ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ :ΔΙΕΘΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΙΚΗ

ΤΙΤΛΟΣ:

ΕΜΜΕΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΜΠΗΛΙΩΝΗ Ν. ΘΕΟΔΩΡΑ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα
Ιούλιος 2005

Εγκρίνουμε τη διατριβή της:

Μπηλιώνη Θεοδώρας

Dr. Αντώνιος Ντέμος
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Διεθνών Ευρωπαϊκών
Οικονομικών Σπουδών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ντέμο Αντώνιο του τμήματος Διεθνών Ευρωπαϊκών Οικονομικών Σπουδών του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη δυνατότητα που μου έδωσε,αναθέτοντάς μου την παρούσα διπλωματική εργασία,να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα καθώς και για την βοήθεια που μου έδωσε καθόλη την διάρκεια συγγραφής της. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω των κ. Αρβανίτη Στέλιο του οποίου οι παρατηρήσεις και οι χρήσιμες επισημάνσεις συνέβαλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με κάθε τρόπο στάθηκαν δίπλα μου στην πραγματοποίηση των στόχων μου.

Στους γονείς μου ,

Νίκο και Μαρία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της θεωρητικής και εφαρμοσμένης οικονομετρίας έχει επηρεαστεί κατά πολύ από την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η εξέλιξη αυτή έκανε ευκολότερη την πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων και τη μελέτη μεγαλύτερου αριθμού δεδομένων. Μπορούμε να διαχωρίσουμε την ιστορία της Οικονομετρίας σε τρεις βασικές περιόδους:

Πριν το 1960, τα μοντέλα και οι μέθοδοι εκτίμησης έπρεπε να οδηγούν σε αναλυτική μορφή εκτιμητών. Έτσι έχουμε το γραμμικό μοντέλο με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS), τις πολυμεταβλητές γραμμικές εξισώσεις (multivariate linear equations) με τις βοηθητικές μεταβλητές (instrumental variables) και τις εκθετικές οικογένειες με τη μέθοδο της πιθανοφάνειας. Από τις δεκαετίες '70-'80 με τους αριθμητικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης μπορούμε να έχουμε τις εκτιμήσεις χωρίς να ξέρουμε την αναλυτική μορφή του εκτιμητή. Σ' αυτή την περίοδο βρίσκουμε τα μη-γραμμικά μοντέλα για μικροοικονομικά δεδομένα (π.χ. limited depended variable models, duration models κ.λ.π.), για μακροοικονομικά δεδομένα (π.χ. disequilibrium models with cycles κ.λ.π.), τις χρονοσειρές (ARCH models) και τη μη γραμμική στατιστική επαγωγή.

Η επαγωγή αυτή βασίζεται σε βελτιστοποίηση κάποιων μη τετραγωνικών criterion συναρτήσεων, π.χ. μιας λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας για τη Μέθοδο της Μεγίστης Πιθανοφάνειας (ML method) ή κάποιες συναρτήσεις δεσμευμένων ροπών για τη Γενικευμένη Μέθοδο των Ροπών (GMM). Οι τελευταίες αυτές μέθοδοι εκτίμησης σχετίζονται με συναρτήσεις που δεν έχουν αναλυτική μορφή (εξαιτίας ολοκληρωμάτων μεγάλων διαστάσεων στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή στις ροπές). Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιούμε μεθόδους που στηρίζονται στην προσομοίωση.

Στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζουμε τη μέθοδο της "Έμμεσης Επαγωγής" που προτάθηκε και αναπτύχθηκε από τον **Smith (1990,1993)** και τους

Gourieroux, Monfort και Renault (1993), οι ιδέες των οποίων έρχονται να συμπληρώσουν τις Μεθόδους Εκτίμησης των Ροπών μέσω Προσομοιώσεων (Simulated method of Moments Estimators) που προτάθηκαν από τους **Ingram και Lee (1991), Duffie και Singleton (1993), Mc Fadden (1989)** και τους **Pakes και Pollard (1989)**. Αυτή η στατιστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν επέκταση της μεθόδου των προσομοιωμένων ροπών (Simulated Method of Moments), με την έννοια ότι η πληροφορία που εμπεριέχεται στα δεδομένα συνοψίζεται από ένα γενικό βοηθητικό κριτήριο παρά από ένα δεδομένο αριθμό εμπειρικών ροπών. Κάτω από τις συνήθεις συνθήκες κανονικότητας (regularity conditions) ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής έχει αποδειχθεί ότι είναι συνεπής και ασυμπτωτικά κανονικός. Στην πράξη, η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοσθεί σε προσομοιωμένα δεδομένα και είχε καλή απόδοση (βλ. Pastorello, Renault και Touzi (1993), Kouki και Renault (1994)).

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζονται η ιδιότητες των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής. Οι ιδιότητες αυτές εξαρτώνται από τη βοηθητική παράμετρο, τη μέθοδο εκτίμησής της, το μέτρο που χρησιμοποιούμε για τη σύγκριση των δύο επιμέρους εκτιμητών καθώς και από τον αριθμό των προσομοιώσεων. Επιπλέον δείχνουμε ότι η μέθοδος έμμεσης επαγωγής περιέχει σαν ειδική περίπτωση την Μέθοδο των Προσομοιωμένων Ροπών (Simulated Method of Moments). [**Mc Fadden** (1989), **Pakes και Pollard** (1989), **Duffie** και **Singleton** (1989), **Smith** (1993), **Gourieroux και Monfort** (1993)]

Στο **Κεφάλαιο 3** μελετάμε τις ιδιότητες πεπερασμένου δείγματος της διαδικασίας έμμεσης επαγωγής. Παρουσιάζουμε δύο επιπλέον μεθόδους μείωσης της μεροληψίας που βασίζονται στην προσομοίωση: την κατά **Andrews** (1993) Διόρθωση Διάμεσης Μεροληψίας **(Median-bias correction)** και την παραμετρική **Bootstrap** και τις συγκρίνουμε με την έμμεση επαγωγή. Και τέλος χρησιμοποιούμε αναπτύγματα Edgeworth για να εξετάσουμε την μεροληψία δεύτερης τάξης του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής και κάνουμε σύγκριση με τον εκτιμητή bootstrap.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Μέθοδοι Έμμεσης Επαγωγής

Οι οικονομετρικές μέθοδοι οδηγούν συχνά σε περίπλοκες μορφές της δεσμευμένης κατανομής των ενδογενών μεταβλητών δεδομένου των εξωγενών μεταβλητών και κάποιων χρονικών υστερήσεων των ενδογενών μεταβλητών. Αυτό κάνει δύσκολη την αποτελεσματική εκτίμηση των παραμέτρων επειδή είναι αδύνατο να βρεθεί η αναλυτική μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων στην βιβλιογραφία: διακριτά μοντέλα επιλογών με πολλές εναλλακτικές (discrete choice models), μοντέλα αναζήτησης εργασίας (job-search models), περιγραφή βέλτιστης δυναμικής συμπεριφοράς (description of optimal dynamic behaviors), μη-γραμμικά μοντέλα με τυχαίους συντελεστές (non-linear models with random coefficients), μοντέλα συνεχούς χρόνου με στοχαστική μεταβλητότητα (continuous time models with stochastic volatility), παραγοντικά αυτοπαλίνδρομμα μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (factor ARCH models).

1.1.1 Το Μοντέλο

Θεωρούμε παρατηρήσεις συμβατές με ένα παραμετρικό μοντέλο M. Οι ενδογενείς μεταβλητές y_t, $t=1,2,...,T$ είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές πρέπει να εξηγηθούν, z_t, $t=1,2,...,T$ είναι οι εξωγενείς μεταβλητές. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί:

$f_0(y_1,...,y_T / z_1,...,z_T,\underline{y_0}) = \prod_{t=1}^{T} f_0(y_t / x_t)$, όπου $\underline{y_0}$ είναι οι αρχικές συνθήκες, $x_t = (\underline{z_t}, \underline{y_{t-1}})$ και $y_t = (\underline{y_0}, y_1,...,y_t)$.

Για να προχωρήσουμε στην στατιστική επαγωγή της $f_0(y_t / x_t)$ εισάγουμε ένα δεσμευμένο παραμετρικό μοντέλο:

$M = \{f(y_t / x_t;\theta), \theta \in \Theta\}$, όπου $\Theta \in R^p$ είναι το σετ των παραμέτρων. Θεωρούμε ότι το μοντέλο είναι:

καλά προσδιορισμένο (well-specified), δηλαδή

$f_0(y_t / x_t)$ ανήκει στο M,

ταυτοποιημένο (identifiable), δηλαδή

υπάρχει μοναδική (άγνωστη) παράμετρος θ_0 τέτοια ώστε

$f_0(y_t / x_t) = f(y_t / x_t;\theta_0)$, όπου θ_0 η τιμή της πραγματικής παραμέτρου.

1.1.2 Η βοηθητική παράμετρος (auxiliary parameter)

Όταν το αρχικό μοντέλο οδηγεί σε μια μορφή που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, τότε εισάγουμε μια βοηθητική παράμετρο β και μια μέθοδο εκτίμησης αυτής. Η εκτίμηση της παραμέτρου β βασίζεται στην μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης ψ_t (criterion function), η οποία πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες κανονικότητας:

(A1) Η κανονικοποιημένη (normalized) συνάρτηση $\psi_T(\underline{y}_T^s(\theta), \underline{z_T}; \beta)$ τείνει σχεδόν σίγουρα σε μια ντετερμινιστική οριακή συνάρτηση $\psi_\infty(\theta, \beta)$ ομοιόμορφα στο (θ, β) όταν το $T \to \infty$,

(A2) Αυτή η οριακή συνάρτηση έχει μοναδικό μέγιστο ως προς το β: $b(\theta) = \arg\max_\beta \psi_\infty(\theta, \beta)$,

(A3) Οι ψ_T και ψ_∞ είναι παραγωγίσιμες ως προς το β, και

$$\frac{\partial \psi_\infty}{\partial \beta}(\theta, \beta) = \lim_T \frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y}_T^s(\theta), \underline{z_T}; \beta).$$

(Α4) Η μόνη λύση των ασυμπτωτικών συνθηκών πρώτης τάξης είναι η: $b(\theta): \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \beta}(\theta, \beta) = 0 \Rightarrow \beta = b(\theta)$,

(Α5) Η εξίσωση $\beta = b(\theta)$ έχει μόνη λύση στο θ.

Σ' αυτό το σημείο θα εισάγουμε μια καινούρια έννοια, τη δεσμευτική συνάρτηση (binding function) (Gourieroux και Monfort, 1992), η οποία ορίζεται ως:

$$b(\theta) = \arg\max_\beta \psi_\infty(\theta, \beta),$$

Έτσι η παράμετρος β εκτιμάται μεγιστοποιώντας το παραπάνω κριτήριο και έχουμε την εκτίμηση:

$$\hat{\beta}_T = \arg\max_\beta \psi_T(\underline{y_T}, \underline{z_T}; \beta)$$

Εφόσον ισχύουν τα (Α1) και (Α2) τότε η $\hat{\beta}_T$ είναι συνεπής εκτιμητής της β_0, δηλαδή:

$$\hat{\beta}_T = \arg\max_\beta \psi_T(\underline{y_T}, \underline{z_T}; \beta) \to \arg\max_\beta \psi_\infty(\theta_0, \beta) = b(\theta_0).$$

Αν η συνάρτηση $\beta = b(\theta)$ ήταν γνωστή και ένα-προς-ένα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε από τον $\hat{\beta}_T$, ένα συνεπή εκτιμητή της άγνωστης παραμέτρου θ_0, λύνοντας την $\hat{\beta}_T = b(\hat{\theta}_T)$. Όμως αν το μοντέλο περιέχει εξωγενείς μεταβλητές ή ακόμα και αν δεν έχει, η δεσμευτική συνάρτηση (binding function) είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Για το λόγο αυτό εκτιμούμε την συνάρτηση αυτή μέσω προσομοιώσεων των y_t.

Προσομοιώνουμε τιμές των ενδογενών μεταβλητών $y_t^s(\theta)$ χρησιμοποιώντας το μοντέλο M και μια τιμή θ της παραμέτρου. Επαναλαμβάνουμε S φορές αυτές τις προσομοιώσεις και έχουμε τον εκτιμητή:

$$\hat{\beta}_{ST}(\theta) = \arg\max_{\beta} \sum_{s=1}^{S} \psi_{T}(\underline{y_T^s}(\theta), \underline{z_T}; \beta)$$

Ο $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ είναι συνεπής εκτιμητής της δεσμευτικής συνάρτησης (binding function), δηλαδή:

$$\hat{\beta}_{ST}(\theta) = \arg\max_{\beta} \sum_{s=1}^{S} \psi_{T}(\underline{y_T^s}(\theta), \underline{z_T}; \beta) \rightarrow \arg\max_{\beta} S\psi_{\infty}(\theta, \beta) = b(\theta).$$

Τέλος ένας εκτιμητής έμμεσης επαγωγής του θ ορίζεται επιλέγοντας την τιμή $\hat{\theta}_{ST}$ για την οποία τα $\hat{\beta}_{T}$ και $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ είναι όσο γίνεται πιο κοντά μεταξύ τους:

$$\hat{\theta}_{ST}(\Omega) = \arg\min_{\theta}[\hat{\beta}_{T} - \hat{\beta}_{ST}(\theta)]'\Omega[\hat{\beta}_{T} - \hat{\beta}_{ST}(\theta)]$$

όπου ο Ω είναι ένας συμμετρικός μη αρνητικός πίνακας που ορίζει το μέτρο.

Η εκτίμηση εκτελείται μέσω ενός αριθμητικού αλγορίθμου που υπολογίζει το $\hat{\theta}_{ST}(\Omega)$ σαν:

$$\hat{\theta}_{ST}(\Omega) = \lim_{p\rightarrow\infty} \theta^{(p)},$$

όπου $\theta^{(p+1)} = h(\theta^{(p)}, \hat{\beta}_{T}, \beta_{ST}(\hat{\theta}^{(p)}))$ και h η αναδρομική συνάρτηση του αλγορίθμου.

Μπορούμε να έχουμε ασυμπτωτικά ισοδύναμους εκτιμητές του θ αν στην παραπάνω ελαχιστοποίηση το $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ αντικατασταθεί από:

(α) το $\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\hat{\beta}_{T}^{s}(\theta)$ όπου $\hat{\beta}_{T}^{s}(\theta)=\arg\max_{\beta}\psi_{T}[\underline{y}_{T}^{s}(\theta),\underline{z}_{T};\beta]$,

(β) το $\tilde{\beta}_{ST}(\theta)$ όπου $\tilde{\beta}_{ST}(\theta)=\arg\max_{\beta}\psi_{ST}[\underline{y}_{ST}^{s}(\theta),\underline{z}_{T};\beta]$, όπου οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών επαναλαμβάνονται περιοδικά:

$z_{\kappa T+h}=z_{h}, \qquad \kappa=0,...,S-1, \qquad h=1,...,T$

ο εκτιμητής αυτός χρησιμοποιήθηκε από τον Smith (1990) για συγκεκριμένα ψ_T που βασίζονται σε όχι καλά ταυτοποιημένες (mispecified) λογαριθμικές συναρτήσεις πιθανοφάνειας και όταν δεν υπάρχουν εξωγενείς μεταβλητές.

1.1.3 Εκτίμηση βασισμένη στο σκορ (score)

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση του σκορ είναι η παράγωγος της criterion συνάρτησης ως προς τη βοηθητική παράμετρο μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τον εκτιμητή έμμεσης επαγωγής. Στη μέθοδο αυτή δε χρειάζεται να εκτιμήσουμε την δεσμευτική συνάρτηση (binding function) και έτσι είναι υπολογιστικά πιο εύκολη. Ούτως ή άλλως όπως μπορεί να αποδειχθεί και αυτός ο εκτιμητής έχει την ίδια ασυμπτωτική κατανομή με τον προηγούμενο.

Ο εκτιμητής της μεθόδου αυτής ορίζεται ως:

$$\hat{\hat{\theta}}_{ST}(\Sigma)=\arg\min_{\theta}\left(\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial\psi_{T}}{\partial\beta}[\underline{y}_{T}^{s}(\theta),\underline{z}_{T};\hat{\beta}_{T}]\right)'\Sigma\left(\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial\psi_{T}}{\partial\beta}[\underline{y}_{T}^{s}(\theta),\underline{z}_{T};\hat{\beta}_{T}]\right)$$

όπου ο Σ είναι συμμετρικός μη αρνητικός.

Αυτή η μέθοδος προτάθηκε από τους **Gallant** και **Tauchen** (1992) σε μια ειδική περίπτωση όπου η δεσμευτική συνάρτηση (criterion function) είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας, ο αριθμός προσομοιώσεων είναι άπειρος, δεν υπάρχουν εξωγενείς μεταβλητές και το μοντέλο που αντιστοιχεί στη λογαριθμική συνάρτηση ψευδοπιθανοφάνειας (pseudo-likelihood function) είναι ασυμπτωτικά καλά προσδιορισμένο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ιδιότητες των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής

2.1 Η διάσταση της βοηθητικής παραμέτρου

Για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης και για να βρούμε τους εκτιμητές $\hat{\theta}$ ή $\hat{\hat{\theta}}$ πρέπει η διάσταση της βοηθητικής παραμέτρου β να είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη διάσταση της παραμέτρου θ που θέλουμε να εκτιμήσουμε ($\dim\beta > \dim\theta$). Στην ειδική περίπτωση που η διάσταση της βοηθητικής παραμέτρου ισούται με τη διάσταση της θ ($\dim\beta = \dim\theta$) έχουμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες (και αν το T είναι αρκετά μεγάλο):

(α) $\hat{\theta}_{ST}(\Omega) = \hat{\theta}_{ST}$, δηλαδή ο εκτιμητής είναι ανεξάρτητος του Ω,

(β) $\hat{\hat{\theta}}_{ST}(\Sigma) = \hat{\hat{\theta}}_{ST}$, δηλαδή ο εκτιμητής είναι ανεξάρτητος του Σ,

2.2 Ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής

Για να προχωρήσουμε στην παρουσίαση των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής πρέπει να εισάγουμε με δύο καινούριες μήτρες:

$$J_o = p\lim_{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta\partial\beta'}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)],$$

$$\overline{I_o} = \lim_{\mathrm{T}} V_o\left\{\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] - E_o\left[\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] / z_{\mathrm{T}}\right]\right\},$$

και να κάνουμε μερικές επιπλέον υποθέσεις:

Οι συναρτήσεις ψ_{T}, ψ_∞ πρέπει να παραγωγίζονται και δεύτερη φορά ως προς θ, β και οι παράγωγοι αυτοί πρέπει να είναι συνεχείς.

Επίσης υποθέτουμε ότι:

$$\textbf{(A6)}\quad p\lim_{\mathrm{T}\to\infty} -\frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta\partial\beta'}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] = -\frac{\partial^2 \psi_{\infty}}{\partial\beta\partial\beta'}[\theta_0, b(\theta_0)] = J_o$$

$$\textbf{(A7)}\quad \sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\overset{d}{\to}} \mathrm{N}(0, I_o^*)$$

$$\textbf{(A8)}\quad \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \mathrm{cov}_o\left[\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}^{s_1}}(\theta_o), \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)], \sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}^{s_2}}(\theta_o), \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)]\right]$$

Από την (A8) καταλήγουμε στο:

$$K_o = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} V_o\left[E_o\left[\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] / z_{\mathrm{T}}\right]\right],$$

$$I_o^* - K_o = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} V_o\left\{\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] - E_o\left[\sqrt{\mathrm{T}}\frac{\partial \psi_{\mathrm{T}}}{\partial\beta}[\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; b(\theta_0)] / z_{\mathrm{T}}\right]\right\} = \overline{I_o}$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

Ο εκτιμητής $\hat{\theta}_{ST}(\Omega)$ είναι συνεπής και ασυμπτωτικά κανονικός, όταν το S είναι σταθερό και το T τείνει στο ∞.

$$\sqrt{\mathrm{T}}\left(\hat{\theta}_{ST}(\Omega) - \theta_o\right) \xrightarrow{d} \mathrm{N}[0, W(S,\Omega)]$$

$$W(S,\Omega) = \left(1+\frac{1}{S}\right)\left[\frac{\partial b'}{\partial\theta}(\theta_0)\Omega\frac{\partial b}{\partial\theta'}(\theta_0)\right]^{-1}\frac{\partial b'}{\partial\theta}(\theta_0)\Omega\Omega^{*-1}\Omega\frac{\partial b}{\partial\theta'}(\theta_0)$$

$$\times\left[\frac{\partial b'}{\partial\theta}(\theta_0)\Omega\frac{\partial b}{\partial\theta'}(\theta_0)\right]^{-1}$$

όπου $\Omega^* = J_o \overline{I_o}^{-1} J_o$

(η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα)

Σε παρόμοια αποτελέσματα καταλήγουμε για τον εκτιμητή που βασίζεται στο σκορ (score), ακόμη μπορεί να αποδειχθεί ότι:

Οι εκτιμητές $\hat{\hat{\theta}}_{ST}(\Sigma)$ και $\hat{\theta}_{ST}(J_o \Sigma J_o)$ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμοι:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\hat{\theta}}_{ST}(\Sigma)-\hat{\hat{\theta}}_{ST}(J_o \Sigma J_o)\right)=op(1)$$

(η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα)

Στην περίπτωση που η βοηθητική παράμετρος β έχει την ίδια διάσταση με την θ ($\dim\beta=\dim\theta$) στην οποία ο εκτιμητής είναι ανεξάρτητος του Ω, τότε ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης είναι ο:

$$W(S,\Omega)=\left(1+\frac{1}{S}\right)\left[\frac{\partial b'}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega^{*}\frac{\partial b}{\partial \theta'}(\theta_0)\right]$$

Ο ασυμπτωτικός πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης εξαρτάται από το Ω, υπάρχει μια βέλτιστη επιλογή αυτού του πίνακα, δηλαδή ο Ω που ελαχιστοποιεί τον $W(S,\Omega)$. Το βέλτιστο Ω είναι το $\Omega^{*}=J_o(I_o-K_o)^{-1}J_o$ (υποθέτουμε ότι ο (I_o-K_o) είναι αναστρέψιμος) και ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης που προκύπτει είναι ο:

$$W(S,\Omega^{*})=\left(1+\frac{1}{S}\right)\left[\frac{\partial b'}{\partial \theta}(\theta_0)J_o(I_o-K_o)^{-1}J_o\frac{\partial b}{\partial \theta'}(\theta_0)\right]$$

Ο πίνακας $W(S,\Omega^{*})$ που είναι το κάτω όριο για τους πίνακες διακύμανσης-συνδιακύμανσης έχει και μια άλλη ισοδύναμη μορφή.

Η $b(\theta)$ είναι η λύση της:

$$\begin{aligned} b(\theta) &= \arg\max_{\beta} p\lim \psi_T(\underline{y}_T^{s}(\theta),\underline{z}_T;\beta) \\ &= \arg\max_{\beta} \psi_{\infty}(\theta,\beta) \end{aligned}$$

Άρα η δεσμευτική συνάρτηση (binding function) ικανοποιεί τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \psi_\infty}{\partial \beta}\left[\theta, b(\theta)\right] = 0, \ \forall \theta$$

Παραγώγιση της παραπάνω σχέσης ως προς θ δίνει:

$$\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \beta \partial \theta'}\left[\theta, b(\theta)\right] + \frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \beta \partial \beta'}\left[\theta, b(\theta)\right]\frac{\partial b}{\partial \theta'}\left[\theta\right] = 0,$$

που σημαίνει ότι:

$$\frac{\partial b}{\partial \theta'}\left[\theta_o\right] = \left(-\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \beta \partial \beta'}\left[\theta_o, b(\theta_o)\right]\right)^{-1}\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \beta \partial \theta'}\left[\theta_o, b(\theta_o)\right]$$

$$= J_o^{-1}\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \beta \partial \theta'}\left[\theta_o, b(\theta_o)\right]$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια έκφραση του πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του βέλτιστου εκτιμητή έμμεσης επαγωγής που μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την criterion function.

$$W(S, \Omega^*) = \left(1 + \frac{1}{S}\right)\left[\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \theta \partial \beta'}\overline{I_o^{-1}}\frac{\partial^2 \psi_\infty}{\partial \theta' \partial \beta}\right]^{-1}$$

Μπορεί να υπολογιστεί ένας συνεπής εκτιμητής αυτού του πίνακα αν αντικαταστήσουμε το ψ_∞ με το ψ_T, το $b(\theta_o)$ με το $\hat{\beta}_T$ και το $\overline{I_o}$ από ένα συνεπή εκτιμητή βασισμένο σε προσομοιώσεις (Gourieroux et al., 1993).

2.2 Εκτίμηση Παραμέτρου ενός Μοντέλου Κινητού Μέσου (Moving Average Model)

Το κύριο βήμα στην έμμεση επαγωγή είναι ο καθορισμός ενός καλού βοηθητικού μοντέλου ή μιας καλής βοηθητικής criterion συνάρτησης ψ_T, η οποία μπορεί να είναι προσέγγιση της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Ένα απλό παράδειγμα που θα μπορούσαμε να δώσουμε είναι η εκτίμηση της παραμέτρου θ ενός Μοντέλου Κινητού Μέσου Πρώτης Τάξης (MA(1)).

Ας θεωρήσουμε το μοντέλο:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \qquad , \ t = 1,2,\ldots,T$$

όπου ε_t είναι Gaussian λευκός θόρυβος με διακύμανση 1, δηλ. $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

Είναι γνωστό ότι τα αυτοπαλίνδρομμα μοντέλα (AR models) μπορούν να εκτιμηθούν πιο εύκολα από τα μοντέλα κινητού μέσου (MA models), αφού στα πρώτα η μέθοδος της ψευδούς μέγιστης πιθανοφάνειας (pseudo maximum likelihood method) που βασίζεται σε Gaussian σφάλματα συμπίπτει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (ordinary least square method) .

Έτσι θεωρούμε σα βοηθητικό μοντέλο το:

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \ldots + \beta_r y_{t-r} + u_t \qquad , \ t = 1,2,\ldots,T$$

όπου τα u_t είναι Gaussian λευκός θόρυβος. Για να κάνουμε πιο απλή τη μέθοδο εκτίμησης δεν περιορίζουμε τις παραμέτρους του βοηθητικού μοντέλου ώστε να είναι συμβατές με αυτές του αρχικού μοντέλου (MA(1)).

Έτσι έχουμε για r=1:

$$b(\theta_0) = p\lim_T \hat{\beta}_{1T} = \lim_T \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} = \lim_T \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} = \frac{E(y_t y_{t-1})}{E(y_{t-1}^2)} =$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(y_t y_{t-1})}{\operatorname{cov}(y_{t-1})} = \frac{-\theta_0}{1+\theta_0^2}$$

και για r=2:

$$b(\theta_0) = p\lim_T \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1T} \\ \hat{\beta}_{2T} \end{pmatrix} = \lim_T \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} y_{t-2} \\ \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} y_{t-2} & \sum_{t=1}^{T} y_{t-2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1} \\ \sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-2} \end{bmatrix} =$$

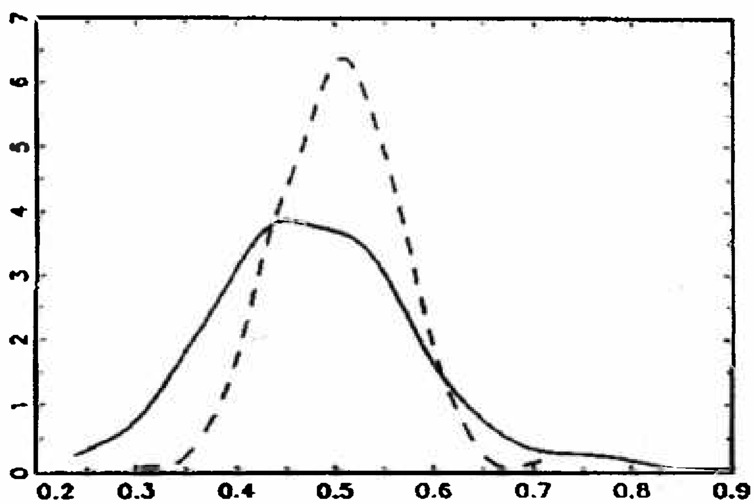
$$= \begin{bmatrix} V_{\theta_0} y_{t-1} & \operatorname{cov}_{\theta_0}(y_{t-1}, y_{t-2}) \\ \operatorname{cov}_{\theta_0}(y_{t-1}, y_{t-2}) & V_{\theta_0} y_{t-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{cov}_{\theta_0}(y_t, y_{t-1}) \\ \operatorname{cov}_{\theta_0}(y_t, y_{t-2}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\theta_0^2 & -\theta_0 \\ -\theta_0 & 1+\theta_0^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

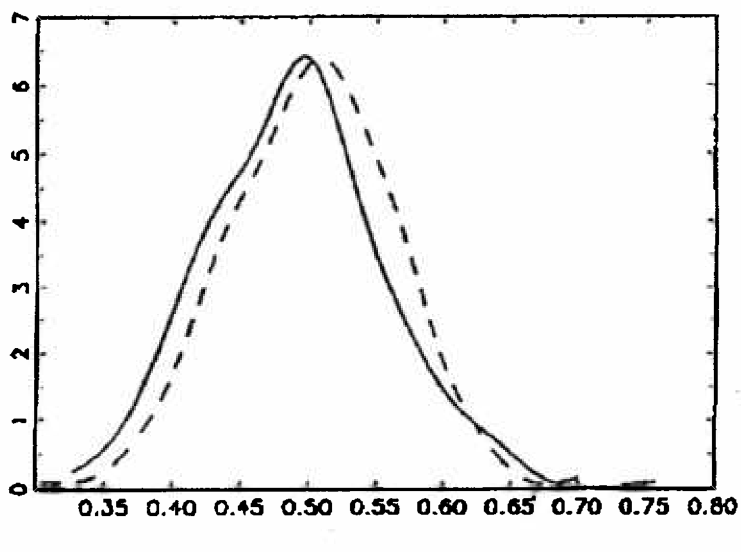
Θα συγκρίνουμε τις ιδιότητες του εκτιμητή θ μέσω της Μεθόδου της Ακριβούς Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Exact Maximum Likelihood Method) εκτιμώντας το μοντέλο MA(1), η οποία δίνει έναν ασυμπτωτικά αποτελεσματικό εκτιμητή (χρησιμοποιούμε το Kalman Filter), με τρεις εκτιμητές έμμεσης επαγωγής χρησιμοποιώντας σα βοηθητικά μοντέλα τα AR(1), AR(2) και AR(3).

Θεωρούμε ως θ_0=0.5 και έχουμε T=250 παρατηρήσεις και 200 επαναλήψεις (replications). Χρησιμοποιούμε ένα μονοπάτι προσομοιώσεων (S=1) και δε χρησιμοποιούμε το βέλτιστο εκτιμητή έμμεσης επαγωγής, αλλά αυτόν που προκύπτει για $\Omega = id$, εφόσον δεν επηρεάζει την αποτελεσματικότητα σε μεγάλο βαθμό.

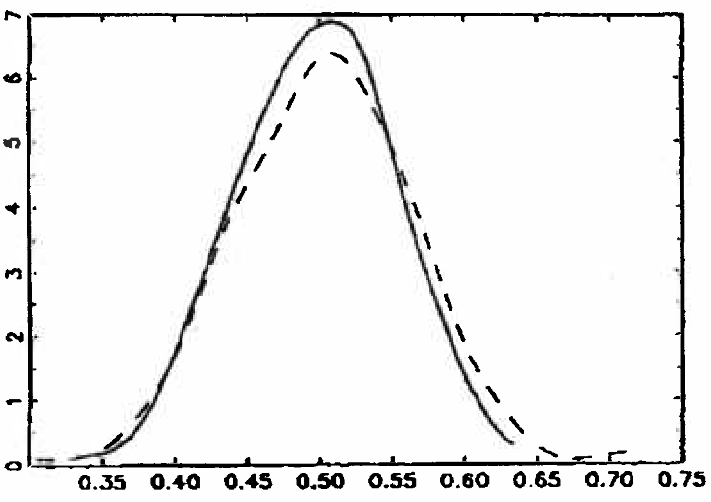
Σχήμα 1. Εκτιμημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας (- - - -) και του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής για r=1 (____).



Σχήμα 2. Εκτιμημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας (- - - -) και του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής για r=2 (____).



Σχήμα 3. Εκτιμημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας (- - - -) και του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής για r=3 (_____).



Στα σχήματα 1-3 βλέπουμε την εκτιμημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εκτιμητή Μεγίστης Πιθανοφάνειας, για πεπερασμένο δείγμα και τους τρεις εκτιμητές έμμεσης επαγωγής.

Πίνακας 1

Περιγραφικά στατιστικά για τους τέσσερις εκτιμητές

Εκτιμητής	Μέσος	Τυπική Απόκλιση	Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα
Για r=1	0.481	0.105	0.106
Για r=2	0.491	0.065	0.066
Για r=3	0.497	0.053	0.053
ΜΠ	0.504	0.061	0.061

Στον Πίνακα 1 δίνονται ο εμπειρικός μέσος, η τυπική απόκλιση και η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των τεσσάρων εκτιμητών. Για όλους τους εκτιμητές το μεροληπτικό σφάλμα (bias) είναι μικρό. Για r=1 η απώλεια αποτελεσματικότητας (efficiency loss) είναι σχετικά μεγάλη, για r=2 είναι σχετικά μικρότερη και για r=3 δεν υπάρχει. Επιπλέον θα πρέπει ακόμα να αναφέρουμε ότι για τον έμμεσο εκτιμητή όπου r=3 ο υπολογισμός ήταν 18 φορές γρηγορότερος από ότι για τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας.

Κεφάλαιο 3

Μερικές επιπλέον ιδιότητες των έμμεσων εκτιμητών

Σ' αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε μερικά επιπρόσθετα θεωρητικά συμπεράσματα για τη μέθοδο της έμμεσης επαγωγής και τους εκτιμητές αυτής. Και πιο συγκεκριμένα μελετάμε τις ιδιότητες πεπερασμένου δείγματος της διαδικασίας τη έμμεσης επαγωγής.

Θα ορίσουμε και θα συνδέσουμε τη διαδικασία Διόρθωσης Διάμεσης Μεροληψίας (Median-bias correction), που προτάθηκε από τον **Andrews** (1993) για τα αυτοπαλλίνδρομα μοντέλα πρώτης τάξης (AR(1)) με τη γενική διαδικασία της έμμεσης επαγωγής.

Θα ορίσουμε τη διαδικασία διόρθωσης της μεροληψίας μέσω του εκτιμητή bootstrap, που εισάχθηκε από τον **Efron** (1979) και παρουσιάζει ένα πλεονέκτημα στη διόρθωση της μεροληψίας μέσω των προσομοιώσεων και θα τη συγκρίνουμε με τη μέθοδο της έμμεσης επαγωγής.

3.1 Ιδιότητες των Εκτιμητών Έμμεσης Επαγωγής Πεπερασμένου δείγματος

Ενώ η διαδικασία έμμεσης επαγωγής παρουσιάζεται σαν μια ασυμπτωτική μέθοδος εκτίμησης, σ' αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε στις ασυμπτωτικές ιδιότητες του πεπερασμένου δείγματος (σταθερό T), στην περίπτωση που το αρχικό και το βοηθητικό μοντέλο έχουν τον ίδιο αριθμό παραμέτρων, δηλαδή $\dim\beta = \dim\theta$. Κάτω από αυτή τη συνθήκη, οι ασυμπτωτικές ιδιότητες αυτού του εκτιμητή είναι ανεξάρτητες του πίνακα Ω.

Θεωρούμε τη συνάρτηση b_T σαν απεικόνιση του Θ μέσα στο $b_T(\Theta)$:

$$b_T(\theta) = E[\hat{\beta}_T(\theta)]$$

το οποίο είναι η δεσμευτική συνάρτηση (binding function) στο πλαίσιο του πεπερασμένου δείγματος και υποθέτουμε τη γνωστή συνθήκη της προσδιορισιμότητας (identifiability).

Υπόθεση 3.1: Η συνάρτηση b_T για πεπερασμένο δείγμα, είναι ομοιόμορφα συνεχής και ένα προς ένα. Και επίσης η στήριξη (support) της κατανομής του $\hat{\beta}_T$ περιέχεται στην $b_T(\Theta)$.

Κάτω από την παραπάνω υπόθεση, για άπειρο αριθμό επαναλήψεων , S, ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής δίνεται απλά από την:

$$\hat{\theta}_T = b_T^{-1}(\hat{\beta}_T)$$

3.2 Διόρθωση Διάμεσης Μεροληψίας σε Αυτοπαλλίνδρομα Μοντέλα (Median-bias correction in AR models)

Ο Andrews (1993) πρότεινε έναν ακριβή διάμεσο αμερόληπτο εκτιμητή για την αυτοπαλλίνδρομη παράμετρο ενός AR(1) μοντέλου. Επεκτάσεις της μεθοδολογίας αυτής στο μοντέλο AR(p), προτάθηκαν από τους Andrews και Chen (1994) και Rudebusch (1992). Στην περίπτωση $p > 1$ οι εκτιμητές είναι μόνο κατά προσέγγιση διάμεσα αμερόληπτοι, αφού η διάμεσος δεν είναι κατάλληλη για να περιγράψει διανυσματικές μεταβλητές. Θα παρουσιάσουμε τις διαδικασίες αυτές ώστε να τονίσουμε την αναλογία τους με την μέθοδο της έμμεσης επαγωγής.

Η διαδικασία του Andrews μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: αν ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (LS) της αυτοπαλλίνδρομης παραμέτρου α ,για δείγμα μεγέθους T είναι ο $\hat{\beta}_T$, τότε ο εκτιμητής $\hat{a}_T^U$, ο οποίος ορίζεται ως η τιμή του α που χρειάζεται η κατανομή πεπερασμένου δείγματος του LS εκτιμητή για να έχει διάμεσο τον $\hat{\beta}_T$, είναι διάμεσα αμερόληπτος.

Θεωρούμε την παρακάτω λανθάνουσα (latent) χρονοσειρά AR(p): $\{Y_t^*, t = 0,\ldots,T\}$.

$$\phi(L)Y_t^* = u_t, \text{ για } t = p,\ldots,T$$

όπου L, είναι ο συντελεστής υστέρησης, $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j L^j$ είναι το πολυώνυμο υστέρησης του οποίου οι ρίζες έχουμε υποθέσει ότι βρίσκονται πάνω ή έξω από το μοναδιαίο κύκλο και $\{u_t, t = 1,\ldots,T\}$ είναι ένας Gaussian λευκός θόρυβος με διακύμανση σ^2. Παίρνουμε $Y_0^*,\ldots,Y_{p-1}^*$ από τη στάσιμη κατανομή της διαδικασίας Y^*, αν όλες οι ρίζες του $\phi(L)$ βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο ή είναι τυχαίες σταθερές διαφορετικά. Συμβολίζουμε με Θ^p το σύνολο των διανυσμάτων $a \in \Re^p$, τέτοιο ώστε οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - \sum_{j=1}^{p} a_j x^j$ να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Στα πλαίσια του AR(1) είναι γνωστό ότι $\Theta^1 = (-1,1)$.Γενικά το Θ^p είναι ένα ανοιχτά φραγμένο υποσύνολο του $\Re^p$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα ακόλουθα μοντέλα της παρατηρούμενης διαδικασίας $\{Y_t, t = 0,\ldots T\}$.

Μοντέλο 1: $Y_t = Y_t^*$, $t = 0,\ldots,T$

Μοντέλο 2: $Y_t = \mu + Y_t^*$, $t = 0,\ldots,T$

Μοντέλο 3: $Y_t = \mu + \gamma t + Y_t^*$, $t = 0,\ldots,T$

όπου μ και γ είναι δυο άγνωστες παράμετροι. Έστω ότι το $\hat{\beta}_T$ είναι ένας (μη περιορισμένος) LS εκτιμητής των AR παραμέτρων $a = (a_1,\ldots,a_p)'$ που αντιστοιχούν σε ένα από τα παραπάνω μοντέλα. Αν το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι καλά ταυτοποιημένο, ο εκτιμητής $\hat{\beta}_T$ είναι συνεπής. Παρ'όλα αυτά είναι μεροληπτικός σε πεπερασμένα δείγματα εξαιτίας της παρουσίας των δεσμευμένων μεταβλητών με υστέρηση που παραβιάζει την υπόθεση μη στοχαστικών ανεξάρτητων μεταβλητών (regressors) του κλασικού γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης. Ειδικότερα για την εκτίμηση του αθροίσματος των AR συντελεστών $\sum_{j=1}^{p} a_j$, που είναι χρήσιμο στη μελέτη των μακροπρόθεσμων ιδιοτήτων επιμονής (persistence), το μεροληπτικό σφάλμα τείνει προς τα κάτω και είναι αρκετά μεγάλο. Για την εκτίμηση του συντελεστή της χρονικής τάσης, το μεροληπτικό σφάλμα κινείται προς τα πάνω και είναι μεγάλο. Για ένα μοντέλο AR(1) στον πίνακα 2 του Rudebusch (1993) που δείχνει ότι η πιθανότητα να υποεκτιμήσουμε την AR παράμετρο, όταν η τελευταία είναι 0,9 ισούται με 0,89 και συνεχίζει να αυξάνεται για τιμές τις παραμέτρου που είναι πιο κοντά στο 1. Στην πράξη η τελευταία περίπτωση εμφανίζεται αρκετά συχνά σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές για παράδειγμα επιτόκια ή διακυμάνσεις τιμών χρεογράφων, συχνά μοντελοποιούνται με λανθάνουσες διαδικασίες συνεχούς χρόνου Ornstein-Uhienbeck (βλ. Vasicek (1977) και Scott (1987)) στα οποία η διακριτοποίηση του χρόνου οδηγεί σε ένα AR (1) με AR παράμετρο που συγκλίνει στο 1 όσο το χρονικό διάστημα μεταξύ των παρατηρήσεων τείνει στο 0.

Η διαδικασία διόρθωσης της μεροληψίας που προτάθηκε από τον Andrews στο πλαίσιο του μοντέλου AR(1) και γενικεύτηκε για το μοντέλο AR(p) από το Rudebusch (1992) και του Andrews και Chen (1994), βασίζεται στην βασική ιδιότητα του εκτιμητή LS της παραμέτρου AR, a, της οποίας η κατανομή δεν εξαρτάται από τις άλλες παραμέτρους του μοντέλου. Έτσι δεδομένου μιας συγκεκριμένης τιμής a, μπορούμε να ορίσουμε μια μοναδική κατανομή που αντιστοιχεί στον LS εκτιμητή του $\hat{\beta}_T(a)$, που προκύπτει από ένα απλό δείγμα μεγέθους T, όταν η πραγματική τιμή της παραμέτρου είναι a.

Στα πλαίσια του μοντέλου AR(1), μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $m_T(a)$, σαν τη διάμεσο της τυχαίας μεταβλητής $\hat{\beta}_T(a)$ και τον εκτιμητή $\hat{a}_T^U$ που ισούται με:

$$\hat{a}_T^U = \arg\min_{a\in[-1,1]}\left|\hat{\beta}_T - m_T(a)\right|$$

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $m_T(\cdot)$ είναι αύξουσα (το οποίο ελέγχθηκε από τον Andrews (1993) (χάρη στη μελέτη Monte Carlo), παραπάνω εκτιμητής μπορεί να γραφεί:

$$\hat{a}_T^U = \begin{cases} 1, & \text{αν } \hat{\beta}_T > m_T(1) \\ m_T^{-1}, & \text{αν } m_T(-1) < \hat{\beta}_T \le m_T(1) \\ -1, & \text{αν } \hat{\beta}_T \le m_T(-1) \end{cases}$$

όπου $m_T(\pm 1) = \lim_{a\to\pm 1} m_T(a)$. Ο εκτιμητής που ορίζεται στην παραπάνω σχέση είναι διάμεσα αμερόληπτος αφού εφόσον η $m_T(\cdot)$ είναι αύξουσα έχουμε $\hat{a}_T^U \ge a^0$, αν $m_T(\hat{a}_T^U) \ge m_T(a^0)$ και από τον ορισμό του $\hat{a}_T^U$ αυτό είναι ισοδύναμο με $\hat{\beta}_T \ge m_T(a^0)$, όπου a^0 είναι η πραγματική τιμή της παραμέτρου. Έτσι έχουμε $P[\hat{a}_T^U \ge a^0] = 1/2$. Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα της διάμεσης αμεροληψίας του $\hat{a}_T^U$ δεν εξαρτάται από τις τιμές που δίνονται στο $\hat{a}_T^U$ όταν το $\hat{\beta}_T$ είναι από τα όρια $m_T(-1)$ και $m_T(+1)$. Από τη στιγμή που η διάμεσος μιας κατανομής δεν εξαρτάται από τις τιμές που υπάρχουν από τις δύο πλευρές της, οι τιμές αυτές πρέπει απλώς να είναι μεγαλύτερες από το a^0 αν $\hat{\beta}_T > m_T(1)$ και αντίστροφα, από τη στιγμή που το a^0 βρίσκεται στο (-1,1), οι τιμές έξω από τα όρια στην παραπάνω σχέση ταιριάζουν απόλυτα.

Η πρακτική εφαρμογή αυτής της μεθόδου απαιτεί υπολογισμό της συνάρτησης m_T παίρνοντας προσομοιωμένα μονοπάτια $\{\tilde{Y}_T^s, t = 0,\dots,T\}$, $s = 1,\dots,S$ και υπολογίζοντας τον LS εκτιμητή για κάθε μονοπάτι, παίρνουμε S ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες πραγματοποιήσεις $\tilde{\beta}_T^s(a)$, $s = 1,\dots,S$.

Έτσι μια προσέγγιση της $m_T(a)$ μπορεί να βρεθεί σαν διάμεσος των $\widetilde{\beta}_T^s(a)$. Για έναν άπειρο αριθμό προσομοιωμένων μονοπατιών, κάθε τέτοια προσέγγιση συγκλίνει στο απαιτούμενο όριο $m_T(a)$. Έτσι ο διάμεσος αμερόληπτος εκτιμητής που προτάθηκε από τον Andrews (1993) δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια εφαρμογή της έμμεσης επαγωγής όπου η δεσμευτική συνάρτηση (binding function) $b_T(\theta) = E[\hat{\beta}_T(\theta)]$, αντικαθίσταται από τη διάμεσο του βοηθητικού εκτιμητή. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτής της εφαρμογής της έμμεσης επαγωγής είναι ότι το βοηθητικό συμπίπτει με το πραγματικό μοντέλο.

Το πρόβλημα στη γενίκευση της διαδικασίας διόρθωσης διάμεσης μεροληψίας στην περίπτωση του AR(p) μοντέλου, είναι ότι η διάμεσος δεν είναι κατάλληλη για διανυσματικές μεταβλητές. Παρ' όλα αυτά ορίζοντας σα διάμεσο της διανυσματικής μεταβλητής $\hat{\beta}_T(a)$, το διάνυσμα των διαμέσων για κάθε συνιστώσα ο Rudebusch (1993) και οι Andrews και Chen (1994) πρότειναν μια ευθεία γενίκευση της παραπάνω διαδικασίας για το AR(p) μοντέλο. Δυστυχώς τέτοιοι εκτιμητές είναι μόνο προσεγγιστικά διάμεσα αμερόληπτοι για δύο λόγους:

α) η από κοινού προσαρμογή (fit) των διαμέσων όλων των συνιστωσών είναι γενικά αδύνατη,

β) η κατανομή πιθανότητας (και έτσι και της διαμέσου) μιας δεδομένης συνιστώσας εξαρτάται από την πραγματική αλλά άγνωστη τιμή των άλλων συνιστωσών.

3.3 Διόρθωση Μεροληψίας Μέσου μέσω της Έμμεσης Επαγωγής

Ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής μπορεί να εφαρμοσθεί και για διανυσματικές μεταβλητές αφού βασίζεται στο μέσο. Προηγουμένως είδαμε την αναλογία μεταξύ της διόρθωσης διάμεσης μεροληψίας από τον Andrews και τη μεθοδολογία της έμμεσης επαγωγής. Η αντίστοιχη ιδιότητα πεπερασμένου δείγματος της έμμεσης επαγωγής είναι διόρθωση μεροληψίας μέσου σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3:

ι) Έστω ότι το πραγματικό και το βοηθητικό μοντέλο έχουν τον ίδιο αριθμό παραμέτρων ($\dim\beta = \dim\theta$). Τότε κάτω από την υπόθεση 3.1, ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής $\hat{\theta}_T$ είναι μέσος αμερόληπτος στο b_T, δηλαδή:

$$b_T^{-1}\{E[b_T(\hat{\theta}_T)]\} = \theta^0$$

όπου θ^0 είναι η πραγματική τιμή των παραμέτρων,

ιι) έστω ότι το βοηθητικό μοντέλο συμπίπτει με το πραγματικό και ότι ο βοηθητικός εκτιμητής $\hat{\beta}_T$, είναι μέσος αμερόληπτος , δηλαδή $E(\hat{\beta}_T) = \theta^0$, τότε ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής θα συμπίπτει με το βοηθητικό εκτιμητή. Δηλαδή $\hat{\theta}_T = \hat{\beta}_T$.

Απόδειξη:

ι) Από την έκφραση $\hat{\theta}_T = b_T^{-1}(\hat{\beta}_T)$ του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής $E[b_T(\hat{\theta}_T)] = E[\hat{\beta}_T] = E[\tilde{\beta}_T(\theta^0)] = b_T(\theta^0)$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $b_T(\cdot)$ είναι ένα προς ένα.

ιι) το αποτέλεσμα είναι προφανές αφού η b_T είναι η ταυτοτική συνάρτηση κάτω από τη συνθήκη της αμεροληψίας.

Το δεύτερο μέρος της πρότασης λέει ότι αν ο βοηθητικός εκτιμητής είναι μέσος αμερόληπτος, τότε η διαδικασία έμμεσης επαγωγής δεν τον χειροτερεύει. Το πρώτο μέρος είναι το αντίστοιχο της ιδιότητας της διάμεσης αμεροληψίας στη διαδικασία διόρθωσης του Andrews. Ειδικότερα, αν το μεροληπτικό σφάλμα του εκτιμητή είναι μια συγγενής (affine) συνάρτηση της άγνωστης παραμέτρου, δηλαδή αν η b_T συγγενής, τότε ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής είναι συγγενής μέσος αμερόληπτος. Αλλά αφού η b_T είναι γενικά άγνωστη, δε μπορούμε να συμπεράνουμε από την ιδιότητα αυτή ότι η έμμεση επαγωγή θα μειώσει την μεροληψία του εκτιμητή $\hat{\beta}_T$.

Για να καταλάβουμε το συμπέρασμα του πρώτου μέρους της πρότασης ας θεωρήσουμε την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία. Ορίζουμε την συνάρτηση $b_T^{(1)}$ για τον εκτιμητή $\hat{\theta}_T$, όπως η b_T ορίστηκε από τον εκτιμητή $\hat{\beta}_T$, δηλαδή $b_T^{(1)}(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}_T)$, για $\theta \in \Theta$.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον εκτιμητή $\hat{\theta}_T^{(1)} = b_T^{(1)-1}(\hat{\theta}_T)$. Γενικά ορίζουμε μια σειρά εκτιμητών:

$$\hat{\theta}_T^{(k)} = b_T^{(k)-1}(\hat{\theta}_T^{(k-1)}), \text{ με } b_T^{(k)}(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}_T^{(k-1)}), \theta \in \Theta$$

Θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις $b_T^{(k)}$ και οι εκτιμητές $\hat{\theta}_T^{(k-1)}$ ικανοποιούν την υπόθεση 3.1, τότε αν η διαδικασία συγκλίνει, δηλαδή αν τα όρια $b_T^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} b_T^{(k)}$ και $\hat{\theta}_T^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} \hat{\theta}_T^{(k)}$ υπάρχουν, τότε ο οριακός εκτιμητής $\hat{\theta}_T^{(\infty)}$ είναι μέσος αμερόληπτος. Για να το δούμε αυτό ,για ένα τέτοιο οριακό σημείο, έχουμε $b_T^{(\infty)}(\hat{\theta}_T^{(\infty)}) = \hat{\theta}_T^{(\infty)}$, το οποίο σημαίνει ότι η $b_T^{(\infty)}$ ισούται με την ταυτοτική συνάρτηση στο $\hat{\theta}_T^{(\infty)}(\Theta)$, το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει ο εκτιμητής $\hat{\theta}_T^{(\infty)}$ όταν η πραγματική τιμή της παραμέτρου θ κινείται στο Θ. Τότε προκύπτει από τον ορισμό της $b_T^{(\infty)}$, ότι $E[\hat{\theta}_T^{(\infty)}] = b_T^{(\infty)}(\theta^0) = \theta^0$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $E[\hat{\theta}_T^{(\infty)}] = b_T^{(\infty)}(\theta^0) = \theta^0$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\theta^0 \in \hat{\theta}_T^{\infty}(\Theta)$

3.4 Διόρθωση μεροληψίας με τη μέθοδο bootstrap

Όσον αφορά τη διόρθωση μεροληψίας με μεθόδους που βασίζονται στην προσομοίωση ένας ανταγωνιστής της έμμεσης επαγωγής είναι η μέθοδος Bootstrap που παρουσίασε πρώτος ο Efron (1979). Στην αρχή ορίστηκε σαν μια μη-παραμετρική μέθοδος για ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες παρατηρήσεις, αλλά αργότερα επεκτάθηκε και ορίστηκε μια “παραμετρική” bootstrap, ξαναπαίρνοντας δείγμα από μια υποθετική κατανομή, εκτιμώντας παραμέτρους [Hall (1994)], ακόμα και για δυναμικά μοντέλα μέσω αναδρομικής δειγματοληψίας, δηλαδή παίρνοντας δείγμα διαταρακτικών όρων ώστε να διατηρηθεί η σειριακή σχέση τους.

Για έναν αρχικό εκτιμητή $\hat{\beta}_T$, ένα δειγματικό μονοπάτι bootstrap με δείκτη $s, s = 1,\ldots,S$ ορίζεται αναδρομικά από:

$$Z_t^s(\hat{\beta}_T) = \phi(Z_{t-1}^s(\hat{\beta}_T), u_t^s; \theta)$$

$$Y_t^s(\hat{\beta}_T) = r(Y_{t-1}^s(\hat{\beta}_T), z_t^s(\hat{\beta}_T); \theta)$$

Από S ανεξάρτητα προσομοιωμένα μονοπάτια διαταρακτικών όρων $\{u_t^s, t = 1,\ldots,T\}$ παρμένα από την κατανομή G_0 και με αρχικές τιμές $Y_0^h(\hat{\beta}_T)$ και $Z_0^s(\hat{\beta}_T)$, $s, s = 1,\ldots,S$ ανεξάρτητες παρμένες από τη στάσιμη κατανομή (Y, Z) με τιμή παραμέτρων $\hat{\beta}_T$, ή παίρνοντας αρχικές σταθερές τιμές $\tilde{Y}_0$, $\tilde{Z}_0$.

Μια τέτοια δειγματοληψία είναι σύμφωνη με το μοντέλο μας αν και μόνο αν το ίδιο το $\hat{\beta}_T$, είναι ένας εκτιμητής του διανύσματος θ των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν (το βοηθητικό και το πραγματικό μοντέλο συμπίπτουν). Σε αυτή την περίπτωση η δειγματοληψία bootstrap δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ειδική περίπτωση της έμμεσης επαγωγής που ορίστηκε παραπάνω για την τιμή $\hat{\beta}_T$ του διανύσματος των παραμέτρων.

Ο εκτιμητής bootstrap και η προσέγγισή του $\overline{\theta}_T^S$ (για πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων S) γενικά δε συμπίπτει με τον εκτιμητή έμμεσης επαγωγής $\hat{\theta}_T$ και $\hat{\theta}_T^S$, αφού σύμφωνα με τον Hall (1994), ορίζονται από:

$$\overline{\theta}_T = \hat{\beta}_T - [b_T(\hat{\beta}_T) - \hat{\beta}_T]$$

$$\overline{\theta}_T^S = \hat{\beta}_T - [\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \widetilde{\beta}_T^s(\hat{\beta}_T) - \hat{\beta}_T]$$

Γενικά δε λύνουμε τα μη γραμμικά συστήματα που ορίζουν τα $\overline{\theta}_T$ και $\overline{\theta}_T^S$ στο θ, αντίστοιχα:

$$\hat{\beta}_T = b_T(\theta)$$

και

$$\hat{\beta}_T = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \hat{\beta}_T^s(\theta)$$

Υπάρχει όμως ένας τρόπος για να δούμε το $\overline{\theta}_T$ ($\overline{\theta}_T^S$) σαν προσέγγιση του $\hat{\theta}_T$ ($\overline{\theta}_T^S$). Θα τον περιγράψουμε εδώ για $S = \infty$, για διευκόλυνση στους συμβολισμούς (το ίδιο ισχύει και για πεπερασμένο S).

Όταν βλέπουμε τη μη-γραμμική ισότητα:

$$\hat{\beta}_T = b_T(\theta)$$

και πιστεύοντας ότι ο $\hat{\beta}_T$ δεν είναι κακός εκτιμητής του θ, μπορούμε να ελπίσουμε ότι η δεσμευτική συνάρτηση $b_T(\cdot)$, είναι αρκετά κοντά στο να συνεπάγεται ότι η:

$$g_T^1(\theta) = \theta + (\hat{\beta}_T - b_T(\theta))$$

είναι μια ισχυρή συναίρεση (contraction) ως προς το θ. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να λύσουμε τη μη γραμμική ισότητα:

$$\hat{\beta}_T = b_T(\theta)$$

Η ισοδύναμα να ψάξουμε για ένα συγκεκριμένο σημείο θ της $g_T^1(\theta)$, θεωρώντας το όριο της ακολουθίας:

$$\theta^{(n+1)} = g_T^1(\theta^{(n)})$$

για μια δεδομένη αρχική τιμή $\theta^{(1)}$. Επιπλέον πρέπει να τονίσουμε ότι η λύση της ισότητας $\hat{\beta}_T = b_T(\theta)$ μπορεί να βρεθεί σαν το όριο της ακολουθίας:

$$\theta^{(n+1)} = g_T^{\lambda}(\theta^{(n)})$$

όπου:

$$g_T^{\lambda}(\theta) = \theta + \lambda(\hat{\beta}_T - b_T(\theta))$$

για δεδομένο αριθμό λ μεταξύ του 0 και 1. Η ερμηνεία αυτής της διαδικασίας είναι ικανοποιητική αφού:

$$\begin{aligned}\theta^{(n+1)} &= \theta^{(n)} + \lambda(\hat{\beta}_T - b_T(\theta^{(n)})) \\ &= (1-\lambda)\theta^{(n)} + \lambda(\hat{\beta}_T - \text{bias})\end{aligned}$$

όπου $b_T(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})$ είναι σαν εκτίμηση της μεροληψίας του $\hat{\beta}_T$ στο n βήμα. Το $\theta^{(n+1)}$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός του εκτιμητή $\theta^{(n)}$ του προηγούμενου βήματος και του αρχικού εκτιμητή $\hat{\beta}$ με διορθωμένη μεροληψία στο n βήμα

Συνοψίζοντας, όταν βρούμε ένα λ, τέτοιο ώστε το $g_T^{\lambda}(\cdot)$ να είναι ισχυρή συναίρεση (contraction), έχουμε ορίσει έναν αλγόριθμο που είναι ικανοποιητικός τουλάχιστον για δύο λόγους:

α) Συγκλίνει στον έμμεσο εκτιμητή.

β) Κάθε βήμα του αλγορίθμου είναι μια φυσική διόρθωση μεροληψίας, που δεν απαιτεί επιπλέον προσομοιώσει. Πράγματι από τη στιγμή που πάρουμε S ανεξάρτητα μονοπάτια $\{u_t^s, t = 1,\dots,T\}$ από το αναδρομικό σύστημα

$$\begin{cases} Z_t^s(\theta) = \phi(Z_{t-1}^s(\theta), u_t^s; \theta) \\ Y_t^s(\theta) = r(Y_{t-1}^s(\theta), z_t^s(\hat{\beta}_T); \theta) \end{cases}$$

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε τιμή $\theta^{(n)}, n = 1,2,\dots$ του θ.

Όσον αφορά τον αλγόριθμο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνήθης διαδικασία bootstrap εκτελεί μόνο το πρώτο βήμα του αλγορίθμου για την επιλογή: $\theta^{(1)} = \hat{\beta}_T$ και $\lambda = 1$, αφού:

$$\theta^{(2)} = \bar{\theta}_T = g_T^1(\hat{\beta}_T).$$

Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία:

$$\theta^{(3)} = g_T^1(\bar{\theta}_T)$$

$$\theta^{(4)} = g_T^1(\theta^{(3)})$$

Θα βελτιώσει τον εκτιμητή αφού σε κάθε βήμα κάνουμε καλύτερη εκτίμηση της μεροληψίας χρησιμοποιώντας το διορθωμένο $\hat{b}_T$.

Βέβαια, η βιβλιογραφία προτείνει επιπλέον μια βελτίωση του $\overline{\theta}_T$ (ή $\overline{\theta}_T^S$) από την επονομαζόμενη επαναλαμβανόμενη (iterated) bootstrap:

$$\overline{\theta}_T^{(1)} = \overline{\theta}_T = \hat{\beta}_T - [b_T^{(1)}(\hat{\beta}_T) - \hat{\beta}_T]$$
$$\overline{\theta}_T^{(2)} = \overline{\theta}_T^{(1)} - [b_T^{(2)}(\overline{\theta}_T^{(1)}) - \overline{\theta}_T^{(1)}]$$

και γενικότερα

$$\overline{\theta}_T^{(n+1)} = \overline{\theta}_T^{(n)} - [b_T^{(n+1)}(\overline{\theta}_T^{(n)}) - \overline{\theta}_T^{(n)}].$$

Αλλά είναι σημαντικό να διατηρούμε στο μυαλό μας ότι αν χρησιμοποιούμε έναν μεγάλο αριθμό S^1 επαναλήψεων για να έχουμε μια σωστή προσέγγιση της δεσμευτικής συνάρτησης $b_T^{(1)}(\cdot)$ που σχετίζεται με τον αρχικό εκτιμητή $\hat{\beta}_T$, S^2 επαναλήψεις για την $b_T^{(2)}(\cdot)$ και γενικά S^n για την $b_T^{(n)}(\cdot)$. Πράγματι χρειαζόμαστε S τυχαίες τιμές (drawings) του $\overline{\theta}_T^{(1)}$ για την προσέγγιση του $b_T^{(2)}(\cdot)$, αλλά και κάθε τυχαία τιμή (προσέγγιση) του $\overline{\theta}_T^{(1)}$ απαιτεί S τυχαίες τιμές (drawings) για την $b_T^{(1)}(\cdot)$. Το γεγονός αυτό κάνει την iterated bootstrap (όπως και την iterated έμμεση επαγωγή) ανέφικτη. Αντίθετα η επαναληπτική διαδικασία

$$\theta^{(3)} = g_T^1(\overline{\theta}_T)$$
$$\theta^{(4)} = g_T^1(\theta^{(3)})$$

Φαίνεται εφικτή και μία φυσική βελτίωση του εκτιμητή bootstrap. Από αυτή την άποψη, ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής φαίνεται να είναι προτιμότερος από τον συνήθη εκτιμητή bootstrap, τουλάχιστον όταν η μετάφρασή (interpretation) του ως όριο της ακολουθίας ,$\theta^{(n+1)} = g_T^{\lambda}(\theta^{(n)})$,είναι.

3.5 Ανάπτυγμα Edgeworth

Όταν το μεροληπτικό σφάλμα ενός δεδομένου εκτιμητή μπορεί να υπολογιστεί, όπως στην περίπτωση της παραμέτρου διακύμανσης της γραμμικής παλινδρόμησης ένας μέσος αμερόληπτος εκτιμητής μπορεί να οριστεί από τον αρχικό εκτιμητή. Όμως γενικά το μεροληπτικό σφάλμα δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Μια άλλη προσέγγιση είναι ο ακριβής υπολογισμός των πρώτων όρων του αναπτύγματος του μεροληπτικού σφάλματος στο $\frac{1}{T}$, ώστε να οριστεί ένας νέος εκτιμητής με μειωμένη μεροληψία. Αυτή είναι συνήθης πρακτική σε αυτοπαλίνδρομα μοντέλα, για τα οποία το ανάπτυγμα ως και την πρώτη τάξη έχει δοθεί από τους Orcutt και Winocur (1969) για τα μοντέλα AR(1) και από τους Shaman και Stine (1989) για τα μοντέλα AR(p). Όμως ακόμα και αυτή η μεθοδολογία απαιτεί ακριβή υπολογισμό του αναπτύγματος μέχρι κάποια τάξη, που είναι γενικά πολύ δύσκολο.

Μέθοδοι bootstrap προτάθηκαν (βλ. Efron) για την πραγματοποίηση της τελευταίας διόρθωσης αυτόματα, το μεροληπτικό σφάλμα τάξης $\frac{1}{T}$ εξαφανίζεται στον εκτιμητή bootstrap. Στις επόμενες ενότητες, δείχνουμε ότι ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής παρουσιάζει την ίδια ιδιότητα και συγκρίνουμε τις μεθόδους εκτίμησης εστιάζοντας στον επόμενο όρο του αναπτύγματος.

3.5.1 Διόρθωση Μεροληψίας Δεύτερης Τάξης από την Έμμεση Επαγωγή

Θεωρούμε ότι ο εκτιμητής $\hat{\beta}_T$ είναι συνεπής εκτιμητής της παραμέτρου θ και ότι επιδέχεται ανάπτυγμα Edgeworth. Για πιο εύκολη παρουσίαση των συμπερασμάτων θεωρούμε ότι η βοηθητική παράμετρος β και η παράμετρος θ είναι ίδιας διάστασης. Έτσι έχουμε:

$$\hat{\beta}_T = b(\theta_0) + \frac{A(\upsilon;\theta_0)}{\sqrt{T}} + \frac{B(\upsilon;\theta_0)}{T} + \sum_a \frac{C_a(\upsilon^a;\theta_0)}{T^a} + o\left(\frac{1}{T^a}\right)$$

, όπου $a \in \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$ και $A(\upsilon;\theta_0)$, $B(\upsilon;\theta_0)$, $C(\upsilon;\theta_0)$ είναι τυχαία διανύσματα, που εξαρτώνται από το τον ασυμπτωτικό τυχαίο όρο υ. Η ισότητα στην παραπάνω σχέση έχει την έννοια της πιθανότητας (βλ. παράδειγμα Hell (1992), Κεφάλαιο 2). Όπως ξέρουμε (Παράρτημα σελ. 4 (Π4)) ο όρος πρώτης τάξης $A(\upsilon;\theta_0)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέσο μηδέν. Ο επόμενος όρος του $\frac{1}{T}$ είναι $\frac{1}{T^2}$ στις περισσότερες περιπτώσεις, για να αντιμετωπίσουμε την γενική περίπτωση εισάγουμε την τάξη $\frac{1}{T^a}$, όπου a θα μπορούσε να είναι $\frac{3}{2}$ ή 2. Τέτοιο ανάπτυγμα Edgeworth υπάρχει σε πολλές περιπτώσεις όπου η στατιστική συνάρτηση που μας ενδιαφέρει έχει οριακή τυπική κατανομή.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν επεξηγηματικές μεταβλητές, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε με παρόμοιο τρόπο και τον εκτιμητή που προκύπτει από τα προσομοιωμένα δεδομένα. Έτσι έχουμε T προσομοιωμένες τιμές με S επαναλήψεις $\{y_t^s(\theta), t = 1,2,\ldots,T\}$. Επομένως το ανάπτυγμα δεύτερης τάξης του εκτιμητή είναι:

$$\hat{\beta}_T^s = b(\theta) + \frac{A(\upsilon_s;\theta)}{\sqrt{T}} + \frac{B(\upsilon_s;\theta)}{T} + \frac{C(\upsilon_s;\theta)}{T^a} + o\left(\frac{1}{T^a}\right)$$

, όπου ασυμπτωτικοί τυχαίοι όροι υ, $\upsilon_s, s = 1,2,\ldots,S$ μπορούν να θεωρηθούν εξ ορισμού ανεξάρτητοι και με την ίδια κατανομή (i.i.d.).

Αν ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής, $\hat{\theta}_{ST}$ ορίζεται ως η λύση του συστήματος:

$$\hat{\beta}_T = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\hat{\beta}_T^s(\hat{\theta}_{ST}),$$

τότε αντικαθιστώντας από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$b(\theta_0) + \frac{A(\upsilon;\theta_0)}{\sqrt{T}} + \frac{B(\upsilon;\theta_0)}{T} + \frac{C(\upsilon;\theta_0)}{T^a} + o(T^{-a})$$

$$= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left\{ b(\hat{\theta}_{ST}) + \frac{A(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})}{\sqrt{T}} + \frac{B(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})}{T} + \frac{C(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})}{T^a} + o(T^{-a})\right\}.$$

Αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα δεύτερης τάξης του $\hat{\theta}_{ST}$:

$$\hat{\theta}_{ST} = \theta_0 + \frac{a^*}{\sqrt{T}} + \frac{b^*}{T} + \frac{c^*}{T^{3/2}} + o\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right),$$

Από τα αναπτύγματα Taylor των $A(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})$, $B(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})$ και $C(\upsilon_s;\hat{\theta}_{ST})$ γύρω από το θ_0 και κρατώντας μόνο τους όρους που είναι μικρότερης τάξης από το T^{-a} παίρνουμε:

$$\theta_0 + \frac{A(\upsilon;\theta_0)}{\sqrt{T}} + \frac{B(\upsilon;\theta_0)}{T} + \frac{C(\upsilon;\theta_0)}{T^a} + o(T^{-a})$$

$$= \theta_0 + \frac{a^*}{\sqrt{T}} + \frac{b^*}{T} + \frac{c^*}{T^{3/2}} + o(T^{-3/2})$$

$$+\left\{\frac{1}{S\sqrt{T}} + \sum_{s=1}^{S} A(\upsilon_s;\theta_0) + \frac{1}{ST}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)a^*\right.$$

$$\left.+\frac{1}{ST^{3/2}} + \sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)b^* + \frac{1}{2ST^{3/2}}\sum_{s=1}^{S} a^{*\prime}\frac{\partial^2 A(\upsilon_s;\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)a^* + o(T^{-3/2})\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{ST}\sum_{s=1}^{S} B(\upsilon_s;\theta_0) + \frac{1}{ST^{3/2}}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial B}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)a^* + o(T^{-3/2})\right\}$$

$$+\frac{1}{ST^{a}}\sum_{s=1}^{S}C(\upsilon_s;\theta_0)+o(T^{-a})$$

Συγκρίνοντας τους όρους της παραπάνω ισότητας προκύπτουν οι όροι του αναπτύγματος του $\hat{\theta}_{ST}$:

$$a^{*}=A(\upsilon;\theta_0)-\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}A(\upsilon_s;\theta_0),$$

$$b^{*}=B(\upsilon;\theta_0)-\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}B(\upsilon_s;\theta_0)-\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right]a^{*},$$

$$c^{*}=\left[C(\upsilon;\theta_0)-\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}C(\upsilon_s;\theta_0)\right]1_{\{a=3/2\}}$$

$$-\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial B}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right]a^{*}-\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right]b^{*}$$

$$-\frac{1}{2}a^{*\prime}\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right]a^{*}$$

, όπου οι τυχαίοι όροι υ, $\upsilon_s, s=1,2,\ldots,S$ είναι ανεξάρτητοι και με την ίδια κατανομή (i.i.d.).

Στην περίπτωση που έχουμε άπειρο αριθμό επαναλήψεων ($S=\infty$),

$$a^{*}_{\infty}=\lim_{S\to\infty}a^{*}=A(\upsilon;\theta_0)-E[A(\upsilon_s;\theta_0)]$$

$$b^{*}_{\infty}=\lim_{S\to\infty}b^{*}=B(\upsilon;\theta_0)-E[B(\upsilon_s;\theta_0)]-E\left[\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon;\theta_0)\right]$$

$$\times\{A(\upsilon;\theta_0)-E[A(\upsilon_s;\theta_0)]\}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής $\hat{\theta}_{ST}$, που αντιστοιχεί σε άπειρο αριθμό επαναλήψεων, είναι αμερόληπτος μέχρι το δεύτερο βαθμό, δηλαδή οι όροι τάξης $\frac{1}{\sqrt{T}}$ και $\frac{1}{T}$ του αναπτύγματος Edgeworth ικανοποιούν τις σχέσεις: $E(a^{*}_{\infty})=E(b^{*}_{\infty})=0$.

Η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει όταν έχουμε ένα σταθερό αριθμό επαναλήψεων S. Ο πρώτος όρος της μεροληψίας εξαφανίζεται αφού:

$$E(a^*) = E[A(\upsilon;\theta_0)] - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} E[A(\upsilon_s;\theta_0)] = 0.$$

Το αρχικό μεροληπτικό σφάλμα δεύτερης τάξης του εκτιμητή $\hat{\beta}_T$ είναι:

$$E[\hat{\beta}_T] - b(\theta_0) = \frac{EB(\upsilon;\theta_0)}{T} + o\left(\frac{1}{T}\right)$$

το μεροληπτικό σφάλμα δευτέρου βαθμού δεν εξαρτάται από τους όρους δεύτερης τάξης του $B(\cdot;\theta_0)$.

Σε αντίθεση με το βοηθητικό εκτιμητή, η μεροληψία δεύτερης τάξης του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής δεν εξαρτάται από τον συντελεστή B, αλλά ορίζεται από:

$$E(b^*) = -E\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0)a^*\right]$$

$$= -E\left\{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\left[A(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}A(\upsilon_s;\theta_0)\right]\right\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{p} E\left\{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta_j}(\upsilon_s;\theta_0)\left[A_j(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}A_j(\upsilon_s;\theta_0)\right]\right\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{p} \operatorname{cov}\left\{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta_j}(\upsilon_s;\theta_0); A_j(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}A_j(\upsilon_s;\theta_0)\right\}$$

$$= \frac{1}{S^2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{S}\operatorname{cov}\left\{\frac{\partial A}{\partial \theta_j}(\upsilon_s;\theta_0); A_j(\upsilon;\theta_0)\right\}$$

$$= \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{p} \operatorname{cov}\left\{\frac{\partial A}{\partial \theta_j}(\upsilon_s;\theta_0); A_j(\upsilon;\theta_0)\right\}$$

Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αφού ισχύει η ανεξαρτησία μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών υ, $\upsilon_s, s = 1,2,...,S$.

Ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής είναι ισοδύναμος με τον αρχικό εκτιμητή με διορθωμένη τη μεροληψία δεύτερης τάξης. Όταν ο αριθμός επαναλήψεων S, είναι πεπερασμένος, η μεροληψία δεύτερης τάξης του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής είναι μικρότερη σε απόλυτη τιμή από αυτή του βοηθητικού εκτιμητή αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{1}{S}\sum_{j=1}^{p} \operatorname{cov}\left\{\frac{\partial A}{\partial \theta_j}(\upsilon_s;\theta_0); A_j(\upsilon;\theta_0)\right\}\right| \leq \left|E[B(\upsilon;\theta_0)]\right|,$$

το οποίο δίνει και τον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων που χρειάζεται για να βελτιωθεί η μεροληψία δεύτερης τάξης του εκτιμητή.

3.5.2 Σύγκριση με τη διόρθωση μεροληψίας bootstrap

Οι εκτιμητές bootstrap, που βασίζονται σε προσομοιώσεις, είναι και αυτοί αμερόληπτοι στη δεύτερη τάξη για άπειρο αριθμό επαναλήψεων. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, αν υποθέσουμε ότι ο βοηθητικός εκτιμητής δέχεται ανάπτυγμα Edgeworth, τότε ο bootstrap εκτιμητής που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{\theta}_T^S = \hat{\beta}_T - [\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \tilde{\beta}_T^s(\hat{\beta}_T) - \hat{\beta}_T],$$

δέχεται επίσης ανάπτυγμα Edgeworth (κάτω από κάποιες συνθήκες κανονικότητας):

$$\bar{\theta}_T^S = \theta_0 + \frac{a^b}{\sqrt{T}} + \frac{b^b}{T} + \frac{c^b}{T^{3/2}} + o\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)$$

όπου οι συντελεστές a^b, b^b και c^b προκύπτουν από τα A, B και C από τις σχέσεις:

$$a^b = A(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} A(\upsilon_s;\theta_0)$$

$$b^b = B(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} B(\upsilon_s;\theta_0) - \left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right] A(\upsilon;\theta)$$

$$\begin{aligned} c^b = & \left[C(\upsilon;\theta_0) - \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} C(\upsilon_s;\theta_0)\right] 1_{\{a=3/2\}} \\ & - \left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial B}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right] A(\upsilon;\theta_0) - \left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right] B(\upsilon;\theta_0) \\ & - \frac{1}{2} A'(\upsilon;\theta_0)\left[\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right] A(\upsilon;\theta_0) \end{aligned}$$

Όπως και στον εκτιμητή έμμεσης επαγωγής, η μεροληψία πρώτης τάξης είναι μηδέν, δηλαδή, $E(a^b) = 0$. Η μεροληψία δεύτερης τάξης δίνεται από τη σχέση:

$$E(b^b) = -\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} E\left[\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon_s;\theta_0) A(\upsilon;\theta_0)\right] = E[A(\upsilon;\theta_0)] E\left[\frac{\partial A}{\partial \theta'}(\upsilon;\theta_0)\right]$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών υ, $\upsilon_s, s = 1,2,\ldots,S$. Η παραπάνω ισότητα δείχνει ότι:

Αν $E[A(\upsilon;\theta_0)] \neq 0$, τότε ακόμη και για άπειρο αριθμό προσομοιώσεων, ο εκτιμητής bootstrap παρουσιάζει μεροληψία δεύτερης τάξης. Για το λόγω αυτό στην περίπτωση αυτή ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής προτιμάται αφού η μεροληψία δεύτερης τάξης του εξαφανίζεται για άπειρο S.

Αν $E[A(\upsilon;\theta_0)]=0$, τότε η μεροληψία δεύτερης τάξης του εκτιμητή bootstrap εξαφανίζεται για άπειρο αριθμό επαναλήψεων, δηλαδή $E(b^b)=0$. Στην περίπτωση αυτή ο εκτιμητής bootstrap προτιμάται έναντι του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής.

Στην περίπτωση που $S=\infty$ και $E[A(\upsilon;\theta_0)]=0$ και οι δύο εκτιμητές διορθώνονται από τη μεροληψία δεύτερης τάξης. Έτσι εξετάζουμε τη μεροληψία τρίτης τάξης. Συμβολίζουμε $c^*_\infty = \lim_{S\to\infty} c^*$ και $c^b_\infty = \lim_{S\to\infty} c^b$. Χρησιμοποιώντας ξανά την ανεξαρτησία των υ και $\upsilon_s, s=1,2,...,S$ και το γεγονός ότι $E[A(\upsilon;\theta_0)]=0$, παίρνουμε τη μεροληψία τρίτης τάξης του εκτιμητή έμμεσης επαγωγής:

$$E(c^*_\infty) = -\frac{1}{2}E\left[A'(\upsilon;\theta_0)E\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right)A(\upsilon;\theta_0)\right]$$

και του εκτιμητή bootstrap:

$$E(c^b_\infty) = -E\left[\frac{\partial A}{\partial\theta'}(\upsilon;\theta_0)\right]E[B(\upsilon;\theta_0)] - \frac{1}{2}E\left[A'(\upsilon;\theta_0)E\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\theta\partial\theta'}(\upsilon_s;\theta_0)\right)A(\upsilon;\theta_0)\right]$$

Φανερά οι δύο παραπάνω εκφράσεις δεν μπορούν να συγκριθούν γενικά και οι εκτιμητές έμμεσης επαγωγής και bootstrap είναι ανταγωνιστές για άπειρο αριθμό προσομοιώσεων.

<u>Παράδειγμα</u>

Για να απεικονίσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα, θεωρούμε την απλή περίπτωση των ανεξάρτητων ομοίως κατανεμημένων παρατηρήσεων $y_1,...,y_T$ με κανονική κατανομή $N(m,\sigma^2)$. Οι πραγματικές τιμές m_0, σ_0^2 είναι άγνωστες. Αν ο βοηθητικός εκτιμητής είναι εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας, έχουμε:

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = \bar{y}_T, \qquad \hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}_T)^2,$$

ξέρουμε ότι ο $\hat{\sigma}_T^2$ είναι μεροληπτικός δευτέρου βαθμού:

$$\hat{\sigma}_T^{2s} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[y_t^s(\theta) - \bar{y}_T^s(\theta)]^2$$

όπου $y_t^s(\theta) = m + \sigma u_t^s$, $u_t^s \sim \mathrm{IIN}(0,1)$. Και έτσι έχουμε:

$$\hat{\sigma}_T^{2s} = \sigma^2 \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t^s - \bar{u}_T^s)^2 .$$

Τέλος ο εκτιμητής έμμεσης επαγωγής $\hat{\sigma}_{ST}$, του σ^2, είναι από:

$$\hat{\sigma}_T^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t - \bar{u}_T)^2$$

$$= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\hat{\sigma}_T^{2s}\ (\hat{\sigma}_{ST}^2)$$

$$= \hat{\sigma}_{ST}^2 \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t^s - \bar{u}_T^s)^2\right],$$

Ή:

$$\hat{\sigma}_{ST}^2 = \sigma_0^2 \frac{(u_t - \bar{u}_T)^2}{\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T}(u_t^s - \bar{u}_T^s)^2}.$$

Η κατανομή πεπερασμένου δείγματος του $\hat{\sigma}_T^2$ είναι τέτοια ώστε:

$$T\frac{\hat{\sigma}_T^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(T-1),$$

Ενώ η κατανομή πεπερασμένου δείγματος του $\hat{\sigma}_{ST}^2$ είναι τέτοια ώστε:

$$\frac{\hat{\sigma}_{ST}^2}{\sigma_0^2} \sim F[T-1, S(T-1)].$$

Στο σχήμα 4 , δίνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του $\hat{\sigma}_T^2/\sigma_0^2$ και του $\hat{\sigma}_{ST}^2/\sigma_0^2$, για $T=20$ και $S=10$. Στην οριακή περίπτωση, $S=\infty$, παίρνουμε $(T-1)\hat{\sigma}_{\infty T}^2/\sigma_0^2 \sim \chi^2(T-1)$ και το $\hat{\sigma}_{\infty T}^2$ είναι αμερόληπτο.

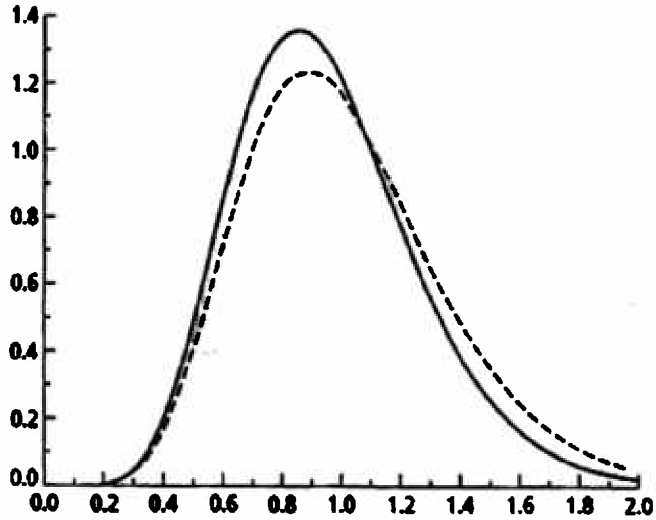
Φυσικά, όταν το S είναι μικρό το κέρδος στη μεροληψία ισορροπείται με απώλεια στη διακύμανση. Στο παράδειγμα που εξετάζουμε, οι ακριβείς ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης είναι:

$$E[\hat{\sigma}_T^2] = \sigma_0^2\frac{T-1}{T}, \qquad V[\hat{\sigma}_T^2] = \sigma_0^4\frac{2(T-1)}{T},$$

$$E[\hat{\sigma}_{ST}^2] = \sigma_0^2\frac{S(T-1)}{S(T-1)-2},$$

$$V[\hat{\sigma}_{ST}^2] = \sigma_0^4\frac{2S^2(T-1)[(S+1)(T-1)-2]}{[S(T-1)-2]^2[S(T-1)-4]}.$$

Σχήμα 4: Η σ.π.π. του εκτιμητή με και χωρίς τη διόρθωση της έμμεσης επαγωγής. $T=20$, $S=10$,(____): $\chi^2(T-1)$,(------): $F[T-1,S(T-1)]$.



Τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}_T &= (E\hat{\sigma}_T^2-\sigma_0^2)^2+V\hat{\sigma}_T^2\\ &=\sigma_0^4\left[\frac{1}{T^2}+\frac{2(T-1)}{T^2}\right]\\ &=\sigma_0^4\,\frac{2T-1}{T^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}_{ST} &= (E\hat{\sigma}_{ST}^2-\sigma_0^2)^2+V\hat{\sigma}_{ST}^2\\ &=\sigma_0^4\left[\frac{4}{[S(T-1)-2]^2}+\frac{2S(T-1)[(S+1)(T-1)-2]}{[S(T-1)-2]^2[S(T-1)-4]}\right].\end{aligned}$$

Για μεγάλο T, έχουμε:

$$\mathrm{MSE}_T\sim\frac{2\sigma_0^4}{T},\qquad \mathrm{MSE}_{ST}\sim\frac{2\sigma_0^4}{T}\frac{S+1}{S}.$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η μέθοδος της Έμμεσης Επαγωγής που αναπτύχθηκε από το Smith (1990,1993) και επεκτάθηκε από τους Gourieroux, Monfort και Renault (1993), βασίζεται στην προσομοίωση και προτείνεται για τον χειρισμό περίπλοκων μοντέλων στα οποία οι συνήθεις μέθοδοι επαγωγής δεν είναι επιτυχείς.

Παρουσιάσαμε τη μεθοδολογία της Έμμεσης Επαγωγής, τις διάφορες μορφές των εκτιμητών της, δείξαμε τις βασικές ιδιότητες τους και αποδείξαμε τις ασυμπτωτικές κατανομές τους. Δώσαμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για την εκτίμηση της παραμέτρου του Μοντέλου Κινητού Μέσου MA(1) και συγκρίναμε τα αποτελέσματα των διαφόρων εκτιμητών της Έμμεσης Επαγωγής με τον κλασικό εκτιμητή Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Και τέλος παρουσιάσαμε μερικές επιπλέον ιδιότητες της Έμμεσης Επαγωγής σε πεπερασμένα δείγματα. Επιπλέον παρουσιάσαμε άλλες δύο μεθόδους εκτίμησης που βασίζονται στην προσομοίωση δεδομένων : Διόρθωση Διάμεσης Μεροληψίας (Median-bias correction) που προτάθηκε από τον Andrews για Αυτοπαλίνδρομα Μοντέλα Πρώτης Τάξης (AR(1)) και τη Μέθοδο Bootstrap τις συγκρίναμε με τη Μέθοδο της Έμμεσης Επαγωγής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Απόδειξη της συνέπειας των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής

Όπως αποδείξαμε (σελ.5) ο εκτιμητής $\hat{\beta}_{\mathrm{T}}$ είναι συνεπής εκτιμητής της β_0, δηλαδή:

$$\hat{\beta}_{\mathrm{T}} = \arg\max_{\beta} \psi_{\mathrm{T}}(\underline{y_{\mathrm{T}}}, \underline{z_{\mathrm{T}}}; \beta) \to \arg\max_{\beta} \psi_{\infty}(\theta_0, \beta) = b(\theta_0).$$

και ο $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ είναι συνεπής εκτιμητής της δεσμευτικής συνάρτησης, δηλαδή:

$$\hat{\beta}_{ST}(\theta) = \arg\max_{\beta} \sum_{s=1}^{S} \psi_{\mathrm{T}}(\underline{y_{\mathrm{T}}^{s}}(\theta), \underline{z_{\mathrm{T}}}; \beta) \to \arg\max_{\beta} S\psi_{\infty}(\theta, \beta) = b(\theta).$$

Άρα ο $\hat{\beta}_{\mathrm{T}}$ συγκλίνει στη β_0 και ο $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ στην δεσμευτικής συνάρτησης, επομένως:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{ST}(\Omega) &= \arg\min_{\theta}[\hat{\beta}_{\mathrm{T}} - \hat{\beta}_{ST}(\theta)]'\Omega[\hat{\beta}_{\mathrm{T}} - \hat{\beta}_{ST}(\theta)] \\
&\to \arg\min_{\theta}[b(\theta_0) - b(\theta)]'\Omega[b(\theta_0) - b(\theta)] \\
&= \{\theta : b(\theta) = b(\theta_0)\} \text{ (αν και μόνο αν ο } \Omega \text{ είναι θετικά ορισμένος)} \\
&= \theta_0 \text{ (από την A(5))}
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο και βασισμένοι στην παράγωγο $\dfrac{\partial \psi_{\infty}}{\partial \beta}$ μπορούμε να αποδείξουμε και τη συνέπεια του εκτιμητή $\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)$.

$$\hat{\theta}_{ST}(\Sigma) = \arg\min_{\theta}\left[\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(y_T^s(\theta) / \underline{y_{t-1}^s}(\theta), \underline{z_T}, \hat{\beta}_T)\right]' \Sigma \left[\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(y_T^s(\theta) / \underline{y_{t-1}^s}, \underline{z_T}, \hat{\beta}_T)\right]$$

$$\to \arg\min_{\theta}\left[S\frac{\partial \psi_{\infty}}{\partial \beta}(\theta_0, b(\theta_0))\right]' \Sigma \left[S\frac{\partial \psi_{\infty}}{\partial \beta}(\theta_0, b(\theta_0))\right]$$

$$= \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \beta}(\theta_0, b(\theta_0))\,(\text{από την A(4)})$$

$$= \{\theta : b(\theta) = b(\theta_0)\}\ (\text{αν και μόνο αν ο } \Sigma \text{ είναι θετικά ορισμένος})$$

$$= \theta_0\ (\text{από την A(5)})$$

2. Ασυμπτωτικές κατανομές

Για να βρούμε τις ασυμπτωτικές κατανομές των εκτιμητών έμμεσης επαγωγής θα πρέπει να βρούμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των $\hat{\beta}_{\mathrm{T}}$ και $\hat{\beta}_{\mathrm{ST}}(\theta_0)$. Αυτές προκύπτουν από τις συνθήκες πρώτης τάξης. Έτσι έχουμε:

$$\sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; \hat{\beta}_{ST}(\theta_0)) = 0, \text{ ή}$$

$$\sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0)) + \sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \beta \partial \beta'}[\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0)]$$
$$\times \sqrt{T}[\hat{\beta}_{ST}(\theta_0) - b(\theta_0)] = o_p(1),$$

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_{ST}(\theta_0) - b(\theta_0)] = \left[-\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \beta \partial \beta'}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0))\right]^{-1}$$
$$\times \sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0)) + o_p(1),$$

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_{ST}(\theta_0) - b(\theta_0)] = \frac{1}{S}\left[-\frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \beta \partial \beta'}(\theta_0, b(\theta_0))\right]^{-1}$$
$$\times \sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0)) + o_p(1),$$

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_{ST}(\theta_0) - b(\theta_0)] = \frac{J_o^{-1}}{S}\sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0), \underline{z_T}; b(\theta_0)) + o_p(1) \qquad \textbf{(Π1)}$$

Από την Π1 φαίνεται ότι ο $\hat{\beta}_{ST}(\theta)$ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμος με τον $\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\hat{\beta}_{\mathrm{T}}^{s}(\theta)$, όπου $\hat{\beta}_{\mathrm{T}}^{s}(\theta) = \arg\max_{\beta} \psi_{\mathrm{T}}[\underline{y_{\mathrm{T}}^s}(\theta), \underline{z_{\mathrm{T}}}; \beta]$ και με τον $\tilde{\beta}_{ST}(\theta)$, όπου

$\widetilde{\beta}_{ST}(\theta) = \arg\max_{\beta} \psi_{ST}[\underline{y}^{s}_{ST}(\theta), \underline{z}_{T}; \beta]$ και $z_{\kappa T+h} = z_h$, $\kappa = 0,\dots,S-1$, $h = 1,\dots,T$. Αυτό ισχύει αρκεί να ισχύει:

$$\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y}_T, \underline{z}_T; \beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}(\underline{y}_t, \underline{z}_t; \beta),$$

με σταθερό αριθμό μεταβλητών στις $\underline{y}_t$ και $\underline{z}_t$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\sqrt{T}\,\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}(\underline{y}_T, \underline{z}_T; \beta) = 0 \text{ ή,}$$

$$\sqrt{T}\,\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}[\underline{y}_T, \underline{z}_T; b(\theta_0)] + \frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \beta \partial \beta'}[\underline{y}_T, \underline{z}_T; b(\theta_0)]\sqrt{T}[\hat{\beta}_T - b(\theta_0)] = o_p(1)$$

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_T - b(\theta_0)] = \left[-\frac{\partial^2 \psi_T}{\partial \beta \partial \beta'}[\underline{y}_T, \underline{z}_T; b(\theta_0)]\right]^{-1}\sqrt{T}\,\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}[\underline{y}_T, \underline{z}_T; b(\theta_0)] + o_p(1)$$

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_T - b(\theta_0)] = -J_0^{-1}\sqrt{T}\,\frac{\partial \psi_T}{\partial \beta}[\underline{y}_T, \underline{z}_T; b(\theta_0)] + o_p(1) \qquad \textbf{(П2)}$$

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $\hat{\theta}_{ST}(\Omega)$ προκύπτει αν θεωρήσουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \hat{\beta}'_{ST}}{\partial \theta}[\hat{\theta}_{ST}(\Omega)\Omega[\hat{\beta}_T - \hat{\beta}_{ST}(\hat{\theta}_{ST}(\Omega))] = 0.$$

Το ανάπτυγμα γύρω από το θ_0 δίνει:

$$\frac{\partial \hat{\beta}'_{ST}}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega\sqrt{\mathrm{T}}[\hat{\beta}_T - \hat{\beta}_{ST}(\theta_0)] - \frac{\partial \hat{\beta}'_{ST}}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega\frac{\partial \hat{\beta}_{ST}}{\partial \theta}(\theta_0)\sqrt{\mathrm{T}}[\hat{\theta}_{ST}(\Omega) - \theta_0] = o_p(1),$$

$$\sqrt{\mathrm{T}}[\hat{\theta}_{ST}(\Omega) - \theta_0] = \left[\frac{\partial b'(\theta_0)}{\partial \theta}\Omega\frac{\partial b(\theta_0)}{\partial \theta'}\right]^{-1}\frac{\partial b'}{\partial \theta}(\theta_0)\Omega\sqrt{\mathrm{T}}[\hat{\beta}_T - \hat{\beta}_{ST}(\theta_0)] + o_p(1) \qquad \textbf{(П3)}$$

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)$ προκύπτει αν θεωρήσουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\left\{\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2\psi_T}{\partial\theta\partial\beta'}[\underline{y_T^s}(\hat{\theta}_{ST}),\underline{z_T},\hat{\beta}_T]\right\}\Sigma\left\{\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial\psi_T}{\partial\beta}[\underline{y_T^s}(\hat{\theta})],\underline{z_T},\hat{\beta}_T\right\}=0\,.$$

Το ανάπτυγμα γύρω από τα θ_0, $b(\theta_0)$ δίνει:

$$\left\{\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial^2\psi_T}{\partial\theta\partial\beta'}[\underline{y_T^s}(\theta_0),\underline{z_T},b(\theta_0)]\right\}\Sigma$$

$$\times\{\sqrt{T}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial\psi_T}{\partial\beta}[\underline{y_T^s}(\theta_0),\underline{z_T},b(\theta_0)]+S\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\beta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\sqrt{T}[\hat{\beta}_T-b(\theta_0)]$$

$$+S\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\theta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\sqrt{T}[\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)-\theta_0]\}=o_p(1)$$

Και από την (Π1):

$$\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\beta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\Sigma\{J_0\sqrt{T}[\hat{\beta}_{ST}(\theta_0)-\hat{\beta}_T]+\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\theta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\sqrt{T}[\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)-\theta_0]\}=o_p(1)$$

$$\sqrt{T}[\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)-\theta_0]\}=\left\{\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\theta\partial\beta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\Sigma\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\theta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\right\}^{-1}$$

$$\times\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\theta\partial\beta'}[\theta_0,b(\theta_0)]\Sigma J_0\sqrt{T}[\hat{\beta}_T-\hat{\beta}_{ST}(\theta_0)]+o_p(1) \qquad \textbf{(Π4)}$$

Από τις (Π1) και (Π2):

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_T-\hat{\beta}_{ST}(\theta_0)]=J_0^{-1}\sqrt{T}\left[\frac{\partial\psi_T}{\partial\beta}(\underline{y_T},\underline{z_T};b(\theta_0))-\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial\psi_T}{\partial\beta}(\underline{y_T^s}(\theta_0),\underline{z_T};b(\theta_0))\right]$$

και χρησιμοποιώντας τις (Α7) και (Α8), παίρνουμε:

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_T-\hat{\beta}_{ST}(\theta_0)]\xrightarrow[T\to\infty]{d}N\left[0,J_0^{-1}\left[\left(1+\frac{1}{S}\right)I_0^*-2K_0+\frac{S(S-1)}{S^2}K_0\right]J_0^{-1}\right]$$

$$=N\left[0,\left(1+\frac{1}{S}\right)J_0^{-1}(I_0^*-K_0)J_0^{-1}\right]$$

$$= N\left[0,\left(1+\frac{1}{S}\right)J_0^{-1}\bar{I}_0 J_0^{-1}\right]$$

$$= N\left[0,\left(1+\frac{1}{S}\right)\Omega^{*-1}\right]$$

Και τελικά χρησιμοποιώντας την (Π3):

$$\sqrt{T}[\hat{\theta}_{ST}-\theta_0]\xrightarrow[T\to\infty]{d} N[0,W(S,\Omega)]$$

3. Ασυμπτωτική ισοδυναμία των δύο εκτιμητών

Θα αποδείξουμε ότι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)$ και $\hat{\theta}_{ST}(J_o\Sigma J_o)$ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμοι. Ξέρουμε ότι :

$$\frac{\partial b}{\partial\theta'}(\theta_0)=J_0^{-1}\frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\beta\partial\theta'}[\theta_0,b(\theta_0)],$$

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)$ που δίνεται από την (Π4)μπορεί να γραφτεί και:

$$\sqrt{T}[\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)-\theta_0]=\left\{\frac{\partial b'}{\partial\theta}(\theta_0)J_0\Sigma J_0\frac{\partial b}{\partial\theta'}(\theta_0)\right\}^{-1}$$
$$\times\frac{\partial b'}{\partial\theta}(\theta_0)J_0\Sigma J_0\sqrt{T}[\hat{\beta}_T-\hat{\beta}_{ST}(\theta_0)]+o_p(1)$$

Συγκρίνοντας με το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (Π3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα :

$$\sqrt{\mathrm{T}}\left(\hat{\theta}_{ST}(\Sigma)-\hat{\theta}_{ST}(J_o\Sigma J_o)\right)=op(1)$$

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Andrews, D. and H. Chen (1994), "Approximately Median-Unbiased Estimation of Autoregressive Models", *Journal of Buisiness and Economic Stastistics*, Vol. 12, 187-204

Duffie, D. and K. Singleton (1993), "Simulated moments Estimation of Markov Models of Asset Prices", *Econometrica*, Vol. 61, No 4, 929-952

Galbraith, J. and V. Zinde-Walsh, "Analytical Indirect Inference"

Gallant, R. and G. Tauchen (1996), "Which moments to much?", *Econometric Theory*, Vol. 12, 657-681

Gallant, R. and G. Tauchen (2002), "Simulated Score Methods and Indirect Inference for Continuous-Time models"

Gourieroux, C. and A. Monfort (1996), "Simulation Based Econometric Methods", Core Lectures, Oxford University Press

Gourieroux, C. and A. Monfort (1993), "Simulation based inference: a survey with special reference to panel data models", *Journal of Econometrics.*

Gourieroux, C, A. Monfort. and E. Renault (1993), "Indirect Inference", *Journal of applied Econometrics,* Vol. 8, S85-S118

Gourieroux, C, A. Monfort and A. Trognon (1984), "Pseudo- maximum likelihood Methods: Theory", *Econometrica,* Vol. 52, No 3, 681-700

Gourieroux, C, A. Monfort and N. Touzi (1994), "Calibration by Simulation for small sample bias correction", Discussion Paper, Crest

Hall, P. (1992), "The Bootstrap and Edgeworth Expansion", *Springer Series in Statistics,* Springer-Verlag

Kakizawa, Y. (2002), "Edgeworth Approximation in the AR (1) process with some possible non-zero initial value", *Japan Statistic soc.*, Vol.32, No 2, 209-237

Mac Fadden, D. (1976), "A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration", 57, 995-1026

Mac Kinnon, J. and A. Smith, **(1995)** "Approximate Bias Correction in Econometrics", *Discussion paper, Queen's University,* Kingston, Ontario

Marsh, P. (2000), "Edgeworth Expansions in Gaussian Autoregression", *Discussion Paper*, University of York

Pakes, A. and D. Pollard (1989), "Simulation and the asymptotics of optimization estimators", *Econometrica, 57, 1027-1058*

Orcutt, G. and H. Winokur (1969), "First order Autoregression: Inference, Estimation and Prediction", *Econometrica*, Vol. 37, No 1, 1-14

Smith, A. (1993), "Estimating Non-linear time series models using Simulated Vector autoregression", *Journal of Applied Econometrics"*, Vol. 8, S63-S84

Stine, R. and P. Shaman (1989), "A fixed Point characterization for bias of autoregressive estimators", *The annals of Statistics*, Vol. 17, No 3, 1275-1284