουσίας από την ασφάλιση είναι N_1, οπότε έχουμε $b'_x = \frac{N_1}{12}$, όπου το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα c'_x,a'_x και e'_x. Αφού υπολογιστούν αυτά, αντικαθιστώντας τα στην τελευταία συνάρτηση υπολογίζουμε την έκθεση στον κίνδυνο και κατ' επέκταση τα ποσοστά θνησιμότητας.

Στη μέθοδο των μέσων ηλικιών δεχόμαστε ότι η κάθε μια ομάδα ασφαλισμένων κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα της ηλικίας x και x+1. Δηλαδή, μερικά από τα ασφαλισμένα άτομα της κάθε ομάδας βρέθηκαν κατά την έναρξη της στατιστικής περιόδου να έχουν διανύσει τους πρώτους μήνες της ηλικίας x, άλλα το μισό και άλλα περισσότερο από το μισό. Γι αυτό το λόγο με αυτή τη μέθοδο αποδεχόμαστε ότι το κάθε άτομο παραμένει ασφαλισμένο στην ηλικία x + ½ έτη. Άρα έχουμε

$$b'_x = \frac{1}{2} b_x$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται και οι υπόλοιπες ομάδες των ασφαλισμένων. Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση του E_x την παραπάνω σε κάθε μονάδα ασφαλισμένου , θα λάβουμε τελικά

$$E_x = \sum_{i=\alpha}^{x-1} (b_i + c_i - d_i - \alpha_i - e_i) + \frac{1}{2}(b_x + c_x - a_x - e_x)$$

Τέλος, στη μέθοδο των πλησιέστερων ηλικιών υιοθετούμε την ίδια υπόθεση με τη μέθοδο των μέσων ηλικιών, δηλαδή της ομοιόμορφης κατανομής, μόνο που το κάθε άτομο στην κάθε ομάδα ασφαλισμένων θεωρείται ότι έχει σαν ηλικία την ακέραιη ηλικία x ή x+1. Ανάλογα με το αν η ακριβής ηλικία του ατόμου πλησιάζει περισσότερο προς τη μια ή προς την άλλη ακέραιη ηλικία θα έχουμε την εξής σχέση

$$\bar{b}_\iota = \frac{1}{2} b_{i-1} + \frac{1}{2} b_i$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν και για τις υπόλοιπες ομάδες $\bar{c}_\iota, \bar{a}_\iota, \bar{e}_\iota$. Είναι φανερό ότι τα άτομα αυτά θεωρούνται ότι έχουν ηλικία i μετά την αναδιανομή των ανθρώπινων ομάδων b_i, c_i, α_i *και* e_i με βάση το κριτήριο της πλησιέστερης ακέραιης ηλικίας. Κατόπιν διαφόρων υπολογισμών σύμφωνα με τα παραπάνω αντικαθιστώντας τα στη βασική σχέση της E_x καταλήγουμε στη σχέση

$$E_x = \sum_{\iota=\alpha}^{x} \left(\bar{b}_\iota + \bar{c}_\iota - \bar{d}_\iota - \bar{a}_\iota - \bar{e}_\iota\right) + d_x$$

και στην πιθανότητα θανάτου

$$q_x = \frac{d_x}{E_x} = \frac{d_x}{\sum_{\iota=\alpha}^{x} \left(\bar{b}_\iota + \bar{c}_\iota - \bar{d}_\iota - \bar{a}_\iota - \bar{e}_\iota\right) + d_x}$$

Εφόσον υπολογίσουμε τα ποσοστά θνησιμότητας, καθώς αποτελούν το βασικότερο εργαλείο για τους πίνακες ζωής, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους ασφαλιστικούς πίνακες θνησιμότητας. Διαλέγουμε μια αυθαίρετη τιμή ή ρίζα για τη νεότερη ηλικία με τον ίδιο τρόπο όπως και στους πίνακες γενεάς που αναλύσαμε σε προηγούμενη ενότητα. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις κατασκευάζουμε έναν ασφαλιστικό πίνακα θνησιμότητας όμοιο με τον πίνακα θνησιμότητας της γενεάς.

Γενικά, οι ασφαλιστικές εταιρίες βασίζονται σε πίνακες ασφαλισμένου πληθυσμού, δηλαδή σε πίνακες θνησιμότητας που κατασκευάζονται από στατιστικά στοιχεία των ασφαλιστικών εταιριών μιας χώρας ή διαφορετικά αν δεν υπάρχει η υποδομή για κάτι τέτοιο τότε βασίζονται σε πίνακες θνησιμότητας που αφορούν τον γενικό πληθυσμό της χώρας με διάφορες προσαρμογές.

Το βέλτιστο βέβαια είναι η χρήση ενός πίνακα θνησιμότητας βασισμένο σε ασφαλισμένο πληθυσμό διότι οι ασφαλισμένες ζωές (*insured lives*) παρουσιάζουν χαμηλότερη θνησιμότητα σε σχέση με τη θνησιμότητα του γενικού πληθυσμού, σε κάθε ηλικία και για τα δύο φύλλα. Ο λόγος είναι ότι ο ασφαλισμένος πληθυσμός προκύπτει για το γενικό πληθυσμό με τη διαδικασία της *αυτοεπιλογής* (συνήθως τα άτομα που ψάχνουν μια ασφάλιση βιώνουν καλύτερες συνθήκες διαβίωσης και επίπεδο ζωής) και την διαδικασία της *επιλογής* (τη διαδικασία *underwriting* από τις ασφαλιστικές εταιρίες σε συνδυασμό με ιατρικές εξετάσεις για να μπουν στο πρόγραμμα ασφάλισης).

2.5 Κατασκευή Πινάκων Πολλαπλών Κινδύνων

Ο πίνακας πολλαπλών κινδύνων περιγράφει τη μείωση ενός πληθυσμού με βάσει διαφόρων αιτιών εξόδου και όχι μόνο λόγω της θνησιμότητας που είναι η βασική αιτία εξόδου στον απλό πίνακα. Ο πιο κλασικός πίνακας αυτής της περίπτωσης είναι ο πίνακας υπηρεσίας όπου αποτελείται από τέσσερα αίτια εξόδου, τη θνησιμότητας, την ανικανότητα, την παραίτηση και τέλος τη συνταξιοδότηση των ατόμων ηλικίας x.

Για την κατασκευή ενός τέτοιου πίνακα πολλαπλών κινδύνων όπως και στην κατασκευή ενός απλού πίνακα πρωτίστως πρέπει να εκτιμηθεί η πιθανότητα εξόδου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η ολική πιθανότητα εξόδου αποτελείται από επιμέρους πιθανότητες εξόδου λόγω διαφόρων αιτιών. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι ακριβώς ίδια όπως και στον απλό πίνακα μόνο που υπάρχουν κάποιες διαφορές στον τρόπο υπολογισμού τους ώστε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Πρώτα, κατασκευάζουμε έναν πίνακα με όλες τις αιτίες μαζί θεωρώντας ότι έχουμε έναν απλό πίνακα με ένα μόνο αίτιο εξόδου. Διαλέγουμε τη γνωστή ρίζα $l_0{}^T$ και ως $l_x{}^T$ συμβολίζουμε το σύνολο των ατόμων που φθάνουν στην ηλικία x.

Σύμφωνα με αυτό υπολογίζονται σταδιακά τα ακόλουθα:

$$l_{x+1}{}^T = l_x{}^T(1 - q_x{}^T)$$

και

$$d_x{}^T = l_x{}^T * q_x{}^T$$

με $d_x{}^T$ να συμβολίζουμε το σύνολο των αποχωρησάντων ατόμων λόγω των διαφόρων αιτιών εξόδου ηλικίας x.

Συνεπώς , το σύνολο των αποχωρησάντων ατόμων δίνεται από τη σχέση

$$d_x{}^T = l_x{}^T - l_{x+1}{}^T = d_x{}^m + d_x{}^d + d_x{}^w + d_x{}^r$$

δηλαδή ισούται με το άθροισμα των αποχωρησάντων ανά αιτία.(m ,d,w,r που δηλώνουν αντίστοιχα θνησιμότητα, ανικανότητα, παραίτηση και συνταξιοδότηση).

Άρα η ολική πιθανότητα εξόδου θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$q_x{}^T = \frac{d_x{}^T}{l_x{}^T}$$

ενώ το ολικό κεντρικό ποσοστό εξόδων από τη σχέση

$$m_x{}^T = \frac{d_x{}^T}{L_x{}^T}$$

Βάσει των τιμών αυτών των πιθανοτήτων και σύμφωνα με τους τύπους που συνδέουν τα στοιχεία αυτά υπολογίζουμε τις υπόλοιπες συναρτήσεις από τις οποίες αποτελείται ένας πίνακας όπως ακριβώς και στον απλό πίνακα επιβίωσης.

Για κάθε ένα αίτιο εξόδου σε ένα πίνακα πολλαπλών κινδύνων μπορούμε να ορίσουμε ένα *μοντέλο μοναδιαίου κινδύνου* το οποίο να εξαρτάται μόνο από το συγκεκριμένο κίνδυνο και συνεπώς να είναι *ανεξάρτητο* από τους άλλους κινδύνους που είχαμε στον πίνακα των πολλαπλών κινδύνων. Σε πίνακα πολλαπλών εξόδων το κάθε ένα κίνδυνο δεν είναι ανεξάρτητο από το άλλο, τα αίτια εξόδου λειτουργούν ταυτόχρονα και ανταγωνιστικά και κάθε πιθανότητα εξαρτάται από την πιθανότητα των υπολοίπων κινδύνων.

Έτσι, αν μας ενδιαφέρει ένα συγκεκριμένο αίτιο εξόδου και αν οι πιθανότητες των υπολοίπων κινδύνων αυξηθούν τότε λιγότερες ζωές θα ήταν εκτεθειμένες στο συγκεκριμένο κίνδυνο και η πιθανότητα θα μειωνόταν. Δηλαδή η «πραγματική» (ανεξάρτητη) πιθανότητα θα υπέκυπτε στο οποιοδήποτε αίτιο εξόδου αν δεν παρεμβάλλονταν τα υπόλοιπα αίτια εξόδου.

Τα ποσοστά εξόδων τα οποία χαρακτηρίζουμε *εξαρτημένα* λόγω της σχέσης που έχουν μεταξύ τους ισούνται με

$$q_x{}^j = \frac{d_x{}^j}{l_x{}^T} \quad ανά\ j = \ m, d, w, r\ αίτιο\ εξόδου$$

Το ίδιο ισχύει και για τα κεντρικά ποσοστά εξόδων τα οποία χαρακτηρίζονται και αυτά ως *εξαρτημένα* και ισούνται με

$$m_x{}^j = \frac{d_x{}^j}{L_x{}^T} \quad ανά\ j = m, d, w, r\ αίτιο\ εξόδου$$

όπου $L_x{}^T = \int_0^1 l_{x+t}{}^T dt$.

Τα *ανεξάρτητα* ποσοστά εξόδων ορίζονται για το κάθε αίτιο ξεχωριστά θεωρώντας ότι τα υπόλοιπα αίτια έχουν εκλείψει. Για παράδειγμα, το *ανεξάρτητο* ποσοστό θνησιμότητας είναι το ποσοστό θνησιμότητας που υφίσταται στον πληθυσμό εάν εκλείψουν οι άλλες αιτίες εξόδου (ανικανότητα, παραίτηση και συνταξιοδότηση) και δίνεται από τον τύπο

$$q'_x{}^j = \frac{d_x{}^j}{l_x{}^j}$$

Ομοίως τα ανεξάρτητα κεντρικά ποσοστά θα είναι ίσα με

$$m'_x{}^j = \frac{d_x{}^j}{L_x{}^j}$$

Οι τύποι που συνδέουν τα εξαρτημένα με τα ανεξάρτητα ποσοστά εξόδου είναι οι ακόλουθοι ανά m, d, w, r αιτία εξόδου

$$q'_x{}^m \cong \frac{q_x{}^m}{1 - [q_x{}^d + q_x{}^w + q_x{}^r]}$$

Και

$$q_x{}^m \cong \frac{q'_x{}^m}{1 + [q'_x{}^d + q'_x{}^w + q'_x{}^r]}$$

όπου με $q'_x{}^m$ συμβολίζουμε το ανεξάρτητο ποσοστό της θνησιμότητας. Ομοίως συμβολίζονται και υπολογίζονται και τα υπόλοιπα j αίτια εξόδου.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ομοιόμορφη κατανομή των εξόδων από κάθε αιτία μέσα στο διάστημα ηλικίας [x, x+1) τότε ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις μεταξύ των εξαρτημένων και των ανεξάρτητων ποσοστών εξόδων

$$q_x{}^j = q'_x{}^j \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q'_x{}^j\right)$$

και

$$q'_x{}^j = \frac{q_x{}^j}{1 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_x{}^j}$$

Αν κάποιος από τους κινδύνους μπορεί να εξαλειφθεί τότε η αντίστοιχη εξαρτημένη πιθανότητα κινδύνου θα μηδενιστεί για όλες τις ηλικίες του πίνακα επιβίωσης. Κατά συνέπεια και οι εξαρτημένες πιθανότητες των υπολοίπων κινδύνων θα μεταβληθούν, αφού υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους. Σε μια τέτοια περίπτωση τα νέα $q_x{}^j$ υπολογίζονται με την ακόλουθη διαδικασία:

- Από τα προηγούμενα $q_x{}^j$ βάσει της δεύτερης παραπάνω σχέσης υπολογίζονται τα $q'_x{}^j$
- Θέτουμε $q_x{}^k = 0$ και τα υπόλοιπα $q_x{}^{j \neq k}$ παραμένουν αμετάβλητα εφόσον είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και
- Από τα νέα $q_x{}^j$ υπολογίζονται τα νέα $q_x{}^j$ βάσει της πρώτης παραπάνω σχέσης.

Μετά τους υπολογισμούς και τις σχέσεις που συνδέουν τα εξαρτημένα και τα ανεξάρτητα ποσοστά εξόδων, θα αναφέρουμε κάποιες γενικές παρατηρήσεις σχετικά με τα αίτια αυτά. Το ποσοστό θνησιμότητας όπως και το ποσοστό ανικανότητας είναι συνήθως μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε σχέση με την ηλικία ενός ατόμου. Αντιθέτως, το ποσοστό παραίτησης είναι μια φθίνουσα συνάρτηση σε σχέση με την ηλικία ενός ατόμου. Ομοίως και το ποσοστό της πρόωρης συνταξιοδότησης είναι μια φθίνουσα συνάρτηση σε σχέση με την ηλικία. Η κανονική συνταξιοδότηση είναι σταθερή σε σχέση με την ηλικία καθώς δίνεται σε σταθερή ηλικία x.

Τα τυπικά μεγέθη που συνήθως χρησιμοποιούνται για τα άκρα ενός πίνακα υπηρεσίας με τέσσερα αίτια εξόδου δίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα που ακολουθεί:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2: Τυπικά Άκρα των Αιτιών Εξόδου[7]

ΑΙΤΙΑ ΕΞΟΔΟΥ	ΚΑΤΩ ΑΚΡΟ	ΠΑΝΩ ΑΚΡΟ
ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	$q_{20}{}^{m} = 0.2‰$ έως $1‰$	$q_{64}{}^{m} = 5‰$ έως $15‰$
ΑΝΙΚΑΝΟΤΗΤΑ	$q_{20}{}^{d} = 0.01‰$ έως $0.1‰$	$q_{64}{}^{d} = 20‰$ έως $60‰$
ΠΑΡΑΙΤΗΣΗ Ή ΑΠΟΛΥΣΗ	$q_{20}{}^{w} = 70‰$	$q_{44}{}^{w} = \cdots = q_{64}{}^{w} = 0$
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΗΣΗ	$q_{65}{}^{m} = q_{65}{}^{d} = q_{65}{}^{w} = 0$	$q_{65}{}^{r} = 1$
ΠΡΟΩΡΗ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΗΣΗ	$q_{20}{}^{r'} = \cdots = q_{59}{}^{r'} = 0$ $q_{60}{}^{r'} = \cdots = q_{63}{}^{r'} = 200‰$	$q_{64}{}^{r'} = 100‰$

Γενικά, αν θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα πολλαπλών κινδύνων ως ιδανική βέλτιστη περίπτωση θα θεωρούσαμε ότι θα ήταν αν τα δεδομένα της έρευνας μας επιτρέπανε την άμεση εκτίμηση των πιθανοτήτων, δηλαδή από παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια της έρευνας, όσο αφορά τον αριθμό και το αίτιο της αποχώρησης από τον πληθυσμό για κάθε έτος ηλικίας.

[7] Αλέξανδρος Ζυμπίδης :«Αναλογιστική Στατιστική-Κατασκευή Πινάκων θνησιμότητας»

Όταν τέτοιου είδους δεδομένα δεν είναι διαθέσιμα, εναλλακτικά μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα πολλαπλών κινδύνων από συνδεόμενους μοναδιαίους πίνακες κινδύνων οι οποίοι πίνακες θα πρέπει να είναι κατάλληλοι για τον πληθυσμό που εξετάζουμε. Δηλαδή ο αναλογιστής θα πρέπει να εξετάσει πρώτα τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού και να αποφασίσει εάν οι αντίστοιχοι μοναδιαίοι πίνακες περικλείουν αντίστοιχα χαρακτηριστικά για να θεωρηθούν συνδεόμενοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ

3.1 Εννοιολογική Σημασία και Διαδικασία Εξομάλυνσης

Οι εκτιμήτριες θνησιμότητας που περιγράψαμε προηγουμένως, δηλαδή οι ενδεικτικές τιμές θνησιμότητας υποβάλλονται σε δειγματικά λάθη δίνοντας μια μη ομαλή πρόοδο από ηλικία σε ηλικία, υποθέτοντας αρχικά ότι τα λάθη αυτά οφείλονται μόνο στην τυχαία μεταβλητότητα, που είναι έμφυτη στο εκάστοτε δείγμα που μελετούμε.

Σαν πρώτο βήμα δηλαδή υπολογίζουμε τα ποσοστά θνησιμότητας από τις πρωτογενείς τιμές ή τις αρχικές εκτιμήσεις θνησιμότητας ώστε να κατασκευαστεί το αντίστοιχο μοντέλο θνησιμότητας. Εν συνεχεία, με τη χρήση κάποιας μεθόδου εξομάλυνσης, ποια μέθοδο εξαρτάται από τα δεδομένα, ακολουθείται η διαδικασία της εξομάλυνσης. Στην αναλογιστική επιστήμη, εξομάλυνση μπορεί να γίνει είτε σε εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας είτε σε εκτιμήσεις της έντασης θνησιμότητας.

Εξομάλυνση είναι η αναθεώρηση των αρχικών εκτιμήσεων των ποσοστών θνησιμότητας ώστε να προκύψουν καλύτερες εκτιμήσεις των πραγματικών ποσοστών. Είναι η διαδικασία σύμφωνα με την οποία τροποποιούμε την ακολουθία ποσοστών θνησιμότητας έτσι ώστε η τελική ακολουθία να ανταποκρίνεται σε μια «λεία» καμπύλη θνησιμότητας. Γίνεται εκτίμηση της προσδοκώμενης θνησιμότητας υπό την προϋπόθεση ότι οι εκτιμημένες τιμές θα πρέπει να δείχνουν ομαλότητα. Πρακτικά, σου δίνεται η δυνατότητα να επανορθώνεις την έλλειψη της δυνατότητας ύπαρξης ενός δείγματος απείρου μεγέθους με μια εναλλακτική εκτίμηση των πραγματικών τιμών θνησιμότητας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια γίνεται.

Δυο εύλογα ερωτήματα δημιουργούνται πριν την εφαρμογή της διαδικασίας της εξομάλυνσης. Πρώτον, γιατί θεωρείται απαραίτητη η εξομάλυνση στις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας και δεύτερον, αν η εξομάλυνση μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε σειρά παρατηρούμενων τιμών.

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα, η απάντηση είναι ότι η διαδικασία της εξομάλυνσης είναι αναγκαία για να απαλοιφθούν τα τυχαία στατιστικά λάθη που υφίστανται μέσα σε μια έρευνα θνησιμότητας λόγω ανεπαρκούς δείγματος ή ακόμα και για να διορθωθεί η καμπύλη θνησιμότητας. Δηλαδή, να γίνει πιο «λεία» η καμπύλη καθώς λόγω ανεπαρκούς δείγματος ή ανακριβειών στα αρχικά δεδομένα επικρατεί μια ανομοιογένεια. Βασικός στόχος είναι να σχηματιστεί μια ομαλή καμπύλη θνησιμότητας ώστε να έχει μια λογική, φυσική και βιολογική ερμηνεία. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να παραβλεφτεί η σχέση εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των «γειτονικών» τιμών στις διάφορες ηλικίες από τους πίνακες θνησιμότητας.

Για το δεύτερο ερώτημα, σύμφωνα με τον London(1985), η απάντηση καθορίζεται από τα ίδια τα δεδομένα και προφανώς σε όλες τις σειρές δεν είναι απαραίτητη η εξομάλυνση. Μόνο ορισμένοι τύποι δεδομένων είναι κατάλληλοι για εξομάλυνση, δηλαδή γι αυτούς για τους οποίους πιστεύεται ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των στοιχείων της σειράς των δεδομένων, δηλαδή των «γειτονικών» τιμών όπως προαναφέραμε.

Με τη διαδικασία της εξομάλυνσης επιτυγχάνουμε την ομαλοποίηση της καμπύλης της θνησιμότητας, όπου η καμπύλη θνησιμότητας με τα αρχικά δεδομένα και μετέπειτα με την εξομάλυνση χαρακτηρίζεται ως αύξουσα συνεχής και ομαλή συνάρτηση της ηλικίας. Παρατηρείται ότι υπάρχουν διάφορες διακυμάνσεις ανά ηλικία. Για παράδειγμα, στις δυο πρώτες ηλικίες έχουμε αυξημένη θνησιμότητα η οποία ομαλοποιείται σταδιακά στις υπόλοιπες παιδικές ηλικίες. Στις ηλικίες 18-27 παρατηρείται αυξημένη θνησιμότητα συγκριτικά με τις γειτονικές ηλικίες εξαιτίας των τροχαίων ατυχημάτων ή χρήσης ναρκωτικών των νέων δημιουργώντας το φαινόμενο «accident hump». Στις μεγαλύτερες ηλικίες παρουσιάζεται μια ραγδαία αυξητική τάση η οποία κορυφώνεται στις γεροντικές ηλικίες.

Ανακεφαλαιώνοντας, στη διαδικασία της εξομάλυνσης: α) συλλέγουμε τα στατιστικά στοιχεία του πληθυσμού και των θανάτων από τις πηγές πληροφόρησης που έχουμε διαθέσιμες, β) υπολογίζουμε τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα επιβίωσης και γ) με τη χρήση της κατάλληλης μεθόδου εξομάλυνσης που έχουμε επιλέξει βάσει των πρωτογενών τιμών υπολογίζουμε τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας τα οποία αποτελούν εκτιμήσεις και όχι τις πραγματικές τιμές της θνησιμότητας.

3.2 Βασικά Μέτρα Εξομάλυνσης

Δυο είναι τα βασικά μέτρα που χαρακτηρίζουν την εξομάλυνση, η ομαλότητα (smoothness) που συμβολίζεται με S και η καλή προσαρμογή (goodness of fit) που συμβολίζεται με F_*. Σκοπός αυτών των δυο μέτρων είναι να εξετάσουν κατά πόσο η μέθοδος εξομάλυνσης που έχει χρησιμοποιηθεί είναι αποτελεσματική ή όχι. Τα δυο μέτρα έρχονται σε αντιπαράθεση μεταξύ τους καθώς το ένα αντικρούει το άλλο. Η ομαλότητα θέλει να εξασφαλίσει ότι η καμπύλη θνησιμότητας θα είναι όσο το δυνατόν περισσότερο λεία και ομαλή ενώ η καλή προσαρμογή επιδιώκει οι εξομαλυμένες τιμές να μην απέχουν πάρα πολύ από τις αρχικές εκτιμήσεις.

Συνεπώς, βασικός στόχος της χρήσης αυτών των μέτρων, είναι η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξομάλυνσης ώστε να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκρίσιμα πάντα με τα αρχικά δεδομένα που έχουμε στη διάθεση μας. Ουσιαστικά, εμπλέκεται μια αλληλοεξουδετέρωση ανάμεσα στην ομαλότητα και την πολύ καλή προσαρμογή στις ενδεικτικές τιμές, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ότι τα βάρη της αλληλεπίδρασης αυτής θα εξαρτώνται από την ποιότητα των δεδομένων. Ας δούμε παρακάτω τι δείχνει ακριβώς το κάθε μέτρο και πώς υπολογίζεται.

ΟΜΑΛΟΤΗΤΑ (SMOOTHNESS) : Η ομαλότητα εξετάζει κατά πόσο η καμπύλη θνησιμότητας είναι λεία και ομαλή. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και ως μέτρο σύγκρισης από διαφορετικές εξομαλύνσεις των ίδιων δεδομένων. Σημειώνεται επίσης ότι η ομαλότητα μπορεί να υπολογισθεί και στις αρχικές τιμές.

Ο τρόπος υπολογισμού αυτού του μέτρου βασίζεται στις διαφορές κάποιας τάξης των εξομαλυμένων τιμών και πιο συγκεκριμένα της τρίτης και τέταρτης τάξης. Επιπλέον μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα των τετραγώνων ή των απόλυτων τιμών αυτών των διαφορών.

Εντελώς θεωρητικά και με εύκολο και γρήγορο τρόπο, θα μπορούσε να ελεγχθεί η ομαλότητα γραφικά παρατηρώντας τη γραφική παράσταση των αρχικών δεδομένων αν παρουσιάζει σημαντικές ή όχι διακυμάνσεις. Ο τύπος που χρησιμοποιείται για τον μαθηματικό υπολογισμό του μέτρου αυτού σύμφωνα με τον London(1985) είναι:

$$S = \sum_x (\Delta^z v_x)^2 \quad , \quad x = 1,2,\ldots,n\text{-}z \ , \ z = 3 \text{ ή } 4$$

όπου v_x : οι εξομαλυμένες πιθανότητες θανάτου ατόμων ηλικίας x,

$\Delta^z v_x$: οι διαφορές z τάξης εξομαλυμένων πιθανοτήτων θανάτου ατόμων ηλικίας x.

Ο υπολογισμός της 3ης και 4ης τάξης ισούται με:

$$\Delta^3 v_x = -v_x + 3v_{x+1} - 3v_{x+2} + v_{x+3}$$
$$\Delta^4 v_x = v_x - 4v_{x+1} + 6v_{x+2} - 4v_{x+3} + v_{x+4}$$

Σημειώνεται ότι όσο πιο μικρή είναι η τιμή του μέτρου ομαλότητας, δηλαδή το S όσο πιο κοντά στο μηδέν, τόσο οι εξομαλυμένες τιμές δημιουργούν μια πιο ομαλή καμπύλη θνησιμότητας από ότι οι αρχικές εκτιμήσεις. Πρακτικά δηλαδή επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση του παραπάνω μέτρου.

ΚΑΛΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ (GOODNESS OF FIT) : Με τα πρωτογενή δεδομένα υπολογίζουμε τις αρχικές εκτιμήσεις της θνησιμότητας που αντιστοιχούν στον εκάστοτε πληθυσμό που εξετάζουμε. Στη συνέχεια, αν αυτές οι αρχικές εκτιμήσεις εμφανίζουν διακυμάνσεις ή αποκλίσεις υπολογίζουμε τις εξομαλυμένες τιμές.

Είναι λογικό βέβαια να θέλουμε οι εξομαλυμένες τιμές να μην απέχουν πολύ από τις αρχικές μας εκτιμήσεις. Σημειώνεται ότι επιδιώκεται να έχουμε αποκλίσεις ώστε να εφαρμόζεται και το προηγούμενο μέτρο για έναν πιο ολοκληρωμένο έλεγχο των τιμών. Υπάρχουν περιπτώσεις βέβαια όπου λόγω μεγάλου δείγματος δεν εμφανίζονται μεγάλες αποκλίσεις.

Ως αποτέλεσμα αυτού οι εξομαλυμένες τιμές είτε να βρίσκονται πολύ κοντά στις αρχικές εκτιμήσεις είτε ακόμα και να ταυτίζονται. Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία της εξομάλυνσης είναι ανούσια.

Σύμφωνα με τον London (1985) υπάρχουν τρία μέτρα με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την προσαρμογή των τιμών. Το πρώτο ορίζεται ως:

$$F_1 = \sum_x w_x * (v_x - u_x)$$

όπου $\boldsymbol{v_x}$: οι εξομαλυμένες πιθανότητες θανάτου ατόμων ηλικίας x, $\boldsymbol{u_x}$: οι πραγματικές τιμές των πρωτογενών πιθανοτήτων θανάτου ατόμων ηλικίας x και $\boldsymbol{w_x}$: οι τιμές του βάρους που χρησιμοποιούνται για τη στάθμιση διαφόρων μέτρων που αφορούν την ηλικία x.

Όπως και στο προηγούμενο μέτρο, έτσι και εδώ ισχύει το ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή της προσαρμογής τόσο καλύτερη προσαρμογή υπάρχει. Όσον αφορά το μέτρο $\mathbf{F_1}$ είναι ανεπαρκές καθώς στην περίπτωση που θα υπάρχει μεγάλος αριθμός θετικών ή αρνητικών αποκλίσεων θα αλληλοεξουδετερωθούν μεταξύ τους και το $\mathbf{F_1 = 0}$ θα είναι πολύ μικρό, σχεδόν στο μηδέν.

Αυτό σημαίνει πολύ καλή προσαρμογή που πρακτικά δεν θα ισχύει. Για το λόγο αυτό υπολογίζουμε το δεύτερο μέτρο προσαρμογής που ισούται με:

$$F_2 = \sum_x w_x * (v_x - u_x)^2$$

ή ενδεχομένως ένα τρίτο μέτρο προσαρμογής όπου ισούται με το άθροισμα των πρώτων σταθμισμένων αποκλίσεων των τιμών:

$$F_3 = \sum_x x * w_x * (v_x - u_x)$$

Για να γίνει πιο κατανοητό, $\boldsymbol{w_x * u_x}$ είναι ο αριθμός θανάτων των παρατηρούμενων δεδομένων ενώ $\boldsymbol{w_x * v_x}$ είναι ο αριθμός θανάτων των εξομαλυμένων δεδομένων. Αυτό το μέτρο θα έχει ενδιαφέρουσα ερμηνεία αν προσεγγίσουμε το μέγεθος του δείγματος χρησιμοποιώντας ως βάρη $\boldsymbol{w_x}$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται σε κίνδυνο $\boldsymbol{n_x}$. Συνεπώς, μια μικρή τιμή του μέτρου αυτού, σημαίνει ότι ο αριθμός θανάτων θα είναι περίπου ίσος τόσο για τα παρατηρούμενα δεδομένα όσο και για τα εξομαλυμένα δεδομένα.

3.3 Έλεγχος Προσαρμοστικότητας

Μετά από την εξομάλυνση των εμπειρικών ή παρατηρούμενων (observed) ποσοστών θνησιμότητας ακολουθείται έλεγχος τέτοιος ώστε να εξετάσει κατά πόσο οι νέες εξομαλυμένες τιμές βρίσκονται κοντά στις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας και κατά πόσο η επιλογή ενός τυπικού πίνακα θνησιμότητας μπορεί να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά ή απόλυτα στα εμπειρικά μας δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να αξιολογήσουμε αν και σε τι βαθμό η εφαρμοσμένη μέθοδος εξομάλυνσης παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συνεπώς, επιλέγουμε έναν τυπικό πίνακα θνησιμότητας με θεωρητικά ποσοστά θνησιμότητας (q_x) και ελέγχουμε κατά πόσον τα εμπειρικά ποσοστά $(\dot{q}_x)$ προσαρμόζονται καλά σε αυτό ή ελέγχουμε αν τα παρατηρούμενα ποσοστά θνησιμότητας προέρχονται από έναν πληθυσμό με δεδομένα ποσοστά q_{xo}, x=1,2,….n, που για παράδειγμα έχουμε πάρει από έναν ήδη δημοσιευμένο πίνακα θνησιμότητας.

Δηλαδή, πρώτα ακολουθεί ο έλεγχος των εξομαλυμένων τιμών σε σχέση με τις αρχικές τιμές και μετά ελέγχουμε αν προσαρμόζονται καλά τα εκτιμώμενα ποσοστά θνησιμότητας με τα εμπειρικά δεδομένα μας. Επιπλέον, εκτός από τα παραπάνω, θα πρέπει να ελέγξουμε αν και κατά πόσο ικανοποιούνται οι περιορισμοί που θέτουμε όπως η μονοτονία και η κυρτότητα ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Σημειώνεται ότι η ακολουθία των εξομαλυμένων ποσοστών προσδιορίζει μια λεία καμπύλη θνησιμότητας, γεγονός επιθυμητό και βέβαια αναμενόμενο για μια καμπύλη θνησιμότητας. Από την πλευρά των αναλογιστών, τα ποσοστά θνησιμότητας ανά ηλικία προτιμούν να αναπαρίστανται από μια μονότονη και αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή οι τιμές να αυξάνονται από ηλικία σε ηλικία αλλά να αυξάνονται περισσότερο στις μεγάλες ηλικίες ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή.

Για να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία εξομάλυνσης και η διαδικασία ελέγχου ακολουθεί διάγραμμα[8] σχετικό με τα στάδια της έρευνας της θνησιμότητας που ήδη έχουμε περιγράψει.

[8] Αλέξανδρος Ζυμπίδης :«Αναλογιστική Στατιστική-Κατασκευή Πινάκων θνησιμότητας»

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1: Στάδια Έρευνας Θνησιμότητας

Παρατήρηση πληθυσμού καταγραφή θανάτων, εισόδων, εξόδων των ατόμων, κτλ

⇓

Υπολογισμός της "έκθεσης στον κίνδυνο" και των αντίστοιχων παρατηρούμενων ποσοστών θνησιμότητας

⇓

Μπορούμε να επιλέξουμε πιθανό τυπικό πίνακα θνησιμότητας; ⇒ ΟΧΙ

Διαδικασία εξομάλυνσης και παραγωγή των εξομαλυμένων ποσοστών θνησιμότητας

⇓ ΝΑΙ

Έλεγχος προσαρμοστικότητας μεταξύ των qx

⇓

Δημιουργία των τελικών εκτιμήσεων για τα ποσοστά θνησιμότητας

3.4 Στατιστικοί Έλεγχοι Εξομάλυνσης

Για τον έλεγχο των ποσοστών θνησιμότητας όπως ήδη προαναφέραμε υπάρχουν διάφορα τεστ όπου το καθένα εξετάζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της εξομάλυνσης και η αποτυχία του καθενός από αυτά θα έχει ως αποτέλεσμα την επανεξέταση του εκάστοτε μοντέλου.

Χρησιμοποιούνται διάφορα στατιστικά κριτήρια για την μελέτη της καταλληλότητας της εκάστοτε προτεινόμενης μεθόδου εξομάλυνσης.

Τα τεστ αυτά εξετάζουν την πιθανή ύπαρξη:

- Ενός μεγάλου αριθμού υπερβολικά μεγάλων αποκλίσεων ο οποίος μπορεί να αντισταθμίζεται με έναν άλλο μεγάλο αριθμό μικρών αποκλίσεων
- Μιας μεγάλης συσσωρευτικής απόκλισης σε διαστήματα του ηλικιακού φάσματος
- Μεγάλου πλήθους θετικών ή αρνητικών αποκλίσεων σε όλο το ηλικιακό φάσμα
- Ενός υπερβολικού όγκου αποκλίσεων της ίδιας περίπου τιμής σε όλο το ηλικιακό φάσμα.

Γενικότερα, ως μηδενική υπόθεση, για τους ακόλουθους έλεγχους υποθέσεων των διαφόρων τεστ, θεωρούμε την υπόθεση ότι η εκάστοτε εφαρμοσμένη μέθοδος εξομάλυνσης παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Δηλαδή, τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας είναι ικανοποιητικά συγκρινόμενα και με τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας αλλά και με τα ποσοστά του τυπικού πίνακα επιβίωσης. Σε αντίθετη περίπτωση την απορρίπτουμε.

Συνεπώς, ως βασική μηδενική υπόθεση για τον έλεγχο προσαρμοστικότητας των πραγματικών ή εξομαλυμένων ποσοστών θνησιμότητας με έναν πιθανό τυπικό πίνακα θνησιμότητας είναι η εξής:

H_0: «τα εμπειρικά ή εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας προέρχονται από έναν τυπικό πίνακα με ποσοστά θνησιμότητας».

Σύμφωνα με την υπόθεση μας, Ηο τα εμπειρικά δεδομένα όπως αυτά εκφράζονται από τα $(\dot{q}_x)$, προέρχονται από πληθυσμό με κατά ηλικία πιθανότητες q_x, αυτές του τυπικού πίνακα θνησιμότητας.

Άρα, η εναλλακτική υπόθεση H_1 είναι η συμπληρωματική της H_0, δηλαδή η άρνηση της βασικής υπόθεσης H_0, ότι ο τυπικός πίνακας θεωρείται ακατάλληλος να εκφράσει την κατά ηλικία θνησιμότητα του πληθυσμού αναφοράς.

Εάν η H_0 είναι αληθής, τότε το πλήθος των θανάτων ατόμων ηλικίας x που καταμετρώνται μέσα στην χρονική περίοδο της έρευνας θνησιμότητας $θ_x$ (πλήθος θανάτων ατόμων ηλικίας x) είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους E_x (σύνολο ατόμων ηλικίας x που βρίσκονται εκτεθειμένοι στον κίνδυνο στη χρονική περίοδο της έρευνας) και q_x (ποσοστό θνησιμότητας ατόμων ηλικίας x).

Δηλαδή,

$$θ_x \sim \text{Binomial}(E_x, q_x)$$

Αντιστοίχως η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $Θ_x$ ορίζονται ως εξής:

$$E(θ_x) = E_x * q_x$$

$$Var\ (θ_x) = E_x *q_x * p_x$$

Όπου p_x το ποσοστό επιβίωσης ατόμων ηλικίας x και υπολογίζεται από τον τύπο

$$p_x + q_x =1 \text{ οπότε } p_x = 1- q_x$$

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε ως σχετική απόκλιση για κάθε ηλικία, (relative deviation) την διαφορά μεταξύ του παρατηρηθέν αριθμού θανάτων (θx) και της αναμενόμενης τιμής του (ή της εξομαλυμένης), διαιρεμένη με την αντίστοιχη τυπική του απόκλιση:

$$θx \sim N\ (Ex * qx, (\sqrt{Ex * qx * px})^2)$$

Δηλαδή, η θx ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή Ex * qx και διασπορά Ex *qx * px όπου τυποποιώντας την θx «η τυποποιημένη απόκλιση» θα ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N (0,1).

$$\frac{Θx - Ex * qx}{\sqrt{Ex * qx * px}} \sim N(0,1)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω βασική σχέση που θα ισχύει εφόσον και αν η Ho είναι αληθής θα γίνει ο έλεγχος με τη χρήση των παρακάτω τεστ. Τα κυριότερα τεστ που αφορούν τόσο τον έλεγχο μιας εφαρμοσμένης μεθόδου εξομάλυνσης όσο και το βαθμό εξομάλυνσης των εμπειρικών δεδομένων είναι τα ακόλουθα.

3.4.1 Έλεγχος x^2 τεστ καλής προσαρμογής

Το x^2 τεστ εκτιμά την συνολικά καλή προσαρμογή της εξομάλυνσης. Έχοντας εφαρμόσει μια μέθοδο εξομάλυνσης θεωρούμε ότι οι εξομαλυμένες τιμές που έχουμε υπολογίσει προσεγγίζουν αυτές που αφορούν την πραγματική θνησιμότητα οπότε συνεχίζουμε με τον έλεγχο προσαρμοστικότητας.

Υποθέτοντας ότι η μηδενική υπόθεση Ho είναι αληθής καταλήγουμε στη προαναφερθείσα βασική σχέση την οποία αν υψώσουμε στο τετράγωνο και την αθροίσουμε για όλες τις ηλικίες (ή ομάδες ηλικιών σε περιπτώσεις συνεπτυγμένων πινάκων) θα έχουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή x^2 όπου θα είναι ίση:

$$x^2 = \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{\theta x - Ex*qx}{\sqrt{Ex*qx*px}}\right)^2$$

Προφανώς, το x^2 ακολουθεί κατανομή x^2_{n-k} με (n-k) βαθμούς ελευθερίας, όπου n είναι το πλήθος των ηλικιών x ή των διαστημάτων ηλικιών που έχουμε αθροίσει, υπό την προϋπόθεση ότι τα θ_x είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το k εξαρτάται από τις παραμέτρους που βασίζεται η καμπύλη θνησιμότητας που αντιπροσωπεύουν τα q_x. Συνήθως θέτουμε το k=1 ή 2.

Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεχτή σε επίπεδο σημαντικότητας α% εάν ισχύει $x^2 \leq x^2_{n-k,1-a}$ όπου το $x^2_{n-k,1-a}$ βρίσκεται από τους πίνακες της x^2 κατανομής και ορίζεται από τη σχέση $P(x^2 \leq x^2_{n-k,1-a}) = 1-a$. Σε αντίθετη περίπτωση εάν δεν ισχύει απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

Το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου ελέγχου ορισμένες φορές μπορεί να είναι παραπλανητικό για αυτό χρειάζονται τα δεδομένα βαθύτερη διερεύνηση, ειδικότερα στις περιπτώσεις όπου:

- Υπάρχουν ταυτόχρονα μεγάλος αριθμός θετικών και αρνητικών αποκλίσεων που τελικά αντισταθμίζονται και δεν εμφανίζουν απόρριψη στο βασικό έλεγχο του x^2.
- Σε κάποιο ηλικιακό διάστημα υπάρχει ένα συστηματικό λάθος.
- Υπάρχει μεγάλο πλήθος θετικών (μικρών) αποκλίσεων ή αντίστροφα μεγάλο πλήθος αρνητικών (μικρών) αποκλίσεων.

- Σε κάποιο ηλικιακό διάστημα (ή σε μεμονωμένες ηλικίες) υπάρχει μεγάλο πλήθος θετικών ή αρνητικών αποκλίσεων.

Ασυνέπειες των παραπάνω περιπτώσεων δείχνουν ότι η σειρά των κατά ηλικία πιθανοτήτων θανάτου που αφορούν τον πληθυσμό αναφοράς βρίσκεται σε σημαντικά υψηλότερα ή χαμηλότερα επίπεδα από την αντίστοιχη σειρά πιθανοτήτων θανάτου του τυπικού πίνακα επιβίωσης, ως αποτέλεσμα να υπάρχουν σοβαρές οικονομικές συνέπειες για τον ασφαλιστικό φορέα.

Εξαιτίας των παραπάνω λαθών εκτελούμε και τα παρακάτω τεστ ώστε στο σύνολο του ελέγχου θα έχουμε εξασφαλίσει την ανίχνευση του συνόλου των λαθών καθώς και την εγκυρότητα της βασικής μηδενικής υπόθεσης.

3.4.2 Έλεγχος μεμονωμένων τυποποιημένων αποκλίσεων

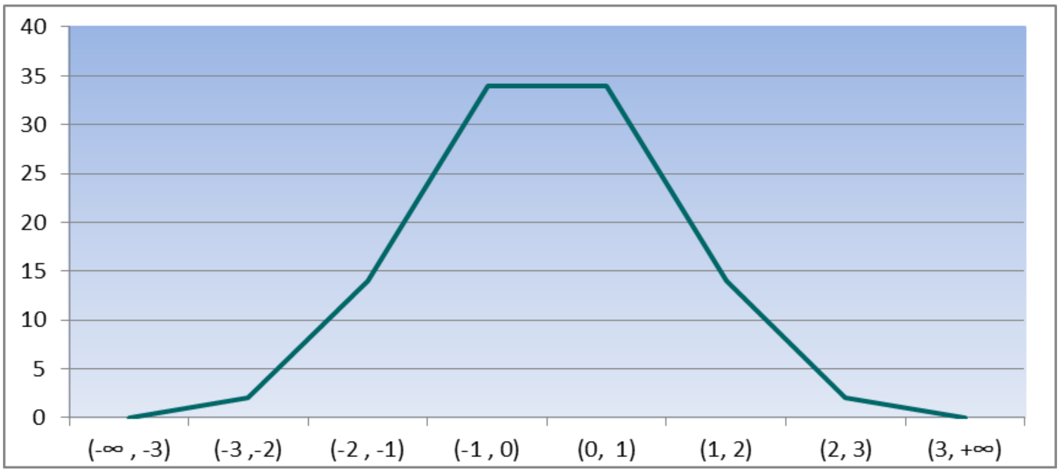
Για τον έλεγχο του προβλήματος της ταυτόχρονης ύπαρξης μεγάλου αριθμού θετικών και αρνητικών αποκλίσεων χρησιμοποιούμε τον έλεγχο των μεμονωμένων τυποποιημένων αποκλίσεων. Μας ενδιαφέρει ο εντοπισμός μεγάλων διαφορών μεταξύ των παρατηρούμενων και των κανονικοποιημένων αποκλίσεων. Με βάση την προσέγγιση της τυπικής κανονικής κατανομής όπως και στο x^2 τεστ θα αναμέναμε το πλήθος των κανονικοποιημένων αποκλίσεων για n παρατηρήσεις να έχει την παρακάτω μορφή ο πίνακας:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2: Διαστήματα και Μάζες Πιθανοτήτων Κανονικοποιημένων Αποκλίσεων

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	(-∞ , -3)	(-3 ,-2)	(-2 , -1)	(-1 , 0)	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, +∞)
ΜΑΖΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ	0% * n	2% * n	14% * n	34% * n	34% * n	14% * n	2% * n	0% * n

Η πρώτη γραμμή (διάστημα) απεικονίζει τα διαστήματα των τιμών μέσα στα οποία εμπεριέχονται οι κανονικοποιημένες αποκλίσεις και η δεύτερη γραμμή (μάζα πιθανότητας) μας δείχνει τον αναμενόμενο αριθμό των κανονικοποιημένων αποκλίσεων επί του συνόλου n των παρατηρήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι τα διαστήματα στο σύνολο είναι 8. Η γραφική απεικόνιση των διαστημάτων με τα ποσοστά πιθανότητας στο σύνολο των παρατηρήσεων είναι η ακόλουθη:

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.1: Κατανομή Διαστημάτων Κανονικοποιημένων Αποκλίσεων



Θεωρώντας ότι οι θάνατοι στις διάφορες ηλικίες είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ότι δεν υπάρχει ετερογένεια σε κάθε ηλικία, οι κανονικοποιημένες αποκλίσεις για την κάθε ηλικία θα υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\frac{\theta x - Ex * qx}{\sqrt{Ex * qx * px}}, x = 21,22, \ldots .69,70.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας το θεμελιώδης Λήμμα των Neyman-Pearson, όπου λύνει το πρόβλημα της ύπαρξης και κατασκευής ισχυρότατων τεστ για τις περιπτώσεις ελέγχου απλής μηδενικής υπόθεσης έναντι απλής εναλλακτικής, θα κάνουμε έναν επιπλέον έλεγχο x^2 όπου τώρα θα ελέγχει κατά πόσον η κατανομή των τυποποιημένων αποκλίσεων της έρευνας θα συμβαδίζει με τη θεωρητική προσέγγιση βάσει του παραπάνω πίνακα.

Έστω ότι: ***fi*** είναι το πραγματικό πλήθος (ή αλλιώς συχνότητα) των τυποποιημένων αποκλίσεων που «πέφτουν» στο εκάστοτε διάστημα i , και ***E(fi)*** είναι το αναμενόμενο πλήθος των τυποποιημένων αποκλίσεων που «πέφτουν» στο εκάστοτε διάστημα i .

Έτσι ο μαθηματικός τύπος του συγκεκριμένου ελέγχου είναι :

$$x_*^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i - E(f_i)\right)^2}{E(f_i)}$$

όπου k ο αριθμός των διαστημάτων.

Γενικά και πιο απλά θα λέγαμε ότι υπολογίζουμε τη διαφορά του παρατηρούμενου αριθμού αυτών των αποκλίσεων με τον αριθμό των αναμενόμενων αποκλίσεων διαιρεμένη με τον αναμενόμενο αριθμό αποκλίσεων, όπως αυτές εμπίπτουν στα παραπάνω διαστήματα τιμών των αποκλίσεων του πίνακα. Κριτήριο αυτής της εφαρμογής είναι ο αναμενόμενος αριθμός που ζητάμε σε κάθε διάστημα να είναι μεγαλύτερο του 5. Αλλιώς ομαδοποιούμε, αν έχουμε πολύ μικρές τιμές στους παρατηρούμενους αριθμούς θανάτων, όσες από τις κλάσεις χρειαζόμαστε ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός λαμβάνοντας τα ως μια τιμή μειώνοντας τους βαθμούς ελευθερίας και υπολογίζοντας ένα x^2 τεστ του οποίου η ποσότητα θα ισούται:

$$x^2 = \sum_x \left(\frac{(\text{Παρατηρούμενοι Αριθμοί} - \text{Αναμενόμενοι Αριθμοί})^2}{\text{Αναμενόμενοι Αριθμοί}} \right)$$

Ακολουθώντας τον έλεγχο, το x_*^2 ακολουθεί την κατανομή X_{k-1}^2 με k-1 βαθμούς ελευθερίας και δεχόμαστε την αρχική μηδενική υπόθεση όπως και προηγουμένως με επίπεδο σημαντικότητας α% εάν ισχύει:

$$x_*^2 \leq \Phi_2$$

όπου Φ_2 προκύπτει από την εξίσωση :

$$\Pr\,[X_{k-1}^2 \leq \Phi_2] = 1-\alpha$$

ενώ για το x^2 αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση με επίπεδο σημαντικότητας α% θα ισχύει $x^2 \leq X_{k-1,1-\alpha}^2$, με k βαθμούς ελευθερίας.

Ουσιαστικά και με τους δυο τρόπους υπολογίζουμε και κάνουμε ακριβώς τον ίδιο έλεγχο καταλήγοντας στο ίδιο αποτέλεσμα με την προσέγγιση και παρουσίαση δυο διαφορετικών τρόπων γραφής.

3.4.3 Έλεγχος μεμονωμένων απολύτων τυποποιημένων αποκλίσεων

Ξεκινώντας από τη βασική σχέση :

$$\frac{\theta x - Ex * qx}{\sqrt{Ex * qx * px}} \sim N(0,1)$$

όπως και στους προηγούμενους ελέγχους και θεωρώντας μια άλλη προσέγγιση για την κατανομή της μάζας της πιθανότητας μιας τυποποιημένης κατανομής Z, έχουμε:

$$Pr\left[|Z| < \frac{2}{3}\right] = 50\%$$

Άρα οι μισές από τις τιμές των τυποποιημένων αποκλίσεων θα πρέπει κατά απόλυτη τιμή να ξεπερνούν τα 2/3. Εάν ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή N η οποία αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τυποποιημένων αποκλίσεων όπου η απόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη από 2/3, τότε σύμφωνα με την παρατήρηση που προκύπτει από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$N \sim Bin\left(n\,,\frac{1}{2}\right)$$

όπου n το πλήθος των ηλικιών που παρατηρούμε και εξετάζουμε μέσα στην έρευνα της θνησιμότητας. Υπολογίζοντας τη μέση τιμή και τη διακύμανση της διωνυμικής κατανομής προφανώς καταλήγουμε στους εξής τύπους:

$$E(N) = n/2 \qquad \text{και} \qquad Var\,(N) = n/4$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μιας διωνυμικής κατανομής μπορούμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση ή να προσεγγίσουμε τη διωνυμική κατανομή από μια κανονική κατανομή (εφόσον n > 20 των παρατηρήσεων) και να γράψουμε μέσω των προηγούμενων σχέσεων την παρακάτω σχέση:

$$N \sim N\left(\frac{n}{2},\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$$

άρα αντικαθιστώντας τη βασική σχέση της υπόθεσης μας έχουμε:

$$Z = \frac{N - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \sim N(0{,}1)$$

Με βάση την τελευταία σχέση μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν καινούριο έλεγχο ο οποίος θα δέχεται τη βασική μηδενική υπόθεση με επίπεδο σημαντικότητας α% εφόσον ισχύει ότι:

$$Z = \frac{N - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \varphi_3$$

όπου Ν : το πραγματικό πλήθος των τυποποιημένων αποκλίσεων όπου η απόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη από 2/3 και το φ_3 προκύπτει από την σχέση:

$$Pr[Z \leq \varphi_3] = 1 - \alpha$$

Εννοείται πως αν δεν ισχύει η παραπάνω σχέση απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση Ηο. Επίσης συμπεραίνουμε ότι ο έλεγχος απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση όταν έχουμε αρκετά μεγάλο ή μικρό πλήθος τυποποιημένων αποκλίσεων εκτός του διαστήματος $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Διαπιστώνεται ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος είναι ένας μονόπλευρος έλεγχος.

3.4.4 Έλεγχος αθροιστικών τυποποιημένων αποκλίσεων

Για τον έλεγχο μεγάλης αθροιστικής απόκλισης σε μέρος ή σε ολόκληρο το ηλικιακό φάσμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αθροιστικές τυποποιημένες αποκλίσεις. Πιο συγκεκριμένα σε αυτόν τον έλεγχο, μας ενδιαφέρει ο εντοπισμός πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών αντίστοιχα σωρευτικών αποκλίσεων. Ξεκινώντας από την αρχική σχέση:

$$\theta x \sim N\left(Ex * qx, \left(\sqrt{Ex * qx * px}\right)^2\right)$$

και θεωρώντας ότι οι θάνατοι στις γειτονικές ηλικίες είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους έχουμε την εξής συνεπαγωγή:

$$\theta x \sim N\left(Ex * qx, \left(\sqrt{Ex * qx * px}\right)^2\right) \Rightarrow (\theta x - Ex * qx) \sim N\left(0, \left(\sqrt{Ex * qx * px}\right)^2\right)$$

Αν στη συνέχεια αθροίσουμε τις κανονικές τυχαίες μεταβλητές προκύπτει πάλι κανονική τυχαία μεταβλητή της μορφής:

$$\sum_x (\theta x - Ex * qx) \sim N\left(0, \left(\sqrt{\sum_x E_x * q_x * p_x}\right)^2\right)$$

ή τυποποιώντας την προηγούμενη σχέση θα προκύψει:

$$Z = \frac{\sum_x (\Theta x - Ex * qx)}{\sqrt{\sum_x Ex * qx * px}} \sim N(0,1)$$

Η μηδενική υπόθεση Ho γίνεται αποδεχτή με επίπεδο σημαντικότητας α% όταν $Z \leq \varphi_4$ όπου το φ_4 προκύπτει από τη σχέση

$$\Pr\,[Z \leq \varphi_4] = 1 - \alpha.$$

Διαπιστώνεται ότι και ο συγκεκριμένος έλεγχος είναι ένας μονόπλευρος έλεγχος.

3.4.5 Έλεγχος για το πλήθος των πρόσημων

Το τεστ των πρόσημων (Sign Test το λεγόμενο) σχεδιάστηκε για τον έλεγχο ενός μεγάλου πλήθους θετικών ή αρνητικών σχετικών αποκλίσεων σε όλο το εύρος των ηλικιών. Ξεκινώντας από τη βασική σχέση που χρησιμοποιήσαμε και στα προηγούμενα τεστ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι *αναμένουμε περίπου μισές θετικές και μισές αρνητικές τυποποιημένες αποκλίσεις*.

Ουσιαστικά, κατασκευάζουμε έναν ακόμη έλεγχο κάτω από την μηδενική υπόθεση ότι τα πρόσημα των σχετικών αποκλίσεων είναι τυχαία κατανεμημένα, αναμένουμε δηλαδή ότι ο αριθμός των θετικών ή αρνητικών αποκλίσεων N, όπου N:τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των θετικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων, να κατανέμεται διωνυμικά, δηλαδή:

$$N \sim Binomial\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

όπου n είναι το πλήθος των υπό εξέταση ηλικιών (συνήθως όλο το ηλικιακό εύρος). Εάν n > 20 τότε ακολουθεί προσέγγιση μέσω της κανονικής κατανομής, δηλαδή

$$Z = \frac{N - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{2 * N - n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Με βάση την τελευταία σχέση κατασκευάζουμε έναν έλεγχο όπου δέχεται τη μηδενική υπόθεση με επίπεδο σημαντικότητας α=5% εάν και μόνο ισχύει:

$$|Z| = \left| \frac{N - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \right| \leq \varphi_5$$

όπου πλέον το Ν: το πραγματικό πλήθος των θετικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων και το φ_5 ορίζεται όπως και στους προηγούμενους ελέγχους από τη σχέση:

$$Pr[|Z| \leq \varphi_5] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Συνεπώς, μιλάμε για έναν αμφίπλευρο έλεγχο, όπου απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση εάν δεν ισχύει η παραπάνω ανισότητα.

3.4.6 Έλεγχος για το πλήθος εναλλαγών των πρόσημων

Θεωρώντας ότι ισχύει η βασική σχέση και λαμβάνοντας υπόψη τον έλεγχο πρόσημων που παραπάνω αναφέραμε θα κατασκευάσουμε έναν επιπλέον έλεγχο όπου η μηδενική υπόθεση αν είναι αληθής τότε και μόνο τότε τα πρόσημα δυο διαδοχικών αποκλίσεων είναι το ίδιο πιθανό να είναι ίδια ή αντίθετα (τυχαιότητα).

Έστω, Ν: τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των εναλλαγών των πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων. Τότε θα ισχύει:

$$N \sim Bin\,(n-1, \frac{1}{2})$$

Εάν $n > 20$, τότε θα κατασκευάσουμε την τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$Z = \frac{N - \frac{n-1}{2}}{\frac{\sqrt{n-1}}{2}} \sim N(0{,}1)$$

Με βάση την τελευταία σχέση κατασκευάζουμε έναν έλεγχο που δέχεται τη μηδενική υπόθεση με επίπεδο σημαντικότητας α, εάν ισχύει ότι:

$$Z = \frac{N - \frac{n-1}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \geq \varphi_6$$

όπου Ν: το πραγματικό πλήθος των εναλλαγών των πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων και το φ_6 ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$Pr[Z \geq \varphi_6] = 1 - \alpha$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ένα μονόπλευρο έλεγχο. Εάν δηλαδή έχουμε μεγάλο αριθμό εναλλαγών τότε δεν μας ενοχλεί να δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση ενώ αν την απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση σημαίνει ότι ο τυπικός πίνακας είναι ακατάλληλος και θα πρέπει να προχωρήσουμε σε επιλογή ενός άλλου πίνακα.

3.4.7 Έλεγχος για το πλήθος των ομάδων των πρόσημων

Ο συγκεκριμένος έλεγχος διερευνά τη δυνατότητα εμφάνισης του πραγματοποιηθέντος πλήθους ομάδων θετικών πρόσημων. Η μηδενική υπόθεση είναι αποδεκτή αν τα πρόσημα των αποκλίσεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και είναι το ίδιο πιθανό να είναι θετικά ή αρνητικά. Ακόμη και αν ο αριθμός των θετικών και ο αριθμός των αρνητικών πρόσημων είναι αποδεκτός από προηγούμενους ελέγχους μπορεί να είναι σημαντικά μικρός ή μεγάλος ή και το αντίστροφο.

Το τεστ αυτό ελέγχει την ύπαρξη σχετικών τυποποιημένων αποκλίσεων, δηλαδή ομάδες από αποκλίσεις ίδιου πρόσημου σε γειτονικές ηλικίες. Ως ομάδα θετικών πρόσημων τυποποιημένων αποκλίσεων θεωρούμε ακόμα και εάν υπάρχει ένα μεμονωμένο θετικό πρόσημο το οποίο προέρχεται από προηγούμενη διαφορά το οποίο βρισκόταν ανάμεσα σε δυο αρνητικά πρόσημα της ίδιας διαφοράς. Επίσης, σημειώνεται ότι ως ομάδα θετικών πρόσημων θεωρούμε και την εμφάνιση συνεχόμενων θετικών πρόσημων για συνεχόμενες ηλικίες παραπάνω από δυο ωσότου εμφανιστεί αρνητικό πρόσημο της διαφοράς σε κάποια επόμενη ηλικία.

Έστω ότι ορίζουμε :

n_1 : το πλήθος των θετικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων

n_2: το πλήθος των αρνητικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων

τότε η τυχαία μεταβλητή G θα ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας όπου ισούται ως:

$$G \sim hypergeometric$$

$$\Pr(G = g) = \frac{\binom{n_1-1}{g-1} * \binom{n_2+1}{n_2+1-g}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

όπου g ο αριθμός των ομάδων θετικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων στο σύνολο των παρατηρήσεων. Συμβολίζοντας με g την τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος ομάδων με αποκλίσεις ίδιου πρόσημου σε γειτονικές ηλικίες, κάτω από την υπερ-γεωμετρική κατανομή, αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διασπορά ισούνται:

$$E(g) = \frac{n_1(n_2+1)}{n_1 + n_2}$$

$$Var(g) \cong \frac{(n_1 * n_2)^2}{(n_1 + n_2)^3}$$

Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητό και να δούμε πρακτικά πώς υπολογίζονται οι ομάδες, ας πάρουμε για παράδειγμα 6 θετικά πρόσημα των τυποποιημένων αποκλίσεων, δηλαδή $n_1 = 6$, τα οποία θέλουμε να τα χωρίσουμε σε τέσσερις ομάδες $g = 4$, τότε θα πρέπει να θέσουμε όρια, δηλαδή $(g - 1) = 3$ από τις $(n_1 - 1) = 5$ πιθανές θέσεις , δηλαδή έχουμε διαγραμματικά **(Κωστάκη 2003)**:

+ + + + + + +

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Ο αριθμός πιθανών τρόπων για να γίνει αυτό είναι $\binom{n_1-1}{g-1}$. Αν τώρα n_2 ο αριθμός των αρνητικών πρόσημων όπως ήδη έχουμε ορίσει τότε έχουμε $n_2 + 1$ θέσεις να τοποθετήσουμε τις g ομάδες θετικών πρόσημων και ο αριθμός των πιθανών αυτών μεταθέσεων θα είναι $\binom{n_2-1}{g}$. Αν δηλαδή $n_2 = 6$ τότε τις τέσσερις ομάδες των θετικών πρόσημων μπορούμε να τις τοποθετήσουμε σε $n_2 + 1 = 7$ πιθανές θέσεις όπου διαγραμματικά έχουμε:

- - - - - -

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Τέλος, ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων των n_1 θετικών αποκλίσεων και των n_2 αρνητικών αποκλίσεων είναι $\binom{n_1+n_2}{n_1}$.

Χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση έχουμε:

$$Z = \frac{g - E(g)}{\sqrt{Var(g)}} \sim N(0,1)$$

Αν η Z βρίσκεται στο κατώτατο 5% όριο της τυπικής κανονικής κατανομής τότε η εξομάλυνση περιέχει πολύ λίγες ομάδες πρόσημων και χρειάζεται επανεξέταση. Αν οι ομάδες πρόσημων είναι αρκετές και ξεπερνούν το κατώτατο όριο τότε αυτόματα το τεστ γίνεται ικανοποιητικό και αποδεκτό. Δηλαδή δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση αν Z ≥ -1.65 με α=5% επίπεδο σημαντικότητας, όπου μιλάμε για έναν μονόπλευρο έλεγχο. Σε αντίθετη περίπτωση απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

3.4.8 Έλεγχος Λειότητας

Τις περισσότερες φορές εκτός από τους ελέγχους που εξετάζουμε κατά πόσο τα ποσοστά θνησιμότητας ακολουθούν κάποιον πρότυπο πίνακα επιβίωσης, εξετάζουμε και το πόσο λεία είναι η καμπύλη θνησιμότητας που επάγεται από την ακολουθία των ποσοστών θνησιμότητας.(βλέπε παράλληλα § 3.3)

Ο συγκεκριμένος έλεγχος «λειότητας», δηλαδή το πόσο λεία είναι η καμπύλη θνησιμότητας, γίνεται με τον υπολογισμό των διαφορών της πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης. Ουσιαστικά ελέγχουμε το μέγεθος:

$$\sum_x \Delta^3 q_x$$

Εάν το παραπάνω άθροισμα είναι «μικρό» τότε δεχόμαστε ότι η καμπύλη θνησιμότητας είναι ικανοποιητικά λεία. Συνεπώς, όσο πιο μικρό είναι το παραπάνω άθροισμα τόσο πιο λεία είναι η καμπύλη.

Υπενθυμίζουμε ότι ο υπολογισμός των διαφορών είναι ο εξής:

Πρώτης Τάξης: $\Delta q_x = q_{x+1} - q_x$

Δεύτερης Τάξης: $\Delta^2 q_x = \Delta q_{x+1} - \Delta q_x = q_{x+2} - 2q_{x+1} - q_x$

Τρίτης Τάξης: $\Delta^3 q_x = \Delta^2 q_{x+1} - \Delta^2 q_x$, κ.λ.π

Ένας εμπειρικός κανόνας που συνήθως χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του παραπάνω αθροίσματος ως «μικρού» ώστε να αποφευχθεί ο υπολογισμός των διαφορών και να εξασφαλιστεί η λειότητα, είναι το 0.003 * n όπου n είναι το πλήθος των ηλικιών που εμφανίζονται στο παραπάνω άθροισμα.

3.5 Διαχωρισμός Μεθόδων Εξομάλυνσης

Για την κατασκευή ενός μοντέλου θνησιμότητας το οποίο θα εκτιμά τον πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας θα χρησιμοποιήσουμε φυσικά τη διαδικασία της εξομάλυνσης.

Η εξομάλυνση μπορεί να γίνει με δυο τρόπους:

- *Θεωρητικά* αυξάνοντας το δείγμα των ατόμων ή το χρονικό διάστημα της έρευνας διότι πρακτικά δημιουργούνται προβλήματα υποστήριξης μιας εκτενέστερης έρευνας καθώς και δημιουργία στατιστικών προβλημάτων λόγω ανομοιογενούς πληροφορίας
- *Πρακτικά* με την εφαρμογή διάφορων τεχνικών μεθόδων.

Οι διάφορες τεχνικές μέθοδοι εξομάλυνσης χωρίζονται σε δυο κατηγορίες:

- τις παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης και
- τις μη παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης.

Στην περίπτωση των παραμετρικών μεθόδων υιοθετούμε την άποψη ότι το πρότυπο θνησιμότητας περιγράφεται από μια συνάρτηση. Σκοπός αυτών των μεθόδων είναι η εφαρμογή μιας μαθηματικής συνάρτησης στις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας ώστε να εκφράσει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των γειτονικών τιμών.

Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε παραπάνω από μια συναρτήσεις στα επί μέρους τμήματα του ηλικιακού φάσματος, ενώ σπανιότερα μια συνάρτηση σε όλο το εύρος των ηλικιών. Οι παράμετροι των συναρτήσεων εκτιμώνται μέσω γνωστών μεθόδων όπως της μέγιστης πιθανοφάνειας, της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων κ.ο.κ.

Από την άλλη, οι μη παραμετρικές μέθοδοι εξομάλυνσης έχουν ως σκοπό την κατασκευή ενός πίνακα θνησιμότητας. Θεωρούμε ότι οι αρχικές τιμές της θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας προέρχονται από κάποιο γνωστό μοντέλο ή νόμο θνησιμότητας χωρίς όμως να προϋποθέτουν καμία συναρτησιακή μορφή για τις τιμές της θνησιμότητας.

Και στις δυο μεθόδους, παραμετρικές και μη, υπάρχει μεροληψία. Στις παραμετρικές δεν υπάρχει καμία συνάρτηση που να αντιπροσωπεύει επακριβώς τις πραγματικές τιμές, ενώ στις μη παραμετρικές υπάρχει η δυνατότητα να περιοριστεί μειώνοντας τη δειγματική διακύμανση.

Όσον αφορά το μέτρο της ομαλότητας στις μη παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης μπορεί να ελεγχθεί με την κατάλληλη τιμή των παραμέτρων ενώ στις παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης η ομαλότητα θεωρείται δεδομένη. Για την εφαρμογή της καλής προσαρμογής των δεδομένων ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις παραμετρικές μεθόδους καθώς καμία συνάρτηση δεν προσεγγίζει επακριβώς τις αρχικές τιμές θνησιμότητας. Ενώ, στις μη παραμετρικές μεθόδους η καλή προσαρμογή μπορεί να αντιμετωπιστεί μειώνοντας την με διάφορες τεχνικές, όπως τη μείωση της διασποράς της πρωτογενούς τιμής θνησιμότητας αν τη λάβουμε υπόψη ως βάρος στάθμισης για τις ηλικίες x.

Στα επόμενα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα γίνει λεπτομερή αναφορά σε κάποιες από τις παραμετρικές και μη παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης, πώς ορίζονται, πώς υπολογίζονται και γενικότερα που και πώς χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να εξομαλύνουμε έναν πίνακα επιβίωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ

Οι παραμετρικές μέθοδοι εξομάλυνσης προσαρμόζουν μια ή περισσότερες μαθηματικές συναρτήσεις στις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας ή αντίστοιχα της έντασης θνησιμότητας. Προσπαθούν να προσαρμόσουν τις συναρτήσεις στα αρχικά δεδομένα ώστε να πάρουμε τις νέες εξομαλυμένες τιμές. Οι συναρτήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται είναι ήδη ομαλοποιημένες άρα άμεσα εξασφαλίζεται η ομαλοποίηση των εξομαλυμένων τιμών. Βέβαια πάντα υπάρχει το μειονέκτημα της μεροληψίας.

Στις παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης ανήκει η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων θνησιμότητας ή νόμων θνησιμότητας όπως τους αποκαλούμε, η εξομάλυνση μέσω συναρτήσεων splines και τέλος η εξομάλυνση με τη μέθοδο της παρεμβολής ομαλής σύνδεσης. Οι δυο τελευταίες μέθοδοι προσαρμόζουν περισσότερες από μια συναρτήσεις στις αρχικές εκτιμήσεις και εφαρμόζονται στις ηλικίες όπου τα δεδομένα είναι επαρκή.

4.1 Εξομάλυνση μέσω Μαθηματικών Μοντέλων Θνησιμότητας

Τα παραμετρικά μαθηματικά μοντέλα θνησιμότητας χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν από μαθηματικής πλευράς μια συνάρτηση θνησιμότητας. Επισημαίνουμε ότι η περιγραφή του φαινόμενου της θνησιμότητας είναι ένας από τους βασικούς στόχους της αναλογιστικής επιστήμης. Τα μαθηματικά μοντέλα περιγράφουν κατά βάση την πιθανότητα θανάτου q_x ή την ένταση θνησιμότητας μ_x. Καλούνται και ως νόμοι θνησιμότητας οι οποίοι αποτελούν μια εναλλακτική μέθοδο εξομάλυνσης των πινάκων θνησιμότητας.

Οι νόμοι αυτοί περιγράφουν τη θνησιμότητα σε σχέση με την ηλικία χρησιμοποιώντας μαθηματικές συναρτήσεις. Η χρησιμότητά τους οφείλεται στο ότι παράγουν ομαλοποιημένες τιμές θνησιμότητας. Παρέχουν πληροφορίες για ελλιπή δεδομένα και τη δυνατότητα σύγκρισης των διάφορων πινάκων θνησιμότητας με μεγάλη ευκολία.

Ένα μαθηματικό μοντέλο μπορεί και χρησιμοποιείται ικανοποιητικά μόνο για κάποιο συγκεκριμένο διάστημα ηλικιών και όχι για όλο το εύρος ηλικιών, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι καλό. Λογικά αποτελεί ένα μέρος ενός γενικότερου μοντέλου θνησιμότητας.

4.1.1 Βασικά Μαθηματικά Μοντέλα Θνησιμότητας

Οι νόμοι θνησιμότητας ή αλλιώς παραμετρικά μαθηματικά μοντέλα όπως έχουν αποδείξει οι έρευνες εξελίχθηκαν μετά το πρώτο μισό του $18^{ου}$ αιώνα. Οι πιο σημαντικές παραμετρικές συναρτήσεις θνησιμότητας ή νόμοι θνησιμότητας είναι οι ακόλουθες:

❖ **De Moivre (1725)**

Ο πρώτος που έκανε την προσπάθεια να περιγράψει έναν πίνακα επιβίωσης (θνησιμότητας) μέσα από ένα μαθηματικό μοντέλο ήταν ο Abraham de Moivre κάτω από μια υπόθεση γραμμικότητας. Ο ίδιος παρατήρησε ότι το μοντέλο αυτό περιγράφει καλύτερα τη θνησιμότητα στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Η βασική μαθηματική σχέση αναφέρεται στο l_x και υποθέτει ότι η l_x είναι γραμμική συνάρτηση ορισμένη ως $x: l_x = k\,(\omega - x)\ \mu\varepsilon\ 0 \leq x \leq \omega$. Συνεπώς έχουμε το εξής:

$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{x}{\omega} \Rightarrow S_{T_x}(t) = {}_t p_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Ως αποτέλεσμα τελικά η ένταση θνησιμότητας να ισούται με:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}\ \gamma\iota\alpha\ 0 \leq x \leq \omega \quad \omega\!: \text{οριακή ηλικία}$$

Σύμφωνα με το νόμο De Moivre η τυχαία μεταβλητή Tx ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, ω-x] καθώς το $\lim_{x \to \omega} \mu_x = \infty$.

❖ **Gompertz (1825)**

Μια άλλη σημαντική βελτίωση στη μαθηματική ανάλυση του νόμου θνησιμότητας έδωσε ο αναλογιστής Gompertz, όπου θεωρητικά υποστήριξε ότι η ένταση θνησιμότητας αυξάνει με την ηλικία. Θεώρησε ότι ο ρυθμός με τον οποίο η ικανότητα αντίστασης στο θάνατο μειώνεται είναι ανάλογη με την ίδια αντίσταση στο θάνατο.

Σύμφωνα με το νόμο, η ένταση θνησιμότητας αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο και θέλοντας να προσαρμόσουμε τα δεδομένα μας στο νόμο ισχύει η σχέση:

$$\mu_x = B * C^x \,, \qquad \mu\varepsilon \;\; 10^{-6} < B < 10^{-3} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 1.08 < C < 1.12$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο προκύπτουν διαδοχικά οι ακόλουθες σχέσεις:

$${}_xp_0 = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{\frac{B}{lnC}[1-C^x]}$$

Άρα έχουμε:

$$p_x = e^{-\frac{B(C-1)}{lnC}C^x}$$

$$\acute{\eta} \; \iota\sigma o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\alpha$$

$$-\ln(-lnp_x) = \ln\left[\frac{lnC}{B(C-1)}\right] - xlnC$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση του $-\ln(-lnp_x) = -\ln(-\ln(1-\dot{q}_x))$ πρέπει να είναι μια ευθεία γραμμή κατά μέρος των ηλικιών. Υπολογίζοντας τα παραπάνω μπορούμε τελικώς να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους B,C ως εξής:

$$\dot{C} = \exp(-\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta \; \tau\eta\varsigma \; \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma)$$

$$B = \frac{ln\dot{C}}{(\dot{C}-1)} * \exp(-\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \; \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma \; \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma \; \kappa\alpha\iota \; \tau o\upsilon \; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha)$$

- **Makeham (1860)**

Ο αναλογιστής Makeham επέκτεινε το νόμο θνησιμότητας του προηγούμενου (Gompertz) στηριζόμενος στην υπόθεση του τελευταίου ότι στη θνησιμότητα θα έπρεπε να υπάρχει και ένα στοιχείο το οποίο δεν θα εξαρτάται από την ηλικία. Γι αυτό ήρθε και έθεσε ότι ή ένταση θνησιμότητας είναι ένα άθροισμα μιας σταθεράς και μιας εκθετικής συνάρτησης. Η μαθηματική έκφραση είναι η εξής:

$$\mu_x = A + B * C^x$$

και καταλήγουμε βάσει του νόμου ότι ισχύουν:

$$ {}_{x}p_0 = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-A_x + \frac{B}{lnC}[1-C^x]} $$

όπου

$$ p_x = \exp(-A - \frac{B(C-1)}{lnC} * C^x $$

ή ισοδύναμα

$$ -lnp_x = A + \frac{B(C-1)}{lnC} * C^x $$

Διαπιστώνεται ότι και σε αυτό το νόμο η γραφική παράσταση θα ναι μια ευθεία γραμμή με τον τύπο

$$ -\ln(-lnp_x) - A = -\ln(-\ln(1-\dot{q}_x)) - A $$

με $0.001 < A < 0.003$

και $\frac{(\mu_{x+1}-\mu_x)}{(\mu_x-\mu_{x-1})} = C$

Ο νόμος αυτός δεν πολύ χρησιμοποιείται καθώς δεν περιγράφει ικανοποιητικά τη θνησιμότητα καθ'όλη τη διάρκεια ζωής παρά μόνο για τη μέση ηλικία. Τροποποιώντας το νόμο του Gompertz και του Makeham δημιουργήθηκε ένας $2^{ος}$ νόμος (1889) συνδυάζοντας και ένα γραμμικό και ένα εκθετικό στοιχείο:

$$ \mu_x = A + Hx + B * C^x $$

Έκτοτε έγινε γενίκευση του νόμου Makeham της μορφής:

$$ \mu_x = \varphi(x) + B * C^x $$

όπου $\varphi(x)$ είναι πολυώνυμο δεύτερου τουλάχιστον βαθμού ή χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση.

❖ **Weibull (1951)**

Η κατανομή Weibull είναι έγκυρη σε ένα ευρύ πεδίο φυσικών φαινομένων. Χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στις γενικές ασφαλίσεις και είναι ευρέως ακουστή στη θεωρία της αξιοπιστίας. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull ορίζεται ως:

$$ f(x) = \lambda * \gamma * x^{\gamma-1} * e^{-\lambda x^{\gamma}} \quad , x \geq 0 $$

Ο βασικός τύπος που προτάθηκε από τον Weibull περιγράφει την ένταση θνησιμότητας ως μια συνάρτηση δύναμης σε σχέση με την ηλικία. Η συνάρτηση είναι της μορφής :

$$\mu_x = \lambda * \gamma * x^{\gamma-1}$$

όπου αν γ >1 η μ_x είναι μια αύξουσα συνάρτηση της ηλικίας, με γ=1 η μ_x είναι σταθερή συνάρτηση της ηλικίας και αν 0 < γ < 1 τότε η μ_x είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της ηλικίας. Δηλαδή αν ορίσουμε ως B = λ* γ και ως C = γ-1 βάσει των προηγούμενων νόμων η ένταση θνησιμότητας αυτής της κατανομής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_x = B * x^C$$

Άλλοι διάφοροι νόμοι θνησιμότητας που έχουν διατυπωθεί στο πέρας του χρόνου αναφέρονται επιγραμματικά παρακάτω όπως:

- ✓ **Opperman (1870) :** $\mu_x = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$, με α, b, c οι παράμετροι και με ικανοποιητικά αποτελέσματα εξομάλυνσης στην παιδική και νεανική θνησιμότητα σε αντίθεση με τη θνησιμότητα στις μεγαλύτερες ηλικίες.
- ✓ **Thiele και Steffensen (1872) :** $\mu_x = \mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x}$ **,** με α_1, α_2, α_3, b_1, b_2 και b_3 θετικές παράμετροι, προσπάθησε να εφαρμόσει το μοντέλο σε όλο το εύρος των ηλικιών. Λαμβάνοντας υπόψη του τις διαφορές στη συμπεριφορά της θνησιμότητας στις διάφορες φάσης των ηλικιών, διαμέρισε την ένταση θνησιμότητας στην παιδική ηλικία, ενήλικη ηλικία και στα γηρατειά. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις ανά το εύρος διαχωρισμού των ηλικιών είναι οι ακόλουθες:

$$\mu_{1x} = \alpha_1 * e^{-b_1 x}$$

$$\mu_{2x} = a_2 * e^{-b_2^2}(x-c)^2$$

$$\mu_{3x} = \alpha_3 * e^{b_3 x}$$

- ✓ **Perk (1932) :** $\mu_x = \frac{A+BC^x}{1+DC^x}$ και $\mu_x = \frac{A+BC^x}{\kappa C^{-x}+1+DC^x}$ αποτελώντας ικανοποιητική προσπάθεια προσαρμογής μιας μοναδικής καμπύλης σε ολόκληρο το εύρος των ηλικιών.
- ✓ **Beard (1951) :** $q_x = \frac{A+BC^x}{E*C^{-2x}+1+DC^x}$, το μοντέλο για την πιθανότητα θανάτου και $\mu_x = \frac{BC^x}{1+DC^x}$ το μοντέλο για την ένταση θνησιμότητας απλοποιημένο του νόμου του Perk θέτοντας ως A = 0.

- ✓ **Barnett (1974) :** $\frac{q_x}{1-q_x} = A - H * x + BC^x$, χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή της θνησιμότητας των ασφαλισμένων για τις ηλικίες άνω των 17 ετών έως την ηλικία των 89. (Ενωμένο Βασίλειο διαστήματος 1967-1970)
- ✓ **Heligman και Pollard (1980):**
  $\frac{q_x}{1-q_x} = A^{(x+B)^C} + Dexp\lfloor -E(lnx - lnF)^2 \rfloor + G * H^x$, ο πιο πετυχημένος τύπος ο οποίος προσαρμόζεται καλύτερα σε όλο το ηλικιακό διάστημα από 0 έως και 100 ετών.
- ✓ **Hartman (1981) :**
  Ηλικίες 0 έως 15 ετών : $y(x) = A_1 + B_1 lnx$
  Ηλικίες 15 έως 35 ετών : $y(x) = A_2 + B_2 lnx$
  Ηλικίες 35 έως 60 ετών : $y(x) = A_3 + B_3 lnx$
  όπου $y(x) = logit(lx)$
- ✓ **Rogers and Planck (1983) :**
  $q(x) = A_0 + A_1 e^{-a_1 x} + A_2 e^{a_2(x-\mu_2) - e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + A_3 e^{a_3 x}$
- ✓ **Martinelle (1987) :**
  $\mu_x = \frac{A + Be^{kx}}{1 + De^{kx}} + ce^{kx}$
- ✓ **Kostaki (1992) :**

$$\frac{q_x}{p_x} = \begin{cases} A^{(x+B)^C} + De^{-E1^2 (\frac{\log^x}{F})^2} + GH^X & x \leq F \\ A^{(x+B)^C} + De^{-E2^2 (\frac{\log^x}{F})^2} + GH^X & x > F \end{cases}$$

- ✓ **British actuaries (1980s) :**
  $\frac{q_x}{p_x}$ = A-Hx+bc^x

4.1.2 Τρόπος Εκτίμησης Παραμέτρων Μαθηματικών Μοντέλων

Η εξομάλυνση μέσω παραμετρικών μαθηματικών μοντέλων αποτελεί μια από τις πιο σπουδαίες μεθόδους. Η μελέτη και η περιγραφή της θνησιμότητας, εφόσον τα διαθέσιμα ποσοστά θνησιμότητας ή η ένταση θνησιμότητας περιγράφονται ικανοποιητικά από κάποιο μοντέλο, σχετίζεται με τις παραμέτρους που περιέχονται στο εκάστοτε μοντέλο θνησιμότητας.

Στην ουσία προσαρμόζουμε στο μοντέλο θνησιμότητας τα αρχικά δεδομένα που έχουμε διαθέσιμα ώστε να εκτιμηθούν οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου. Η παραμετρική συνάρτηση εκτιμάται με κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης όπως είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια και η ελαχιστοποίηση των τετραγώνων. Αφού εκτιμήσουμε και υπολογίσουμε τις παραμέτρους, οι νέες προσαρμοσμένες τιμές που θα προκύψουν αποτελούν τις εξομαλυμένες τιμές.

Η βελτιστοποίηση και η εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να επιτευχθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

Α) Μέγιστη Πιθανοφάνεια

Για κάθε παρατήρηση ηλικίας x ορίζουμε μια κατάλληλη κατανομή στις παρατηρούμενες τιμές της θνησιμότητας και εφαρμόζουμε τη μέγιστη πιθανοφάνεια ώστε να εκτιμηθούν οι παράμετροι. Έστω ότι θ_x ο αριθμός των θανάτων ενός πληθυσμού μιας συγκεκριμένης περιόδου όπου η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους E_x που δηλώνει τον αριθμό των ατόμων που εκτίθενται σε κίνδυνο και q_x τα πραγματικά αρχικά ποσοστά θνησιμότητας.

Συνεπώς αν $\theta_x \sim$ Bin (E_x , q_x) και ανεξάρτητοι οι θάνατοι μεταξύ τους στις διάφορες ηλικίες τότε η πιθανοφάνεια θα είναι ίση με :

$$\mathrm{L} = \prod_{x=1}^{n} \binom{E_x}{\theta_x} q_x^{\theta_x} (1-q_x)^{E_x-\theta_x}$$

Από αυτή τη συνάρτηση αν τη λογαριθμίσουμε παίρνουμε:

$$\log L = \sum_{x=1}^{n} \left[\log \binom{E_x}{\theta_x} + \theta_x \log q_x + (E_x - \theta_x) \log(1-q_x) \right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις πρώτες παραγώγους ως προς τις εκάστοτε παραμέτρους και τις εξισώνουμε ίσες με το μηδέν δηλαδή:

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = 0 \text{ , όταν ισχύει η } P(\theta_x) = p$$

Η λύση αυτής της παραγώγου μας δίνει τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας, δηλαδή εξισώνοντας με μηδέν τις πρώτες παραγώγους ως προς τις άγνωστες παραμέτρους παίρνουμε ταυτόχρονα τις εξισώσεις για τον υπολογισμό των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας εξασφαλίζοντας την μοναδικότητα την εκτιμητή με τις δεύτερες παραγώγους να είναι μικρότεροι του μηδενός.

Στην περίπτωση που ο αριθμός των θανάτων θ_x ακολουθεί κατανομή Poisson χρησιμοποιώντας κάποιο μοντέλο θνησιμότητας που αναφέρεται στην ένταση θνησιμότητας, η κατανομή των θανάτων θα είναι της μορφής $\theta_x \sim P(E_x{}^c * \mu_x)$ με $E_x{}^c$ ο κεντρικός χρόνος έκθεσης στον κίνδυνο, η πιθανοφάνεια θα είναι ίση με

$$L = \prod_{x=1}^{n} \frac{(E_x{}^c \mu_x)^{\theta_x} \exp\{-E_x{}^c \mu_x\}}{\theta_x!}$$

Κάνοντας ακριβώς τους ίδιους υπολογισμούς βρίσκουμε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας γι αυτή την κατανομή.

B) Ελαχιστοποίηση τετραγώνων

Με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τετραγώνων μας δίνεται η δυνατότητα να εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους με έναν άλλο τρόπο. Συμβολίζουμε με $\dot{q}_x$ τις αρχικές εκτιμήσεις του ποσοστού θνησιμότητας στην ηλικία x και με z_x τις προσαρμοσμένες τιμές. Ουσιαστικά οι τελευταίες είναι οι τιμές που μέσω του υπολογισμού των εκτιμητών θα πρέπει να προσεγγίζουν τις αρχικές τιμές.

Η ποσότητα η οποία ελαχιστοποιείται σε σχέση με τις άγνωστες παραμέτρους ($\underset{\smile}{\beta}$) στη γενική της μορφή ισούται με :

$$Q = \sum_{x=1}^{n} w_x \left(\dot{q}_x - z_x\left(\underset{\smile}{\beta}\right)\right)^2$$

ως w_x να ορίζουμε τα βάρη σημαντικότητας τα οποία είναι ανάλογα της διακύμανσης των ποσοστών θνησιμότητας.

Η ποσότητα ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των προσαρμοσμένων και των παρατηρούμενων τιμών σε απλούστερη μορφή είναι η ακόλουθη:

$$Q = \sum_{x=1}^{n}[q_x - z_x]^2$$

θεωρώντας ότι όλα τα ποσοστά θνησιμότητας θα έχουν την ίδια διακύμανση (Var (x) $\cong \frac{q_x}{E_x}$).

Στη συνέχεια ο υπολογισμός των άγνωστων παραμέτρων γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως αναφέραμε και παραπάνω προκειμένου να υπολογιστούν τελικά οι εξομαλυμένες τιμές.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ο αριθμός θανάτων ακολουθεί διωνυμική κατανομή και ο αναμενόμενος αριθμός θανάτων είναι πάρα πολύ μικρός, μικρότερος του 5, τότε ο αριθμός των θανάτων θα ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\theta_x \sim \text{Nominal}\ (\ E_x q_x\ ,\ \ E_x q_x(1 - q_x)\ )$$

και η ποσότητα των ελαχίστων τετραγώνων ισούται με

$$x^2 = \sum_{x=1}^{n} \frac{(\theta_x - E_x q_x)^2}{E_x q_x (1 - q_x)}$$

που ακολουθεί τη x^2 κατανομή με n-k βαθμούς ελευθερίας όπου n είναι ο αριθμός των ηλικιών και k ο αριθμός των παραμέτρων για το εκάστοτε μοντέλο θνησιμότητας.

4.1.3 Εφαρμογή Εκτίμησης Παραμέτρων σε Μοντέλα

Σύμφωνα με τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι ο υπολογισμός των εξομαλυμένων τιμών μέσω παραμετρικών μοντέλων χωρίζεται σε δυο φάσεις. Στην πρώτη εξετάζουμε αν τα πρωτογενή δεδομένα προσεγγίζονται από κάποιο νόμο της θνησιμότητας και στη δεύτερη εφόσον έχουμε βρει το κατάλληλο μοντέλο, εκτιμάμε τις παραμέτρους του. Ας δούμε πρακτικά στους νόμους θνησιμότητας του Gompertz, του Makeham και του Weibull πώς εκτιμάμε τις παραμέτρους τους με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βάσει του London (1985).

Σύμφωνα με το νόμο του Gompertz θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του B και C (βλέπε § 4.1.1) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπου ισούται με

$$SS = \sum_{x=1}^{n} w_x * (u_x{}^x - a - bx^*)^2$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμική σχέση του Νόμου της βασικής σχέσης με αναφορά στην ένταση θνησιμότητας

$$\ln\mu_x = \ln B + x\ln C$$

και αντικαθιστώντας την στη αρχική ποσότητα των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζουμε τις παραμέτρους B και C μέσω των μερικών πρώτων παραγώγων των αρχικών εκτιμητριών α και b εξισώνοντας τες με το μηδέν δηλαδή

$$\frac{\partial SS}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial SS}{\partial b} = 0$$

Όσον αφορά το νόμο του Makeham, η γραμμική σχέση με αναφορά στην ένταση θνησιμότητας είναι η

$$\ln\mu_x = \ln\,[B + (C-1)] + x\ln C$$

και αντικαθιστώντας την στη αρχική ποσότητα των ελαχίστων τετραγώνων

$$SS = \sum_{x=1}^{n} w_x \big(\ln\mu_x - \ln[B * (C-1)] - x\ln C$$

υπολογίζουμε τις παραμέτρους A,B και C (βλέπε § 4.1.1) μέσω των μερικών πρώτων παραγώγων των αρχικών εκτιμητριών α και b εξισώνοντας τες με το μηδέν δηλαδή

$$\frac{\partial SS}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial SS}{\partial b} = 0$$

Τέλος, το ίδιο ισχύει και στο νόμο του Weibull μόνο που η γραμμική σχέση με αναφορά στην ένταση θνησιμότητας μέσω του νόμου $\mu_x = k(x-a)^n$, $x \geq a, k > 0, n > 0$ θα είναι ίση με

$$\ln\mu_x = \ln k - n\ln x - n\ln a$$

υπολογίζοντας και εδώ τις πρώτες μερικές παραγώγους των παραμέτρων εξισωμένες με το μηδέν ώστε να εκτιμηθούν οι παράμετροι α, k και n.

4.2 Εξομάλυνση μέσω Συναρτήσεων Splines

Με τη χρήση των συναρτήσεων splines δίνεται η δυνατότητα εφαρμογής της εξομάλυνσης σε όλο το εύρος των ηλικιών χωριζόμενο σε υποομάδες. Δηλαδή, επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός των τιμών σε υποδιαστήματα και η εφαρμογή ενός μοντέλου σε κάθε ένα από αυτά.

Τα μαθηματικά μοντέλα ακόμα εφόσον εφαρμόζονται σε διάφορες υποομάδες, προφανώς είναι πιο απλά στη χρήση τους και πιο κατανοητά από το να εφαρμόζονταν σε όλο το ηλικιακό φάσμα. Αυτή η μέθοδος εξομάλυνσης, συνήθως εφαρμόζεται στα ασφαλιστικά δεδομένα, με τη χρήση πολυωνύμων τρίτου βαθμού και την προσαρμογή αυτών με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Σημειώνεται, ότι πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή το πώς ένα μοντέλο θα διαδέχεται το άλλο ώστε να εξασφαλίζεται μια ομαλή εξομάλυνση σε όλες τις ηλικίες.

Οι συναρτήσεις splines είναι κυρίως πολυώνυμα του ίδιου βαθμού ανά ηλικία όπου στα σημεία τα οποία χωρίζονται οι ηλικίες κατά την εφαρμογή των πολυωνύμων ενώνονται μεταξύ τους με ομαλό τρόπο με τη βοήθεια δύο ή περισσοτέρων συνεχόμενων τρίτου βαθμού καμπυλών ή τόξων (arc).

Οι εξισώσεις των δύο διαδοχικών ή περισσότερων τρίτου βαθμού καμπυλών ή τόξων πρέπει να επαληθεύονται από τα σημεία αυτά εφόσον αυτά ικανοποιούν τις συνθήκες που πρέπει κάθε φορά (βλέπε παρακάτω). Για να γίνει πιο κατανοητή η εξομάλυνση μέσω splines ας δούμε την πιο απλή εφαρμογή της με την τρίτου βαθμού συνάρτησης ελαχίστων τετραγώνων.

Σύμφωνα με τον London (1985) ορίζουμε ως u_x τις αρχικές εκτιμήσεις των παρατηρούμενων τιμών και v_x τις εξομαλυμένες τιμές όπου οι τιμές αυτές εκφρασμένες ως τρίτου βαθμού συναρτήσεις ορίζονται ως

$$v_x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

όπου c_0, c_1, c_2, c_3 είναι οι άγνωστες παράμετροι του μαθηματικού πολυωνύμου. Βάση της γνωστής συνάρτησης των ελαχίστων τετραγώνων που έχουμε ήδη ορίσει σε άλλη ενότητα και αντικαθιστώντας τις εξομαλυμένες τιμές με το παραπάνω πολυώνυμο η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$SS=\sum_{x=a}^{b} w_x(u_x - v_x)^2 = \sum_{x=a}^{b} w_x(u_x - c_0 - c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3)^2$$

με w_x τα κατάλληλα βάρη. Τα βάρη ισούνται με τη συνάρτηση $w_x = \frac{n_x}{v_{x(1-v_x)}}$, με n_x το πλήθος του δείγματος ηλικίας x, πιο συγκεκριμένα το σύνολο των ατόμων του πληθυσμού που είναι ζωντανοί στην ηλικία x. Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού για τα βάρη είναι ο αντίστροφος της ασυμπτωτικής διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής Ux, που είναι ίσο με $w_x = \frac{1}{Var(U_x)}$, όπου Ux η τυχαία μεταβλητή της πρωτογενούς τιμής της πιθανότητας θανάτου ατόμου ηλικίας x.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των παραμέτρων c_0,c_1,c_2 και c_3 και τις εξισώνουμε με το μηδέν (0). Λύνοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν παίρνουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του πολυωνύμου και κατ’ επέκταση τις εξομαλυμένες τιμές.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν για την εύρεση των παραμέτρων λόγω των πολυωνύμων είναι σε πινακική μορφή, δηλαδή οι λύσεις προκύπτουν από την παρακάτω εξίσωση του πίνακα-μήτρας:

$$x' * w * x * c = x' * w * u \quad ,$$

όπου εκτιμούνται τελικά οι παράμετροι c_0,c_1,c_2, c_3.

Ο πίνακας –μήτρα είναι της μορφής nxn όπου n είναι ο αριθμός των γραμμών των αρχικών τιμών στο διάστημα [a,b] και n είναι ο αριθμός των στηλών που ισούται με το άθροισμα του βαθμού των πολυωνύμων ή με του πλήθους των τόξων splines. Στην περίπτωση της τρίτου βαθμού συνάρτησης έχουμε έναν πίνακα mx4 της μορφής

$$x = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 & (a+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 \end{bmatrix}$$

όπου W είναι ο διαγώνιος πίνακας που περιέχει τα κατάλληλα βάρη

$$w = \begin{bmatrix} w_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{a+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_b \end{bmatrix}$$

όπου C είναι το διάνυσμα των παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

και U είναι το διάνυσμα των αρχικών εκτιμήσεων των u_x ,

$$u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_{a+1} \\ \vdots \\ u_b \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο x΄ είναι ο αντίστροφος πίνακας του x που βάση ορισμού αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα x με τον αντίστροφό του x΄ βρισκόμαστε εκεί από όπου ξεκινήσαμε, δηλαδή στον αρχικό πίνακα x. Συνεπώς ισχύει x΄*x = x με τον πίνακα x επί τον αντίστροφο πίνακα x΄ να είναι ο ταυτικός πίνακας.

4.2.1 Δίτοξη Τρίτου Βαθμού Spline

Αν υποθέσουμε ότι μία απλή τρίτου βαθμού συνάρτηση που αναλύσαμε προηγουμένως δεν αναπαριστά ικανοποιητικά τα δεδομένα μας θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την περίπτωση χρήσης παραπάνω συναρτήσεων. Σε μια τέτοια περίπτωση κάνουμε χρήση δύο τόξων τα οποία χωρίζουν τις ηλικίες σε σημεία που ονομάζονται κόμβοι ή αλλιώς δεσμοί και συμβολίζονται με ki. Οι κόμβοι αυτοί θα πρέπει να επαληθεύουν τις συναρτήσεις των δύο διαδοχικών τόξων που συμβολίζονται με $p_0(x)$ και $p_1(x)$ που ενώνονται ομαλά στο σημείο k και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες που θα ορίσουμε. Σημειώνεται ότι για τον κόμβο k δε θα υπάρχει αρχική εκτίμηση του u_x.

Η δίτοξη τρίτου βαθμού συνάρτηση spline των εξομαλυμένων τιμών είναι η εξής:

$$v_x = \begin{cases} p_0(x)\ , & \text{για } a \le x \le k \\ p_1(x)\ , & \text{για } k \le x \le b \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στη βασική σχέση της ελαχιστοποίησης των τετραγώνων την παραπάνω συνάρτηση παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$SS = \sum_{x=a}^{b} w_x (u_x - v_x)^2 = \sum_{a}^{h} w_x [u_x - p_0(x)]^2 + \sum_{h+1}^{b} w_x [u_x - p_0(x)]^2$$

όπου h είναι η μεγαλύτερη τιμή του x και η μικρότερη (ή ίση) του k για την οποία γνωρίζουμε την τιμή u_x.

Για να εξασφαλίσουμε λοιπόν την ομαλή σύνδεση των τόξων-splines, $p_0(x)$ και $p_1(x)$ δεν αρκεί παρά να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες στο σημείο x=k

$$p_0(k) = p_1(k)$$

$$p_0{}'(k) = p_1{}'(k)$$

$$p_0{}''(k) = p_1{}''(k)$$

Οι παραπάνω σχέσεις εξασφαλίζουν ότι η συνάρτηση spline είναι δύο φορές διαφορίσιμη αφού το καθένα από τα δύο κομμάτια της είναι δύο φορές διαφορίσιμο.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις παραμέτρους των πολυωνύμων των δύο συναρτήσεων με τη γνωστή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων εφόσον ισχύουν οι προηγούμενες συνθήκες.

Οι συναρτήσεις splines είναι οι εξής:

$$p_0(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

$$p_1(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5(x-k)^3$$

και αντικαθιστώντας τες στη βασική σχέση έχουμε

$$SS = \sum_{x=a}^{h} w_x(u_x - c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3)^2 + \sum_{x=h+1}^{b} w_x(u_x - c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3 - c_4(x-k)^3)^2$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι σε πινακική μορφή:

$$x' * w * x * c = x' * w * u \quad ,$$

και λύνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην απλή τρίτου βαθμού συνάρτηση και ο πίνακας έχει τη μορφή:

$$x=\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & h & h^2 & h^3 & 0\\ 1 & h+1 & (h+1)^2 & (h+1)^3 & (h+1)^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & b & b^2 & b^3 & (b-k)^3\end{bmatrix}$$

4.2.2 Τρίτοξη Τρίτου Βαθμού Spline

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο σημεία-κόμβους k_1,k_2 όπου $x=k_1$ και $x=k_2$ στο διάστημα [a,b] το οποίο διάστημα χωρίζεται σε τρεις υποομάδες και οι κόμβοι θα πρέπει να επαληθεύουν τις συναρτήσεις των τριών διαδοχικών τόξων (splines) $p_0(x), p_1(x), \kappa\alpha\iota\, p_2(x)$ αντίστοιχα. Οι εξομαλυμένες τιμές δίνονται από τη σχέση:

$$v_x=\begin{cases}p_0(x) & a\le x\le k_1\\ p_1(x) & ,k_1\le x\le k_2\\ p_2(x) & k_2\le x\le b\end{cases}$$

Για την ομαλή σύνδεση των συναρτήσεων splines $p_0(x), p_1(x), \kappa\alpha\iota\, p_2(x)$ εκτός του $p_2(x)$ που είναι ίσο με:

$$p_2(x)=c_1+c_2x_+c_3x^2+c_4x^3+c_5(x-k_1)^3+c_6(x-k_2)^3$$

Θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$p_0(k_1)=p_1(k_1)$$

$$p_0{}'(k_1)=p_1{}'(k_1)$$

$$p_0{}''(k_1)=p_1{}''(k_1)$$

$$p_1(k_2)=p_2(k_2)$$

$$p_1{}'(k_2)=p_2{}'(k_2)$$

$$p_1{}''(k_2)=p_2{}''(k_2)$$

Άρα οι σχέση των ελαχίστων τετραγώνων θα είναι ίση με

$$SS=\sum_{x=a}^{b}w_x(u_x-v_x)^2$$

$$=\sum_{x=a}^{h_1}w_x\left(u_x-p_0(x)\right)^2$$

$$+\sum_{x=h_1+1}^{h_2}w_x\left(u_x-p_1(x)\right)^2+\sum_{x=h_2+1}^{b}w_x\left(u_x-p_2(x)\right)^2$$

όπου h_1 είναι η μεγαλύτερη τιμή του x, η οποία είναι μικρότερη του k_1 και αντίστοιχα h_2 είναι η μεγαλύτερη τιμή του x, η οποία είναι μικρότερη του k_2. Τόσο για την του h_1 όσο και για την τιμή του h_2 πρέπει να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες τιμές u_x. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση και ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία ελαχίστων τετραγώνων εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους και υπολογίζουμε τις εξομαλυμένες τιμές.

Σε περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα-μήτρα για την εύρεση των παραμέτρων, ο πίνακας θα έχει τη μορφή

$$x = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & h_1 & {h_1}^2 & {h_1}^3 & 0 & 0 \\ 1 & h_1+1 & (h_1+1)^2 & (h_1+1)^3 & (h_1+1-k_1)^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & h_2 & {h_2}^2 & {h_2}^3 & (h_2-k_1)^3 & 0 \\ 1 & h_2+1 & (h_2+1)^2 & (h_2+1)^3 & (h_2+1-k_1)^3 & (h_2+1-k_2)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & (b-k_1)^3 & (b-k_2)^3 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Γενική Περίπτωση Τρίτου Βαθμού Spline

Αν γενικεύσουμε τις παραπάνω συναρτήσεις και προσεγγίσουμε τη διαδικασία θεωρητικά, δηλαδή αν επιλέξουμε να χωρίσουμε το εύρος των ηλικιών σε n κόμβους, δημιουργούνται n+1 υποδιαστήματα από την ηλικία α έως τη b, [α, b].

Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε n συναρτήσεις οι οποίες ενώνονται στα σημεία x = k_1, k_2…kn και οι εξομαλυμένες τιμές δίνονται από τη σχέση :

$$v_x = \begin{cases} p_0(x) & \text{για } \alpha \le x \le k_i \\ & \vdots \\ p_i(x) & \text{για } k_i \le x \le k_i + 1 \\ & \vdots \\ p_n(x) & \text{για } k_n \le x \le b \end{cases}$$

Όπου οι συναρτήσεις splines $p_i(x)$ είναι

$$p_i - 1(k_i) = p_i(k_i)$$
$$p_i' - 1(k_i) = p_i'(k_i)$$
$$p_i'' - 1(k_i) = p_i''(k_i)$$

για i=1,2,….,n

Ανάλογα με την τρίτοξη τρίτου βαθμού συνάρτηση και θεωρώντας ότι τα πολυώνυμα είναι απαραιτήτως τρίτου βαθμού, η γενική μορφή τους είναι

$$p_i(x) = p_0(x) + c_5(x - k_1)^3 + \cdots + c_{i+4}(x - k_i)^3 \quad \text{για i=1,2,….,n}$$

Στη συνέχεια και σύμφωνα με τις άλλες περιπτώσεις, η εύρεση των παραμέτρων των τριτοβάθμιων πολυωνύμων θα υπολογίζεται είτε με τη χρησιμοποίηση της ελαχιστοποίησης του μέτρου SS της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων παραγωγίζοντας το μέτρο για κάθε παράμετρο και θέτοντάς τες ίσες με το μηδέν (0) και λύνοντας το σύστημα

$$SS = \sum_{x=a}^{h_1} w_x(u_x - c_1 - c_2x - c_3x^2 - c_4x^3)^2 + \sum_{h+1}^{h_2} w_x(u_x - c_1 - c_2x - c_3x^2 - c_4x^3 - c_5(x - k_1)^3)^2 + \cdots + \sum_{h_n+1}^{b} w_x[u_x - c_1 - \cdots - c_5(x - k_1)^3 - \cdots - c_{n+4}(x - k_n)^3]^2$$

είτε λύνοντας τον πίνακα-μήτρα της εξίσωσης: x΄ * w *x *c = x΄ *w * u.

Συνοψίζοντας, για την εφαρμογή της μεθόδου εξομάλυνσης με τη χρήση συναρτήσεων splines η επιλογή του αριθμού και της θέσης των κόμβων δεν είναι δεσμευτική. Η επιλογή των σημείων είναι υποκειμενική αλλά όσο περισσότερα σημεία έχουμε τόσο καλύτερη προσαρμογή πετυχαίνουμε.

Αυτό επιτυγχάνει την καλύτερη δυνατή εξομάλυνση η οποία εξασφαλίζεται με τη χρήση περισσότερων συναρτήσεων στο διάστημα ηλικιών [α, b] και ελαχιστοποιώντας την τιμή της συνάρτησης SS. Επισημαίνεται ότι αν πάρουμε το μέγιστο αριθμό των σημείων, δηλαδή n σημεία θα ισχύει $u_x = v_x$, αυτό σημαίνει ότι δεν θα έχουμε καθόλου εξομάλυνση.

4.3 Εξομάλυνση μέσω Παρεμβολής Ομαλής Σύνδεσης

Μια εναλλακτική μέθοδος εξομάλυνσης είναι η μέθοδος της παρεμβολής ομαλής σύνδεσης η οποία μοιάζει σε ορισμένα σημεία στον τρόπο σκέψης και στον υπολογισμό με τη μέθοδο των συναρτήσεων splines.

Για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου, αρκεί να υπάρχει διαθέσιμο ένας περιορισμένος αριθμός αρχικών εκτιμήσεων u_x. Τα u_x μπορεί να είναι είτε ο αριθμός των ατόμων εκτεθειμένα σε κίνδυνο (ασφαλιστικοί πίνακες θνησιμότητας) είτε ο αριθμός των θανάτων, τα ποσοστά θνησιμότητας ή ένταση θνησιμότητας.

Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε τις εξομαλυμένες τιμές δεν αρκεί παρά να προσαρμόσουμε ένα διαφορετικό τόξο παρεμβολής σε κάθε υπό-διάστημα για τις τιμές u_x σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Όπως και στη μέθοδο των συναρτήσεων splines έτσι και εδώ στα σημεία (κόμβους) της παρεμβολής θα πρέπει τα τόξα να ενώνονται ομαλά ικανοποιώντας τις αντίστοιχες συνθήκες κάθε φορά.

Ένα τόξο παρεμβολής προσαρμόζεται σε κάθε υπό-διάστημα που καθορίζεται από τις αρχικές εκτιμήσεις, οι οποίες λέγονται κεντρικά σημεία (pivotal points) και τα γειτονικά τόξα θα πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους με ίσες τεταγμένες (ordinates) και να έχουν τουλάχιστον ίσες πρώτες μερικές παραγώγους.

Σύμφωνα με τον London (1985), όλα τα μοντέλα παρεμβολής, τα περισσότερα δηλαδή, γράφονται στη γενική μορφή του Everett η οποία είναι η εξής:

$$v_{x+s} = F_s u_{x+1} + F(t) u_x$$

$$0 \leq s \leq 1, \; t = 1 - s$$

$$\text{για } x = 1,2,\ldots..,n$$

όπου

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2 + C(s)\delta^4 + \ldots\ldots$$

με u_x οι αρχικές εκτιμήσεις, v_{x+s} οι εξομαλυμένες τιμές και δ οι κεντρικές διαφορές.

Τα $A(s), B(s), C(s)$ είναι συναρτήσεις του s ενώ το $F(s)$ που είναι το άθροισμα των παραπάνω συναρτήσεων δεν θεωρείται συνάρτηση αλλά ένας τελεστής για τα u_x , ο οποίος σαν συντελεστής των διαφόρων τάξεων των διαφορών δ , έχει συναρτήσεις για το s. Για παράδειγμα η διαφορά των τόξων του δ^2 και του δ^4 που είναι οι πιο συνήθεις διαφορές που χρησιμοποιούνται ισούνται με:

$$\delta^2 u_x = u_{x+1} - 2u_x + u_x - 1$$

$$\delta^4 u_x = u_{x+2} - 4u_{x+1} + 6u_x - 4u_{x-1} + u_{x-2}$$

Οι τιμές των u_{x-1}, u_x, u_{x+1} είναι ισαπέχουσες μεταξύ τους και ύστερα από μετασχηματισμό μπορούν να θεωρηθούν ότι εμφανίζονται σε μοναδιαία διαστήματα.

Εάν ο F$^{(s)}$ τελεστής τελειώνει με τον δ^{2m} τότε ο τύπος χρησιμοποιεί 2m+2 τιμές του u_x, δηλαδή τις ισαπέχουσες τιμές $u_{x-m}, u_{x-m-1}, \dots \dots . u_{x+m+1}$ όπου καλείται τύπος παρεμβολής των 2m+2 σημείων. Ο τύπος της παρεμβολής γράφεται βάσει των παραπάνω ως εξής:

$$v_{x+s} = F(s)u_{x-m} + F(s)u_{x-m-1} + \cdots + F(s)u_{x+m+1} + F(t)u_x$$

και υποθέτουμε ότι είναι συμμετρικός, δηλαδή δίνει ακριβώς τις ίδιες παρεμβλημένες τιμές για κάθε x και για τις δυο κατευθύνσεις όπου μπορεί να συμβεί η παρεμβολή.

Η πιο απλή μορφή παρεμβολής ομαλής σύνδεσης είναι η γραμμική παρεμβολή, ο τύπος δυο σημείων , όπου ο τελεστής που προκύπτει είναι ίσος με s , δηλαδή F(s) = s και ισχύει:

$$v_{x+s} = s * u_{x+1} + t * u_x$$

$$0 \leq s \leq 1$$

$$t = 1 - s$$

Οι συναρτήσεις του τελεστή A(s), B(s), C(s),…….μπορεί να είναι οποιοσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις της μεταβλητής s, οι οποίες όμως θα πρέπει να έχουν τον απαιτούμενο κάθε φορά αριθμό παραγώγων. Συνήθως όπως και στις συναρτήσεις splines χρησιμοποιούνται πολυώνυμα του s μικρού βαθμού τα οποία ικανοποιούν και αυτά με τη σειρά τους κάποιες ιδιότητες ανάλογα με το τι θέλουμε να εξετάσουμε κάθε φορά.

Οι τύποι αυτοί εκτός του ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παρεμβολή μπορούν να χρησιμοποιηθούν, αν το απαιτούν τα δεδομένα όπως τα ποσοστά θνησιμότητας ή η ένταση θνησιμότητας, και για εξομάλυνση των τιμών αυτών.

4.3.1 Ιδιότητες των Τύπων Παρεμβολής

Στην πράξη ο τύπος παρεμβολής πρέπει να πληρεί ορισμένες προϋποθέσεις οι οποίες περιορίζουν υπεύθυνα και σοβαρά τη επιλογή των κατάλληλων πολυωνύμων. Γι αυτό υπάρχουν ιδιότητες ώστε να διαχωρίζουν τους όρους ανάλογα με το τι περιγράφουν όπως την ομαλή σύνδεση, την ομαλότητα σε σχέση με την αναπαραγωγικότητα και τέλος τον βαθμό ακρίβειας.

❖ **Ιδιότητα Ομαλής Σύνδεσης Παρεμβολής**

Σύμφωνα με το βασικό τύπο της γενικής μορφής του Everett όπου οι διαφορές τελειώνουν στην 2η και 4η και το v_{x+s} είναι πολυώνυμο του s χρησιμοποιώντας το για τον υπολογισμό των εξομαλυμένων (παρεμβλημένων) τιμών στο διάστημα [x, x+1]. Αν συμβολίσουμε με y και ισχύει y = x+s και το v_y είναι συνάρτηση του y τότε με τη βοήθεια των spline συναρτήσεων θα ορίσουμε το v_y . Άρα το v_y θα ισούται με:

$$v_y = \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ p_{x-1}(y) \quad x-1 \leq y \leq x \\ p_x(y) \quad x \leq y \leq x+1 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Γενικά το πολυώνυμο $p_{x-1}(y)$ είναι διαφορετικό από το $p_x(y)$.

Προκειμένου να σχηματιστεί μια ομαλή καμπύλη σύμφωνα με το διάγραμμα των v_y θα πρέπει τα γειτονικά τόξα των πολυωνύμων να ενώνονται στις άκρες τους. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο και αν ισχύει η σχέση

$$p_{x-1}(x) = p_x(x) \,,$$

όπου x είναι η ηλικία για την οποία γνωρίζουμε την αρχική εκτίμηση u_x .

Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει η εξής σχέση

$$v_{x-1+s}\,|_{s=1} = v_{x+s}|_{s=0}$$

Από τη γενική μορφή των τύπων Everett, έχουμε

$$v_{x-1+s\ |s=1} = A(1)u_x + B(1)\delta^2 u_x + C(1)\delta^4 u_x + \cdots$$
$$+A(0)u_{x-1} + B(0)\delta^2 u_{x-1} + C(0)\delta^4 u_{x-1} + \cdots$$

Και ακόμη έχουμε

$$v_{x+s\ |s=0} = A(0)u_{x+1} + B(0)\delta^2 u_{x+1} + C(0)\delta^4 u_{x+1} + \cdots$$
$$+A(1)u_x + B(1)\delta^2 u_x + C(1)\delta^4 u_x + \cdots$$

Εξισώνοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις και ακυρώνοντας τους από κοινούς όρους τους έχουμε την εξής ισότητα:

$$A(0)u_{x-1} + B(0)\delta^2 u_{x-1} + C(0)\delta^4 u_{x-1} + \cdots$$
$$= A(0)u_{x+1} + B(0)\delta^2 u_{x+1} + C(0)\delta^4 u_{x+1} + \cdots$$

Η ισότητα αυτή ισχύει για όλες τις τιμές των u_x αν και μόνο αν ισχύει

$$A(0) = B(0) = C(0) = \cdots = 0$$

Για να επιτευχθεί η ομαλότητα των v_y στο σύνολο, απαιτείται επιπλέον να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (όπως και στις συναρτήσεις splines)

$$p_{x-1}(x) = p_x(x)$$
$$p'_{x-1}(x) = p'_x(x)$$
$$p''_{x-1}(x) = p''_x(x)$$

Αν ισχύουν οι δυο πρώτες σχέσεις τότε αναφερόμαστε σε εφαπτόμενο τύπο παρεμβολής ενώ αν ισχύουν και οι τρεις ταυτόχρονα ο τύπος παρεμβολής αναφερόμαστε σε ισχυρά εφαπτόμενο τύπο παρεμβολής.

Για να ισχύει η ισότητα των πρώτων παραγώγων θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες παραγωγίσιμες ως προς s

$$v'_{x-1+s\ |s=1} = v'_{x+s|s=0}$$
$$F'(s) = A'(s) + B'(s)\delta^2 + C'(s)\delta^4 + \cdots$$

και για t= 1- s να ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial s}F(t) = -F'(t)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τη βασική σχέση του Everett στις πρώτες παραγωγίσεις του v_x και δίνοντας προσοχή σε κάθε $F'(t)$ λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$F'(1)u_x - F'(0)u_{x-1} = F'(0)u_{x+1} - F'(1)u_x$$

ή

$$2F'(1)u_x = F'(0)(u_{x+1} + u_{x-1}) = F'(0)(2+\delta^2)u_x$$

Αν αντικατασταθεί η $2^{ης}$ τάξης κεντρική διαφορά από τον τύπο

$$\delta^2{}_{u_x} = u_{x+1} - 2u_x + u_{x-1}$$

η παρεμβολή που θα δημιουργηθεί θα είναι εφαπτόμενη αν και μόνο αν ισχύει

$$2F'(1) = F'(0)(2+\delta^2).$$

Αν υπολογίσουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και τις δεύτερες παραγώγους των v_x ξεκινώντας από τη σχέση $v'_{x-1+s\ |s=1} = v'_{x+s|s=0}$ θα αποδειχτεί ότι ο τύπος της παρεμβολής θα είναι ισχυρά εφαπτόμενος αν και μόνο αν $F''(0)(u_{x+1} - u_{x-1}) = 0$ και επιπλέον ισχύουν και οι σχέσεις $2F'(1) = F'(0)(2+\delta^2)$ και $F''(0) = 0$.

❖ Ιδιότητα Ομαλότητας Έναντι Αναπαραγωγικότητας

Σε περίπτωση που ο τύπος της παρεμβολής παράγει τιμές $v_x = u_x$ για τις ηλικίες x που οι αρχικές εκτιμήσεις u_x είναι γνωστές για κάθε μια ηλικία x ονομάζεται τύπος αναπαραγωγής. Από την άλλη, αν ισχύει το αντίθετο δηλαδή $v_x \neq u_x$ για τις ηλικίες x τότε η παρεμβολή ονομάζεται τύπος ομαλότητας δεδομένου ότι ο κύριος λόγος είναι να βελτιωθεί η ομαλότητα της συνολικής ακολουθίας.

Για να επιτύχουμε μια συνεχή καμπύλη, θα πρέπει να ισχύει $A(0) = B(0) = C(0) = \cdots = 0$ οπότε

$$v_x = v_{x+s|s=0} = A(1)u_x + B(1)\delta^2 u_x + C(1)\delta^4 u_x + \cdots$$

Για έναν αναπαραγωγικό τύπο η παραπάνω σχέση εξασφαλίζει τη σχέση $v_x = u_x$ αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$A(0) = B(0) = C(0) = \cdots = 0$$

$$A(1) = 1 \ \kappa\alpha\iota \ B(1) = C(1) = \cdots = 0$$

❖ **Ιδιότητα του Βαθμού Ακρίβειας**

Ένας τύπος παρεμβολής είναι ακριβής για κάθε πολυώνυμο βαθμού z αν και μόνο αν το πολυώνυμο αυτό δίνει ακριβή αποτελέσματα όταν χρησιμοποιείται για την παρεμβολή των τιμών ενός πολυωνύμου βαθμού μικρότερου ή ίσου του z. Χρησιμοποιώντας τη σχέση για τις διαφορές:

$$\Delta^{2m}{}_{u_{y+1}} = \Delta^{2m}{}_{u_y} + \Delta^{2m+1}{}_{u_y}$$

ο βασικός τύπος της παρεμβολής $v_{x+s} = F_s u_{x+1} + F(t) u_x$ θα μπορούσε να γραφτεί

$$v_{x+s} = [A(s) + A(t)]u_x + A(s)\Delta u_x + [B(s) + B(t)]\Delta^2 u_{x-1} + B(s)\Delta^3 u_{x-1} + [C(s) + C(t)]\Delta^4 u_{x-2} + C(s)\Delta^5 u_{x-2} + \cdots$$

η οποία είναι της μορφής του τύπου Gauss. Συνεπώς, το v_{x+s} θα είναι ακριβές για πολυώνυμα βαθμού ίσου ή μικρότερου του z αν και μόνο αν συμφωνεί με την παραπάνω σχέση και περιλαμβάνει τον όρο της διαφοράς z τάξεως.

4.3.2 Βασικοί Τύποι και Εύρεση Κεντρικών Σημείων Παρεμβολής

Σύμφωνα με τη θεωρία συνήθως χρησιμοποιούνται τύποι τεσσάρων σημείων ή έξι σημείων, όπου οι τύποι αυτοί προσδιορίζονται από τις ιδιότητες που θέλουμε αυτοί να έχουν.

Στην περίπτωση των τεσσάρων σημείων οι ιδιότητες που πρέπει να ισχύουν είναι:

- Ένας βαθμός ακρίβειας μέσω γραμμικών συναρτήσεων
- Ο τύπος παρεμβολής να είναι εφαπτόμενος και
- Μια παράμετρος να ελέγχει τη διαδικασία της ομαλότητας

Για να ισχύουν τα παραπάνω θα πρέπει το κάθε μέλος, δηλαδή το κάθε σημείο να προέρχεται από μια οικογένεια τύπων μέσα από την οποία θα καθορίζεται η τιμή της παραμέτρου της εξομάλυνσης.

Για έναν τύπο της βασικής μορφής Everett τεσσάρων σημείων που ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες και οι συνθήκες που ακολουθούν με τους ανάλογους περιορισμούς

A(0)=B(0)=C(0)=……=0

και

B(0)=0 και B(1) =L

και

$$B'(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; B'(1) = 1/2$$

Επιλέγουμε

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2$$

με $A(s) = s \; \lambda\acute{o}\gamma\omega \; \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon} \; \alpha\kappa\rho\acute{\iota}\beta\varepsilon\iota\alpha\varsigma$ και $B(s) = \left(3L - \frac{1}{2}\right)s^2 + \left(\frac{1}{2} - 2L\right)s^3$

όπου περιορίζεται η τιμή του $F(s)$.

Ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω τύπου και βάσει της συνθήκης A(1) = 1 και B(1) = C(1) =……= 0 που ισχύει, επιλέγουμε τον τύπο Karup - King

$$B(s) = \frac{1}{2}s^2(s-1)$$

Άλλος ενδιαφέρον ειδικός τύπος παρεμβολής που είναι και ο μόνος τετραγωνικός είναι ο

$$B(s) = \frac{1}{4}s^2 \; \mu\varepsilon \; L = \frac{1}{4}$$

Τέλος, ένας άλλος ειδικός τύπος είναι ο

$$B(s) = \frac{1}{6}s^3 \; \mu\varepsilon \; L = \frac{1}{6}$$

που εξασφαλίζει τον μοναδικό ισχυρό εφαπτόμενο τύπο τεσσάρων σημείων.

Στην περίπτωση που έχουμε έξι σημεία της μορφής Everett οι ιδιότητες που ισχύουν είναι παρόμοιες με προηγουμένως και είναι:

- Τρεις βαθμοί ακρίβειας με ακριβείς γραμμικές συναρτήσεις
- Ισχυρά εφαπτόμενο τύπο παρεμβολής και
- Μια παράμετρο η οποία θα μπορεί να ελέγχει την ιδιότητα της ομαλότητας.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύουν τα ακόλουθα:

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2 + C(s)\delta^4$$

$$\mu\varepsilon \;\; A(s) = s \;\; \kappa\alpha\iota \; B(s) = \frac{1}{6}s(s^2 - 1)$$

ενώ το C(s) ποικίλει καθώς ισχύουν οι συνθήκες

$$C(0) = 0, C(1) = M,$$

$$C'(0) = 0, C''(0) = 0,$$

$$C'(1) = -\frac{1}{12}$$

Ισούται με

$$C(s) = \left(4M + \frac{1}{12}\right)s^3 - (3M + \frac{1}{12})s^4$$

Άλλες ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω τύπου επιγραμματικά είναι

$$C(s) = \frac{1}{12}s^3(1 - s)$$

$$C(s) = -\frac{1}{36}s^3 \;\; \kappa\alpha\iota$$

$$C(s) = -\frac{1}{48}s^4$$

Έχουμε υποθέσει ότι οι πραγματικές τιμές u_x ή τα κεντρικά σημεία των τύπων παρεμβολών που είναι διαθέσιμα ομαδοποιούνται ανά πέντε. Σε περίπτωση που έχουμε τις τιμές u_x για όλες τις ηλικίες x θα πρέπει να τις ομαδοποιήσουμε και μετά να επιλέξουμε τις κεντρικές τιμές βάσει του τύπου King (ο πιο συνήθης τύπος που εφαρμόζεται).

Σημειώνεται, ότι αν έχουμε δεδομένα θνησιμότητας, το προτιμότερο είναι να επιλέγονται ξεχωριστά οι κεντρικές τιμές για τους θανάτους και για τα άτομα σε κίνδυνο. Έπειτα αν τα διαιρέσουμε μεταξύ τους παίρνουμε τις κεντρικές τιμές για τα ποσοστά θνησιμότητας τα οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στους τύπους της παρεμβολής.

Αν συμβολίσουμε με u_x τους θανάτους ή τα άτομα σε κίνδυνο στην ηλικία x και με w_x το άθροισμα των πέντε συνεχόμενων u_y με κέντρο x θα έχουμε τον εξής τύπο

$$w_x = \sum_{y=x-2}^{x+2} u_y$$

Ο τύπος του King διορθωμένος για πέμπτες διαφορές είναι

$$u^p = 0.2w_x - 0.008(w_{x-5} - 2w_x + w_{x+5}) +$$
$$+0.000896(w_{x-10} - 4w_{x-5} + 6w_x - 4w_{x+5} + w_{x+10})$$

Γενικά χρησιμοποιούνται οι δυο πρώτοι όροι , άρα η παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$u^p = 0.2w_x - 0.008(w_{x-5} - 2w_x + w_{x+5})$$

Άρα ο τύπος σε αυτή τη μορφή είναι διορθωμένος για τρίτες διαφορές και επειδή δεν δίνει κεντρικά σημεία για το πρώτο και το τελευταίο πενταετές άθροισμα , αν w_α και w_b το πρώτο και το τελευταίο οι σχέσεις που θα διορθωθούν για δεύτερες διαφορές θα είναι της μορφής

$$u^p{}_a = 0.2w_a - 0.008(w_a - 2w_{a+5} + w_{a+10})$$

$$u^p{}_b = 0.2w_b - 0.008(w_b - 2w_{b-5} + w_{b-10})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ

Οι μη παραμετρικές μέθοδοι εξομάλυνσης δεν προϋποθέτουν την περιγραφή των αρχικών εκτιμήσεων των ποσοστών θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας από ένα παραμετρικό μοντέλο. Προσπαθούν να συνδυάσουν τις τιμές των αρχικών εκτιμήσεων των διαφορετικών τιμών ανά ηλικία x με τη χρήση διάφορων τεχνικών ώστε να προκύψουν οι εξομαλυμένες τιμές. Τα μέτρα της εξομάλυνσης, όπως η ομαλότητα και η καλή προσαρμογή των τιμών δεν θεωρούνται εξασφαλισμένα.

Με την κατάλληλη επιλογή όμως των παραμέτρων στις τεχνικές που χρησιμοποιούνται αυτό επιτυγχάνεται σε μεγάλο βαθμό. Μην ξεχνάμε ότι μειώνοντας τη δειγματική διασπορά περιορίζουμε την μεροληψία που εμπεριέχουν οι διάφορες τεχνικές που χρησιμοποιούμε. Παρακάτω θα δούμε κάποιες μη παραμετρικές μεθόδους όπως είναι η γραφική μέθοδος, η εξομάλυνση με αναφορά σε τυπικό πίνακα θνησιμότητας, η εξομάλυνση μέσω κινούμενου σταθμισμένου μέσου και η εξομάλυνση μέσω Whittaker.

5.1 Γραφική Μέθοδος Εξομάλυνσης

Η γραφική μέθοδος είναι μια εύκολη μέθοδος, με φτωχό μαθηματικό υπόβαθρο και σχετικά χαμηλή τεκμηρίωση. Με τη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να εξομαλύνουμε τα δεδομένα σε μια καμπύλη η οποία περνά μέσα από έναν «διάδρομο» που δημιουργείται από ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% που βασίζεται στις αρχικές τιμές θνησιμότητας.

Αν και έχει φτωχό μαθηματικό υπόβαθρο είναι αρκετά διαδεδομένη στην Αναλογιστική Επιστήμη καθώς χρησιμοποιείται όταν τα δεδομένα είναι ανεπαρκή ή όταν οι άλλες μέθοδοι δεν είναι εφαρμόσιμες. Η εποπτεία που παρέχει στο μελετητή διευκολύνει τη λήψη αποφάσεων σε σχέση με τα επόμενα βήματα της εξομάλυνσης στις περιπτώσεις χρήσης κάποιας άλλης αντικειμενικής μεθόδου.

Επιπλέον, στην αποτύπωση πολύ ιδιαίτερων μορφών καμπυλών, η γραφική μέθοδος εξομάλυνσης επιβάλλεται, γιατί οι άλλες τεχνικές οδηγούν σε πολύπλοκους μη εφαρμόσιμους πρακτικά μαθηματικούς τύπους.

Στις μέρες μας, η γραφική μέθοδος αν και έχει ιδιαίτερη ιστορική σημασία δεν πολύ χρησιμοποιείται. Περισσότερο χρησιμοποιείται για εξομαλύνσεις συνταξιοδοτικών ποσών και ποσοστών αποχωρήσεων ή συνταξιοδοτήσεων ώστε να υπάρξει το πρώτο βήμα προσέγγισης για τον τελικό πίνακα εξομαλυμένων τιμών.

Η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου χωρίζεται σε τρία στάδια:

- Αποτύπωση των εμπειρικών ποσοστών θνησιμότητας
- Σχεδιασμός μιας λείας συνεχούς καμπύλης όσο το δυνατόν πιο κοντά στα σημεία και
- Διόρθωση της καμπύλης “Hand Polishing”, σε περιπτώσεις αποκλίσεων.

Στο πρώτο στάδιο υπολογίζουμε τα εμπειρικά ποσοστά από τον γνωστό τύπο:

$$\dot{q}_x = \frac{\theta_x}{E_x} \text{ ή } ln\dot{q}_x$$

που απεικονίζονται γραφικά για όλες τις τιμές των ηλικιών.

Στο δεύτερο στάδιο για να μπορέσουν τα εμπειρικά δεδομένα $\dot{q}_x$ να ανταποκριθούν όσο το δυνατόν καλύτερα στο σχεδιασμό μιας λείας συνεχούς καμπύλης ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Καταγράφονται τα σημεία $\dot{q}_x$ σε ένα σύστημα δυο αξόνων
- Υπολογίζονται διαστήματα εμπιστοσύνης με αξιοπιστία 95% για κάθε ηλικία

$$\dot{q}_x \pm 1{,}96\frac{\sqrt{\theta_x}}{E_x}$$

και τα ενώνουμε προκειμένου να δημιουργηθεί μια ζώνη αξιοπιστίας του 95%. Αυτά τα διαστήματα εμπιστοσύνης σχεδιάζονται με βάσει το σκεπτικό ότι ισχύει (βλέπε § 3.5) :

$$\theta_x \sim Bin(E_x, q_x)$$

οπότε έχουμε:

$$E(\dot{q}_x) = E\left[\frac{\theta_x}{E_x}\right] = \frac{E[\theta_x]}{E_x} = \frac{E_x * q_x}{q_x} = q_x \rightarrow \dot{q}_x$$

$$Var(\dot{q}_x) = Var\left[\frac{\theta_x}{E_x}\right] = \frac{Var[\theta_x]}{{E_x}^2} = \frac{E_x * q_x * p_x}{{E_x}^2} \cong \frac{q_x}{E_x} \rightarrow \frac{\dot{q}_x}{E_x}, αν\ p_{x \approx} 1$$

Σημειώνεται ότι μπορεί να επιλεγεί και άλλο επίπεδο αξιοπιστίας μικρότερο του 95%. Ομοίως υπολογίζονται και τα διαστήματα εμπιστοσύνης όταν ο αριθμός των θανάτων κατανέμονται ομοιόμορφα.

Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο προκειμένου να διορθώσουμε την καμπύλη που έχουμε σχεδιάσει, εφαρμόζουμε τον έλεγχο λειότητας-μέτρο ομαλότητας για να δούμε πόσο λεία έχει σχεδιαστεί η καμπύλη. Κατόπιν εφαρμόζουμε τους υπόλοιπους επτά ελέγχους προσαρμοστικότητας στα εμπειρικά δεδομένα και τέλος κάνουμε αν χρειαστεί τις μικροδιορθώσεις μας ώστε να προκύψει ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα κοινής αποδοχής. Επισημαίνεται ότι αν τα δεδομένα είναι σποραδικά θα πρέπει να ομαδοποιηθούν για την αποφυγή δειγματικών σφαλμάτων και έπειτα να ακολουθηθούν τα στάδια και τα βήματα που προαναφέρθηκαν.

Σε περίπτωση εξομάλυνσης της έντασης θνησιμότητας, ακολουθείται ακριβώς η παραπάνω διαδικασία μόνο που ο αριθμός των θανάτων ακολουθεί κατανομή Poisson:

$$\theta_x \sim Poisson({E_x}^c * \mu_{x+\frac{1}{2}})$$

και έχουμε διαστήματα εμπιστοσύνης με 95% αξιοπιστία για κάθε ηλικία:

$$\mu_{x+1/2} \pm 1{,}96 \frac{\sqrt{\theta_x}}{{E_x}^c}\ για\ x = 1,2, \ldots..n$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι ${E_x}^c$ είναι η κεντρική έκθεση στον κίνδυνο του θανάτου.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνεται ότι κατά την εφαρμογή της γραφικής μεθόδου εξομάλυνσης υπάρχουν και πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Τα πλεονεκτήματα της είναι:

- απλή στην εφαρμογή
- δυνατότητα εφαρμογής σε ακραίες περιπτώσεις, όπως σε μη επαρκή δεδομένα

- άμεση ερμηνεία των αποτελεσμάτων και
- εξαγωγή ποσοστών θνησιμότητας ή ακόμα και της έντασης θνησιμότητας.

Αντιστοίχως, τα μειονεκτήματα της γραφικής μεθόδου είναι:

- περιέχει μεγαλύτερο βαθμό υποκειμενικότητας αντί αντικειμενικότητας
- η τελική καμπύλη θνησιμότητας δεν υπακούει σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο για περαιτέρω ανάλυση
- τα ποσοστά θνησιμότητας δεν είναι αρκετά ευδιάκριτα από την εξομαλυμένη καμπύλη ως αποτέλεσμα αυτού η μη ικανοποιητική επίτευξη της ομαλοποίησης της και τέλος
- υπάρχουν προβλήματα αριθμητικής κλίμακας λόγω έλλειψης δεδομένων σε όλο το εύρος των ηλικιών.

5.2 Εξομάλυνση Κινούμενου Σταθμισμένου Μέσου

Η μέθοδος αυτή θεωρείται μία από τις πρώτες μεθόδους εξομάλυνσης, όπου οι εξομαλυμένες τιμές προκύπτουν από τους σταθμισμένους μέσους των ηλικιών των αντίστοιχων ποσοστών θνησιμότητας ή έντασης θνησιμότητας. Εφαρμόζεται δηλαδή στις πρωτογενείς τιμές θνησιμότητας ή και έντασης θνησιμότητας για κάθε ηλικία x. Ο βασικός τύπος της μεθόδου είναι γραμμικός και απλός στην κατανόηση και στην εφαρμογή του και είναι ο ακόλουθος:

$$v_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r u_{x+r} \quad , \qquad x = 1,2,\dots,n, \qquad n > m$$

Ουσιαστικά οι v_x εξομαλυμένες τιμές υπολογίζονται ως σταθμισμένοι μέσοι όροι των u_{x+r} παρατηρούμενες τιμές ή αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας χρησιμοποιώντας τα a_r: συντελεστές ή βάρη. Το πλήθος των ορών που χρησιμοποιούμε είναι συμμετρικό ως προς την ηλικία που θέλουμε να εξομαλύνουμε. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε τους όρους πριν την τιμή και τους όρους μετά την τιμή της ίδιας της ηλικίας που εξομαλύνουμε.

Συνεπώς, για κάθε τιμή ανά ηλικία χρησιμοποιήσουμε ένα εύρος ορών τύπου 2m+1. Τα βάρη που λειτουργούν ως συντελεστές αυξάνονται όσο πλησιάζουμε στην ηλικία όπου εξομαλύνεται η πρωτογενή τιμή της θνησιμότητας. Τα βάρη επίσης θεωρούμε ότι είναι συμμετρικά ως προς τις ηλικίες και ισχύει $a_r = a_{-r}$ για r=1,2….m. Για τις ακραίες ηλικίες, δεν μπορούν να εξομαλυνθούν οι τιμές των ποσοστών θνησιμότητας καθώς είναι σχεδόν ανύπαρκτος ο αριθμός των όρων-παρατηρήσεων πριν και μετά των τιμών αυτών. Γνωρίζοντας ότι ισχύουν οι τύποι:

$$u_x = t_x + e_x$$

$$u_{x+r} = t_{x+r} + e_{x+r}$$

για x=1,2,….n

t_x: η πραγματική θνησιμότητα ατόμου ηλικίας x να πεθαίνει κάποια στιγμή εντός του έτους [x, x+1)

e_x : το πραγματικό σφάλμα εκτίμησης της πιθανότητας θανάτου για άτομο ηλικίας x.

Αντικαθιστώντας έχουμε την εξής σχέση:

$$v_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r t_{x+r} + \sum_{r=-m}^{m} a_r e_{x+r}$$

Αυτό που θέλουμε να ορίσουμε είναι η εύρεση συντελεστών στάθμισης αν και με τη χρήση της παραπάνω σχέσης εφόσον οι πραγματικές τιμές των t_x παραμένουν άγνωστες, υποθέτουμε ότι ισχύει η συνάρτηση

$$\sum_{r=-m}^{m} a_r t_{x+r} = t_x$$

και

$$\sum_{r=-m}^{m} a_r = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sum_{r=-m}^{m} r^2 a_r = 0$$

με $\{t_x\}$ να αναπαριστάται από ένα τρίτου βαθμού πολυώνυμο και οι παραπάνω εξισώσεις να ονομάζονται εξισώσεις περιορισμών.

Λόγω της συμμετρικότητας και βάσει των εξισώσεων περιορισμών ισχύουν οι εξισώσεις:

$$a_o + 2\sum_{r=1}^{m} a_r = 1$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$\sum_{r=-m}^{m} r^2 a_r = 0$$

Δεδομένου των παραπάνω θα ισχύει και η αντίστοιχη σχέση

$$v_x = t_x + e'_x$$

όπου $e'_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r e_{x+r}$ $\mu\varepsilon$ $e'_x = \tau o\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\ \sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \varepsilon\kappa\tau\acute{\iota}\mu\eta\sigma\eta\varsigma$ της εξομαλυμένης πιθανότητας θανάτου για άτομο ηλικίας x.

Για την τυχαία μεταβλητή Ex' θα ισχύουν τα εξής:

$$E(E_{x'}) = 0 \quad Var(E_{x'}) = Var(V_x) = \sum_{r=-m}^{m} ar^2\, Var(U_{x+r})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τυχαίες μεταβλητές U_{x+r} και E_{x+r} είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή ισχύει $E(E_{x+r}) = 0$, θα έχουν και κοινή διασπορά σ^2 όπου

$$Var(V_x) = \sigma^2 \sum_{r=-m}^{m} ar^2$$

με V_x τυχαία μεταβλητή εξομαλυμένης πιθανότητας θανάτου για άτομο ηλικίας x. Άρα αν $V_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r U_{x+r}$ ισχύει

$$E(V_x) = \sum_{r=1}^{m} a_r\, E(U_{x+r}) = \sum_{r=-m}^{m} a_r t_{x+r} = t_x$$

Αν $R_0{}^2 = \sum_{r=-m}^{m} ar^2$ τότε προκύπτει ο τύπος $Var(V_x) = \sigma^2 R_0{}^2$

Παρατηρείται ότι οι συντελεστές a_r θα πρέπει να ελαχιστοποιούν τη σχέση και να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Εφόσον ισχύει

$$Var(U_x) = Var(E_x) = \sigma^2$$

ακολουθεί η σχέση:

$$R_0{}^2 = \frac{Var(V_x)}{Var(U_x)}$$

όπου αν $R_0{}^2 > 1$ δεν έχουμε ικανοποιητική ούτε προς την ομαλότητα ούτε προς την προσαρμογή εξομάλυνση.

Γενικεύοντας τον προηγούμενο τύπο έχουμε

$$R_z{}^2 = \frac{Var(\Delta^z V_x)}{Var(\Delta^z U_x)}$$

όπου και εδώ ζητάμε την ελαχιστοποίηση της ποσότητας R_z με Δ^z οι διαφορές τάξεως z, z = 2 ή 3 ή 4 και κατάλληλους συντελεστές a_r ώστε να ελαχιστοποιείται η παραπάνω σχέση.

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$Var(\Delta^z V_x) = \sigma^2 \sum_{r=-m-z}^{m} (\Delta^z a_r)^2$$

$$Var(\Delta^z U_x) = \sigma^2 \binom{2z}{z}$$

και τελικά ισχύει

$$R_z{}^2 = \frac{\sum_{r=-m-z}^{m} (\Delta^z a_r)^2}{\binom{2z}{z}}$$

ή

$$R_z{}^2 = \frac{1}{\binom{2z}{z}} \sum_{r=-m-z}^{m} (\Delta^z a_r)^2 \quad , \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \binom{2z}{z} = \frac{2z!}{(2z-z)!\,z!}$$

Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό των παραπάνω σχέσεων θεωρούνται οι z τιμές των a_r ίσες με μηδέν.

Σύμφωνα με τον London (1985), το $R_z{}^2$ είναι ένα άθροισμα τετραγώνων και συνεπώς θετική ποσότητα, άρα το απόλυτο ελάχιστό της είναι το μηδέν. Αν θέσουμε τη μερική παράγωγο ως προς τα a_r ίση με το μηδέν, $\frac{\partial R_z{}^2}{\partial a_r} = 0$ για όλα τα r και λύσουμε τις προκύπτουσες ταυτόχρονες εξισώσεις, θα πάρουμε $a_r = 0$ για όλα τα r. Βάσει όμως των δύο προηγούμενων περιορισμών, θα ορίσουμε ως a_0 και a_1 εξαρτημένες μεταβλητές και τις υπόλοιπες ανεξάρτητες r=2,3,…,n.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συμμετρίας και τους περιορισμούς ισχύουν τα ακόλουθα:

$$a_0 + 2\sum_{r=1}^{m} a_r = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sum_{r=-m}^{m} r^2 a_r = 0 \quad ,\gamma\iota\alpha \;\; r = 2,3,\dots,n$$

$$a_0 + 2\sum_{r=1}^{m} a_r = 1 \;\Rightarrow\; a_0 + 2a_1 + 2\sum_{r=2}^{m} a_r = 1$$

$$a_r = -\sum_{r=2}^{m} r^2\, a_r \quad \kappa\alpha\iota \quad a_0 = 1 + 2\sum_{r=2}^{m} (r^2 - 1)\, a_r$$

Συμβολίζοντας με R το $\binom{2z}{z} {R_z}^2$, έχουμε ότι

$$\mathrm{R} = \sum_{r=-m-2}^{m} (\Delta^z a_r)^2 \quad ,$$

το οποίο είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων a_r , r=2,3,…,m και το Δ^z συμβολίζει τις διαφορές τάξης z. Κάθε a_r για r = -m,…,m εμπλέκονται στο R μόνο στους όρους

$$(\Delta^z a_{r-z})^2 + \cdots + (\Delta^z a_r)^2$$

Αν όλοι οι συντελεστές a_r , ήταν μαθηματικά ανεξάρτητοι, τότε θα ίσχυε

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 2(-1)^z \delta^{2z} a_r$$

για r = -m,…,m , όπου με δ^z συμβολίζουμε τις κεντρικές δ^z διαφορές τάξεις z. Για παράδειγμα, για z = 2 και 4 ισχύουν οι παρακάτω ισότητες

$$\delta^2 a_r = a_{r+1} - 2a_r + a_{r-1} \quad \kappa\alpha\iota \quad \delta^4 a_r = a_{r+2} - 4a_{r+1} + 6a_r - 4a_{r-1} + \; a_{r-2}$$

Λόγω συμμετρίας όμως ισχύει $a_r = a_{-r}$, συνεπώς θα ισχύει

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 4(-1)^z \delta^{2z} a_r \;, \quad \mathrm{r=1,2,\ldots,m}$$

και σαν ειδική περίπτωση έχουμε

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 2(-1)^z \delta^{2z} a_0$$

Τελικά, επειδή τα a_0 και a_1 είναι συναρτήσεις των υπόλοιπων a_r ,είναι οι δυο περιορισμοί που επιλέξαμε να μην είναι ανεξάρτητοι αλλά εξαρτημένοι, η συνολική παράγωγος ισούται με

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 4(-1)^z \delta^{2z} a_r + \frac{\partial R}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial a_r} + \frac{\partial R}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_r} \;, \;\; \mathrm{r} = 2,3,\ldots,\mathrm{m}$$

Από τις εξισώσεις

$$a_r = -\sum_{r=2}^{m} r^2\, a_r \quad και \quad a_0 = 1 + 2\sum_{r=2}^{m} (r^2 - 1)\, a_r$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_r} = 2(r^2 - 1) \quad και \quad \frac{\partial a_1}{\partial a_r} = -r^2$$

οπότε τελικά παίρνουμε την ισότητα

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = 4(-1)^z(\delta^{2z} a_r + (r^2 - 1)\delta^{2z} a_0 - r^2 \delta^{2z} a_1)\,,\ \ \mathrm{r = 2,3, \dots, m}$$

Εξισώνοντας την παραπάνω σχέση με το μηδέν (0), παίρνουμε

$$\delta^{2z} a_r = r^2 \delta^{2z} a_1 - (r^2 - 1)\delta^{2z} a_0\,,$$

το οποίο είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του r έτσι ώστε το a_0 να είναι πολυώνυμο του r με βαθμό 2z+2.

Λόγω συμμετρίας των a_r το πολυώνυμο πρέπει να περιέχει μόνο ζυγούς όρους δυνάμεων, δηλαδή ισχύει

$$a_r = b_{0+} b_2 r^2 + b_4 r^4 + \cdots + b_{2z+2} r^{2z+2}$$

όπου υπάρχουν z+2 άγνωστες παράμετροι.

Για να τις εκτιμηθούν αυτές οι άγνωστες παράμετροι, χρησιμοποιούμε τις z συνθήκες

$$a_{m+1} = \cdots = a_{m+z} = 0$$

και τις συνθήκες

$$a_0 + 2\sum_{r=1}^{m} a_r = 1 \quad και \quad \sum_{r=1}^{m} r^2\, a_r = 0$$

Έτσι έχουμε μια σχέση που παράγει τους συντελεστές a_r που χρησιμοποιούνται στον βασικό τύπο της μεθόδου μέσω κινητών σταθμισμένων μέσων των γραμμικών σύνθετων τύπων, και είναι ίσος με

$$v_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r u_{x+r}\ \ , \qquad x = 1,2, \dots, n, \qquad n > m$$

Τέλος, μια εναλλακτική προσέγγιση του συντελεστή ομαλότητας εξομάλυνσης είναι η εισαγωγή διαφορών 3ης τάξης στον τύπο του κινούμενου σταθμισμένου μέσου. Υπολογίζοντας τη νέα ποσότητα $R_3{}^2$ προκύπτει νέος συντελεστής εξομάλυνσης

$$R_3 = \sqrt{R_3^{\,2}}$$

Για να επιτύχουμε ικανοποιητική εξομάλυνση, θα πρέπει και τα δύο κριτήρια, $R_0^{\,2} < 1$ και $R_3^{\,2} < 1$, ώστε να θεωρήσουμε κατάλληλο τον τύπο που επιλέξαμε. Επιλέγουμε προφανώς τον τύπο με τη μικρότερη τιμή στο αντίστοιχο μέτρο. Ο υπολογισμός του $R_0^{\,2}$ αποτελεί κριτήριο σχετικό με τη μείωση της διακύμανσης, ενώ ο υπολογισμός του μέτρου $R_3^{\,2}$ αποτελεί κριτήριο σχετικό με τη μείωση της τραχύτητας.

Η εξομάλυνση μέσω κινητών σταθμισμένων μέσων είναι μια καθιερωμένη και ευρύτατα χρησιμοποιημένη μέθοδος εξομάλυνσης ιδιαίτερα η μέθοδος των γραμμικών σύνθετων τύπων. Είναι απλή τόσο στην κατανόηση όσο και στην εφαρμογή της. Το βασικότερό της μειονέκτημα είναι ότι δεν μπορεί να δώσει εξομαλυμένες τιμές για τις m πρώτες και τις m τελευταίες παρατηρήσεις.

5.3 Εξομάλυνση με Αναφορά σε Τυπικό Πίνακα Θνησιμότητας

Η μέθοδος αυτή είναι χρήσιμη όταν τα παρατηρούμενα δεδομένα που μελετάμε θεωρούμε ότι προέρχονται από μια κατανομή παρόμοια με κάποιον άλλο γνωστό πίνακα θνησιμότητας. Δηλαδή, όταν τα ποσοστά της θνησιμότητας έχουν σχέση με τα ποσοστά θνησιμότητας ενός εξομαλυμένου ή δημοσιευμένου πίνακα ο οποίος ονομάζεται τυπικός πίνακας θνησιμότητας ή όταν τα δεδομένα μας είναι ανεπαρκή.

Με τη χρήση του τυπικού πίνακα θνησιμότητας εξασφαλίζεται άμεσα και η ομαλότητα των δεδομένων. Όμως, η επιλογή του κατάλληλου τυπικού πίνακα θνησιμότητας απαιτεί μεγάλη δυσκολία , με αποτέλεσμα η εξομάλυνση να μην είναι και τόσο ικανοποιητική.

Όταν εντοπιστεί ένας τυπικός πίνακας θνησιμότητας ο οποίος κατά κάποιο τρόπο θα μπορεί να συγκριθεί με τα εμπειρικά ποσοστά θνησιμότητας, υπολογίζουμε το πηλίκο:

$$\frac{\dot{q}_x}{q_x^{\,s}}$$

όπου : $\dot{q}_x$ τα εμπειρικά ποσοστά θνησιμότητας και

$q_x^{\,s}$ τα ποσοστά θνησιμότητας του τυπικού πίνακα θνησιμότητας.

ή υπολογίζουμε το νεπέρειο λογάριθμο του πηλίκου:

$$ln\frac{p_x{}^s}{\dot{p}_x} \quad όπου \ \ p_x{}^s = 1 - q_x{}^s \ \ και \ \ \dot{p}_x = 1 - \dot{q}_x$$

όπου : $p_x{}^s$ τα ποσοστά επιβίωσης του τυπικού πίνακα θνησιμότητας και

$\dot{p}_x$ τα εμπειρικά ποσοστά επιβίωσης.

Οι τελευταίοι λόγοι δίνουν πιο ομαλές και μικρές τιμές από τους πρώτους. Σε περίπτωση που έχει γίνει σωστή επιλογή του τυπικού πίνακα, οι τιμές των παραπάνω πηλίκων θα πρέπει να βρίσκονται κοντά στη μονάδα.

Αφού εξομαλύνουμε τα παρακάτω πηλίκα και βρούμε τη σχετική συνάρτηση f(x) , στη συνέχεια υπολογίζουμε τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας. Ένα γενικό παράδειγμα της συνάρτησης υπολογισμού των εμπειρικών ποσοστών θνησιμότητας είναι: $q_x = f(x) * q_x{}^s$ όπου q_x τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας.

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων μπορεί να είναι της μορφής:

$$q_x = \alpha q_x{}^s + b \ \ και \ \ q_x = q_x{}^s * (\alpha x + b)$$

Ανάλογη διαδικασία ακολουθείται και όταν θέλουμε να κάνουμε εξομάλυνση των τιμών της έντασης θνησιμότητας.

5.4 Εξομάλυνση με τη Μέθοδο Whittaker

5.4.1 Βασικός Τύπος και Παραλλαγές της Whittaker

Μια άλλη μη παραμετρική μέθοδος εξομάλυνσης πινάκων θνησιμότητας είναι η μέθοδος Whittaker (1923) που επεκτάθηκε αργότερα από τον Henderson (1924-1925) και τη συναντάμε και ως μέθοδο Whittaker – Henderson. Γενικά η μέθοδος αυτή συνδυάζει ταυτόχρονα τη βελτιστοποίηση των δυο βασικών μέτρων της εξομάλυνσης, τόσο της ομαλότητας όσο και της προσαρμογής στα ποσοστά ή στην ένταση θνησιμότητας.

Η μέθοδος αυτή ουσιαστικά στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της βασικής ακόλουθης συνάρτησης:

$$M = F + hS = \sum_{x=1}^{n} w_x (v_x - u_x)^2 + h \sum_{x=1}^{n-z} \left(\Delta^z{}_{v_x}\right)^2$$

Όπου v_x : οι εξομαλυμένες τιμές

u_x: οι αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας

w_x: οι συντελεστές ή τα βάρη στάθμισης που μπορεί να ισούνται με τον αντίστροφο της Var (U_x) ή και με το βασικό τύπο $w_x = \frac{n_x}{v_x(1-v_x)}$, με n_x ο αριθμός των ζώντων του πληθυσμού ηλικίας x, U_x: η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην τιμή u_x και $\Delta^z{}_{v_x}$: οι διαφορές των εξομαλυμένων τιμών z-τάξης (συνήθως χρησιμοποιούνται ως z = 2 ή 3 ή 4)

Με F και S συμβολίζονται η προσαρμογή και η ομαλότητα ενώ το h > 0 είναι μια σταθερά η οποία εκφράζει το μέγεθος του βάρους που δίνουμε στο κριτήριο της ομαλότητας S κατά τη διαδικασία της εξομάλυνσης.

Ιδιαίτερη προσοχή και έμφαση απαιτείται στον υπολογισμό των συντελεστών / βάρη. Ακόμη, αν χρησιμοποιήσουμε αντί για τα v_x τα u_x εξασφαλίζεται η ανεξαρτησία των w_x από τα v_x . Με τη χρήση του n_x δίνεται η επιλογή αύξησης της ποσότητας F η οποία πρέπει να αντισταθμιστεί από την επιλογή μιας μεγάλης τιμής για την παράμετρο h. Άρα εναλλακτικά και πιο εύκολα τα βάρη υπολογίζονται ως $w_x = \frac{n_x}{\bar{n}}$, με $\bar{n}$ ο αριθμητικός μέσος των n_x για x=1,2…n.

Στον βασικό τύπο της εξομάλυνσης Whittaker ή αλλιώς «Τύπου Α» όπως τον ονομάζουμε, θεωρούμε ότι τα βάρη σε κάθε ηλικία είναι ίσα με τη μονάδα ($w_{x=1}$). Όσον αφορά την θετική παράμετρο h υπάρχουν κάποιες γενικές παρατηρήσεις που πρέπει να γνωρίζουμε όπως:

➢ Αν h = 0 τότε h*S = 0 άρα M=F

➢ Αν F≥ 0 τότε το M ελαχιστοποιείται για F = 0 που σημαίνει ότι $v_x = u_x$ για x=1,2,….n όπου δεν μιλάμε πλέον για εξομάλυνση. Γενικά αν h$\rightarrow 0$οι εξομαλυμένες τιμές τείνουν στις αρχικές εκτιμήσεις των τιμών u_x ($v_x \rightarrow u_x$) δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στην προσαρμογή έναντι της ομαλότητας.

➢ Αν το h παίρνει μεγάλες τιμές οι εξομαλυμένες τιμές v_x δεν τείνουν στις αρχικές εκτιμήσεις των τιμών u_x και δίνεται περισσότερη έμφαση στην ομαλότητα έναντι της προσαρμογής.

Τον βασικό τύπο της εξομάλυνσης Whittaker μπορούμε να τον συναντήσουμε και σε διάφορες παραλλαγές. Η πιο γενικευμένη του μορφή είναι η

$$M=\sum_{x=1}^{n} w_x(v_x-u_x)^2+h_1\sum_{x=1}^{n-1}(\Delta v_x)^2+h_2\sum_{x=1}^{n-2}(\Delta^2 v_x)^2+\cdots+h_z\sum_{x=1}^{n-z}\left(\Delta^z{}_{v_x}\right)^2$$

όπου αν $h_z > 0$ και $h_j = 0$ για όλα τα j παίρνουμε την αρχική μορφή του τύπου. Συνήθως θεωρούμε $h_2 > 0$ και $h_3 > 0$ και όλα τα υπόλοιπα $h_j = 0$ οπότε ο γενικός τύπος χρησιμοποιείται μέχρι και την ύπαρξη διαφορών τρίτης ή τέταρτης τάξης και ονομάζεται *γενική μικτών διαφορών* μορφή.

Μια άλλη παραλλαγή της βασικής σχέσης είναι η εκθετική μορφή για το S. Υποθέτουμε ότι η ένταση θνησιμότητας μοντελοποιείται σαν ένα πολυώνυμο βαθμού z-2 συν έναν εκθετικό όρο όπως γίνεται και στα μοντέλα θνησιμότητας του Makeham.

Στην περίπτωση αυτή ο τύπος ισούται με

$$M=\sum_{x=1}^{n} w_x(v_x-u_x)^2+h\sum_{x=1}^{n-z}(\Delta^z v_x-r\Delta^{z-1}v_x)^2$$

με C= 1 + r .

Σημειώνεται ότι από το νόμο θνησιμότητας που επιλέγουμε το S προσαρμόζεται αναλόγως ,δηλαδή μοντελοποιείται σύμφωνα με τις παραμέτρους του. Για παράδειγμα το S βάσει του 2ου νόμου του Makeham $\mu_x = A + Hx + BC^x$ ορίζεται ως

$$S=\sum_{x=1}^{n-3}(\Delta^3 v_x-r\Delta^2 v_x)^2$$

Η παραλλαγή του Lowry είναι ένας συνδυασμός της γενικής και της εκθετικής μορφής του τύπου μόνο που γίνεται αναφορά σε έναν ήδη γνωστό τυπικό πίνακα θνησιμότητας ο οποίος θεωρείται κατάλληλος. Η σχέση του M θα είναι ίση με

$$M=(1-h_1)\sum_{x=1}^{n} w_x(v_x-u_x)^2+h_1\sum_{x=1}^{n} w^s{}_x(v_x-s_x)^2+h_2\sum_{x=1}^{n-z}(\Delta^z v_x-r\Delta^{z-1}v_x)^2$$

Οι τιμές s_x είναι οι πιθανότητες θνησιμότητας ή οι τιμές της έντασης θνησιμότητας του τυπικού πίνακα, τα $w^s{}_x$ είναι τα βάρη που σχετίζονται με την προσαρμογή των εξομαλυμένων τιμών και των ποσοστών θνησιμότητας του τυπικού πίνακα και r = C – 1. Η παράμετρος h_1 για την οποία ισχύει ο περιορισμός $0 \leq h_1 \leq 1$ ελέγχει την προσαρμογή στον τυπικό πίνακα έναντι της προσαρμογής στις αρχικές εκτιμήσεις των u_x .

Τέλος, μια άλλη παραλλαγή είναι του Schuette ο οποίος πρότεινε να χρησιμοποιούνται απόλυτες τιμές ώστε να περιορίζονται τα σφάλματα και οι απομακρυσμένες τιμές καθώς οι τετραγωνικές δυνάμεις με αυτές τις τιμές θα επηρέαζαν το αποτέλεσμα. Η συνάρτηση Μ σύμφωνα με το Schuette είναι

$$M = F + hS = \sum_{x=1}^{n} w_x \left|v_x - u_x\right| h \sum_{x=1}^{n-z} \left|\Delta^z v_x\right|$$

5.4.2 Ελαχιστοποίηση της Συνάρτησης Μ

Όπως αναφέραμε και στις προηγούμενες ενότητες των μεθόδων εξομάλυνσης, βασικός στόχος της εξομάλυνσης είναι μέσω των αρχικών εκτιμήσεων u_x να υπολογιστούν οι εξομαλυμένες τιμές θνησιμότητας v_x . Αυτό επιτυγχάνεται είτε ελαχιστοποιώντας την τιμή του μέτρου Μ παίρνοντας τις μερικές παραγώγους του μέτρου αυτού ως προς κάθε ηλικία και τις εξισώνουμε με το μηδέν

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 0 \ \ \gamma\iota\alpha \ r = 1{,}2, \ldots . n$$

Είτε χρησιμοποιώντας πίνακα-μήτρα για το μέτρο Μ. Για τον υπολογισμό της ελαχιστοποίησης του μέτρου Μ με τη μορφή Πινάκων-Μητρών δεν αρκεί παρά να ορίσουμε έναν πίνακα $u' = [u_1, u_2 \ldots \ldots, u_n]$ για τις πρωτογενείς τιμές της θνησιμότητας για κάθε ηλικία και αντίστοιχα έναν πίνακα $v' = [v_1, v_2 \ldots \ldots, v_n]$ με τις ζητούμενες εξομαλυμένες τιμές θνησιμότητας για κάθε ηλικία.

Επιπλέον χρειαζόμαστε έναν διαγώνιο πίνακα με τα βάρη για κάθε ηλικία της μορφής

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

Τέλος έχουμε έναν πίνακα k_z με (n-z) * n διαστάσεων με στοιχεία τους διωνυμικούς συντελεστές των διαφορών τάξης z που προκύπτουν. Έτσι το γινόμενο των $k_z v$ *είναι το* $(n-z) * 1$ διάνυσμα με στοιχεία τις τιμές των διαφορών $\Delta^z v_x$. Άρα χρησιμοποιώντας τους πίνακες που έχουμε ορίσει, η βασική σχέση του Whittaker γράφεται ως

$$M = (v-u)'w(v-u) + h(k_z v)'k_z v = (v-u)'w(v-u) + hv'(k'_z k_z)v$$

Υπενθυμίζουμε ότι v' είναι ο αντίστροφος του v και ισχύει $v' * v = v$ και το γινόμενο των $k'_z k_z = k_z k'_z = I_n$ όπου I_n είναι μια μοναδιαία μήτρα, που σημαίνει ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου της είναι όλα ίσα με τη μονάδα και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με το μηδέν.

Για να βρούμε τις τιμές του διανύσματος v που ελαχιστοποιούν τον πίνακα M θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$(w + hk'_z k_z)v = Wu$$

όπου θέτοντας c = w + h $k'_z k_z$ θα έχουμε cv=wu.

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση καθώς ο πίνακας C είναι μη ιδιάζων (non-singular), δηλαδή η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός. Πιο συγκεκριμένα ο h $k'_z k_z$ είναι ιδιάζων και με την προσθήκη του διαγώνιου πίνακα γίνεται μη ιδιάζων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΠΙΝΑΚΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ 2010

6.1 Εισαγωγή και Στοιχεία Πληθυσμού από Eurostat

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθεί η κατασκευή ενός πίνακα θνησιμότητας δημογραφικού πληθυσμού ή γενικού όπως αποκαλείται για να υπάρχει διαχωρισμός από τον ασφαλίσιμο πληθυσμό. Ουσιαστικά, από τα πρωτογενή δεδομένα που υπάρχουν διαθέσιμα στη Eurostat, τον πληθυσμό της Ελλάδος του 2010 και του 2011 στην $1^{η}$ Ιανουαρίου του κάθε έτους ανά ηλικία και φύλο και τους θανάτους του έτους 2010 ανά ηλικία και φύλο, θα υπολογιστούν οι αρχικές εκτιμήσεις .

Δηλαδή, θα υπολογιστούν τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας από τα πρωτογενή στοιχεία και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες μεθόδους και τις συναρτήσεις ανά ηλικία και φύλο θα κατασκευαστεί ένας πλήρης πίνακας επιβίωσης / θνησιμότητας. Στη συνέχεια, θα εξομαλυνθούν αυτά τα ποσοστά θνησιμότητας παίρνοντας την κατάλληλη μέθοδο εξομάλυνσης σύμφωνα με τα πρωτογενή στοιχεία που είναι διαθέσιμα κατά ηλικιακή δομή. Στόχος αυτού είναι η εξασφάλιση ομαλότερης καμπύλης θνησιμότητας και περιορισμός των τυχαίων στατιστικών αποκλίσεων.

Η κατασκευή του πίνακα επιβίωσης/θνησιμότητας και η διαδικασία της εξομάλυνσης γίνεται σε κάθε ηλικία ξεχωριστά για το κάθε φύλο. Τα στοιχεία του μεγέθους του πληθυσμού όσο και του αριθμού θανάτων που αφορούν το έτος 2010 προέρχονται από τη Eurostat. Η Eurostat ζητά από τα Κράτη – Μέλη της Ευρώπης και τις Χώρες που συμμετέχουν στο έργο της, να συλλέγει ετησίως τα στοιχεία που χρειάζεται. Η συλλογή των στοιχείων γίνεται από τα Εθνικά Στατιστικά Ιδρύματα της κάθε Χώρας όπου αναλόγως τη διαθεσιμότητά τους εξαρτάται και η πληρότητα των πινάκων που παράγονται από αυτή.

Όσον αφορά τον τομέα της δημογραφίας, η Eurostat, πραγματοποιεί τέσσερις ετήσιες συλλογές δεδομένων ώστε να είναι επαρκή και αξιόπιστα για τη χρήση τους. Το μέγεθος του πληθυσμού ανά ηλικία και φύλο σε συνδυασμό με τις ληξιαρχικές καταγραφές θανάτων ανά ηλικία και φύλο του ίδιου έτους μας δίνουν τις πρωτογενείς τιμές θνησιμότητας. Τα στοιχεία για τον πληθυσμό αφορούν την $1^{η}$ Ιανουαρίου του κάθε έτους (2010-2011) ενώ ο αριθμός των θανάτων του έτους 2010 αφορούν την ηλικία των τελευταίων γενεθλίων ανά φύλο. Οι πίνακες που ακολουθούν περιέχουν τα παραπάνω στοιχεία που αναφέρθηκαν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1: Πληθυσμός των Ανδρών της Ελλάδας 2010-2011

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΔΡΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ (2010-2011) [9]								
ΗΛΙΚΙΑ	**2010**	**2011**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**2011**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**2011**
0	60.740	58.905	**38**	88.946	89.466	**76**	45.941	**48.542**
1	60.818	60.728	**39**	94.190	88.834	**77**	40.964	**44.153**
2	58.133	60.823	**40**	89.441	94.044	**78**	40.525	**39.019**
3	58.075	58.133	**41**	90.719	89.292	**79**	43.603	**38.361**
4	56.051	58.075	**42**	91.063	90.558	**80**	32.347	**41.354**
5	55.254	56.047	**43**	89.127	90.909	**81**	31.963	**30.178**
6	54.609	55.255	**44**	85.001	88.949	**82**	26.638	**29.706**
7	54.039	54.605	**45**	81.397	84.817	**83**	26.990	**24.406**
8	54.214	54.040	**46**	78.373	81.197	**84**	22.213	**24.812**
9	53.450	54.211	**47**	78.056	78.150	**85**	16.208	**20.326**
10	52.365	53.445	**48**	77.823	77.806	**86**	12.905	**14.566**
11	52.424	52.364	**49**	85.282	77.557	**87**	11.673	**11.367**
12	54.192	52.421	**50**	78.070	85.006	**88**	9.103	**10.306**
13	55.065	54.195	**51**	76.054	77.751	**89**	12.049	**7.797**
14	57.431	55.063	**52**	75.272	75.686	**90**	6.574	**8.323**
15	57.434	57.423	**53**	75.981	74.904	**91**	4.427	**6.394**
16	56.729	57.408	**54**	75.785	75.584	**92**	3.148	**4.260**
17	58.953	56.700	**55**	71.346	75.362	**93**	2.095	**2.676**
18	59.654	58.922	**56**	67.258	70.888	**94**	1.147	**1.628**
19	62.180	59.608	**57**	67.915	66.761	**95**	710	**892**
20	60.210	62.123	**58**	68.761	67.374	**96**	491	**518**
21	64.152	60.151	**59**	71.231	68.197	**97**	541	**420**
22	62.507	64.092	**60**	59.056	70.611	**98**	681	**529**
23	66.792	62.434	**61**	60.438	58.483	**99**	534	**593**
24	70.172	66.707	**62**	66.018	59.741	**100**	619	**838**
25	74.053	70.089	**63**	67.569	65.289	**101**	436	**451**
26	77.812	73.944	**64**	61.491	66.708	**102**	222	**262**
27	81.735	77.697	**65**	56.092	60.711	**103**	139	**161**
28	84.490	81.630	**66**	46.097	55.321	**104**	79	**95**
29	90.474	84.367	**67**	46.528	45.429	**105**	50	**58**
30	85.996	90.353	**68**	41.957	45.786	**106**	30	**27**
31	88.945	85.877	**69**	58.024	41.039	**107**	13	**12**
32	90.734	88.835	**70**	50.156	56.947	**108**	7	**9**
33	91.223	90.616	**71**	51.277	48.980	**109**	3	**4**
34	90.763	91.098	**72**	48.972	49.975	**110+**	11	**10**
35	92.011	90.644	**73**	50.403	47.607			
36	88.115	91.907	**74**	49.207	48.874			
37	89.595	88.002	**75**	50.421	47.484			

9 ΠΗΓΗ: Eurostat, τελευταία ενημέρωση δεδομένων 25.04.2012, άντληση πληροφοριών 16.05.2012

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2: Πληθυσμός των Γυναικών της Ελλάδας 2010-2011

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ (2010-2011) [10]								
ΗΛΙΚΙΑ	**2010**	**2011**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**2011**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**2011**
0	57.040	55.451	**38**	84.017	85.122	**76**	60.123	**62.171**
1	57.239	57.037	**39**	88.878	83.954	**77**	56.875	**58.624**
2	54.132	57.239	**40**	86.143	88.830	**78**	47.981	**55.304**
3	54.575	54.135	**41**	88.419	86.075	**79**	62.684	**46.115**
4	52.397	54.578	**42**	89.728	88.352	**80**	41.807	**60.542**
5	51.557	52.398	**43**	87.202	89.642	**81**	45.188	**39.518**
6	51.431	51.558	**44**	83.438	87.107	**82**	36.503	**42.800**
7	51.114	51.434	**45**	81.147	83.350	**83**	36.891	**33.967**
8	49.750	51.120	**46**	78.749	81.056	**84**	30.736	**34.095**
9	50.382	49.752	**47**	79.244	78.654	**85**	23.817	**28.064**
10	49.560	50.385	**48**	77.556	79.157	**86**	16.432	**21.490**
11	49.511	49.560	**49**	86.991	77.430	**87**	20.399	**14.226**
12	51.808	49.513	**50**	79.642	86.855	**88**	8.338	**17.426**
13	52.886	51.805	**51**	78.158	79.499	**89**	17.263	**6.422**
14	53.517	52.889	**52**	77.489	78.006	**90**	7.743	**8.809**
15	53.839	53.519	**53**	78.498	77.334	**91**	4.939	**6.996**
16	53.907	53.837	**54**	77.505	78.311	**92**	2.761	**4.784**
17	55.274	53.910	**55**	73.684	77.310	**93**	1.373	**2.572**
18	56.406	55.270	**56**	68.664	73.500	**94**	676	**1.139**
19	57.544	56.402	**57**	71.216	68.446	**95**	555	**459**
20	55.240	57.537	**58**	69.607	71.000	**96**	382	**300**
21	59.093	55.217	**59**	74.956	69.394	**97**	280	**241**
22	58.218	59.083	**60**	62.789	74.712	**98**	302	**263**
23	61.803	58.204	**61**	66.858	62.553	**99**	177	**239**
24	64.469	61.781	**62**	71.691	66.534	**100**	325	**508**
25	67.900	64.449	**63**	73.759	71.364	**101**	493	**296**
26	71.315	67.882	**64**	67.173	73.367	**102**	293	**190**
27	75.467	71.296	**65**	63.185	66.797	**103**	180	**137**
28	76.854	75.442	**66**	51.442	62.820	**104**	122	**89**
29	83.271	76.824	**67**	54.159	51.120	**105**	96	**60**
30	79.123	83.243	**68**	50.588	53.826	**106**	60	**40**
31	81.826	79.090	**69**	72.335	50.080	**107**	42	**23**
32	83.520	81.786	**70**	60.685	71.728	**108**	25	**18**
33	83.965	83.489	**71**	65.446	59.983	**109**	16	**8**
34	85.115	83.934	**72**	61.499	64.690	**110+**	29	**20**
35	87.197	85.068	**73**	65.807	60.592			
36	83.461	87.157	**74**	63.015	64.819			
37	85.173	83.431	**75**	63.506	61.789			

[10] ΠΗΓΗ: Eurostat, τελευταία ενημέρωση δεδομένων 25.04.2012, άντληση πληροφοριών 16.05.2012

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3: Αριθμός Θανόντων των Ανδρών στην Ελλάδα 2010

ΑΡΙΘΜΟΣ ΘΑΝΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΝΔΡΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΤΟ 2010[11]					
ΗΛΙΚΙΑ	**2010**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**
0	234	**37**	102	**74**	1.539
1	20	**38**	123	**75**	1.733
2	6	**39**	106	**76**	1.888
3	7	**40**	142	**77**	1.796
4	9	**41**	146	**78**	1.952
5	8	**42**	160	**79**	2.168
6	6	**43**	155	**80**	2.260
7	7	**44**	179	**81**	2.175
8	6	**45**	187	**82**	2.265
9	6	**46**	204	**83**	2.239
10	10	**47**	229	**84**	2.184
11	2	**48**	255	**85**	1.893
12	7	**49**	273	**86**	1.646
13	4	**50**	284	**87**	1.542
14	8	**51**	328	**88**	1.361
15	13	**52**	379	**89**	1.309
16	31	**53**	376	**90**	1.133
17	33	**54**	408	**91**	775
18	39	**55**	432	**92**	718
19	49	**56**	470	**93**	639
20	57	**57**	510	**94**	541
21	51	**58**	555	**95**	531
22	48	**59**	578	**96**	391
23	57	**60**	635	**97**	271
24	66	**61**	589	**98**	208
25	62	**62**	712	**99**	136
26	85	**63**	745	**100**	105
27	92	**64**	876	**101**	51
28	80	**65**	795	**102**	38
29	98	**66**	788	**103**	20
30	96	**67**	684	**104**	11
31	95	**68**	755	**105**	6
32	88	**69**	932	**106**	3
33	100	**70**	1.090	**107**	2
34	109	**71**	1.189	**108**	1
35	103	**72**	1.317	**109**	2
36	93	**73**	1.375	**110+**	0

[11] ΠΗΓΗ: Eurostat, τελευταία ενημέρωση δεδομένων 25.04.2012, άντληση πληροφοριών 16.05.2012

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.4: Αριθμός Θανόντων των Γυναικών στην Ελλάδα 2010

ΑΡΙΘΜΟΣ ΘΑΝΑΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΤΟ 2010[12]					
ΗΛΙΚΙΑ	**2010**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**	**ΗΛΙΚΙΑ**	**2010**
0	202	**37**	31	**74**	1.003
1	12	**38**	51	**75**	1.241
2	11	**39**	62	**76**	1.349
3	4	**40**	50	**77**	1.511
4	8	**41**	70	**78**	1.587
5	7	**42**	71	**79**	1.879
6	7	**43**	87	**80**	2.151
7	5	**44**	101	**81**	2.297
8	1	**45**	93	**82**	2.396
9	4	**46**	100	**83**	2.544
10	4	**47**	103	**84**	2.803
11	5	**48**	97	**85**	2.649
12	5	**49**	136	**86**	2.337
13	10	**50**	149	**87**	2.211
14	5	**51**	157	**88**	2.147
15	9	**52**	166	**89**	1.922
16	14	**53**	166	**90**	1.899
17	10	**54**	200	**91**	1.294
18	16	**55**	208	**92**	1.368
19	12	**56**	199	**93**	1.067
20	17	**57**	234	**94**	990
21	26	**58**	235	**95**	949
22	14	**59**	231	**96**	670
23	16	**60**	264	**97**	561
24	21	**61**	256	**98**	444
25	18	**62**	345	**99**	308
26	16	**63**	349	**100**	255
27	15	**64**	414	**101**	111
28	22	**65**	398	**102**	79
29	26	**66**	386	**103**	37
30	23	**67**	343	**104**	32
31	29	**68**	354	**105**	30
32	34	**69**	527	**106**	10
33	25	**70**	629	**107**	12
34	27	**71**	720	**108**	6
35	42	**72**	775	**109**	6
36	38	**73**	924	**110+**	8

[12]ΠΗΓΗ: Eurostat, τελευταία ενημέρωση δεδομένων 25.04.2012, άντληση πληροφοριών 16.05.2012

6.2 Κατασκευή Πινάκων Επιβίωσης με έτος βάσης 2010

Για την κατασκευή ενός πλήρους πίνακα επιβίωσης , αρκεί να εφαρμοστούν τα βήματα που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2 στην ενότητα 2.3. Αρχικά, πρέπει να υπολογιστούν οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας ανά ηλικία και φύλο και στη συνέχεια με τη βοήθεια των προσεγγιστικών σχέσεων να εκτιμηθούν και να υπολογιστούν τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα προηγούμενα διαθέσιμα στοιχεία και ακολουθώντας τη μεθοδολογία που ακολουθεί η Eurostat[13] για όλες τις ηλικίες από 0 έως 110 (που θεωρείται η καταληκτική ηλικία) παίρνουμε τους ακόλουθους πίνακες επιβίωσης ανά φύλο και ηλικία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.5: Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Πληθυσμού Ανδρών της Ελλάδος 2010

ΠΛΗΡΗΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΔΡΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ. 2010										
x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0	59.823	234	0.0039	0.0039	0.9961	100.000	390	99.688	7.809.049	78.09
1	60.773	20	0.0003	0.0003	0.9997	99.610	33	99.594	7.709.361	77.40
2	59.478	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.577	10	99.572	7.609.768	76.42
3	58.104	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.567	12	99.561	7.510.195	75.43
4	57.063	9	0.0002	0.0002	0.9998	99.555	16	99.547	7.410.634	74.44
5	55.651	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.540	14	99.532	7.311.087	73.45
6	54.932	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.525	11	99.520	7.211.554	72.46
7	54.322	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.514	13	99.508	7.112.034	71.47
8	54.127	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.502	11	99.496	7.012.526	70.48
9	53.831	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.491	11	99.485	6.913.030	69.48
10	52.905	10	0.0002	0.0002	0.9998	99.479	19	99.470	6.813.545	68.49
11	52.394	2	0.0000	0.0000	1.0000	99.461	4	99.459	6.714.075	67.50
12	53.307	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.457	13	99.450	6.614.617	66.51
13	54.630	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.444	7	99.440	6.515.166	65.52
14	56.247	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.436	14	99.429	6.415.726	64.52
15	57.429	13	0.0002	0.0002	0.9998	99.422	23	99.411	6.316.297	63.53
16	57.069	31	0.0005	0.0005	0.9995	99.400	54	99.373	6.216.886	62.54
17	57.827	33	0.0006	0.0006	0.9994	99.346	57	99.318	6.117.513	61.58
18	59.288	39	0.0007	0.0007	0.9993	99.289	65	99.257	6.018.195	60.61
19	60.894	49	0.0008	0.0008	0.9992	99.224	80	99.184	5.918.939	59.65
20	61.167	57	0.0009	0.0009	0.9991	99.144	92	99.098	5.819.755	58.70
21	62.152	51	0.0008	0.0008	0.9992	99.052	81	99.011	5.720.657	57.75

[13] European Commission: Eurostat Unit F-2: Population: “Description of the Eurostat method for the calculation of the life expectancies at all ages”.

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
22	63.300	48	0.0008	0.0008	0.9992	98.970	75	98.933	5.621.646	56.80
23	64.613	57	0.0009	0.0009	0.9991	98.895	87	98.852	5.522.713	55.84
24	68.440	66	0.0010	0.0010	0.9990	98.808	95	98.761	5.423.861	54.89
25	72.071	62	0.0009	0.0009	0.9991	98.713	85	98.671	5.325.100	53.95
26	75.878	85	0.0011	0.0011	0.9989	98.628	110	98.573	5.226.430	52.99
27	79.716	92	0.0012	0.0012	0.9988	98.518	114	98.461	5.127.857	52.05
28	83.060	80	0.0010	0.0010	0.9990	98.404	95	98.357	5.029.396	51.11
29	87.421	98	0.0011	0.0011	0.9989	98.309	110	98.254	4.931.039	50.16
30	88.175	96	0.0011	0.0011	0.9989	98.199	107	98.146	4.832.785	49.21
31	87.411	95	0.0011	0.0011	0.9989	98.092	107	98.039	4.734.639	48.27
32	89.785	88	0.0010	0.0010	0.9990	97.986	96	97.938	4.636.600	47.32
33	90.920	100	0.0011	0.0011	0.9989	97.890	108	97.836	4.538.662	46.37
34	90.931	109	0.0012	0.0012	0.9988	97.782	117	97.724	4.440.826	45.42
35	91.328	103	0.0011	0.0011	0.9989	97.665	110	97.610	4.343.103	44.47
36	90.011	93	0.0010	0.0010	0.9990	97.555	101	97.505	4.245.493	43.52
37	88.799	102	0.0011	0.0011	0.9989	97.454	112	97.398	4.147.988	42.56
38	89.206	123	0.0014	0.0014	0.9986	97.342	134	97.275	4.050.590	41.61
39	91.512	106	0.0012	0.0012	0.9988	97.208	113	97.152	3.953.314	40.67
40	91.743	142	0.0015	0.0015	0.9985	97.096	150	97.021	3.856.162	39.72
41	90.006	146	0.0016	0.0016	0.9984	96.946	157	96.867	3.759.142	38.78
42	90.811	160	0.0018	0.0018	0.9982	96.788	170	96.703	3.662.275	37.84
43	90.018	155	0.0017	0.0017	0.9983	96.618	166	96.535	3.565.572	36.90
44	86.975	179	0.0021	0.0021	0.9979	96.452	198	96.353	3.469.037	35.97
45	83.107	187	0.0023	0.0022	0.9978	96.253	216	96.145	3.372.684	35.04
46	79.785	204	0.0026	0.0026	0.9974	96.037	245	95.915	3.276.539	34.12
47	78.103	229	0.0029	0.0029	0.9971	95.792	280	95.652	3.180.624	33.20
48	77.815	255	0.0033	0.0033	0.9967	95.511	312	95.355	3.084.973	32.30
49	81.420	273	0.0034	0.0033	0.9967	95.199	319	95.040	2.989.617	31.40
50	81.538	284	0.0035	0.0035	0.9965	94.880	330	94.715	2.894.578	30.51
51	76.903	328	0.0043	0.0043	0.9957	94.550	402	94.349	2.799.862	29.61
52	75.479	379	0.0050	0.0050	0.9950	94.148	472	93.912	2.705.513	28.74
53	75.443	376	0.0050	0.0050	0.9950	93.676	466	93.444	2.611.601	27.88
54	75.685	408	0.0054	0.0054	0.9946	93.211	501	92.960	2.518.157	27.02
55	73.354	432	0.0059	0.0059	0.9941	92.710	544	92.437	2.425.197	26.16
56	69.073	470	0.0068	0.0068	0.9932	92.165	625	91.853	2.332.760	25.31
57	67.338	510	0.0076	0.0075	0.9925	91.540	691	91.195	2.240.907	24.48
58	68.068	555	0.0082	0.0081	0.9919	90.850	738	90.481	2.149.712	23.66
59	69.714	578	0.0083	0.0083	0.9917	90.112	744	89.740	2.059.232	22.85
60	64.834	635	0.0098	0.0097	0.9903	89.368	871	88.932	1.969.492	22.04
61	59.461	589	0.0099	0.0099	0.9901	88.497	872	88.061	1.880.560	21.25
62	62.880	712	0.0113	0.0113	0.9887	87.624	987	87.131	1.792.499	20.46
63	66.429	745	0.0112	0.0112	0.9888	86.638	966	86.155	1.705.368	19.68

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
64	64.100	876	0.0137	0.0136	0.9864	85.672	1.163	85.090	1.619.213	18.90
65	58.402	795	0.0136	0.0135	0.9865	84.509	1.143	83.937	1.534.123	18.15
66	50.709	788	0.0155	0.0154	0.9846	83.366	1.285	82.723	1.450.186	17.40
67	45.979	684	0.0149	0.0148	0.9852	82.081	1.212	81.475	1.367.462	16.66
68	43.872	755	0.0172	0.0171	0.9829	80.869	1.380	80.179	1.285.988	15.90
69	49.532	932	0.0188	0.0186	0.9814	79.489	1.482	78.748	1.205.809	15.17
70	53.552	1090	0.0204	0.0201	0.9799	78.007	1.572	77.221	1.127.061	14.45
71	50.129	1189	0.0237	0.0234	0.9766	76.435	1.792	75.539	1.049.840	13.74
72	49.474	1317	0.0266	0.0263	0.9737	74.643	1.961	73.663	974.301	13.05
73	49.005	1375	0.0281	0.0277	0.9723	72.683	2.011	71.677	900.638	12.39
74	49.041	1539	0.0314	0.0309	0.9691	70.671	2.184	69.580	828.961	11.73
75	48.953	1733	0.0354	0.0348	0.9652	68.488	2.382	67.297	759.381	11.09
76	47.242	1888	0.0400	0.0392	0.9608	66.105	2.590	64.810	692.085	10.47
77	42.559	1796	0.0422	0.0413	0.9587	63.515	2.625	62.203	627.274	9.88
78	39.772	1952	0.0491	0.0479	0.9521	60.890	2.917	59.432	565.071	9.28
79	40.982	2168	0.0529	0.0515	0.9485	57.973	2.988	56.479	505.640	8.72
80	36.851	2260	0.0613	0.0595	0.9405	54.986	3.272	53.350	449.160	8.17
81	31.071	2175	0.0700	0.0676	0.9324	51.714	3.498	49.965	395.811	7.65
82	28.172	2265	0.0804	0.0773	0.9227	48.216	3.727	46.353	345.846	7.17
83	25.698	2239	0.0871	0.0835	0.9165	44.489	3.714	42.632	299.493	6.73
84	23.513	2184	0.0929	0.0888	0.9112	40.775	3.619	38.965	256.861	6.30
85	18.267	1893	0.1036	0.0985	0.9015	37.156	3.661	35.325	217.896	5.86
86	13.736	1646	0.1198	0.1131	0.8869	33.495	3.787	31.601	182.570	5.45
87	11.520	1542	0.1339	0.1255	0.8745	29.708	3.727	27.844	150.969	5.08
88	9.705	1361	0.1402	0.1311	0.8689	25.981	3.405	24.278	123.125	4.74
89	9.923	1309	0.1319	0.1238	0.8762	22.576	2.794	21.179	98.846	4.38
90	7.449	1133	0.1521	0.1414	0.8586	19.782	2.796	18.384	77.668	3.93
91	5.411	775	0.1432	0.1337	0.8663	16.986	2.270	15.850	59.284	3.49
92	3.704	718	0.1938	0.1767	0.8233	14.715	2.600	13.415	43.433	2.95
93	2.386	639	0.2679	0.2362	0.7638	12.115	2.862	10.684	30.018	2.48
94	1.388	541	0.3899	0.3263	0.6737	9.253	3.019	7.743	19.334	2.09
95	801	531	0.6629	0.4979	0.5021	6.234	3.104	4.682	11.591	1.86
96	505	391	0.7750	0.5586	0.4414	3.130	1.748	2.256	6.909	2.21
97	481	271	0.5640	0.4399	0.5601	1.382	608	1.078	4.653	3.37
98	605	208	0.3438	0.2934	0.7066	774	227	660	3.575	4.62
99	564	136	0.2413	0.2154	0.7846	547	118	488	2.915	5.33
100	729	105	0.1441	0.1344	0.8656	429	58	400	2.427	5.66
101	444	51	0.1150	0.1087	0.8913	371	40	351	2.027	5.46
102	242	38	0.1570	0.1456	0.8544	331	48	307	1.676	5.06
103	150	20	0.1333	0.1250	0.8750	283	35	265	1.369	4.84
104	87	11	0.1264	0.1189	0.8811	247	29	233	1.104	4.46
105	54	6	0.1111	0.1053	0.8947	218	23	207	871	4.00
106	29	3	0.1053	0.1000	0.9000	195	20	185	665	3.41
107	13	2	0.1600	0.1481	0.8519	176	26	163	479	2.73
108	8	1	0.1250	0.1176	0.8824	150	18	141	317	2.12
109	4	2	0.5714	0.4444	0.5556	132	59	103	176	1.33
110+	11	0	0.0000	1.0000	0.0000	73	73	73	73	1.00

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.6: Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Πληθυσμού γυναικών της Ελλάδος 2010

ΠΛΗΡΗΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ. 2010

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0	56.246	202	0.0036	0.0036	0.9964	100.000	358	99.714	8.276.036	82.76
1	57.138	12	0.0002	0.0002	0.9998	99.642	21	99.631	8.176.323	82.06
2	55.686	11	0.0002	0.0002	0.9998	99.621	20	99.611	8.076.691	81.07
3	54.355	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.601	7	99.598	7.977.080	80.09
4	53.488	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.594	15	99.587	7.877.482	79.10
5	51.978	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.579	13	99.572	7.777.896	78.11
6	51.495	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.566	14	99.559	7.678.324	77.12
7	51.274	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.552	10	99.547	7.578.765	76.13
8	50.435	1	0.0000	0.0000	1.0000	99.542	2	99.541	7.479.217	75.14
9	50.067	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.540	8	99.536	7.379.676	74.14
10	49.973	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.532	8	99.529	7.280.140	73.14
11	49.536	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.525	10	99.519	7.180.611	72.15
12	50.661	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.514	10	99.510	7.081.092	71.16
13	52.346	10	0.0002	0.0002	0.9998	99.505	19	99.495	6.981.582	70.16
14	53.203	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.486	9	99.481	6.882.087	69.18
15	53.679	9	0.0002	0.0002	0.9998	99.476	17	99.468	6.782.606	68.18
16	53.872	14	0.0003	0.0003	0.9997	99.460	26	99.447	6.683.138	67.19
17	54.592	10	0.0002	0.0002	0.9998	99.434	18	99.425	6.583.691	66.21
18	55.838	16	0.0003	0.0003	0.9997	99.416	28	99.401	6.484.267	65.22
19	56.973	12	0.0002	0.0002	0.9998	99.387	21	99.377	6.384.865	64.24
20	56.389	17	0.0003	0.0003	0.9997	99.366	30	99.351	6.285.489	63.26
21	57.155	26	0.0005	0.0005	0.9995	99.336	45	99.314	6.186.137	62.27
22	58.651	14	0.0002	0.0002	0.9998	99.291	24	99.279	6.086.824	61.30
23	60.004	16	0.0003	0.0003	0.9997	99.267	26	99.254	5.987.545	60.32
24	63.125	21	0.0003	0.0003	0.9997	99.241	33	99.224	5.888.291	59.33
25	66.175	18	0.0003	0.0003	0.9997	99.208	27	99.194	5.789.066	58.35
26	69.599	16	0.0002	0.0002	0.9998	99.181	23	99.169	5.689.872	57.37
27	73.382	15	0.0002	0.0002	0.9998	99.158	20	99.148	5.590.702	56.38
28	76.148	22	0.0003	0.0003	0.9997	99.138	29	99.123	5.491.554	55.39
29	80.048	26	0.0003	0.0003	0.9997	99.109	32	99.093	5.392.431	54.41
30	81.183	23	0.0003	0.0003	0.9997	99.077	28	99.063	5.293.338	53.43
31	80.458	29	0.0004	0.0004	0.9996	99.049	36	99.031	5.194.275	52.44
32	82.653	34	0.0004	0.0004	0.9996	99.013	41	98.993	5.095.244	51.46
33	83.727	25	0.0003	0.0003	0.9997	98.972	30	98.958	4.996.251	50.48
34	84.525	27	0.0003	0.0003	0.9997	98.943	32	98.927	4.897.293	49.50
35	86.133	42	0.0005	0.0005	0.9995	98.911	48	98.887	4.798.366	48.51
36	85.309	38	0.0004	0.0004	0.9996	98.863	44	98.841	4.699.479	47.54

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
37	84.302	31	0.0004	0.0004	0.9996	98.819	36	98.801	4.600.638	46.56
38	84.570	51	0.0006	0.0006	0.9994	98.783	60	98.753	4.501.837	45.57
39	86.416	62	0.0007	0.0007	0.9993	98.723	71	98.688	4.403.084	44.60
40	87.487	50	0.0006	0.0006	0.9994	98.652	56	98.624	4.304.396	43.63
41	87.247	70	0.0008	0.0008	0.9992	98.596	79	98.557	4.205.772	42.66
42	89.040	71	0.0008	0.0008	0.9992	98.517	79	98.478	4.107.215	41.69
43	88.422	87	0.0010	0.0010	0.9990	98.438	97	98.390	4.008.738	40.72
44	85.273	101	0.0012	0.0012	0.9988	98.342	116	98.283	3.910.348	39.76
45	82.249	93	0.0011	0.0011	0.9989	98.225	111	98.170	3.812.064	38.81
46	79.903	100	0.0013	0.0013	0.9987	98.114	123	98.053	3.713.894	37.85
47	78.949	103	0.0013	0.0013	0.9987	97.992	128	97.928	3.615.842	36.90
48	78.357	97	0.0012	0.0012	0.9988	97.864	121	97.803	3.517.914	35.95
49	82.211	136	0.0017	0.0017	0.9983	97.743	162	97.662	3.420.111	34.99
50	83.249	149	0.0018	0.0018	0.9982	97.581	174	97.494	3.322.449	34.05
51	78.829	157	0.0020	0.0020	0.9980	97.407	194	97.310	3.224.955	33.11
52	77.748	166	0.0021	0.0021	0.9979	97.213	207	97.109	3.127.645	32.17
53	77.916	166	0.0021	0.0021	0.9979	97.005	206	96.902	3.030.536	31.24
54	77.908	200	0.0026	0.0026	0.9974	96.799	248	96.675	2.933.634	30.31
55	75.497	208	0.0028	0.0028	0.9972	96.551	266	96.418	2.836.959	29.38
56	71.082	199	0.0028	0.0028	0.9972	96.285	269	96.151	2.740.541	28.46
57	69.831	234	0.0034	0.0033	0.9967	96.016	321	95.855	2.644.390	27.54
58	70.304	235	0.0033	0.0033	0.9967	95.695	319	95.535	2.548.535	26.63
59	72.175	231	0.0032	0.0032	0.9968	95.375	305	95.223	2.453.000	25.72
60	68.751	264	0.0038	0.0038	0.9962	95.071	364	94.889	2.357.777	24.80
61	64.706	256	0.0040	0.0039	0.9961	94.706	374	94.519	2.262.888	23.89
62	69.113	345	0.0050	0.0050	0.9950	94.332	470	94.098	2.168.369	22.99
63	72.562	349	0.0048	0.0048	0.9952	93.863	450	93.637	2.074.271	22.10
64	70.270	414	0.0059	0.0059	0.9941	93.412	549	93.138	1.980.634	21.20
65	64.991	398	0.0061	0.0061	0.9939	92.864	567	92.580	1.887.496	20.33
66	57.131	386	0.0068	0.0067	0.9933	92.297	621	91.986	1.794.916	19.45
67	52.640	343	0.0065	0.0065	0.9935	91.675	595	91.377	1.702.930	18.58
68	52.207	354	0.0068	0.0068	0.9932	91.080	615	90.772	1.611.553	17.69
69	61.208	527	0.0086	0.0086	0.9914	90.464	776	90.076	1.520.781	16.81
70	66.207	629	0.0095	0.0095	0.9905	89.689	848	89.265	1.430.704	15.95
71	62.715	720	0.0115	0.0114	0.9886	88.841	1.014	88.334	1.341.440	15.10
72	63.095	775	0.0123	0.0122	0.9878	87.826	1.072	87.290	1.253.106	14.27
73	63.200	924	0.0146	0.0145	0.9855	86.754	1.259	86.125	1.165.816	13.44
74	63.917	1003	0.0157	0.0156	0.9844	85.495	1.331	84.829	1.079.691	12.63
75	62.648	1241	0.0198	0.0196	0.9804	84.164	1.651	83.338	994.862	11.82
76	61.147	1349	0.0221	0.0218	0.9782	82.513	1.801	81.613	911.523	11.05
77	57.750	1511	0.0262	0.0258	0.9742	80.713	2.085	79.670	829.910	10.28
78	51.643	1587	0.0307	0.0303	0.9697	78.628	2.380	77.438	750.240	9.54

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
79	54.400	1879	0.0345	0.0340	0.9660	76.248	2.589	74.954	672.802	8.82
80	51.175	2151	0.0420	0.0412	0.9588	73.659	3.032	72.143	597.848	8.12
81	42.353	2297	0.0542	0.0528	0.9472	70.627	3.729	68.762	525.705	7.44
82	39.652	2396	0.0604	0.0587	0.9413	66.898	3.924	64.936	456.943	6.83
83	35.429	2544	0.0718	0.0693	0.9307	62.974	4.365	60.791	392.007	6.22
84	32.416	2803	0.0865	0.0829	0.9171	58.609	4.858	56.180	331.216	5.65
85	25.941	2649	0.1021	0.0972	0.9028	53.751	5.222	51.140	275.036	5.12
86	18.961	2337	0.1233	0.1161	0.8839	48.528	5.634	45.711	223.896	4.61
87	17.313	2211	0.1277	0.1200	0.8800	42.894	5.149	40.320	178.185	4.15
88	12.882	2147	0.1667	0.1538	0.8462	37.745	5.807	34.842	137.865	3.65
89	11.843	1922	0.1623	0.1501	0.8499	31.938	4.794	29.541	103.024	3.23
90	8.276	1899	0.2295	0.2058	0.7942	27.144	5.587	24.350	73.483	2.71
91	5.968	1294	0.2168	0.1956	0.8044	21.556	4.217	19.448	49.133	2.28
92	3.773	1368	0.3626	0.3070	0.6930	17.339	5.323	14.678	29.685	1.71
93	1.973	1067	0.5409	0.4258	0.5742	12.017	5.116	9.458	15.007	1.25
94	908	990	1.0909	0.7059	0.2941	6.900	4.871	4.465	5.548	0.80
95	507	949	1.8718	0.9669	0.0331	2.029	1.962	1.048	1.083	0.53
96	341	670	1.9648	0.9911	0.0089	67	67	34	35	0.52
97	261	561	2.1536	1.0370	-0.0370	1	0	0	1	1.89
98	283	344	1.2177	0.7569	0.2431	0	0	0	1	2.13
99	208	188	0.9038	0.6225	0.3775	0	0	0	0	2.24
100	417	308	0.7395	0.4688	0.5313	0	0	0	0	2.46
101	395	111	0.2814	0.2467	0.7533	0	0	0	0	3.19
102	242	79	0.3271	0.2811	0.7189	0	0	0	0	3.07
103	159	37	0.2334	0.2090	0.7910	0	0	0	0	3.08
104	106	32	0.3033	0.2634	0.7366	0	0	0	0	2.76
105	78	30	0.3846	0.3226	0.6774	0	0	0	0	2.57
106	50	10	0.2000	0.1818	0.8182	0	0	0	0	2.56
107	33	12	0.3692	0.3117	0.6883	0	0	0	0	2.02
108	22	6	0.2791	0.2449	0.7551	0	0	0	0	1.71
109	12	6	0.5000	0.4000	0.6000	0	0	0	0	1.10
110+	25	8	0.3265	1.0000	0.0000	0	0	0	0	0.50

Για να αναλύσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων πινάκων πρέπει πρωτίστως να δούμε πώς υπολογίστηκαν. Στην πρώτη στήλη παρουσιάζεται ο μέσος πληθυσμός του 2010, ο οποίος σύμφωνα με τα στοιχεία του πληθυσμού στην 1η Ιανουαρίου του 2010 και του 2011 υπολογίστηκε από τον γνωστό τύπο

$$\overline{P^{2010}}_x = \frac{1}{2}(P^{1/2010}{}_x + P^{1/2011}{}_x)$$

Στη δεύτερη στήλη έχουμε τον αριθμό των θανάτων του έτους 2010 στα τελευταία γενέθλια ηλικίας x όπου χρησιμοποιώντας και το μέσο πληθυσμό του 2010 υπολογίζεται η τρίτη στήλη, δηλαδή οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας από τον γνωστό τύπο

$$m_x = \frac{D_x{}^{2010}}{\overline{P_x{}^{2010}}}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας κάποια προσεγγιστική σχέση που συνδέει τους κεντρικούς δείκτες θνησιμότητας με τα ποσοστά θνησιμότητας έχουμε τις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας στη στήλη τέσσερα. Θεωρώντας ότι η γενεά που μελετάμε είναι κλειστή σε μετανάστευση και ότι στη διάρκεια της ηλικίας x οι θάνατοι ισοκατανέμονται, τότε ο πληθυσμός πριν από το μισό έτος βρισκόταν στην αρχή της ηλικίας x και προφανώς το μέγεθός του ήταν ίσο με $P_x + \frac{1}{2}D_x$.

Υπό αυτές τις συνθήκες και εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Keyfitz

$$q_x = \frac{m_x}{1+(1-a_x)m_x} \text{ με } \alpha=0.5$$

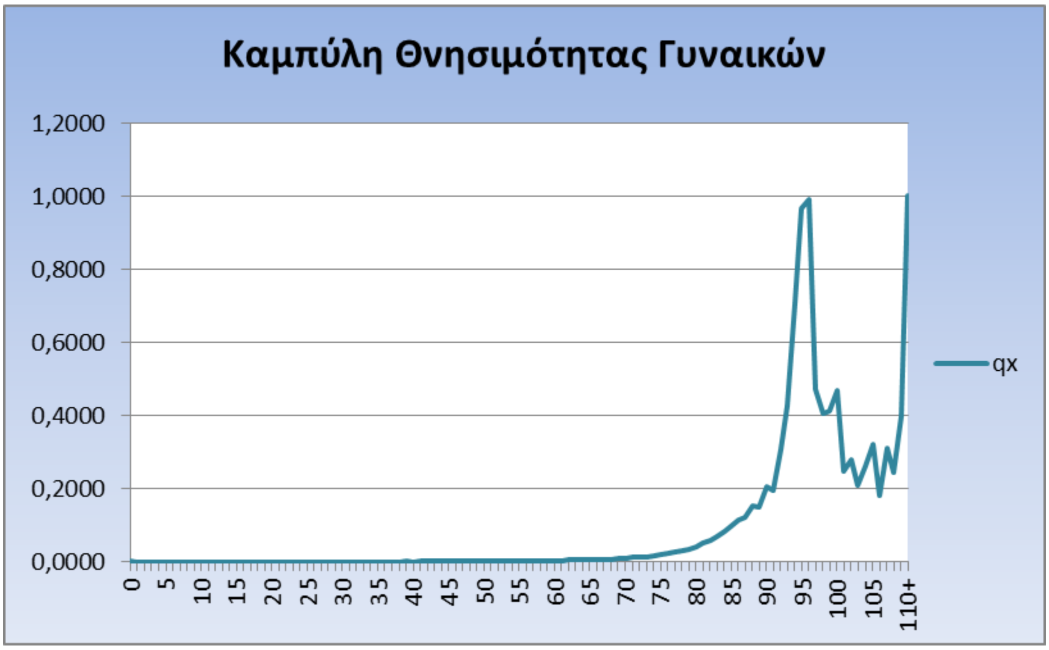
για όλες τις ηλικίες εκτός από την ηλικία 0 όπου το α=0.2 , γενικά αποδεκτό λόγω βρεφικής θνησιμότητας, υπολογίζονται τελικά τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας των παραπάνω πινάκων.

Οι υπόλοιπες στήλες του πίνακα υπολογίζονται σύμφωνα με τις αλυσιδωτές σχέσεις που τις συνδέουν όπως περιγράψαμε αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας. (βλέπε § 2.2).

Παρατηρώντας τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων επιβίωσης, διαπιστώνουμε ότι τα ποσοστά θνησιμότητας στις ηλικίες 0 και 1 είναι αρκετά μεγάλα λόγω βρεφικής θνησιμότητας. Στις επόμενες ηλικίες τα ποσοστά ομαλοποιούνται αρκετά. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά εκτός από την ομαλότητα που πρέπει να έχουν, αυξάνονται με την ηλικία εξασφαλίζοντας τη μονοτονία της θνησιμότητας. Τέλος, παρατηρείται και μια κυρτότητα καθώς αυξάνονται απότομα στις μεγάλες ηλικίες τα ποσοστά θνησιμότητας. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό ας δούμε τα παρακάτω γραφήματα των καμπυλών θνησιμότητας των παραπάνω πινάκων.

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.1: Καμπύλη Θνησιμότητας Ανδρών 2010

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.2: Καμπύλη Θνησιμότητας Γυναικών 2010



Σύμφωνα με τα γραφήματα, διαπιστώνουμε ότι τα ποσοστά θνησιμότητας ειδικότερα στις γυναίκες από την ηλικία 85+ δεν είναι τόσο ομαλά δημιουργώντας μεγάλη κυρτότητα. Αυτό οφείλεται στα μη επαρκή δεδομένα σε αυτές τις ηλικίες ή ακόμα και σε στατιστικά λάθη των ληξιαρχικών καταγραφών. Πολλές φορές διαπιστώνεται στρογγυλοποίηση των ηλικιών ή σπανιότερα βέβαια μετατόπιση των μεγαλύτερων ηλικιών . Λόγω αυτού, παρουσιάζονται προβλήματα και στις υπόλοιπες συναρτήσεις των πλήρων πινάκων επιβίωσης δημιουργώντας μη αξιόπιστα και μη κατάλληλα αποτελέσματα για την πρόβλεψη μελλοντικών συμπερασμάτων.

Πιο συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις ηλικιών από 94 έως 98 των γυναικών, οι θάνατοι είναι περισσότεροι από το μέσο του πληθυσμού στο έτος δημιουργώντας αρνητικό ποσοστό θνησιμότητας με την παραδοχή ότι οι θάνατοι ισοκατανέμονται ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται μηδενικά στις επόμενες ηλικίες . Η καταληκτική ημερομηνία αυτής της γενεάς φαίνεται να είναι η ηλικία 97 και όχι η 110 όπως ισχύει εξ ορισμού.

Η πρακτική λύση που υιοθετείται από τις στατιστικές υπηρεσίες των διάφορων χωρών[14] είναι η παρουσίαση των εμπειρικών στοιχείων κατά ομάδες ηλικιών, επιλεγμένες έτσι ώστε τα σύνολα των ομάδων να αντιστοιχούν στα αντίστοιχα σύνολα των πραγματικών μα άγνωστων στοιχείων.

Γι αυτό το λόγο, η Eurostat κατασκευάζει τους πίνακες επιβίωσης μέχρι την ηλικία 85+ θεωρώντας ότι εκεί πεθαίνουν όλοι χρησιμοποιώντας ποσοστό θνησιμότητας ίσο με τη μονάδα . Δηλαδή για τις ηλικίες από 85 και άνω, όπου το πρόβλημα της συσσώρευσης ηλικιών είναι σοβαρότερο εφόσον η άγνοια της ακριβούς ηλικίας είναι περισσότερο εκτεταμένη, τα στοιχεία δίνονται αθροιστικά, σαν ένας μόνος αριθμός. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγονται και στατιστικά λάθη και οι ασάφειες στους υπολογισμούς δημιουργώντας πίνακες με πληρότητα και αξιοπιστία για οποιαδήποτε χρήση.

[14] http://www.statistics.gr/portal/page/portal/ESYE

6.3 Εξομάλυνση Πρωτογενών Τιμών Θνησιμότητας

Σύμφωνα με τα παραπάνω, καθώς υπάρχουν ηλικιακές ανακρίβειες διαταράσσοντας την εξέλιξη της καμπύλης της θνησιμότητας ειδικότερα στις μεγαλύτερες ηλικίες, θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία της εξομάλυνσης. Η εξομάλυνση των πρωτογενών τιμών θνησιμότητας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η μη παραμετρική μέθοδος εξομάλυνσης του Κινούμενου Σταθμισμένου Μέσου (Moving Weighted Average). (Κεφάλαιο 5 και Ενότητα 5.2).

Η μέθοδος αυτή θα εφαρμοστεί εξίσου το ίδιο και στα δύο φύλα για τις ηλικίες από 6 έως 85. Τα στοιχεία που έχουμε διαθέσιμα επαρκούν για την εφαρμογή αυτής της μεθόδους. Σημειώνεται, ότι τις ακραίες ηλικίες δεν μπορούμε να τις εξομαλύνουμε καθώς δεν επαρκούν τα στοιχεία. Για να εφαρμόσουμε όμως την παραπάνω μέθοδο μας είναι απαραίτητες. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της θεωρία μας στην παρούσα εργασία σύμφωνα με τον London (1985) και ακολουθώντας τις παρακάτω παραδοχές που θα ορίσουμε θα βρούμε τα νέα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας. Σημειώνεται, ότι οι παραδοχές που θα χρησιμοποιήσουμε αφορούν και τα δυο φύλα.

Ο βασικός γραμμικός τύπος της μεθόδου του Κινούμενου Σταθμισμένου Μέσου βάσει της θεωρίας είναι ο ακόλουθος:

$$v_x = \sum_{r=-m}^{m} a_r u_{x+r} \quad , \qquad x = 1,2,\dots,n, \qquad n > m$$

Για κάθε τιμή ανά ηλικία χρησιμοποιούμε το εύρος των τιμών 2m+1 όπου το m το ορίζουμε ίσο με τέσσερα (m=4). Η στάθμιση που προκύπτει από αυτή την παραδοχή είναι ίση με 9 στο σύνολο πρωτογενείς τιμές θνησιμότητας. Δηλαδή, αυτό πρακτικά σημαίνει, ότι για την εξομάλυνση χρειαζόμαστε τέσσερις (4) παρατηρήσεις πριν και τέσσερις (4) παρατηρήσεις μετά την τιμή που θα εξομαλύνουμε όπως και την τιμή της ίδιας της ηλικίας που εξομαλύνουμε. Άρα, απαραιτήτως με την παραπάνω παραδοχή, θα χρησιμοποιηθούν οι πρωτογενείς τιμές της θνησιμότητας από τις ηλικίες 2 έως 89 για τους υπολογισμούς.

Θεωρώντας ότι οι συντελεστές ως προς τις ηλικίες είναι συμμετρικοί και ισχύει $a_r = a_{-r}$ για r=1,2,3,4 τότε λόγω αυτού το a_r ορίζεται ως ένα πολυώνυμο βαθμού 2z+2. Άρα για ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού με z =2 θα έχουμε 2*2+2=6

Το πολυώνυμο δηλαδή θα είναι της μορφής:

$$a_r = b_0 + b_2 r^2 + b_4 r^4 + b_6 r^6 \text{ για r=1,2,3,4.}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ισότητα και των παρακάτω περιορισμών που ισχύουν

$$\sum_{r=-4}^{4} a_r = 1 \, , \sum_{r=-4}^{4} r^2 \, a_r = 0 \, , \sum_{r=-4}^{4} r^4 \, a_r = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \sum_{r=-4}^{4} r^6 \, a_r = 0$$

θα εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους $b_0, b_2, b_4 \; \kappa\alpha\iota \; b_6$ λύνοντας το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων με τη βοήθεια του πίνακα – μήτρα της μορφής x*y=r.

Αναπτύσσοντας τις παραπάνω συνθήκες καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

$$x = \begin{bmatrix} 9 & 60 & 708 & 9780 \\ 60 & 708 & 9780 & 144708 \\ 708 & 9780 & 144708 & 2217300 \\ 9780 & 144708 & 2217300 & 34625508 \end{bmatrix} \; y = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \end{bmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

τότε από το σύστημα των εξισώσεων:

$$9b_0 + 60b_2 + 708b_4 + 9780b_6 = 1$$

$$60b_0 + 708b_2 + 9780b_4 + 144708b_6 = 0$$

$$708b_0 + 9780b_2 + 144708b_4 + 2217300b_6 = 0$$

$$9780b_0 + 144708b_2 + 2217300b_4 + 34625508b_6 = 0$$

προκύπτει ότι οι παράμετροι είναι ίσοι με: $b_0 = 0.6192696$, $b_2 = -0.362691$, $b_4 = 0.0498575$ και $b_6 = -0.0018519$.

Αντικαθιστώντας με τη σειρά τους τις παραμέτρους αυτές στο άρτιο πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού, οι συμμετρικοί συντελεστές θα ισούνται με

$$a_4 = a_{-4} = -0.0056488$$

$$a_3 = a_{-3} = 0.0434730$$

$$a_2 = a_{-2} = -0.1522960$$

$$a_1 = a_{-1} = 0.3045842$$

$$a_0 = 0.6192696$$

Παρατηρείται ότι οι συντελεστές ή τα βάρη που χρησιμοποιούμε αυξάνονται όσο πλησιάζουμε στην τιμή της ηλικίας που θέλουμε να εξομαλύνουμε. Είναι, δηλαδή, μεγαλύτερα σε σχέση με αυτά που είναι απομακρυσμένα. Ουσιαστικά, αυξάνονται οι συντελεστές όσο πλησιάζουμε την τιμή της ηλικίας που θέλουμε να εξομαλύνουμε.

Πριν υπολογίσουμε τις εξομαλυμένες τιμές των ποσοστών θνησιμότητας , θα πρέπει να ελέγξουμε αν τα βάρη ή συντελεστές που έχουμε επιλέξει ικανοποιούν τους περιορισμούς. Σύμφωνα με τη θεωρία, τα μέτρα που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι το ${R_0}^2$ και το $R_2 = \sqrt{{R_2}^2}$, όπου θα πρέπει να είναι μικρότερα από τη μονάδα ώστε τα επιλεγμένα βάρη να είναι ικανοποιητικά ως προς την ομαλότητα και την προσαρμογή της εξομάλυνσης που θα ακολουθήσει.Από τους τύπους της θεωρίας:

$${R_0}^2 = \sum_{r=-4}^{4} {\alpha_r}^2$$

και

$${R_2}^2 = \frac{\sum_{r=-6}^{4} (\Delta^2 a_r)^2}{\binom{4}{2}}$$

όπου

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$$

Καθώς και για τα δυο φύλα χρησιμοποιούνται οι ίδιες παραδοχές και οι ίδιοι συντελεστές , τα παραπάνω μέτρα ύστερα από υπολογισμούς και για τα δυο φύλα θα είναι ίσα με: ${R_0}^2 = 0.5013822$

ενώ σύμφωνα με τους παρακάτω αναλυτικούς υπολογισμούς

r	**a_r**	**Δa_r**	**$\Delta^2 a_r$**	**$(\Delta^2 a_r)^2$**
-6	0.0000000000	0.0000000000	-0.0056488000	0.0000319089
-5	0.0000000000	-0.0056488000	0.0547706000	0.0029998186
-4	-0.0056488000	0.0491218000	-0.2335932000	0.0545657831
-3	0.0434730000	-0.1957690000	0.5657032000	0.3200201105
-2	-0.1522960000	0.4568802000	0.1623972000	0.0263728506
-1	0.3045842000	0.3146854000	-1.2385392000	1.5339793499
0	0.6192696000	-0.3146854000	-1.3807340000	1.9064263788
1	0.3045842000	-0.4568802000	0.0434808000	0.0018905800
2	-0.1522960000	0.1957690000	0.0597012000	0.0035642333
3	0.0434730000	-0.0491218000		
4	-0.0056488000			**3.8499**

ο συντελεστής εξομάλυνσης θα είναι ίσος με $R_2 = \sqrt{{R_2}^2} = 0.80102549$. Και τα δυο παραπάνω μέτρα μας δείχνουν ότι οι συντελεστές κινούνται μέσα σε αποδεκτά πλαίσια καθώς και τα δυο μέτρα είναι ίσα με <1. Αυτό σημαίνει, ότι η μέθοδος εξομάλυνσης του Κινούμενου Σταθμισμένου Μέσου θεωρείται κατάλληλη ώστε να εξασφαλίσει ικανοποιητικά αποτελέσματα εφόσον έχουν εξασφαλιστεί η ομαλότητα και η καλή προσαρμογή της εξομάλυνσης.

Για τις ηλικίες 76 έως 85 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς την ίδια μέθοδο εξομάλυνσης αλλά με διαφορετικούς συντελεστές, πιο απλοποιημένης μορφής. Θεωρώντας το ημι-άθροισμα μεταξύ των δυο ηλικιών της ηλικίας που θέλουμε να εξομαλύνουμε και αξιοποιώντας τη συνολική πληροφορία από τα ποσοστά θνησιμότητας,ζυγίζοντας τα 50% - 50%, από τις δυο εκτιμήσεις, παίρνουμε την εξομαλυμένη τιμή. Ουσιαστικά, εφαρμόζεται ακριβώς η παραπάνω διαδικασία μόνο που πλέον έχουμε m=1, 2*1+1=3 παρατηρήσεις και $a_1 = a_{-1} = 0.5$ και $a_0 = 0{,}5$. Ο συντελεστής εξομάλυνσης είναι ίσος με τη μονάδα άρα και αποδεκτός. Η χρήση των διαφορετικών συντελεστών βοηθάει στη βελτιστοποίηση της ομαλότητας και της καλής προσαρμογής της καμπύλης θνησιμότητας που μελετάμε.

Σύμφωνα, λοιπόν, με όλες τις παραπάνω παραδοχές και τους υπολογισμούς μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας και για τους άνδρες και για τις γυναίκες ανά ηλικία από 6 έως 85 ετών.

6.4 Μέτρα και Στατιστικά Τεστ Εξομάλυνσης

Πριν γίνουν αποδεκτά τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας, θα πρέπει να γίνει αφενός υπολογισμός των μέτρων εξομάλυνσης, ομαλότητας και καλής προσαρμογής, και αφετέρου στατιστικός έλεγχος με τη χρήση κάποιων στατιστικών τεστ εξομάλυνσης. Τόσο τα μέτρα εξομάλυνσης όσο και τα στατιστικά τεστ ελέγχουν κατά πόσο η μέθοδος εξομάλυνσης που εφαρμόστηκε στα πρωτογενή ποσοστά θνησιμότητας είναι κατάλληλη ή όχι.

Σύμφωνα με τη θεωρία τα μέτρα εξομάλυνσης δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$S = \sum_x (\Delta^z v_x)^2, \quad x = 1,2,\ldots\ldots,n-z \;,\; z = 3 \text{ ή } 4$$

και

$$F_2 = \sum_x w_x * (v_x - u_x)^2$$

Αυτό το μέτρο θα έχει ενδιαφέρουσα ερμηνεία αν προσεγγίσουμε το μέγεθος του δείγματος χρησιμοποιώντας ως βάρη $\boldsymbol{w_x}$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται σε κίνδυνο $\boldsymbol{E_x}$ **.** (Σύμφωνα με τον London (1985) το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται σε κίνδυνο συμβολίζεται με n_x , βλέπε ενότητα 3.2). Βάση αυτής της παραδοχής και με τους ακόλουθους αναλυτικούς υπολογισμούς ανά φύλο καταλήγουμε στα ακόλουθα αποτελέσματα.

<u>Για τους άνδρες:</u>

$$S = 0.00015$$

$$F_2 = 0.48413$$

<u>Για τις γυναίκες:</u>

$$S = 0.00008$$

$$F_2 = 0.49547$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.7: Αναλυτικοί Υπολογισμοί Μέτρων Εξομάλυνσης Ανδρών

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕΤΡΩΝ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΝΔΡΕΣ									
x	**E_x**	**$Θ_x$**	**v_x**	**$Δ v_x$ *1000**	**$Δ^2 v_x$**	**$Δ^3 v_x$**	**$Δ^4 v_x$**	**$S=(Δ^4vx)^2$**	**F_2**
6	54.932	6	0.00012	0.00392	-0.00026	0.00008	-0.00020	0.00000	0.00000
7	54.322	7	0.00012	-0.01944	-0.00018	-0.00011	0.00015	0.00000	0.00000
8	54.127	6	0.00010	0.04145	-0.00026	0.00003	-0.00001	0.00000	0.00000
9	53.831	6	0.00014	-0.01104	-0.00031	0.00002	0.00004	0.00000	0.00006
10	52.905	10	0.00013	-0.03103	-0.00026	0.00006	-0.00019	0.00000	0.00017
11	52.394	2	0.00010	-0.02628	-0.00014	-0.00013	0.00038	0.00000	0.00021
12	53.307	7	0.00008	0.04055	-0.00021	0.00026	-0.00043	0.00000	0.00016
13	54.630	4	0.00012	-0.01805	-0.00003	-0.00017	0.00005	0.00000	0.00010
14	56.247	8	0.00010	0.18210	-0.00017	-0.00012	0.00014	0.00000	0.00011
15	57.429	13	0.00028	0.20896	-0.00066	0.00002	0.00020	0.00000	0.00017
16	57.069	31	0.00049	0.11431	-0.00105	0.00022	-0.00045	0.00000	0.00016
17	57.827	33	0.00060	0.03818	-0.00107	-0.00023	0.00015	0.00000	0.00006
18	59.288	39	0.00064	0.17877	-0.00137	-0.00008	0.00027	0.00000	0.00001
19	60.894	49	0.00082	0.09007	-0.00181	0.00019	-0.00001	0.00000	0.00002
20	61.167	57	0.00091	-0.08253	-0.00181	0.00018	-0.00049	0.00000	0.00003
21	62.152	51	0.00083	-0.06667	-0.00146	-0.00031	0.00039	0.00000	0.00000
22	63.300	48	0.00076	0.13127	-0.00163	0.00009	0.00010	0.00000	0.00000
23	64.613	57	0.00089	0.02379	-0.00180	0.00018	-0.00048	0.00000	0.00001

x	E_x	Θ_x	v_x	Δ v_x *1000	Δ^2 v_x	Δ^3 v_x	Δ^4 v_x	$S=(\Delta^4 vx)^2$	F_2
24	68.440	66	0.00092	0.00444	-0.00167	-0.00030	0.00030	0.00000	0.00015
25	72.071	62	0.00092	0.16877	-0.00198	0.00000	0.00027	0.00000	0.00027
26	75.878	85	0.00109	0.03526	-0.00231	0.00026	-0.00035	0.00000	0.00007
27	79.716	92	0.00113	-0.09889	-0.00212	-0.00008	-0.00013	0.00000	0.00006
28	83.060	80	0.00103	0.03145	-0.00201	-0.00021	0.00043	0.00000	0.00033
29	87.421	98	0.00106	0.07741	-0.00228	0.00022	-0.00017	0.00000	0.00034
30	88.175	96	0.00113	-0.08950	-0.00222	0.00006	-0.00013	0.00000	0.00019
31	87.411	95	0.00105	-0.03490	-0.00198	-0.00008	-0.00014	0.00000	0.00015
32	89.785	88	0.00101	0.07572	-0.00199	-0.00022	0.00037	0.00000	0.00009
33	90.920	100	0.00109	0.11044	-0.00235	0.00015	0.00015	0.00000	0.00002
34	90.931	109	0.00120	-0.07174	-0.00242	0.00031	-0.00070	0.00000	0.00000
35	91.328	103	0.00113	-0.10098	-0.00197	-0.00039	0.00047	0.00000	0.00000
36	90.011	93	0.00102	0.17709	-0.00216	0.00007	0.00008	0.00000	0.00001
37	88.799	102	0.00120	0.06436	-0.00244	0.00015	-0.00014	0.00000	0.00025
38	89.206	123	0.00127	0.02582	-0.00241	0.00001	-0.00043	0.00000	0.00113
39	91.512	106	0.00129	0.14205	-0.00246	-0.00041	0.00083	0.00000	0.00163
40	91.743	142	0.00143	0.26940	-0.00315	0.00041	-0.00045	0.00000	0.00118
41	90.006	146	0.00170	-0.01776	-0.00328	-0.00003	0.00002	0.00000	0.00060
42	90.811	160	0.00168	0.10882	-0.00328	-0.00001	-0.00010	0.00000	0.00052
43	90.018	155	0.00179	0.20148	-0.00351	-0.00011	0.00028	0.00000	0.00049
44	86.975	179	0.00200	0.28337	-0.00402	0.00017	-0.00040	0.00000	0.00032
45	83.107	187	0.00228	0.25839	-0.00441	-0.00023	0.00006	0.00000	0.00008
46	79.785	204	0.00254	0.40498	-0.00516	-0.00017	0.00056	0.00000	0.00002
47	78.103	229	0.00294	0.31972	-0.00614	0.00038	0.00008	0.00000	0.00002
48	77.815	255	0.00326	0.06064	-0.00640	0.00047	-0.00120	0.00000	0.00001
49	81.420	273	0.00332	0.18425	-0.00606	-0.00073	0.00043	0.00000	0.00005
50	81.538	284	0.00351	0.77293	-0.00716	-0.00031	0.00079	0.00000	0.00007
51	76.903	328	0.00428	0.62844	-0.00901	0.00048	-0.00005	0.00000	0.00004
52	75.479	379	0.00491	0.17581	-0.00979	0.00042	-0.00073	0.00000	0.00077
53	75.443	376	0.00508	0.20029	-0.00972	-0.00031	0.00029	0.00000	0.00095
54	75.685	408	0.00528	0.64910	-0.01043	-0.00002	-0.00073	0.00000	0.00064
55	73.354	432	0.00593	0.78913	-0.01174	-0.00075	0.00178	0.00000	0.00028
56	69.073	470	0.00672	0.91098	-0.01407	0.00103	-0.00140	0.00000	0.00024
57	67.338	510	0.00763	0.28123	-0.01487	-0.00037	0.00071	0.00000	0.00052
58	68.068	555	0.00791	0.67857	-0.01580	0.00034	-0.00151	0.00000	0.00289
59	69.714	578	0.00859	0.70618	-0.01682	-0.00117	0.00296	0.00001	0.00788
60	64.834	635	0.00930	1.07110	-0.01941	0.00178	-0.00310	0.00001	0.01297
61	59.461	589	0.01037	0.26361	-0.01976	-0.00131	0.00230	0.00001	0.01568
62	62.880	712	0.01063	1.23982	-0.02161	0.00098	-0.00289	0.00001	0.02460
63	66.429	745	0.01187	0.90275	-0.02310	-0.00191	0.00367	0.00001	0.03457
64	64.100	876	0.01278	1.55016	-0.02681	0.00176	-0.00176	0.00000	0.04071
65	58.402	795	0.01433	0.29023	-0.02815	0.00000	0.00014	0.00000	0.03795
66	50.709	788	0.01462	0.79376	-0.02873	0.00013	-0.00106	0.00000	0.03269
67	45.979	684	0.01541	1.29577	-0.03018	-0.00093	0.00271	0.00001	0.01907

x	E_x	$Θ_x$	v_x	$Δ v_x$ *1000	$Δ^2 v_x$	$Δ^3 v_x$	$Δ^4 v_x$	$S=(Δ^4vx)^2$	F_2
68	43.872	755	0.01671	1.93223	-0.03370	0.00178	-0.00374	0.00001	0.00556
69	49.532	932	0.01864	1.64032	-0.03579	-0.00196	0.00162	0.00000	0.00000
70	53.552	1.090	0.02028	3.12810	-0.04103	-0.00034	0.00199	0.00000	0.00090
71	50.129	1.189	0.02341	2.65988	-0.04762	0.00165	-0.00064	0.00000	0.00006
72	49.474	1.317	0.02607	1.85359	-0.05129	0.00101	-0.00399	0.00002	0.00205
73	49.005	1.375	0.02792	2.69953	-0.05398	-0.00298	0.00448	0.00002	0.00307
74	49.041	1.539	0.03062	4.55961	-0.06236	0.00150	-0.00096	0.00000	0.00377
75	48.953	1.733	0.03518	3.43988	-0.06998	0.00054	-0.00074	0.00000	0.00759
76	47.242	1.888	0.03862	3.81626	-0.07632	-0.00020	0.00095	0.00000	0.01494
77	42.559	1.796	0.04244	4.73291	-0.08415	0.00075	-0.00068	0.00000	0.05217
78	39.772	1.952	0.04717	5.45235	-0.09287	0.00008	-0.00168	0.00000	0.02151
79	40.982	2.168	0.05262	6.92419	-0.10370	-0.00161	0.00009	0.00000	0.04807
80	36.851	2.260	0.05955	8.47110	-0.11915	-0.00152	0.00289	0.00001	0.00006
81	31.071	2.175	0.06802	8.41078	-0.13761	0.00137	0.00204	0.00000	0.00453
82	28.172	2.265	0.07643	6.83196	-0.15306	0.00341		0.00000	0.02106
83	25.698	2.239	0.08326	6.62665	-0.16331			0.00000	0.00137
84	23.513	2.184	0.08989	9.83277				0.00000	0.02958
85	18.267	1.893	0.09972					0.00000	0.02605

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.8: Αναλυτικοί Υπολογισμοί Μέτρων Εξομάλυνσης Γυναικών

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕΤΡΩΝ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΥΝΑΙΚΕΣ									
x	E_x	$Θ_x$	v_x	$Δ v_x$ *1000	$Δ^2 v_x$	$Δ^3 v_x$	$Δ^4 v_x$	$S=(Δ^4vx)^2$	F_2
6	51.495	7	0.00013	-0.05005	-0.00026	0.00005	-0.00008	0.00000	0.00000
7	51.274	5	0.00008	-0.04189	-0.00011	-0.00003	-0.00005	0.00000	0.00001
8	50.435	1	0.00004	0.01577	-0.00006	-0.00008	0.00021	0.00000	0.00003
9	50.067	4	0.00006	0.03981	-0.00017	0.00013	-0.00024	0.00000	0.00002
10	49.973	4	0.00010	-0.01870	-0.00012	-0.00011	0.00010	0.00000	0.00002
11	49.536	5	0.00008	0.05359	-0.00020	-0.00001	0.00012	0.00000	0.00002
12	50.661	5	0.00013	0.01664	-0.00031	0.00012	-0.00018	0.00000	0.00006
13	52.346	10	0.00015	-0.02624	-0.00023	-0.00006	0.00001	0.00000	0.00009
14	53.203	5	0.00012	0.04647	-0.00024	-0.00005	0.00009	0.00000	0.00005
15	53.679	9	0.00017	0.05543	-0.00038	0.00004	-0.00003	0.00000	0.00000
16	53.872	14	0.00023	0.01075	-0.00046	0.00000	0.00010	0.00000	0.00007
17	54.592	10	0.00024	0.00129	-0.00048	0.00011	-0.00023	0.00000	0.00015
18	55.838	16	0.00024	-0.00550	-0.00037	-0.00012	-0.00004	0.00000	0.00014
19	56.973	12	0.00023	0.09401	-0.00048	-0.00016	0.00041	0.00000	0.00003
20	56.389	17	0.00033	0.07225	-0.00083	0.00025	-0.00020	0.00000	0.00003
21	57.155	26	0.00040	-0.10878	-0.00073	0.00005	-0.00027	0.00000	0.00019
22	58.651	14	0.00029	-0.03985	-0.00046	-0.00023	0.00031	0.00000	0.00015
23	60.004	16	0.00025	0.07481	-0.00061	0.00008	0.00003	0.00000	0.00002
24	63.125	21	0.00032	-0.03745	-0.00068	0.00011	-0.00011	0.00000	0.00000

x	E_x	Θ_x	v_x	Δ v_x *1000	Δ^2 v_x	Δ^3 v_x	Δ^4 v_x	$S=(\Delta^4vx)^2$	F_2
25	66.175	18	0.00029	-0.07099	-0.00050	-0.00001	-0.00010	0.00000	0.00001
26	69.599	16	0.00022	0.00137	-0.00036	-0.00011	0.00010	0.00000	0.00001
27	73.382	15	0.00022	0.06827	-0.00047	-0.00001	0.00014	0.00000	0.00001
28	76.148	22	0.00029	0.02882	-0.00062	0.00013	-0.00025	0.00000	0.00000
29	80.048	26	0.00031	-0.01778	-0.00054	-0.00012	0.00003	0.00000	0.00001
30	81.183	23	0.00030	0.06609	-0.00063	-0.00009	0.00032	0.00000	0.00001
31	80.458	29	0.00036	0.03244	-0.00085	0.00024	-0.00024	0.00000	0.00000
32	82.653	34	0.00039	-0.08870	-0.00067	-0.00001	-0.00028	0.00000	0.00002
33	83.727	25	0.00031	0.02732	-0.00050	-0.00029	0.00046	0.00000	0.00000
34	84.525	27	0.00033	0.13797	-0.00084	0.00017	0.00007	0.00000	0.00002
35	86.133	42	0.00047	-0.03695	-0.00094	0.00024	-0.00062	0.00000	0.00002
36	85.309	38	0.00043	-0.03842	-0.00063	-0.00037	0.00042	0.00000	0.00001
37	84.302	31	0.00040	0.20270	-0.00092	0.00004	0.00013	0.00000	0.00007
38	84.570	51	0.00060	0.07068	-0.00128	0.00017	-0.00022	0.00000	0.00000
39	86.416	62	0.00067	-0.01649	-0.00125	-0.00004	0.00003	0.00000	0.00020
40	87.487	50	0.00065	0.07079	-0.00126	-0.00002	0.00000	0.00000	0.00058
41	87.247	70	0.00072	0.11630	-0.00142	-0.00002	-0.00014	0.00000	0.00054
42	89.040	71	0.00084	0.14592	-0.00167	-0.00015	0.00035	0.00000	0.00016
43	88.422	87	0.00099	0.16037	-0.00211	0.00020	-0.00033	0.00000	0.00000
44	85.273	101	0.00115	0.02131	-0.00223	-0.00013	0.00026	0.00000	0.00012
45	82.249	93	0.00117	0.07962	-0.00241	0.00013	-0.00001	0.00000	0.00012
46	79.903	100	0.00125	0.00656	-0.00243	0.00012	-0.00030	0.00000	0.00000
47	78.949	103	0.00125	0.06704	-0.00232	-0.00018	0.00007	0.00000	0.00020
48	78.357	97	0.00132	0.25142	-0.00263	-0.00011	0.00013	0.00000	0.00055
49	82.211	136	0.00157	0.25909	-0.00324	0.00002	0.00008	0.00000	0.00054
50	83.249	149	0.00183	0.16164	-0.00374	0.00010	0.00008	0.00000	0.00015
51	78.829	157	0.00199	0.08801	-0.00396	0.00018	-0.00054	0.00000	0.00000
52	77.748	166	0.00208	0.11656	-0.00395	-0.00036	0.00049	0.00000	0.00021
53	77.916	166	0.00220	0.32882	-0.00454	0.00014	0.00009	0.00000	0.00037
54	77.908	200	0.00253	0.18479	-0.00506	0.00022	-0.00081	0.00000	0.00011
55	75.497	208	0.00271	0.17615	-0.00521	-0.00058	0.00098	0.00000	0.00012
56	71.082	199	0.00289	0.39043	-0.00614	0.00040	-0.00024	0.00000	0.00060
57	69.831	234	0.00328	0.02027	-0.00653	0.00016	0.00008	0.00000	0.00032
58	70.304	235	0.00330	0.04918	-0.00640	0.00024	-0.00098	0.00000	0.00011
59	72.175	231	0.00335	0.24071	-0.00626	-0.00074	0.00123	0.00000	0.00166
60	68.751	264	0.00359	0.67105	-0.00749	0.00049	-0.00078	0.00000	0.00412
61	64.706	256	0.00426	0.35795	-0.00834	-0.00029	0.00076	0.00000	0.00623
62	69.113	345	0.00462	0.53382	-0.00935	0.00047	-0.00135	0.00000	0.00909
63	72.562	349	0.00515	0.41840	-0.00995	-0.00088	0.00105	0.00000	0.00902
64	70.270	414	0.00557	0.77151	-0.01167	0.00017	0.00079	0.00000	0.00654
65	64.991	398	0.00634	0.24309	-0.01304	0.00097	-0.00082	0.00000	0.00360
66	57.131	386	0.00658	-0.11293	-0.01256	0.00015	-0.00055	0.00000	0.00129
67	52.640	343	0.00647	0.49758	-0.01218	-0.00040	-0.00044	0.00000	0.00003
68	52.207	354	0.00697	1.25850	-0.01358	-0.00084	0.00193	0.00000	0.00231

x	E_x	$Θ_x$	v_x	$Δ v_x$ *1000	$Δ^2 v_x$	$Δ^3 v_x$	$Δ^4 v_x$	$S=(Δ^4vx)^2$	F_2
69	61.208	527	0.00823	1.61578	-0.01694	0.00109	-0.00225	0.00001	0.00734
70	66.207	629	0.00984	1.13192	-0.01908	-0.00116	0.00290	0.00001	0.00991
71	62.715	720	0.01097	1.73597	-0.02251	0.00174	-0.00255	0.00001	0.01217
72	63.095	775	0.01271	1.17818	-0.02424	-0.00081	0.00100	0.00000	0.01592
73	63.200	924	0.01389	2.36077	-0.02741	0.00018	-0.00037	0.00000	0.02473
74	63.917	1.003	0.01625	2.73259	-0.03194	-0.00018	0.00028	0.00000	0.02950
75	62.648	1.241	0.01898	3.28887	-0.03759	0.00010	0.00003	0.00000	0.02510
76	61.147	1.349	0.02227	3.66412	-0.04406	0.00014	0.00193	0.00000	0.01238
77	57.750	1.511	0.02594	4.14302	-0.05126	0.00207	-0.00310	0.00001	0.00068
78	51.643	1.587	0.03008	4.75737	-0.05748	-0.00103	-0.00120	0.00000	0.00181
79	54.400	1.879	0.03484	7.43761	-0.06802	-0.00223	0.00450	0.00002	0.04223
80	51.175	2.151	0.04227	9.08382	-0.08513	0.00227	-0.00113	0.00000	0.06255
81	42.353	2.297	0.05136	8.50025	-0.10103	0.00115	-0.00173	0.00000	0.08855
82	39.652	2.396	0.05986	10.18678	-0.11688	-0.00059			0.05736
83	35.429	2.544	0.07004	13.01840	-0.13784				0.01872
84	32.416	2.803	0.08306	15.26289					0.00099
85	25.941	2.649	0.09833						0.03537

Λαμβάνοντας υπόψη τους υπολογισμούς, παρατηρείται ότι και για τα δυο φύλα εξίσου το ίδιο, η από κοινού εφαρμόσιμη μεθοδολογία παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Και για τους άνδρες και για τις γυναίκες το μέτρο ομαλότητας τείνει πολύ κοντά στο μηδέν εξασφαλίζοντας την ομαλή καμπύλη θνησιμότητας, ειδικότερα στις γυναίκες. Ομοίως, οι τιμές του μέτρου της προσαρμογής είναι αρκετά μικρότερες από τη μονάδα και για τα δυο φύλα εξασφαλίζοντας μια καλή προσαρμογή των ποσοστών θνησιμότητας. Παρατηρείται ότι και στα δυο φύλα το μέτρο είναι σχεδόν περίπου ίσο με το 0.5.

Τις περισσότερες φορές εκτός του ελέγχου του μέτρου της ομαλότητας της καμπύλης, εξετάζουμε και το κατά πόσο «λεία» είναι αυτή η καμπύλη θνησιμότητας. Έτσι, λοιπόν, αθροίζοντας τη διαφορά της τρίτης τάξης των εξομαλυμένων ποσοστών θνησιμότητας και για τα δυο φύλα από τους παραπάνω αναλυτικούς υπολογισμούς έχουμε:

για τους άνδρες = **0.00323** και για τις γυναίκες = **0.00224.**

άρα αποδεχόμαστε ότι η καμπύλη είναι ικανοποιητικά λεία καθώς το άθροισμα των διαφορών είναι πολύ «μικρό».

Στη συνέχεια, οι στατιστικοί έλεγχοι που πραγματοποιούνται έχουν ως σκοπό τον έλεγχο της καταλληλότητας της εφαρμοσμένης μεθόδου εξομάλυνσης. Τα τεστ που θα λάβουμε υπόψη είναι το x^2 τεστ καλής προσαρμογής και το πλήθος των πρόσημων (Sign Test) καθώς το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερο από 20 ($n > 20$) και μπορούμε να το υπολογίσουμε. Η επιλογή των τεστ ήταν αυθαίρετη επίλεγοντας τα τεστ που χρησιμοποιούνται περισσότερο και είναι εύκολα εφαρμόσιμα.

Ως μηδενική υπόθεση του ελέγχου ορίζουμε την εξής:

Ho: « η μέθοδος εξομάλυνσης των κινητών μέσων είναι κατάλληλη για τα ποσοστά θνησιμότητας»

Στην περίπτωση που απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση σημαίνει ότι η μέθοδος αυτή δεν θεωρείται κατάλληλη για τα δεδομένα και πρέπει να εφαρμοστεί κάποια άλλη μέθοδος εξομάλυνσης.

Βάσει του τύπου από τη θεωρία του x^2 τεστ καλής προσαρμογής

$$x^2 = \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{\theta x - Ex*qx}{\sqrt{Ex*qx*px}} \right)^2$$

όπου το $q_x = v_x$ και $p_x = 1 - v_x$,βάσει London (1985). Υπολογίζοντας την ποσότητα αυτή για την κάθε ηλικία ξεχωριστά αθροίζοντας τες για το κάθε φύλο, όπως θα δούμε αναλυτικά και στους παρακάτω πίνακες, και λαμβάνοντας υπόψη τους 80 βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:[15]

- για τους άνδρες ισχύει:

$$x^2 = 64.66 < 101.88$$

- για τις γυναίκες ισχύει

$$x^2 = 49.44 < 101.88$$

[15] Παράρτημα Α: Πίνακας Α2

Και στις δυο περιπτώσεις αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή ότι η μέθοδος εξομάλυνσης θεωρείται κατάλληλη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.9: Αναλυτικοί Υπολογισμοί των Στατιστικών Τεστ των Ανδρών

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΝΔΡΩΝ							
x	E_x	Θ_x	v_x	$E_x * v_x$	$\Theta_x - E_x * v_x$	$\sqrt{E_x * v_x * (1 - v_x)}$	x^2
6	54.932	6	0.00012	6.4936	-0.4936	2.5481	0.0375
7	54.322	7	0.00012	6.6345	0.3655	2.5756	0.0201
8	54.127	6	0.00010	5.5585	0.4415	2.3575	0.0351
9	53.831	6	0.00014	7.7592	-1.7592	2.7853	0.3989
10	52.905	10	0.00013	7.0417	2.9583	2.6534	1.2430
11	52.394	2	0.00010	5.3478	-3.3478	2.3124	2.0960
12	53.307	7	0.00008	4.0401	2.9599	2.0099	2.1687
13	54.630	4	0.00012	6.3557	-2.3557	2.5209	0.8732
14	56.247	8	0.00010	5.5285	2.4715	2.3512	1.1050
15	57.429	13	0.00028	16.1025	-3.1025	4.0122	0.5979
16	57.069	31	0.00049	27.9264	3.0736	5.2832	0.3385
17	57.827	33	0.00060	34.9073	-1.9073	5.9065	0.1043
18	59.288	39	0.00064	38.0533	0.9467	6.1668	0.0236
19	60.894	49	0.00082	49.9699	-0.9699	7.0660	0.0188
20	61.167	57	0.00091	55.7028	1.2972	7.4600	0.0302
21	62.152	51	0.00083	51.4708	-0.4708	7.1713	0.0043
22	63.300	48	0.00076	48.2015	-0.2015	6.9401	0.0008
23	64.613	57	0.00089	57.6837	-0.6837	7.5916	0.0081
24	68.440	66	0.00092	62.7280	3.2720	7.9165	0.1708
25	72.071	62	0.00092	66.3765	-4.3765	8.1434	0.2888
26	75.878	85	0.00109	82.6886	2.3114	9.0884	0.0647
27	79.716	92	0.00113	89.6821	2.3179	9.4647	0.0600
28	83.060	80	0.00103	85.2305	-5.2305	9.2273	0.3213
29	87.421	98	0.00106	92.4544	5.5456	9.6102	0.3330
30	88.175	96	0.00113	100.0775	-4.0775	9.9982	0.1663
31	87.411	95	0.00105	91.3876	3.6124	9.5547	0.1429
32	89.785	88	0.00101	90.7359	-2.7359	9.5207	0.0826
33	90.920	100	0.00109	98.7670	1.2330	9.9328	0.0154
34	90.931	109	0.00120	108.8215	0.1785	10.4255	0.0003
35	91.328	103	0.00113	102.7447	0.2553	10.1306	0.0006
36	90.011	93	0.00102	92.1745	0.8255	9.5958	0.0074
37	88.799	102	0.00120	106.6582	-4.6582	10.3213	0.2037
38	89.206	123	0.00127	112.8887	10.1113	10.6182	0.9068
39	91.512	106	0.00129	118.1701	-12.1701	10.8636	1.2550
40	91.743	142	0.00143	131.4995	10.5005	11.4591	0.8397
41	90.006	146	0.00170	153.2571	-7.2571	12.3692	0.3442
42	90.811	160	0.00168	153.0146	6.9854	12.3595	0.3194

x	E_x	Θ_x	v_x	$E_x * v_x$	$\Theta_x - E_x * v_x$	$\sqrt{E_x * v_x * (1 - v_x)}$	x^2
43	90.018	155	0.00179	161.4749	-6.4749	12.6959	0.2601
44	86.975	179	0.00200	173.5404	5.4596	13.1603	0.1721
45	83.107	187	0.00228	189.3724	-2.3724	13.7456	0.0298
46	79.785	204	0.00254	202.4181	1.5819	14.2093	0.0124
47	78.103	229	0.00294	229.7808	-0.7808	15.1362	0.0027
48	77.815	255	0.00326	253.8105	1.1895	15.9054	0.0056
49	81.420	273	0.00332	270.5067	2.4933	16.4197	0.0231
50	81.538	284	0.00351	285.9235	-1.9235	16.8796	0.0130
51	76.903	328	0.00428	329.1088	-1.1088	18.1025	0.0038
52	75.479	379	0.00491	370.4506	8.5494	19.1998	0.1983
53	75.443	376	0.00508	383.5347	-7.5347	19.5342	0.1488
54	75.685	408	0.00528	399.9240	8.0760	19.9452	0.1640
55	73.354	432	0.00593	435.2233	-3.2233	20.8000	0.0240
56	69.073	470	0.00672	464.3305	5.6695	21.4758	0.0697
57	67.338	510	0.00763	514.0106	-4.0106	22.5851	0.0315
58	68.068	555	0.00791	538.7214	16.2786	23.1183	0.4958
59	69.714	578	0.00859	599.0584	-21.0584	24.3703	0.7467
60	64.834	635	0.00930	602.9041	32.0959	24.4397	1.7247
61	59.461	589	0.01037	616.6275	-27.6275	24.7029	1.2508
62	62.880	712	0.01063	668.6595	43.3405	25.7206	2.8394
63	66.429	745	0.01187	788.7651	-43.7651	27.9177	2.4575
64	64.100	876	0.01278	818.9708	57.0292	28.4343	4.0226
65	58.402	795	0.01433	836.7019	-41.7019	28.7178	2.1087
66	50.709	788	0.01462	741.2108	46.7892	27.0255	2.9974
67	45.979	684	0.01541	708.5613	-24.5613	26.4129	0.8647
68	43.872	755	0.01671	732.9385	22.0615	26.8457	0.6753
69	49.532	932	0.01864	923.2033	8.7967	30.0998	0.0854
70	53.552	1.090	0.02028	1.085.9724	4.0276	32.6182	0.0152
71	50.129	1.189	0.02341	1.173.3640	15.6360	33.8511	0.2134
72	49.474	1.317	0.02607	1.289.6258	27.3742	35.4402	0.5966
73	49.005	1.375	0.02792	1.368.2486	6.7514	36.4698	0.0343
74	49.041	1.539	0.03062	1.501.6259	37.3741	38.1529	0.9596
75	48.953	1.733	0.03518	1.722.1358	10.8642	40.7621	0.0710
76	47.242	1.888	0.03862	1.824.4482	63.5518	41.8806	2.3027
77	42.559	1.796	0.04244	1.806.0069	-10.0069	41.5857	0.0579
78	39.772	1.952	0.04717	1.875.9968	76.0032	42.2789	3.2316
79	40.982	2.168	0.05262	2.156.5192	11.4808	45.2000	0.0645
80	36.851	2.260	0.05955	2.194.2750	65.7250	45.4270	2.0933
81	31.071	2.175	0.06802	2.113.3044	61.6956	44.3798	1.9326
82	28.172	2.265	0.07643	2.153.1073	111.8927	44.5932	6.2960
83	25.698	2.239	0.08326	2.139.5940	99.4060	44.2883	5.0379
84	23.513	2.184	0.08989	2.113.4401	70.5599	43.8574	2.5884
85	18.267	1.893	0.09972	1.821.5592	71.4408	40.4959	3.1122

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.10: Αναλυτικοί Υπολογισμοί των Στατιστικών Τεστ Γυναικών

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ							
x	E_x	Θ_x	v_x	$E_x * v_x$	$\Theta_x - E_x * v_x$	$\sqrt{E_x * v_x * (1 - v_x)}$	x^2
6	51.495	7	0.00013	6.9106	0.0894	6.9097	0.0012
7	51.274	5	0.00008	4.3145	0.6855	4.3141	0.1089
8	50.435	1	0.00004	2.1314	-1.1314	2.1313	0.6006
9	50.067	4	0.00006	2.9054	1.0946	2.9052	0.4125
10	49.973	4	0.00010	4.8892	-0.8892	4.8887	0.1617
11	49.536	5	0.00008	3.9200	1.0800	3.9197	0.2976
12	50.661	5	0.00013	6.7237	-1.7237	6.7228	0.4419
13	52.346	10	0.00015	7.8184	2.1816	7.8173	0.6088
14	53.203	5	0.00012	6.5502	-1.5502	6.5494	0.3669
15	53.679	9	0.00017	9.1032	-0.1032	9.1017	0.0012
16	53.872	14	0.00023	12.1221	1.8779	12.1194	0.2910
17	54.592	10	0.00024	12.8711	-2.8711	12.8680	0.6406
18	55.838	16	0.00024	13.2368	2.7632	13.2337	0.5770
19	56.973	12	0.00023	13.1925	-1.1925	13.1894	0.1078
20	56.389	17	0.00033	18.3581	-1.3581	18.3521	0.1005
21	57.155	26	0.00040	22.7373	3.2627	22.7282	0.4684
22	58.651	14	0.00029	16.9520	-2.9520	16.9471	0.5142
23	60.004	16	0.00025	14.9518	1.0482	14.9481	0.0735
24	63.125	21	0.00032	20.4520	0.5480	20.4453	0.0147
25	66.175	18	0.00029	18.9619	-0.9619	18.9565	0.0488
26	69.599	16	0.00022	15.0020	0.9980	14.9987	0.0664
27	73.382	15	0.00022	15.9182	-0.9182	15.9148	0.0530
28	76.148	22	0.00029	21.7172	0.2828	21.7110	0.0037
29	80.048	26	0.00031	25.1360	0.8640	25.1281	0.0297
30	81.183	23	0.00030	24.0490	-1.0490	24.0419	0.0458
31	80.458	29	0.00036	29.1517	-0.1517	29.1412	0.0008
32	82.653	34	0.00039	32.6287	1.3713	32.6158	0.0577
33	83.727	25	0.00031	25.6257	-0.6257	25.6178	0.0153
34	84.525	27	0.00033	28.1793	-1.1793	28.1700	0.0494
35	86.133	42	0.00047	40.5993	1.4007	40.5802	0.0483
36	85.309	38	0.00043	37.0587	0.9413	37.0426	0.0239
37	84.302	31	0.00040	33.3822	-2.3822	33.3689	0.1701
38	84.570	51	0.00060	50.6305	0.3695	50.6002	0.0027
39	86.416	62	0.00067	57.8435	4.1565	57.8048	0.2989
40	87.487	50	0.00065	57.1176	-7.1176	57.0803	0.8875
41	87.247	70	0.00072	63.1375	6.8625	63.0918	0.7464
42	89.040	71	0.00084	74.7903	-3.7903	74.7275	0.1922
43	88.422	87	0.00099	87.1738	-0.1738	87.0878	0.0003
44	85.273	101	0.00115	97.7436	3.2564	97.6316	0.1086

x	E_x	Θ_x	v_x	$E_x * v_x$	$\Theta_x - E_x * v_x$	$\sqrt{E_x * v_x * (1 - v_x)}$	x^2
45	82.249	93	0.00117	96.0301	-3.0301	95.9180	0.0957
46	79.903	100	0.00125	99.6526	0.3474	99.5283	0.0012
47	78.949	103	0.00125	98.9815	4.0185	98.8574	0.1633
48	78.357	97	0.00132	103.4914	-6.4914	103.3547	0.4077
49	82.211	136	0.00157	129.2510	6.7490	129.0478	0.3530
50	83.249	149	0.00183	152.4518	-3.4518	152.1726	0.0783
51	78.829	157	0.00199	157.0992	-0.0992	156.7861	0.0001
52	77.748	166	0.00208	161.7877	4.2123	161.4510	0.1099
53	77.916	166	0.00220	171.2200	-5.2200	170.8437	0.1595
54	77.908	200	0.00253	196.8204	3.1796	196.3231	0.0515
55	75.497	208	0.00271	204.6807	3.3193	204.1258	0.0540
56	71.082	199	0.00289	205.2325	-6.2325	204.6399	0.1898
57	69.831	234	0.00328	228.8843	5.1157	228.1341	0.1147
58	70.304	235	0.00330	231.8580	3.1420	231.0934	0.0427
59	72.175	231	0.00335	241.5798	-10.5798	240.7712	0.4649
60	68.751	264	0.00359	246.6667	17.3333	245.7817	1.2224
61	64.706	256	0.00426	275.5747	-19.5747	274.4011	1.3964
62	69.113	345	0.00462	319.0825	25.9175	317.6093	2.1149
63	72.562	349	0.00515	373.7411	-24.7411	371.8160	1.6463
64	70.270	414	0.00557	391.3394	22.6606	389.1600	1.3195
65	64.991	398	0.00634	412.0813	-14.0813	409.4685	0.4842
66	57.131	386	0.00658	376.1320	9.8680	373.6557	0.2606
67	52.640	343	0.00647	340.6167	2.3833	338.4126	0.0168
68	52.207	354	0.00697	363.7950	-9.7950	361.2599	0.2656
69	61.208	527	0.00823	503.5433	23.4567	499.4007	1.1018
70	66.207	629	0.00984	651.6440	-22.6440	645.2301	0.7947
71	62.715	720	0.01097	688.2616	31.7384	680.7083	1.4798
72	63.095	775	0.01271	801.9623	-26.9623	791.7690	0.9182
73	63.200	924	0.01389	877.7573	46.2427	865.5664	2.4705
74	63.917	1.003	0.01625	1.038.6156	-35.6156	1.021.7387	1.2415
75	62.648	1.241	0.01898	1.189.1768	51.8232	1.166.6038	2.3021
76	61.147	1.349	0.02227	1.361.7987	-12.7987	1.331.4702	0.1230
77	57.750	1.511	0.02594	1.497.7341	13.2659	1.458.8904	0.1206
78	51.643	1.587	0.03008	1.553.3049	33.6951	1.506.5846	0.7536
79	54.400	1.879	0.03484	1.895.0289	-16.0289	1.829.0148	0.1405
80	51.175	2.151	0.04227	2.163.3004	-12.3004	2.071.8512	0.0730
81	42.353	2.297	0.05136	2.175.1161	121.8839	2.063.4090	7.1996
82	39.652	2.396	0.05986	2.373.4233	22.5767	2.231.3571	0.2284
83	35.429	2.544	0.07004	2.481.5841	62.4159	2.307.7643	1.6881
84	32.416	2.803	0.08306	2.692.5048	110.4952	2.468.8592	4.9453
85	25.941	2.649	0.09833	2.550.6037	98.3963	2.299.8152	4.2098

Όσον αφορά τον έλεγχο του πλήθους των προσήμων (Sign Test), κάτω από την ίδια μηδενική υπόθεση, δεν αρκεί παρά να υπολογίσουμε το πλήθος των θετικών πρόσημων των τυποποιημένων αποκλίσεων. Για τους άνδρες το πλήθος των θετικών πρόσημων είναι ίσο με N= 47 ενώ για τις γυναίκες είναι ίσο με N=44. Αντικαθιστώντας στον τύπο, βάσει της θεωρίας:

$$Z = \frac{N - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{2 * N - n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

για το κάθε φύλο ξεχωριστά έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

<u>για τους άνδρες:</u>

$$Z = \frac{47 - \frac{80}{2}}{\frac{\sqrt{80}}{2}} = \frac{2 * 47 - 80}{\sqrt{80}} = 1.57$$

<u>για τις γυναίκες:</u>

$$Z = \frac{44 - \frac{80}{2}}{\frac{\sqrt{80}}{2}} = \frac{2 * 44 - 80}{\sqrt{80}} = 0.89$$

Με επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 και με n = 80>20 από τον πίνακα[16] του παραρτήματος παρατηρούμε ότι και για τα δυο φύλα ισχύουν

$$-1.96 < Z = 1.57 < 1.96$$

$$-1.96 < Z = 0.89 < 1.96$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω αμφίπλευρο έλεγχο , δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή την αποδεχόμαστε. Αποδεχόμαστε ότι η μέθοδος εξομάλυνσης είναι κατάλληλη και μάλιστα στις γυναίκες φαίνεται ότι εφαρμόζεται καλύτερα.

[16] ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

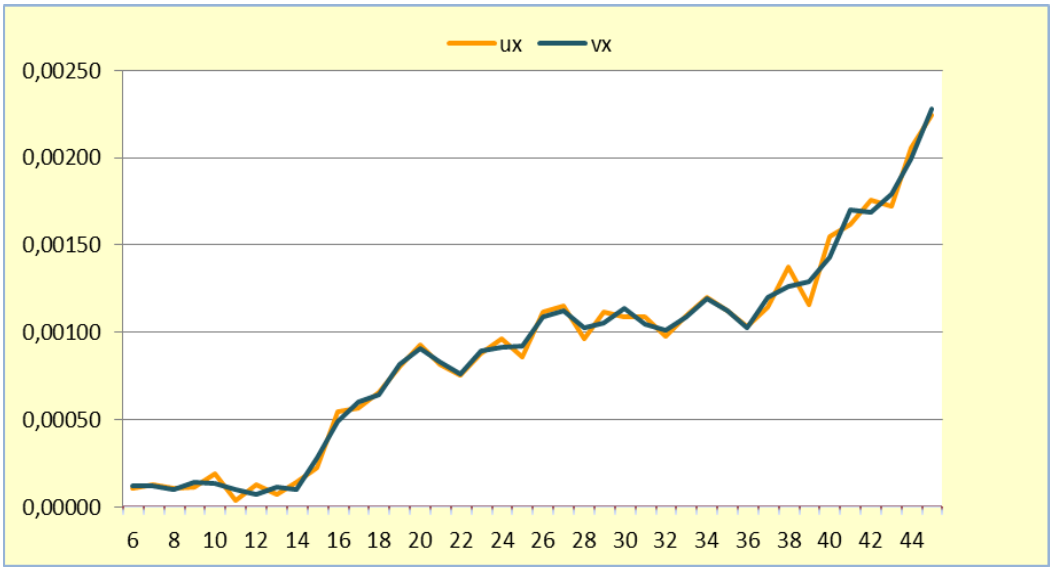
6.5 Σύγκριση Αποτελεσμάτων και Νέοι Πίνακες Επιβίωσης

Μετά τον στατιστικό έλεγχο που έγινε προγενέστερα και τον υπολογισμό των μέτρων της εξομάλυνσης, όπου αποδείχτηκε ότι η εφαρμοσμένη μέθοδος εξομάλυνσης είναι κατάλληλη, παραπέμπονται παρακάτω τα εξομαλυμένα ποσοστά συγκρινόμενα με τα πρωτογενή . Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται τα ποσοστά θνησιμότητας για τους άνδρες όπως και η γραφική τους απεικόνιση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.11: Ποσοστά Θνησιμότητας Ανδρών Ελλάδος 2010

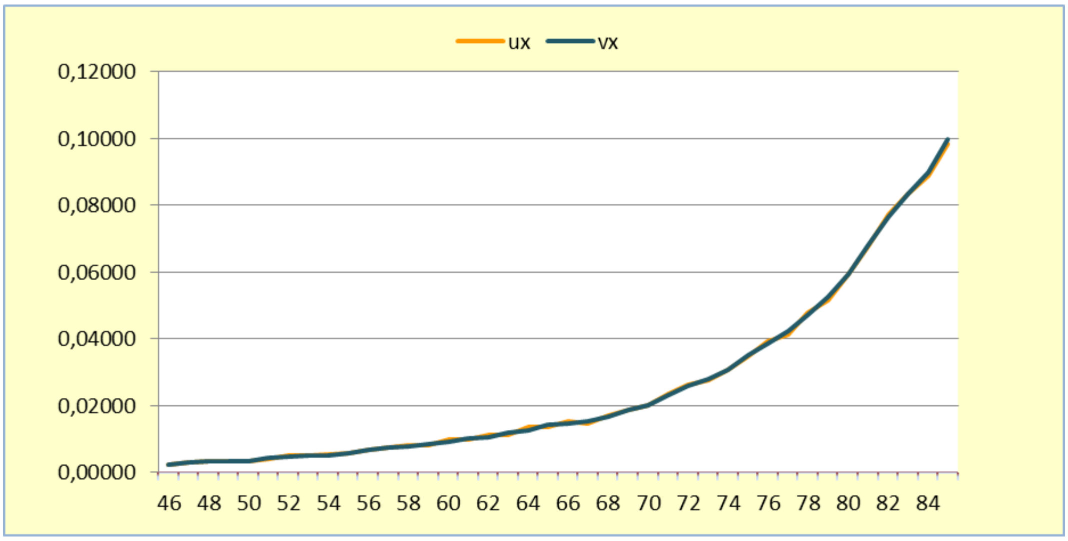
x	u_x	v_x	x	u_x	v_x
6	0.00011	0.00012	**46**	0.00255	0.00254
7	0.00013	0.00012	**47**	0.00293	0.00294
8	0.00011	0.00010	**48**	0.00327	0.00326
9	0.00011	0.00014	**49**	0.00335	0.00332
10	0.00019	0.00013	**50**	0.00348	0.00351
11	0.00004	0.00010	**51**	0.00426	0.00428
12	0.00013	0.00008	**52**	0.00501	0.00491
13	0.00007	0.00012	**53**	0.00497	0.00508
14	0.00014	0.00010	**54**	0.00538	0.00528
15	0.00023	0.00028	**55**	0.00587	0.00593
16	0.00054	0.00049	**56**	0.00678	0.00672
17	0.00057	0.00060	**57**	0.00755	0.00763
18	0.00066	0.00064	**58**	0.00812	0.00791
19	0.00080	0.00082	**59**	0.00826	0.00859
20	0.00093	0.00091	**60**	0.00975	0.00930
21	0.00082	0.00083	**61**	0.00986	0.01037
22	0.00076	0.00076	**62**	0.01126	0.01063
23	0.00088	0.00089	**63**	0.01115	0.01187
24	0.00096	0.00092	**64**	0.01357	0.01278
25	0.00086	0.00092	**65**	0.01352	0.01433
26	0.00112	0.00109	**66**	0.01542	0.01462
27	0.00115	0.00113	**67**	0.01477	0.01541
28	0.00096	0.00103	**68**	0.01706	0.01671
29	0.00112	0.00106	**69**	0.01864	0.01864
30	0.00109	0.00113	**70**	0.02015	0.02028
31	0.00109	0.00105	**71**	0.02344	0.02341
32	0.00098	0.00101	**72**	0.02627	0.02607
33	0.00110	0.00109	**73**	0.02767	0.02792
34	0.00120	0.00120	**74**	0.03090	0.03062
35	0.00113	0.00113	**75**	0.03479	0.03518
36	0.00103	0.00102	**76**	0.03918	0.03862
37	0.00115	0.00120	**77**	0.04133	0.04244
38	0.00138	0.00127	**78**	0.04790	0.04717
39	0.00116	0.00129	**79**	0.05154	0.05262
40	0.00155	0.00143	**80**	0.05950	0.05955
41	0.00162	0.00170	**81**	0.06763	0.06802
42	0.00176	0.00168	**82**	0.07729	0.07643
43	0.00172	0.00179	**83**	0.08349	0.08326
44	0.00206	0.00200	**84**	0.08876	0.08989
45	0.00225	0.00228	**85**	0.09852	0.09972

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.3: Σύγκριση Καμπυλών Θνησιμότητας Ανδρών Ηλικιών 6 έως 45



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, παρατηρούμε ότι στις ηλικίες 6 έως 45 η νέα εξομαλυμένη καμπύλη θνησιμότητας σε σύγκριση με την αρχική είναι περισσότερο ομαλή και μονότονη, δηλαδή αυξάνονται τα ποσοστά θνησιμότητας όσο αυξάνεται η ηλικία. Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι στις ηλικίες 46 έως 85 οι καμπύλες θνησιμότητας σχεδόν ταυτίζονται, γεγονός το οποίο δηλώνει ότι στα αρχικά μας στοιχεία πιθανώς να είχαν αντιμετωπιστεί και εξαλειφθεί τα τυχόν στατιστικά σφάλματα.

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.4: Σύγκριση Καμπυλών Θνησιμότητας Ανδρών Ηλικιών 46 έως 85

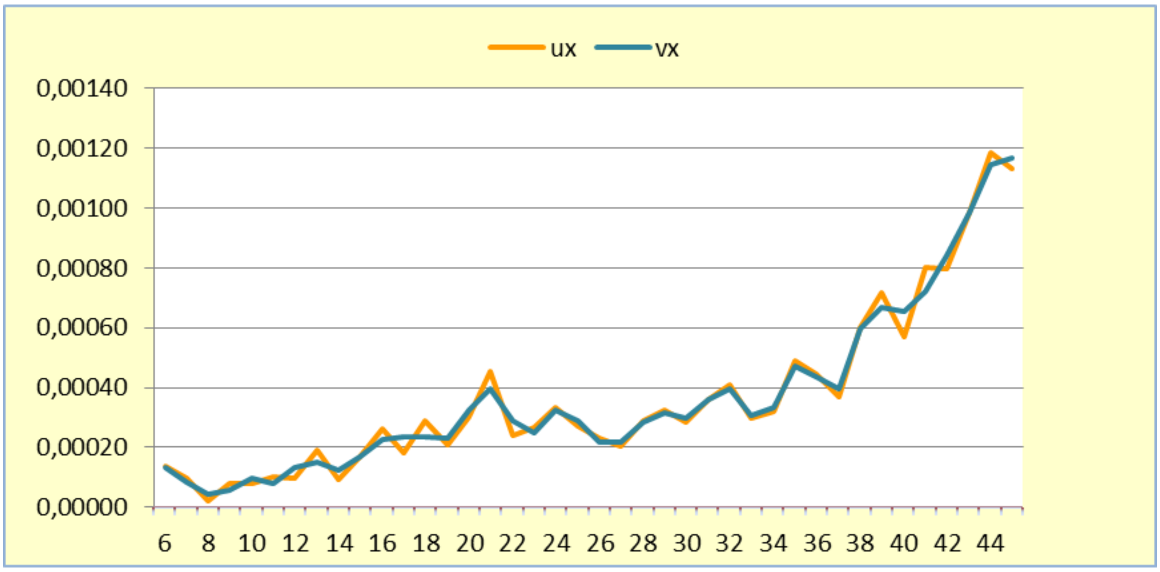


Ομοίως, παρακάτω παραπέμπονται ο πίνακας με τα συγκρινόμενα αποτελέσματα των ποσοστών θνησιμότητας για τις γυναίκες όπως και οι διαγραμματικές τους απεικονίσεις.

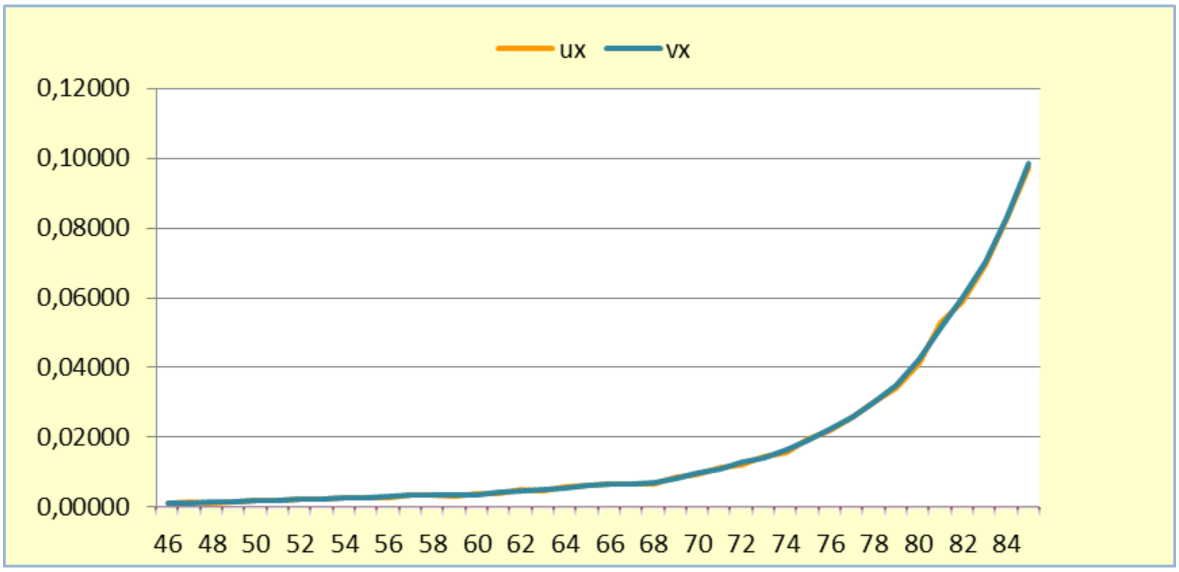
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.12: Ποσοστά Θνησιμότητας Γυναικών Ελλάδος 2010

x	u_x	v_x	x	u_x	v_x
6	0.00014	0.00013	**46**	0.00125	0.00125
7	0.00010	0.00008	**47**	0.00130	0.00125
8	0.00002	0.00004	**48**	0.00124	0.00132
9	0.00008	0.00006	**49**	0.00165	0.00157
10	0.00008	0.00010	**50**	0.00179	0.00183
11	0.00010	0.00008	**51**	0.00199	0.00199
12	0.00010	0.00013	**52**	0.00213	0.00208
13	0.00019	0.00015	**53**	0.00213	0.00220
14	0.00009	0.00012	**54**	0.00256	0.00253
15	0.00017	0.00017	**55**	0.00275	0.00271
16	0.00026	0.00023	**56**	0.00280	0.00289
17	0.00018	0.00024	**57**	0.00335	0.00328
18	0.00029	0.00024	**58**	0.00334	0.00330
19	0.00021	0.00023	**59**	0.00320	0.00335
20	0.00030	0.00033	**60**	0.00383	0.00359
21	0.00045	0.00040	**61**	0.00395	0.00426
22	0.00024	0.00029	**62**	0.00498	0.00462
23	0.00027	0.00025	**63**	0.00480	0.00515
24	0.00033	0.00032	**64**	0.00587	0.00557
25	0.00027	0.00029	**65**	0.00611	0.00634
26	0.00023	0.00022	**66**	0.00673	0.00658
27	0.00020	0.00022	**67**	0.00649	0.00647
28	0.00029	0.00029	**68**	0.00676	0.00697
29	0.00032	0.00031	**69**	0.00857	0.00823
30	0.00028	0.00030	**70**	0.00946	0.00984
31	0.00036	0.00036	**71**	0.01142	0.01097
32	0.00041	0.00039	**72**	0.01221	0.01271
33	0.00030	0.00031	**73**	0.01451	0.01389
34	0.00032	0.00033	**74**	0.01557	0.01625
35	0.00049	0.00047	**75**	0.01961	0.01898
36	0.00045	0.00043	**76**	0.02182	0.02227
37	0.00037	0.00040	**77**	0.02583	0.02594
38	0.00060	0.00060	**78**	0.03027	0.03008
39	0.00072	0.00067	**79**	0.03395	0.03484
40	0.00057	0.00065	**80**	0.04117	0.04227
41	0.00080	0.00072	**81**	0.05280	0.05136
42	0.00080	0.00084	**82**	0.05865	0.05986
43	0.00098	0.00099	**83**	0.06932	0.07004
44	0.00118	0.00115	**84**	0.08289	0.08306
45	0.00113	0.00117	**85**	0.09716	0.09833

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.5: Σύγκριση Καμπυλών Θνησιμότητας Γυναικών Ηλικιών 6 έως 45



ΓΡΑΦΗΜΑ 6.6: Σύγκριση Καμπυλών Θνησιμότητας Γυναικών Ηλικιών 46 έως 85



Όπως και στους άνδρες, έτσι και στις γυναίκες η καμπύλη θνησιμότητας είναι ομαλή, μονότονη και κυρτή στις μεγάλες ηλικίες. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η αρχική και η εξομαλυμένη καμπύλη θνησιμότητας στις ηλικίες από 46 έως 85 σχεδόν ταυτίζονται. Από την ηλικία 55 και άνω αρχίζει και αυξάνεται η εξομαλυμένη καμπύλη θνησιμότητας με σχετικά μικρό ρυθμό αύξησης. Στις ηλικίες 69 και άνω ομαλοποιείται αρκετά εξαλείφοντας τυχόν αποκλίσεις. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση στα αρχικά μας δεδομένα πιθανώς να είχαν απαλοιφθεί τυχόν στατιστικά λάθη.

Στη συνέχεια, αφού επεξεργαστήκαμε τα αρχικά ποσοστά θνησιμότητας και αποδεχτήκαμε τα νέα εξομαλυμένα, τα αποτελέσματα των πινάκων επιβίωσης και για τα δυο φύλα θα διαφοροποιηθούν σε σχέση με τα αρχικά. Ειδικότερα το προσδόκιμο ζωής. Παρακάτω, θα παρουσιαστούν οι νέοι πίνακες επιβίωσης και για τα δυο φύλα από την ηλικία 0 έως 86+, χρησιμοποιώντας τα εξομαλυμένα ποσοστά θνησιμότητας από 6 έως 85 Στην ηλικία 86 αθροίζονται όλες οι υπόλοιπες ηλικίες λόγω των μη επαρκή δεδομένων στις τελευταίες ηλικίες θεωρώντας ότι στην ηλικία 86+ η πιθανότητα θνησιμότητας είναι ίση με τη μονάδα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.13: Εξομαλυμένος Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Ανδρών Ελλάδος 2010

Εξομαλυμένος Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Ανδρών Ελλάδας 2010										
x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
0	59.823	234	0.0039	0.0039	0.9961	100.000	390	99.688	7.830.552	78.31
1	60.773	20	0.0003	0.0003	0.9997	99.610	33	99.594	7.730.864	77.61
2	59.478	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.577	10	99.572	7.631.270	76.64
3	58.104	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.567	12	99.561	7.531.698	75.64
4	57.063	9	0.0002	0.0002	0.9998	99.555	16	99.547	7.432.137	74.65
5	55.651	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.540	14	99.532	7.332.589	73.67
6	54.932	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.525	12	99.519	7.233.057	72.68
7	54.322	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.513	12	99.507	7.133.538	71.68
8	54.127	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.501	10	99.496	7.034.030	70.69
9	53.831	6	0.0001	0.0001	0.9999	99.491	14	99.484	6.934.534	69.70
10	52.905	10	0.0002	0.0001	0.9999	99.477	13	99.470	6.835.050	68.71
11	52.394	2	0.0000	0.0001	0.9999	99.464	10	99.458	6.735.580	67.72
12	53.307	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.453	8	99.450	6.636.121	66.73
13	54.630	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.446	12	99.440	6.536.672	65.73
14	56.247	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.434	10	99.429	6.437.232	64.74
15	57.429	13	0.0002	0.0003	0.9997	99.424	28	99.411	6.337.802	63.74
16	57.069	31	0.0005	0.0005	0.9995	99.397	49	99.372	6.238.392	62.76
17	57.827	33	0.0006	0.0006	0.9994	99.348	60	99.318	6.139.020	61.79
18	59.288	39	0.0007	0.0006	0.9994	99.288	64	99.256	6.039.702	60.83
19	60.894	49	0.0008	0.0008	0.9992	99.224	81	99.184	5.940.445	59.87
20	61.167	57	0.0009	0.0009	0.9991	99.143	90	99.098	5.841.262	58.92
21	62.152	51	0.0008	0.0008	0.9992	99.053	82	99.012	5.742.164	57.97

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
22	63.300	48	0.0008	0.0008	0.9992	98.971	75	98.933	5.643.153	57.02
23	64.613	57	0.0009	0.0009	0.9991	98.895	88	98.851	5.544.220	56.06
24	68.440	66	0.0010	0.0009	0.9991	98.807	91	98.762	5.445.369	55.11
25	72.071	62	0.0009	0.0009	0.9991	98.716	91	98.671	5.346.607	54.16
26	75.878	85	0.0011	0.0011	0.9989	98.625	107	98.572	5.247.936	53.21
27	79.716	92	0.0012	0.0011	0.9989	98.518	111	98.463	5.149.365	52.27
28	83.060	80	0.0010	0.0010	0.9990	98.407	101	98.357	5.050.902	51.33
29	87.421	98	0.0011	0.0011	0.9989	98.306	104	98.254	4.952.546	50.38
30	88.175	96	0.0011	0.0011	0.9989	98.202	111	98.146	4.854.291	49.43
31	87.411	95	0.0011	0.0010	0.9990	98.091	103	98.039	4.756.145	48.49
32	89.785	88	0.0010	0.0010	0.9990	97.988	99	97.939	4.658.106	47.54
33	90.920	100	0.0011	0.0011	0.9989	97.889	106	97.836	4.560.167	46.59
34	90.931	109	0.0012	0.0012	0.9988	97.783	117	97.724	4.462.331	45.64
35	91.328	103	0.0011	0.0011	0.9989	97.666	110	97.611	4.364.607	44.69
36	90.011	93	0.0010	0.0010	0.9990	97.556	100	97.506	4.266.996	43.74
37	88.799	102	0.0011	0.0012	0.9988	97.456	117	97.397	4.169.490	42.78
38	89.206	123	0.0014	0.0013	0.9987	97.339	123	97.277	4.072.093	41.83
39	91.512	106	0.0012	0.0013	0.9987	97.216	126	97.153	3.974.815	40.89
40	91.743	142	0.0015	0.0014	0.9986	97.090	139	97.021	3.877.662	39.94
41	90.006	146	0.0016	0.0017	0.9983	96.951	165	96.868	3.780.642	39.00
42	90.811	160	0.0018	0.0017	0.9983	96.786	163	96.704	3.683.773	38.06
43	90.018	155	0.0017	0.0018	0.9982	96.623	173	96.536	3.587.069	37.12
44	86.975	179	0.0021	0.0020	0.9980	96.450	192	96.353	3.490.533	36.19
45	83.107	187	0.0023	0.0023	0.9977	96.257	219	96.147	3.394.179	35.26
46	79.785	204	0.0026	0.0025	0.9975	96.038	244	95.916	3.298.032	34.34
47	78.103	229	0.0029	0.0029	0.9971	95.794	282	95.653	3.202.116	33.43
48	77.815	255	0.0033	0.0033	0.9967	95.512	312	95.357	3.106.463	32.52
49	81.420	273	0.0034	0.0033	0.9967	95.201	316	95.043	3.011.106	31.63
50	81.538	284	0.0035	0.0035	0.9965	94.884	333	94.718	2.916.064	30.73
51	76.903	328	0.0043	0.0043	0.9957	94.552	405	94.349	2.821.346	29.84
52	75.479	379	0.0050	0.0049	0.9951	94.147	462	93.916	2.726.996	28.97
53	75.443	376	0.0050	0.0051	0.9949	93.685	476	93.447	2.633.080	28.11
54	75.685	408	0.0054	0.0053	0.9947	93.209	493	92.962	2.539.633	27.25
55	73.354	432	0.0059	0.0059	0.9941	92.716	550	92.441	2.446.671	26.39
56	69.073	470	0.0068	0.0067	0.9933	92.166	620	91.856	2.354.230	25.54
57	67.338	510	0.0076	0.0076	0.9924	91.547	699	91.197	2.262.373	24.71
58	68.068	555	0.0082	0.0079	0.9921	90.848	719	90.488	2.171.176	23.90
59	69.714	578	0.0083	0.0086	0.9914	90.129	774	89.741	2.080.688	23.09
60	64.834	635	0.0098	0.0093	0.9907	89.354	831	88.939	1.990.946	22.28
61	59.461	589	0.0099	0.0104	0.9896	88.523	918	88.064	1.902.008	21.49
62	62.880	712	0.0113	0.0106	0.9894	87.605	932	87.139	1.813.943	20.71
63	66.429	745	0.0112	0.0119	0.9881	86.674	1.029	86.159	1.726.804	19.92
64	64.100	876	0.0137	0.0128	0.9872	85.645	1.094	85.097	1.640.645	19.16
65	58.402	795	0.0136	0.0143	0.9857	84.550	1.211	83.945	1.555.547	18.40

x	$\bar{P}_x^{\,2010}$	$D_x^{\,2010}$	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
66	50.709	788	0.0155	0.0146	0.9854	83.339	1.218	82.730	1.471.603	17.66
67	45.979	684	0.0149	0.0154	0.9846	82.121	1.266	81.488	1.388.873	16.91
68	43.872	755	0.0172	0.0167	0.9833	80.855	1.351	80.180	1.307.385	16.17
69	49.532	932	0.0188	0.0186	0.9814	79.504	1.482	78.764	1.227.205	15.44
70	53.552	1090	0.0204	0.0203	0.9797	78.023	1.582	77.231	1.148.441	14.72
71	50.129	1189	0.0237	0.0234	0.9766	76.440	1.789	75.546	1.071.210	14.01
72	49.474	1317	0.0266	0.0261	0.9739	74.651	1.946	73.678	995.664	13.34
73	49.005	1375	0.0281	0.0279	0.9721	72.705	2.030	71.690	921.986	12.68
74	49.041	1539	0.0314	0.0306	0.9694	70.675	2.164	69.593	850.296	12.03
75	48.953	1733	0.0354	0.0352	0.9648	68.511	2.410	67.306	780.703	11.40
76	47.242	1888	0.0400	0.0386	0.9614	66.101	2.553	64.825	713.396	10.79
77	42.559	1796	0.0422	0.0424	0.9576	63.548	2.697	62.200	648.572	10.21
78	39.772	1952	0.0491	0.0472	0.9528	60.851	2.870	59.416	586.372	9.64
79	40.982	2168	0.0529	0.0526	0.9474	57.981	3.051	56.456	526.956	9.09
80	36.851	2260	0.0613	0.0595	0.9405	54.930	3.271	53.295	470.500	8.57
81	31.071	2175	0.0700	0.0680	0.9320	51.659	3.514	49.902	417.206	8.08
82	28.172	2265	0.0804	0.0764	0.9236	48.146	3.680	46.306	367.303	7.63
83	25.698	2239	0.0871	0.0833	0.9167	44.466	3.702	42.615	320.997	7.22
84	23.513	2184	0.0929	0.0899	0.9101	40.764	3.664	38.932	278.382	6.83
85	18.267	1893	0.1036	0.0997	0.9003	37.100	3.700	35.250	239.451	6.45
86+	69.942	11.440	0.1636	1.0000	0.0000	33.400	33.400	204.201	204.201	6.11

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.14: Εξομαλυμένος Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Γυναικών Ελλάδας 2010

Εξομαλυμένος Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης Ανδρών Ελλάδας 2010										
x	$\bar{P}_x^{\,2010}$	$D_x^{\,2010}$	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
0	56.246	202	0.0036	0.0036	0.9964	100.000	358	99.714	8.272.619	82.73
1	57.138	12	0.0002	0.0002	0.9998	99.642	21	99.631	8.172.906	82.02
2	55.686	11	0.0002	0.0002	0.9998	99.621	20	99.611	8.073.274	81.04
3	54.355	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.601	7	99.598	7.973.663	80.06
4	53.488	8	0.0001	0.0001	0.9999	99.594	15	99.587	7.874.065	79.06
5	51.978	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.579	13	99.572	7.774.479	78.07
6	51.495	7	0.0001	0.0001	0.9999	99.566	13	99.559	7.674.907	77.08
7	51.274	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.552	8	99.548	7.575.348	76.09
8	50.435	1	0.0000	0.0000	1.0000	99.544	4	99.542	7.475.799	75.10
9	50.067	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.540	6	99.537	7.376.258	74.10
10	49.973	4	0.0001	0.0001	0.9999	99.534	10	99.529	7.276.721	73.11
11	49.536	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.524	8	99.520	7.177.192	72.12
12	50.661	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.516	13	99.510	7.077.672	71.12
13	52.346	10	0.0002	0.0001	0.9999	99.503	15	99.496	6.978.162	70.13
14	53.203	5	0.0001	0.0001	0.9999	99.488	12	99.482	6.878.666	69.14

x	$\bar{P}_x^{\ 2010}$	$D_x^{\ 2010}$	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\dot{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
15	53.679	9	0.0002	0.0002	0.9998	99.476	17	99.468	6.779.184	68.15
16	53.872	14	0.0003	0.0002	0.9998	99.459	22	99.448	6.679.716	67.16
17	54.592	10	0.0002	0.0002	0.9998	99.437	23	99.425	6.580.269	66.18
18	55.838	16	0.0003	0.0002	0.9998	99.413	24	99.402	6.480.843	65.19
19	56.973	12	0.0002	0.0002	0.9998	99.390	23	99.378	6.381.442	64.21
20	56.389	17	0.0003	0.0003	0.9997	99.367	32	99.351	6.282.064	63.22
21	57.155	26	0.0005	0.0004	0.9996	99.334	40	99.315	6.182.713	62.24
22	58.651	14	0.0002	0.0003	0.9997	99.295	29	99.281	6.083.399	61.27
23	60.004	16	0.0003	0.0002	0.9998	99.266	25	99.254	5.984.118	60.28
24	63.125	21	0.0003	0.0003	0.9997	99.241	32	99.225	5.884.864	59.30
25	66.175	18	0.0003	0.0003	0.9997	99.209	28	99.195	5.785.639	58.32
26	69.599	16	0.0002	0.0002	0.9998	99.181	21	99.170	5.686.444	57.33
27	73.382	15	0.0002	0.0002	0.9998	99.159	22	99.149	5.587.274	56.35
28	76.148	22	0.0003	0.0003	0.9997	99.138	28	99.124	5.488.125	55.36
29	80.048	26	0.0003	0.0003	0.9997	99.110	31	99.094	5.389.001	54.37
30	81.183	23	0.0003	0.0003	0.9997	99.079	29	99.064	5.289.907	53.39
31	80.458	29	0.0004	0.0004	0.9996	99.049	36	99.031	5.190.843	52.41
32	82.653	34	0.0004	0.0004	0.9996	99.013	39	98.994	5.091.812	51.43
33	83.727	25	0.0003	0.0003	0.9997	98.974	30	98.959	4.992.818	50.45
34	84.525	27	0.0003	0.0003	0.9997	98.944	33	98.927	4.893.859	49.46
35	86.133	42	0.0005	0.0005	0.9995	98.911	47	98.888	4.794.932	48.48
36	85.309	38	0.0004	0.0004	0.9996	98.864	43	98.843	4.696.044	47.50
37	84.302	31	0.0004	0.0004	0.9996	98.821	39	98.802	4.597.201	46.52
38	84.570	51	0.0006	0.0006	0.9994	98.782	59	98.753	4.498.399	45.54
39	86.416	62	0.0007	0.0007	0.9993	98.723	66	98.690	4.399.647	44.57
40	87.487	50	0.0006	0.0007	0.9993	98.657	64	98.625	4.300.957	43.60
41	87.247	70	0.0008	0.0007	0.9993	98.593	71	98.557	4.202.332	42.62
42	89.040	71	0.0008	0.0008	0.9992	98.521	83	98.480	4.103.775	41.65
43	88.422	87	0.0010	0.0010	0.9990	98.439	97	98.390	4.005.295	40.69
44	85.273	101	0.0012	0.0011	0.9989	98.341	113	98.285	3.906.905	39.73
45	82.249	93	0.0011	0.0012	0.9988	98.229	115	98.171	3.808.620	38.77
46	79.903	100	0.0013	0.0012	0.9988	98.114	122	98.053	3.710.448	37.82
47	78.949	103	0.0013	0.0013	0.9987	97.992	123	97.930	3.612.396	36.86
48	78.357	97	0.0012	0.0013	0.9987	97.869	129	97.804	3.514.465	35.91
49	82.211	136	0.0017	0.0016	0.9984	97.740	154	97.663	3.416.661	34.96
50	83.249	149	0.0018	0.0018	0.9982	97.586	179	97.497	3.318.998	34.01
51	78.829	157	0.0020	0.0020	0.9980	97.407	194	97.310	3.221.502	33.07
52	77.748	166	0.0021	0.0021	0.9979	97.213	202	97.112	3.124.192	32.14
53	77.916	166	0.0021	0.0022	0.9978	97.011	213	96.904	3.027.080	31.20
54	77.908	200	0.0026	0.0025	0.9975	96.798	245	96.675	2.930.175	30.27
55	75.497	208	0.0028	0.0027	0.9973	96.553	262	96.422	2.833.500	29.35
56	71.082	199	0.0028	0.0029	0.9971	96.291	278	96.152	2.737.078	28.42

x	$\bar{P}_x^{2010}$	D_x^{2010}	m_x	$\hat{q}_x$	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
57	69.831	234	0.0034	0.0033	0.9967	96.013	315	95.856	2.640.926	27.51
58	70.304	235	0.0033	0.0033	0.9967	95.699	316	95.541	2.545.070	26.59
59	72.175	231	0.0032	0.0033	0.9967	95.383	319	95.223	2.449.529	25.68
60	68.751	264	0.0038	0.0036	0.9964	95.064	341	94.893	2.354.306	24.77
61	64.706	256	0.0040	0.0043	0.9957	94.723	403	94.521	2.259.413	23.85
62	69.113	345	0.0050	0.0046	0.9954	94.319	435	94.101	2.164.892	22.95
63	72.562	349	0.0048	0.0052	0.9948	93.884	484	93.642	2.070.790	22.06
64	70.270	414	0.0059	0.0056	0.9944	93.400	520	93.140	1.977.148	21.17
65	64.991	398	0.0061	0.0063	0.9937	92.880	589	92.586	1.884.008	20.28
66	57.131	386	0.0068	0.0066	0.9934	92.291	608	91.987	1.791.422	19.41
67	52.640	343	0.0065	0.0065	0.9935	91.684	593	91.387	1.699.435	18.54
68	52.207	354	0.0068	0.0070	0.9930	91.090	635	90.773	1.608.048	17.65
69	61.208	527	0.0086	0.0082	0.9918	90.456	744	90.083	1.517.275	16.77
70	66.207	629	0.0095	0.0098	0.9902	89.711	883	89.270	1.427.192	15.91
71	62.715	720	0.0115	0.0110	0.9890	88.828	975	88.341	1.337.922	15.06
72	63.095	775	0.0123	0.0127	0.9873	87.853	1.117	87.295	1.249.581	14.22
73	63.200	924	0.0146	0.0139	0.9861	86.737	1.205	86.135	1.162.286	13.40
74	63.917	1003	0.0157	0.0162	0.9838	85.532	1.390	84.837	1.076.152	12.58
75	62.648	1241	0.0198	0.0190	0.9810	84.142	1.597	83.344	991.314	11.78
76	61.147	1349	0.0221	0.0223	0.9777	82.545	1.838	81.626	907.971	11.00
77	57.750	1511	0.0262	0.0259	0.9741	80.707	2.093	79.660	826.345	10.24
78	51.643	1587	0.0307	0.0301	0.9699	78.614	2.365	77.431	746.684	9.50
79	54.400	1879	0.0345	0.0348	0.9652	76.249	2.656	74.921	669.253	8.78
80	51.175	2151	0.0420	0.0423	0.9577	73.593	3.111	72.037	594.332	8.08
81	42.353	2297	0.0542	0.0514	0.9486	70.482	3.620	68.672	522.295	7.41
82	39.652	2396	0.0604	0.0599	0.9401	66.862	4.002	64.861	453.622	6.78
83	35.429	2544	0.0718	0.0700	0.9300	62.860	4.403	60.659	388.761	6.18
84	32.416	2803	0.0865	0.0831	0.9169	58.457	4.856	56.029	328.103	5.61
85	25.941	2649	0.1021	0.0983	0.9017	53.601	5.270	50.966	272.074	5.08
86+	85.028	18.586	0.2186	1.0000	0.0000	48.331	48.331	221.107	221.107	4.57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Οι πληθυσμιακές προβολές σύμφωνα με του καθιερωμένους ορισμούς του ΟΗΕ (Οργανισμός Ηνωμένων Εθνών), είναι υπολογισμοί που δείχνουν τη μελλοντική ανάπτυξη του πληθυσμού η οποία συντελείται κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες εξέλιξης των δημογραφικών συνιστώσεων, της γονιμότητας, της θνησιμότητας και της μετανάστευσης όπως αναφέραμε και παραπάνω. Πρόκειται, ουσιαστικά, για τοπικές εκτιμητικές διαδικασίες μέσω των οποίων τα παραγόμενα αποτελέσματα προκύπτουν από την οριοθέτηση συγκεκριμένης συλλογιστικής θεώρησης.

Η γνώση γύρω από το μελλοντικό μέγεθος και τη δομή του πληθυσμού αποτελεί σημαντική παράμετρο κατά την κατάρτιση αναπτυξιακών προγραμμάτων. Οι δημόσιοι φορείς χρειάζονται εκτιμήσεις βασικών πληθυσμιακών μεγεθών για να σχεδιάσουν τους τρόπους με τους οποίους θα καλύψουν τις διάφορες μελλοντικές ανάγκες του πληθυσμού και να διατυπώσουν οικονομικές και κοινωνικές στρατηγικές σε τομείς κοινού ενδιαφέροντος όπως κοινωνική ασφάλιση, απασχόληση, φορολογία κτλ.

Στα πλαίσια της πολιτικής της Ευρωπαϊκής Ένωσης, εκτός των άλλων, βασικός της στόχος είναι η διασφάλιση της βιωσιμότητας της δημόσιας οικονομίας της Ευρώπης. Έτσι, λοιπόν, η Οικονομική και Δημοσιονομική Πολιτική σε συνδυασμό με την Ομάδα Γήρανσης του πληθυσμού, για την επίτευξη αυτού του στόχου, πέραν των διάφορων άλλων μακροοικονομικών παραγόντων που απαιτούνται για τη διασφάλιση της βιωσιμότητας, έπρεπε να συμπεριληφθεί και η μελέτη των μακροχρόνιων δημογραφικών αλλαγών όλων των Κρατών Μελών.

Απώτερος σκοπός όλων των υποθέσεων και των μεθοδολογιών που ορίστηκαν ήταν η κάλυψη των δαπανών ανά ηλικία και φύλο όσο αφορά τις συντάξεις, την υγειονομική περίθαλψη, την εκπαίδευση και την ανεργία.

Η Eurostat συμμετείχε ενεργά σε συνεργασία με τις Εθνικές Στατιστικές υπηρεσίες για την πρόβλεψη των πληθυσμιακών προβολών (Europop 2010). Ωστόσο, ενήργησε με πλήρη ανεξαρτησία κατά την προετοιμασία των προβλέψεων του πληθυσμού. Τόσο οι μακροοικονομικές όσο και οι δημογραφικές προβλέψεις έγιναν με την ομοιόμορφη εφαρμογή των κοινών υποθέσεων και μεθοδολογιών σε όλα τα Κράτη Μέλη.

Οι προβλέψεις του πληθυσμού του Europop 2010[17] στηρίχθηκαν στον υπολογισμό και στην εκτίμηση του δείκτη γονιμότητας, της θνησιμότητας και της καθαρής μετανάστευσης[18]. Ο δείκτης γονιμότητας δηλώνει το μέσο όρο των παιδιών ανά γυναίκα που θα προκύψουν στην αναπαραγωγική ηλικία. Δηλαδή, ο συνολικός δείκτης γονιμότητας αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους ποσοστών γονιμότητας ανά ηλικία.

Και οι τρεις παράγοντες προβλέφθηκαν με τον ίδιο τρόπο για όλα τα κράτη μέλη. Το βασικό αρχικό σενάριο «baseline scenario» βασίστηκε στον πληθυσμό της 1ης Ιανουαρίου 2010 σύμφωνα με τα στατιστικά στοιχεία που έχουν δημοσιευτεί από τη Eurostat. Οι προβολές γίνονται με το τελευταίο διαθέσιμο έτος για τον πληθυσμό στην 1η Ιανουαρίου. Τόσο η γονιμότητα, όσο η θνησιμότητα και η καθαρή μετανάστευση[19] θα πρέπει σταδιακά κατά τη μακροχρόνια εξέλιξη να συγκλίνουν.

Οι δημογραφικές προβολές πληθυσμού που προβλέφθηκαν για το 2010 έως το 2060 είχαν ως βάσει τους τρεις παράγοντες οι οποίοι αποτέλεσαν την «καρδιά» της Ευρωπαϊκής γήρανσης της κοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα εκτιμήθηκε ότι υπάρχουν επίμονα χαμηλά ποσοστά γονιμότητας, υψηλό προσδόκιμο ζωής, οι baby-boom[20] σε γενιές που φθάνουν σε μεγαλύτερες ηλικίες (θεαματική αύξηση των γεννήσεων σε γενιές 1946-1965),ανενεργία καθώς και οι αλλαγές που παρατηρήθηκαν στη διάρκεια του μέσου όρου εργασιακής ηλικίας όπου η ηλικιακή δομή του πληθυσμού επηρεάζει την αριθμητική ισορροπία του πληθυσμού.

Λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα των παραδοχών πάνω στις οποίες στηρίχθηκαν οι μακροπρόθεσμες δημοσιονομικές προβλέψεις, εκτός από το βασικό σενάριο, χρησιμοποιήθηκαν και άλλα σενάρια τα λεγόμενα εναλλακτικά σενάρια ή σενάρια ευαισθησίας. Τέτοια σενάρια ήταν με υψηλότερο προσδόκιμο ζωής, με υψηλότερη παραγωγικότητα, με χαμηλότερη

[17] Eurostat Population Projections 2010-based (EUROPOP2010): Methodology and results of a long-term scenario of demographic convergence
[18] Hatton and Williamson (2003): Box “ Drivers of migration trends”.
[19] Discussion Paper No. 2003/23 What Fundamentals Drive World Migration? Timothy J. Hatton University of Essex, and Jeffrey G. Williamson Harvard University, USA.
[20] : Eurostat, Statistics in Focus, 23/2011 "The greying of the baby boomers: A century-long view of ageing in European populations",

μετανάστευση, με χαμηλότερη παραγωγικότητα και με υψηλότερο εργατικό δυναμικό.

Στόχος ήταν να προσδιοριστούν και ποσοτικά τα αποτελέσματα του βασικού σεναρίου και των υπολοίπων εναλλακτικών σεναρίων. Και αυτό, διότι οι παραδοχές[21] πάνω στις οποίες στηρίζονται οι πληθυσμιακές προβολές διατυπώνονται μέσα σε ένα καθαρά θεωρητικό πλαίσιο με απώτερο σκοπό τη διερεύνηση υποθετικών σχημάτων και την απάντηση σε ποικίλα ερωτήματα.

[21] European Economy 4|2011: The 2012 Ageing Report:Underlying Assumptions and Projection Methodologies.
European Demographic Observatory 6/2002: Methodology for the calculation of Eurostat's demographic indicators.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά την ολοκλήρωση της παρούσης εργασίας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κύρια πηγή στατιστικών δεδομένων που αφορούν τόσο το μέγεθος όσο και τη σύνθεση του πληθυσμού είναι η απογραφή. Με τις ληξιαρχικές καταγραφές αντλούνται στοιχεία φυσικής κίνησης, δηλαδή ο αριθμός των γεννήσεων μείον τον αριθμό των θανάτων. Επιπλέον, απαραίτητα στατιστικά δεδομένα για την περιγραφή ενός πληθυσμού αποτελούν τα στοιχεία της μεταναστευτικής κίνησης, δηλαδή πόσοι εισέρχονται και πόσοι εξέρχονται κατά την περίοδο που μελετά ο ερευνητής.

Συνεπώς, ο πληθυσμός επηρεάζεται και συνυπολογίζεται από τις γεννήσεις, το προσδόκιμο ζωής σύμφωνα με τους πινάκες επιβίωσης/θνησιμότητας, τους θανάτους και τη μεταναστευτική επιρροή. Οι εκτιμήσεις του μεγέθους του πληθυσμού απαιτούνται τόσο για τις ανάγκες της πληθυσμιακής ανάλυσης, όπως για τον υπολογισμό δεικτών θνησιμότητας και γεννητικότητας ή κατασκευή πινάκων θνησιμότητας όσο και για τις ανάγκες οικονομικών και κοινωνικών σχεδιασμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η θνησιμότητα είναι ένας από τους τρεις παράγοντες ο οποίος επηρεάζει τη διαμόρφωση του μεγέθους και τη σύνθεση του πληθυσμού. Γι αυτό το λόγο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο υπολογισμού της. Τα ποσοστά θνησιμότητας αποτελούν το βασικό στοιχείο πάνω στα οποία υπολογίζονται και κατασκευάζονται οι πίνακες επιβίωσης, όπου και αποτέλεσε το βασικό αντικείμενο της παρούσης εργασίας.

Με τις μεθόδους εξομάλυνσης των πινάκων θνησιμότητας που χρησιμοποιούνται επιτυγχάνεται η βελτιστοποίηση των αποτελεσμάτων των ποσοστών θνησιμότητας οδηγώντας τους μελετητές σε σωστότερες προβλέψεις τόσο σε βραχυχρόνια διαστήματα όσο και σε μακροχρόνια για μια γενεά.

Ένα πιθανό αλλά εύλογο ερώτημα που ίσως δημιουργείται είναι ποια από τις μεθόδους θεωρείται η καλύτερη και συνεπώς ποια πρέπει να χρησιμοποιείται. Σύμφωνα με τον London (1985), «καμία μέθοδος εξομάλυνσης δεν μπορεί να θεωρηθεί ως *καλύτερη* ή *πιο σωστή* από γενικής άποψης». Βασικός παράγοντας θεωρείται η μορφή και το εύρος των δεδομένων.Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή κάποιας μεθόδου εξομάλυνσης είναι να υπάρχει κάποια είδους συσχέτιση μεταξύ των στοιχείων.Για περισσότερη ανάλυση και κριτική των μεθόδων εξομάλυνσης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στον London (1985).

Ένα δεύτερο ερώτημα που μπορεί να τεθεί, λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη άποψη, είναι πώς κάποιος έχοντας στη διάθεση του έναν πίνακα θνησιμότητας μπορεί να καταλάβει αν είναι εξομαλυμένος ή όχι. Ένας πρακτικός και λογικός τρόπος είναι μέσω των αδρών δεικτών θνησιμότητας. Δηλαδή, αν οι τιμές των δεικτών αυτών είναι διαφορετικές από τα ποσοστά θνησιμότητας του πίνακα τότε ο πίνακας είναι εξομαλυμένος. Ένας εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης είναι μέσω της γραφικής απεικόνισης της καμπύλης της θνησιμότητας ελέγχοντας την κατά πόσο είναι ομαλή ή όχι. Βέβαια αυτός ο τρόπος είναι υποκειμενικός και τα συμπεράσματα ποικίλουν από ερευνητή σε ερευνητή.

Σε γενικές γραμμές, πέραν από το πώς κατασκευάζονται οι πίνακες θνησιμότητας δημογραφικού και ασφαλίσιμου πληθυσμού καθώς και πώς εξετάζονται όλες οι βασικές πτυχές της εξομάλυνσης των ποσοστών θνησιμότητας, έγινε προσπάθεια ώστε να γίνει αντιληπτό στον αναγνώστη η σημαντικότητα του φαινομένου της θνησιμότητας κατά την εφαρμογή του. Έχοντας υπολογίσει και εξομαλύνει τα ποσοστά θνησιμότητας, σε συνδυασμό με άλλες παραμέτρους, μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε και σε άλλα δημογραφικά φαινόμενα, όπως για παράδειγμα στους υπολογισμούς των προβολών του πληθυσμού.

Σκοπός αυτής της εργασίας ήταν να παρουσιασθούν τεχνικές μέθοδοι για το πώς κατασκευάζονται και πώς εξομαλύνονται οι πίνακες επιβίωσης ή αλλιώς θνησιμότητας τόσο για το δημογραφικό όσο και για τον ασφαλίσιμο πληθυσμό. Αρχικά, αναφέρθηκαν γενικές έννοιες, ορισμοί και στοιχεία για τη συλλογή και την επεξεργασία των δεδομένων.

Στη συνέχεια, έννοιες, συναρτήσεις και διάφοροι τρόποι που κατασκευάζονται οι πίνακες επιβίωσης. Έπειτα, ορίσαμε την έννοια της εξομάλυνσης και εξηγήσαμε τα βασικά της χαρακτηριστικά καθώς και τα διάφορα στατιστικά τεστ που βοηθούν στον έλεγχο του κατά πόσο είναι ικανοποιητική ή όχι η εξομάλυνση. Τέλος, αναλύσαμε σε θεωρητικό κυρίως επίπεδο κάποιες παραμετρικές και μη παραμετρικές μεθόδους εξομάλυνσης στηριζόμενοι πάντα στη βασική της ιδέα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1: Πίνακας Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής **N(0,1)**

ΠΙΝΑΚΑΣ Α2: Πίνακας Τιμών $\mathbf{t_v}$ Κατανομής

ΠΙΝΑΚΑΣ Α3: Πίνακας $\mathbf{x^2}$ Κατανομής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ (ΕΑΕ – 2005)

ΠΙΝΑΚΑΣ Β1: Πίνακας ΕΑΕ 2005 Α και Ρ και κλίμακα Κ (άνδρες-γυναίκες)

ΠΙΝΑΚΑΣ Β2: Πίνακας θνησιμότητας ΕΑΕ 2005 Β (άνδρες-γυναίκες)

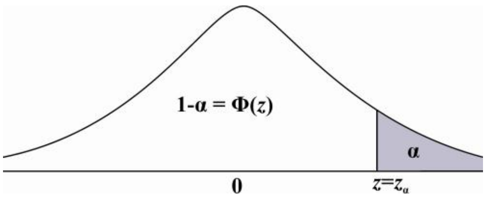
ΠΙΝΑΚΑΣ Β3: Πίνακας μετατόπισης ηλικίας ΕΑΕ 2005 Μ (άνδρες-γυναίκες)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α1

Τιμές των πιθανοτήτων $\Phi(z) = P(Z \le z) = P(Z < z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$ για $z \ge 0$. Για $z < 0$ ισχύει $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

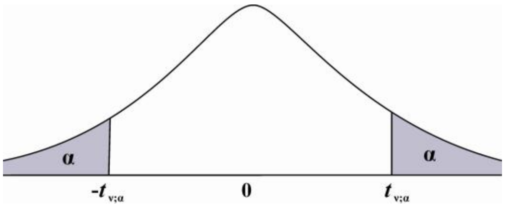


z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
z_α	3.29	3.09	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282

ΠΙΝΑΚΑΣ Α2

Τιμών $t_{\nu;a}$ της t_{ν}-κατανομής ώστε $P(T_{\nu} > t_{\nu;a}) = P(T_{\nu} \geq t_{\nu;a}) = a$.

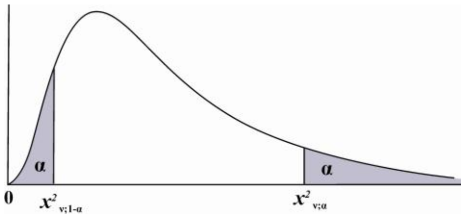


ν	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	α = 0.01	α = 0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ΠΙΝΑΚΑΣ Α3

Των τιμών $\chi^2_{v;1-a}$ της χ^2 κατανομής για τις οποίες

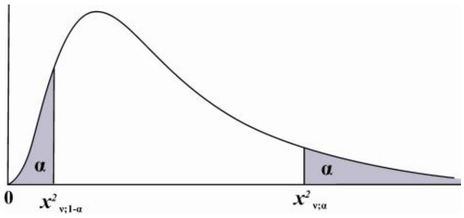
$$P(X < \chi^2_{v;1\text{-}a}) = P(X \le \chi^2_{v;1\text{-}a}) = a$$



v	*α* = 0.005	*α* = 0.01	*α* = 0.025	*α* = 0.05	*α* = 0.10
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

ΠΙΝΑΚΑΣ Α3 (συνέχεια)

Των τιμών $\chi^2_{v;a}$ της χ^2 κατανομής για τις οποίες $P(X > \chi^2_{v;a}) = P(X \geq \chi^2_{v;a}) = a$.



v	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	α = 0.01	α = 0.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21,9200	24.7250	26.7569
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ (ΕΑΕ – 2005)

ΠΙΝΑΚΑΣ Β1

Πίνακας ΕΑΕ 2005 Α[22] και Ρ [23] και κλίμακα Κ[24]

ΑΝΔΡΕΣ				ΓΥΝΑΙΚΕΣ			
x	q_x A	q_x P	q_x K	x	q_y A	q_y P	q_y K
0	0.001897	0.001785	0.0165	0	0.001244	0.001171	0.0165
1	0.000280	0.000264	0.0165	1	0.000190	0.000179	0.0165
2	0.000240	0.000226	0.0165	2	0.000167	0.000157	0.0165
3	0.000204	0.000192	0.0165	3	0.000149	0.000140	0.0165
4	0.000173	0.000162	0.0165	4	0.000134	0.000126	0.0165
5	0.000148	0.000139	0.0165	5	0.000122	0.000115	0.0165
6	0.000139	0.000123	0.0165	6	0.000117	0.000105	0.0165
7	0.000131	0.000112	0.0165	7	0.000114	0.000097	0.0165
8	0.000126	0.000108	0.0165	8	0.000116	0.000093	0.0165
9	0.000127	0.000111	0.0165	9	0.000123	0.000093	0.0165
10	0.000137	0.000122	0.0165	10	0.000135	0.000096	0.0165
11	0.000162	0.000143	0.0165	11	0.000152	0.000103	0.0165
12	0.000208	0.000175	0.0165	12	0.000172	0.000112	0.0165
13	0.000281	0.000219	0.0165	13	0.000197	0.000124	0.0165
14	0.000386	0.000275	0.0165	14	0.000224	0.000137	0.0165
15	0.000520	0.000338	0.0165	15	0.000252	0.000151	0.0165
16	0.000680	0.000403	0.0165	16	0.000279	0.000164	0.0165
17	0.000851	0.000463	0.0165	17	0.000303	0.000176	0.0165
18	0.001015	0.000516	0.0165	18	0.000325	0.000186	0.0165
19	0.001153	0.000565	0.0165	19	0.000335	0.000196	0.0165
20	0.001248	0.000599	0.0165	20	0.000344	0.000205	0.0165
21	0.001319	0.000626	0.0165	21	0.000352	0.000213	0.0165
22	0.001365	0.000646	0.0165	22	0.000360	0.000219	0.0165
23	0.001389	0.000661	0.0165	23	0.000367	0.000225	0.0165
24	0.001393	0.000674	0.0165	24	0.000374	0.000230	0.0165
25	0.001381	0.000687	0.0165	25	0.000381	0.000235	0.0165
26	0.001358	0.000699	0.0165	26	0.000388	0.000239	0.0165
27	0.001330	0.000711	0.0165	27	0.000396	0.000243	0.0165
28	0.001299	0.000722	0.0165	28	0.000406	0.000247	0.0165
29	0.001269	0.000730	0.0165	29	0.000420	0.000253	0.0165
30	0.001239	0.000737	0.0165	30	0.000440	0.000259	0.0165
31	0.001209	0.000745	0.0165	31	0.000465	0.000267	0.0165
32	0.001182	0.000754	0.0165	32	0.000498	0.000278	0.0165
33	0.001164	0.000767	0.0165	33	0.000538	0.000290	0.0165
34	0.001161	0.000786	0.0165	34	0.000586	0.000305	0.0165
35	0.001181	0.000812	0.0165	35	0.000644	0.000322	0.0165
36	0.001223	0.000847	0.0165	36	0.000711	0.000342	0.0165
37	0.001287	0.000890	0.0165	37	0.000787	0.000366	0.0165
38	0.001371	0.000944	0.0165	38	0.000870	0.000393	0.0165
39	0.001470	0.001012	0.0165	39	0.000959	0.000425	0.0165
40	0.001580	0.001095	0.0165	40	0.001053	0.000463	0.0165

[22] Ποσοστά θνησιμότητας για ισόβιες, μικτές και πρόσκαιρες ασφαλίσεις.
[23] Ποσοστά θνησιμότητας για ασφαλίσεις επιβίωσης, ιδίως συντάξεων.
[24] Σε συνδυασμό με τα ποσοστά θνησιμότητας του πίνακα Ρ για την προβολή των ποσοστών μετά το 2005, υπολογίζονται τελικά τα ποσοστά θνησιμότητας γενεών.

ΠΙΝΑΚΑΣ Β1 (συνέχεια)

ΑΝΔΡΕΣ				ΓΥΝΑΙΚΕΣ			
x	q_x A	q_x P	q_x K	x	q_y A	q_y P	q_y K
41	0.001699	0.001195	0.0165	41	0.001153	0.000508	0.0165
42	0.001836	0.001317	0.0165	42	0.001257	0.000561	0.0165
43	0.001983	0.001461	0.0165	43	0.001367	0.000622	0.0165
44	0.002143	0.001628	0.0165	44	0.001483	0.000693	0.0165
45	0.002326	0.001819	0.0165	45	0.001606	0.000773	0.0166
46	0.002544	0.002033	0.0165	46	0.001735	0.000862	0.0166
47	0.002811	0.002269	0.0165	47	0.001871	0.000959	0.0168
48	0.003139	0.002526	0.0165	48	0.002014	0.001064	0.0173
49	0.003531	0.002814	0.0154	49	0.002164	0.001177	0.0176
50	0.003975	0.003121	0.0143	50	0.002327	0.001294	0.0188
51	0.004449	0.003446	0.0132	51	0.002507	0.001415	0.0204
52	0.004931	0.003786	0.0121	52	0.002708	0.001541	0.0220
53	0.005410	0.004146	0.0110	53	0.002937	0.001672	0.0234
54	0.005900	0.004516	0.0110	54	0.003201	0.001811	0.0248
55	0.006435	0.004921	0.0110	55	0.003510	0.001972	0.0259
56	0.007046	0.005371	0.0110	56	0.003875	0.002165	0.0267
57	0.007735	0.005875	0.0110	57	0.004302	0.002392	0.0275
58	0.008510	0.006427	0.0117	58	0.004796	0.002655	0.0282
59	0.009377	0.007047	0.0124	59	0.005359	0.002958	0.0288
60	0.010339	0.007712	0.0143	60	0.005991	0.003307	0.0292
61	0.011398	0.008510	0.0145	61	0.006689	0.003703	0.0295
62	0.012549	0.009402	0.0147	62	0.007444	0.004150	0.0296
63	0.013786	0.010389	0.0150	63	0.008251	0.004655	0.0295
64	0.015115	0.011481	0.0151	64	0.009111	0.005223	0.0293
65	0.016546	0.012681	0.0153	65	0.010031	0.005865	0.0288
66	0.018095	0.014009	0.0154	66	0.011023	0.006587	0.0283
67	0.019782	0.015473	0.0155	67	0.012105	0.007403	0.0275
68	0.021628	0.017085	0.0156	68	0.013300	0.008323	0.0266
69	0.023657	0.018868	0.0156	69	0.014628	0.009358	0.0256
70	0.025887	0.020821	0.0157	70	0.016107	0.010521	0.0246
71	0.028337	0.022979	0.0157	71	0.017751	0.011829	0.0235
72	0.031026	0.025351	0.0157	72	0.019575	0.013292	0.0226
73	0.033973	0.027957	0.0157	73	0.021600	0.014937	0.0215
74	0.037204	0.030817	0.0157	74	0.023846	0.016774	0.0205
75	0.040744	0.033966	0.0156	75	0.026337	0.018838	0.0194
76	0.044619	0.037417	0.0155	76	0.029098	0.021147	0.0183
77	0.048859	0.041211	0.0153	77	0.032157	0.023729	0.0172
78	0.053493	0.045379	0.0150	78	0.035545	0.026612	0.0161
79	0.058556	0.049933	0.0146	79	0.039294	0.029842	0.0149
80	0.064081	0.054925	0.0142	80	0.043440	0.033430	0.0138
81	0.070105	0.060389	0.0136	81	0.048022	0.037425	0.0127

ΠΙΝΑΚΑΣ Β1 (συνέχεια)

ΑΝΔΡΕΣ				ΓΥΝΑΙΚΕΣ			
x	q_x A	q_x P	q_x K	x	q_y A	q_y P	q_y K
82	0.076664	0.066363	0.0130	82	0.053079	0.041865	0.0116
83	0.083799	0.072856	0.0123	83	0.058658	0.046794	0.0105
84	0.091549	0.079897	0.0117	84	0.064803	0.052255	0.0094
85	0.099955	0.087482	0.0111	85	0.071564	0.058271	0.0084
86	0.109058	0.095667	0.0106	86	0.078994	0.064855	0.0076
87	0.118899	0.104477	0.0100	87	0.087144	0.072038	0.0070
88	0.129518	0.113886	0.0096	88	0.096071	0.079845	0.0067
89	0.140953	0.123949	0.0091	89	0.105829	0.088299	0.0066
90	0.153241	0.134677	0.0087	90	0.116475	0.097454	0.0066
91	0.166414	0.146016	0.0084	91	0.128064	0.107372	0.0066
92	0.180500	0.158013	0.0080	92	0.140649	0.118079	0.0066
93	0.195522	0.170657	0.0077	93	0.154278	0.129591	0.0066
94	0.211497	0.183929	0.0074	94	0.168996	0.141916	0.0066
95	0.228432	0.197719	0.0072	95	0.184841	0.155053	0.0066
96	0.246328	0.211973	0.0070	96	0.201842	0.168985	0.0066
97	0.265173	0.226806	0.0068	97	0.220017	0.183685	0.0066
98	0.284946	0.241986	0.0067	98	0.239372	0.199110	0.0066
99	0.305614	0.257530	0.0066	99	0.259899	0.215202	0.0066
100	0.327132	0.273254	0.0066	100	0.281575	0.231888	0.0066
101	0.349441	0.289177	0.0066	101	0.304357	0.249080	0.0066
102	0.372471	0.305213	0.0066	102	0.328186	0.266679	0.0066
103	0.396139	0.321275	0.0066	103	0.352983	0.284572	0.0066
104	0.420351	0.337275	0.0066	104	0.378650	0.302642	0.0066
105	0.445005	0.353125	0.0066	105	0.405072	0.320762	0.0066
106	0.469986	0.368741	0.0066	106	0.432116	0.338806	0.0066
107	0.495177	0.384045	0.0066	107	0.459637	0.356650	0.0066
108	0.520454	0.398964	0.0066	108	0.487477	0.374173	0.0066
109	0.545692	0.413432	0.0066	109	0.515468	0.391265	0.0066
110	0.570766	0.427395	0.0066	110	0.543442	0.407827	0.0066
111	0.595551	0.440804	0.0066	111	0.571227	0.423770	0.0066
112	0.619927	0.453623	0.0066	112	0.598651	0.439025	0.0066
113	0.643764	0.465823	0.0066	113	0.625537	0.453534	0.0066
114	0.666813	0.477388	0.0066	114	0.651589	0.467257	0.0066
115	0.689607	0.488306	0.0066	115	0.677296	0.480169	0.0066
116	0.711343	0.498575	0.0066	116	0.701819	0.492256	0.0066
117	0.731929	0.508202	0.0066	117	0.725034	0.503520	0.0066
118	0.752215	0.517196	0.0066	118	0.747761	0.513972	0.0066
119	0.773202	0.525559	0.0066	119	0.771000	0.523612	0.0066
120	1.000000	1.000000	0.0000	120	1.000000	1.000000	0.0000

ΠΙΝΑΚΑΣ Β2

Πίνακας θνησιμότητας ΕΑΕ 2005 Β [25]

ΑΝΔΡΕΣ						ΓΥΝΑΙΚΕΣ					
x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_y	x	q_y	x	q_y
0	0.000108	40	0.001095	80	0.030997	0	0.000093	40	0.000463	80	0.019175
1	0.000108	41	0.001176	81	0.034446	1	0.000093	41	0.000499	81	0.022160
2	0.000108	42	0.001274	82	0.038304	2	0.000093	42	0.000542	82	0.025646
3	0.000108	43	0.001390	83	0.042790	3	0.000093	43	0.000592	83	0.029721
4	0.000108	44	0.001524	84	0.047604	4	0.000093	44	0.000648	84	0.034487
5	0.000108	45	0.001674	85	0.052939	5	0.000093	45	0.000711	85	0.039865
6	0.000108	46	0.001840	86	0.058597	6	0.000093	46	0.000779	86	0.045660
7	0.000108	47	0.002020	87	0.065144	7	0.000093	47	0.000852	87	0.051782
8	0.000108	48	0.002211	88	0.071677	8	0.000093	48	0.000925	88	0.057824
9	0.000111	49	0.002447	89	0.079196	9	0.000093	49	0.001003	89	0.063832
10	0.000122	50	0.002702	90	0.087006	10	0.000096	50	0.001070	90	0.069985
11	0.000143	51	0.002977	91	0.094965	11	0.000103	51	0.001128	91	0.076599
12	0.000175	52	0.003271	92	0.104064	12	0.000112	52	0.001180	92	0.083681
13	0.000219	53	0.003590	93	0.113293	13	0.000124	53	0.001229	93	0.091234
14	0.000275	54	0.003868	94	0.123157	14	0.000137	54	0.001274	94	0.099251
15	0.000338	55	0.004169	95	0.132876	15	0.000151	55	0.001331	95	0.107723
16	0.000403	56	0.004500	96	0.143033	16	0.000164	56	0.001404	96	0.116628
17	0.000463	57	0.004868	97	0.153726	17	0.000176	57	0.001489	97	0.125937
18	0.000516	58	0.005200	98	0.163853	18	0.000186	58	0.001587	98	0.135611
19	0.000565	59	0.005559	99	0.174242	19	0.000196	59	0.001698	99	0.145603
20	0.000599	60	0.005782	100	0.183661	20	0.000205	60	0.001828	100	0.155857
21	0.000626	61	0.006262	101	0.193080	21	0.000213	61	0.001974	101	0.166308
22	0.000646	62	0.006788	102	0.202442	22	0.000219	62	0.002143	102	0.176883
23	0.000661	63	0.007338	103	0.211689	23	0.000225	63	0.002338	103	0.187506
24	0.000674	64	0.007969	104	0.220765	24	0.000230	64	0.002559	104	0.198096
25	0.000687	65	0.008625	105	0.229614	25	0.000235	65	0.002825	105	0.208571
26	0.000699	66	0.009358	106	0.238186	26	0.000239	66	0.003123	106	0.218850
27	0.000711	67	0.010148	107	0.246434	27	0.000243	67	0.003487	107	0.228855
28	0.000722	68	0.011001	108	0.254317	28	0.000247	68	0.003912	108	0.238515
29	0.000730	69	0.011959	109	0.261801	29	0.000253	69	0.004411	109	0.247764
30	0.000737	70	0.012952	110	0.268856	30	0.000259	70	0.004983	110	0.256547
31	0.000745	71	0.014070	111	0.275461	31	0.000267	71	0.005660	111	0.264817
32	0.000754	72	0.015279	112	0.281601	32	0.000278	72	0.006396	112	0.272539
33	0.000767	73	0.016584	113	0.287266	33	0.000290	73	0.007291	113	0.279688
34	0.000786	74	0.017994	114	0.292455	34	0.000305	74	0.008294	114	0.286249
35	0.000812	75	0.019591	115	0.297169	35	0.000322	75	0.009490	115	0.292217
36	0.000847	76	0.021322	116	0.301416	36	0.000342	76	0.010876	116	0.297596
37	0.000890	77	0.023295	117	0.305208	37	0.000366	77	0.012488	117	0.302397
38	0.000944	78	0.025552	118	0.308560	38	0.000393	78	0.014362	118	0.306637
39	0.001012	79	0.028137	119	0.311480	39	0.000425	79	0.016617	119	0.310326
				120	1.000000					120	1.000000

[25] Ποσοστά θνησιμότητας γενεάς του 1965 σε συνδυασμό με τους συντελεστές μετατόπισης των ηλικίων.

ΠΙΝΑΚΑΣ Β3

Πίνακας μετατόπισης ηλικίας ΕΑΕ 2005 Μ[26]

ΑΝΔΡΕΣ						ΓΥΝΑΙΚΕΣ					
ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ	ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ	ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ	ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ	ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ	ΈΤΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΗ
1930	3	1960	0	1990	-4	1930	2	1960	0	1990	-3
1931	3	1961	0	1991	-4	1931	2	1961	0	1991	-4
1932	3	1962	0	1992	-4	1932	2	1962	0	1992	-4
1933	3	1963	0	1993	-5	1933	2	1963	0	1993	-4
1934	3	1964	0	1994	-5	1934	2	1964	0	1994	-4
1935	3	1965	0	1995	-5	1935	2	1965	0	1995	-4
1936	3	1966	-1	1996	-5	1936	2	1966	0	1996	-4
1937	3	1967	-1	1997	-5	1937	2	1967	-1	1997	-4
1938	3	1968	-1	1998	-5	1938	2	1968	-1	1998	-4
1939	3	1969	-1	1999	-5	1939	2	1969	-1	1999	-4
1940	3	1970	-1	2000	-6	1940	2	1970	-1	2000	-5
1941	3	1971	-1	2001	-6	1941	2	1971	-1	2001	-5
1942	3	1972	-1	2002	-6	1942	2	1972	-1	2002	-5
1943	3	1973	-2	2003	-6	1943	2	1973	-1	2003	-5
1944	3	1974	-2	2004	-6	1944	2	1974	-2	2004	-5
1945	2	1975	-2	2005	-6	1945	2	1975	-2	2005	-5
1946	2	1976	-2	2006	-6	1946	2	1976	-2	2006	-5
1947	2	1977	-2	2007	-7	1947	2	1977	-2	2007	-5
1948	2	1978	-2	2008	-7	1948	2	1978	-2	2008	-5
1949	2	1979	-3	2009	-7	1949	2	1979	-2	2009	-5
1950	2	1980	-3	2010	-7	1950	1	1980	-2	2010	-6
1951	2	1981	-3	2011	-7	1951	1	1981	-2	2011	-6
1952	2	1982	-3	2012	-7	1952	1	1982	-2	2012	-6
1953	1	1983	-3	2013	-7	1953	1	1983	-3	2013	-6
1954	1	1984	-3	2014	-8	1954	1	1984	-3	2014	-6
1955	1	1985	-3	2015	-8	1955	1	1985	-3	2015	-6
1956	1	1986	-4	2016	-8	1956	1	1986	-3	2016	-6
1957	1	1987	-4	2017	-8	1957	1	1987	-3	2017	-6
1958	1	1988	-4	2018	-8	1958	1	1988	-3	2018	-6
1959	0	1989	-4	2019	-8	1959	0	1989	-3	2019	-6
				2020	-8					2020	-7

[26] Συντελεστές μετατόπισης των ηλικιών της γενεάς 1965.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αντζουλάκος Δ. (2006). Αναλογιστικά Μοντέλα Επιβίωσης. Σημειώσεις Παραδόσεων Μαθήματος του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης στο Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ζυμπίδης Α. (2009). Αναλογιστική Στατιστική: Κατασκευή Πινάκων Θνησιμότητας. Αθήνα. Εκδόσεις Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ηλιόπουλος Γ. (2006). Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων με σημείο και με διάστημα. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Καραδήμας Α.Π. (1984). Δημογραφία β' Έκδοση. Αθήνα. Εκδόσεις Καραμπερόπουλος.

Καφφές Γ.Δ. (1989). Μαθήματα Αναλύσεως Διακύμανσης. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

Καφφές Γ.Δ. (1991). Μαθήματα Αναλύσης Παλινδρόμησης. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

Κούτρας Β.Μ. (2004). Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος Α, Β' Έκδοση. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κούτρας Β.Μ. (2004). Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος Β. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κούτρας Μ. – Χαραλάμπους Δ. (2003). Εισαγωγή στη Στατιστική Μέρος Α. Αθήνα. Εκδόσεις Συμμετρία.

Κωστάκη Α. (2003). Τεχνικές Δημογραφικής Ανάλυσης. Αθήνα. Σημειώσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Μπένος Κ.Β. (1991). Μεθοδολογία Αξιοποιήσεως των Αποτελεσμάτων της Δειγματοληψίας. Πειραιάς. Εκδόσεις Α. Σταμούλης.

Μπένος Κ.Β. (1997). Εφαρμογές Επαγωγικής Στατιστικής με Στοιχεία θεωρίας. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Παπαδάκης Μ.Ε – Τσίμπος Κ.Χ. (2004). Δημογραφική Ανάλυση : Αρχές – Μέθοδοι – Υποδείγματα. Πειραιάς. Εκδόσεις Α. Σταμούλης.

Παπαϊωάννου Τ. – Φερεντίνου Κ. (2000). Μαθηματική Στατιστική: Εκτιμητική, Έλεγχος Υποθέσεων , Εφαρμογές, Β΄ Έκδοση. Πειραιάς. Εκδόσεις Α. Σταμούλης.

Χατζόπουλος Π. Ανάλυση Θνησιμότητας. Σημειώσεις Παραδόσεων Μαθήματος του τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικά – Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

ΞΕΝΗ

Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology, Απόδοση στα Ελληνικά Πάρις Πάμφιλος (2002). Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές 5η Έκδοση. Εκδόσεις Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Benjamin, P. and Pollard, J.H. (1980). The analysis of Mortality and other Actuarial Statistics, Heinemann, London.

D.O.Forfar, J.J. McCutcheon and A.D.Wilkie (1985). On graduation by Mathematical Formula, 115 Journal of the Institute of Actuaries.

London, D. (1988). Survival Models and their Estimation, Actex Publications, Winsted, Connecticut.

London, D. (1985). Graduation: The Revision of Estimates, Actex Publications, Winsted, Connecticut.

Preston, S.H.N. Keyfitz, R Schoen (1972) . Causes of Death: Life Tables for National Populations, New York & London, Seminar Press.

European Commission: Eurostat Unit F-2: Population: “Description of the Eurostat method for the calculation of the life expectancies at all ages”.

Eurostat Population Projections 2010-based (EUROPOP2010): Methodology and results of a long-term scenario of demographic convergence.

Hatton and Williamson (2003): Box “ Drivers of migration trends”.

Discussion Paper No. 2003/23: What Fundamentals Drive World Migration? Timothy J. Hatton University of Essex, and Jeffrey G. Williamson Harvard University, USA.

Eurostat, Statistics in Focus, 23/2011 "The greying of the baby boomers: A century-long view of ageing in European populations".

European Economy 4|2011: The 2012 Ageing Report:Underlying Assumptions and Projection Methodologies.

European Demographic Observatory 6/2002: Methodology for the calculation of Eurostat’s demographic indicators.