ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΕΘΝΩΝ ΚΑΙ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΕΘΝΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΙΚΗ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Κουκουτιανού Λ. Ιωάννα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Διεθνών και Ευρωπαϊκών Οικονομικών Σπουδών του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Διεθνή Οικονομική καιΧρηματοδοτική

Αθήνα

Δεκέμβριος 2008

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΕΘΝΩΝ ΚΑΙ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΕΘΝΗ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΙΚΗ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Κουκουτιανού Λ. Ιωάννα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Διεθνών και Ευρωπαϊκών Οικονομικών Σπουδών του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Διεθνή Οικονομική καιΧρηματοδοτική

Αθήνα

Δεκέμβριος 2008

Εγκρίνεται η διατριβή της **ΚΟΥΚΟΥΤΙΑΝΟΥ ΙΩΑΝΝΑΣ** .

Υπεύθυνος καθηγητής

ΤΟΠΑΛΟΓΛΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ Υπογραφή

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 5
ΠΕΡΙΛΗΨΗ 6
1. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ 8
1.1 Εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά προϊόντα 8
1.2 Χρήση και σημασία των παραγώγων 9
1.2.1 Αντιστάθμιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων 10
1.2.2 Μεταφορά των κινδύνων 10
1.2.3 Επενδύσεις σε παράγωγα 11
1.3 Οφέλη από την ανάπτυξη των παραγώγων 11
1.4 Είδη παραγώγων 12
1.4.1 Προθεσμιακά συμβόλαια 12
1.4.2 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης 15
1.4.3 Δικαιώματα προαίρεσης 18
1.4.4 Ανταλλαγές 26
1.4.5 Λοιπά παράγωγα 27
2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ 28
2.1 Το διωνυμικό μοντέλο 28
2.2 Μοντέλο Black & Scholes 32
2.2.1 Ιδιότητα Markov – Τυχαίος περίπατος – Κίνηση Brown 32
2.2.2 Η διαδικασία Ito – Λήμμα Ito 34
2.2.3 Αλλαγή μέτρου πιθανότητας Radon Nikodym Derivative 35
2.2.4 Θεώρημα Cameron – Martin – Girsanov 37
2.2.5 Martingales 38
2.2.6 Martingale representation theorem 38
2.3 Στρατηγικές κατασκευής χαρτοφυλακίου 39
3. ΕΞΩΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ 46
3.1 Διακρίσεις εξωτικών δικαιωμάτων 47
3.1.1 Path dependent options 47
3.1.2 Correlation options 50
3.1.3 Διάφορα εξωτικά δικαιώματα 52

3.2 Στοιχεία αποτίμησης δικαιωμάτων συσχέτισης 54
3.3 Λήμμα Ito για δικαίωμα σε δύο υποκείμενους τίτλους 56
3.4 Το μοντέλο Black – Scholes για δύο υποκείμενους τίτλους 57
3.5 Ο ρόλος της συνδιακύμανσης στα δικαιώματα συσχέτισης 60
4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ MONTE CARLO 64
4.1 Monte Carlo ολοκλήρωση – πολλαπλά ολοκληρώματα 68
4.2 Δημιουργία τυχαίων μεταβλητών 71
4.3 Cholesky Decomposition 73
4.4 Προσομοίωση δικαιωμάτων συσχέτισης 76
4.5 Αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας 79
5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ MATLAB 80
5.1 Αποτίμηση απλού δικαιώματος με τη μέθοδοMonte Carlo 80
5.2 Αποτίμηση ενός basket option με δύο υποκείμενους τίτλους 85
5.3 Αποτίμηση ενός exchange option 89
5.4 Αποτίμηση ενός spread option 91
5.5 Αποτίμηση ενός rainbow option (call on max) 93
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 96

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 98
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 100

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νίκο Τοπάλογλου, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτή τη διπλωματική εργασία, για τη σημαντική καθοδήγησή του, τις εύστοχες παρατηρήσεις του και την υπομονή του στη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να καταδείξει μια μέθοδο αξιολόγησης δικαιωμάτων που βασίζεται σε παραπάνω από ένα περιουσιακά στοιχεία. Αφού λοιπόν αναλύσουμε αρχικά τις βασικές αρχές που διέπουν την αποτίμηση των απλών δικαιωμάτων, θα αναφερθούμε σε μια νέα σχετικά περιοχή στο χώρο αυτό, τα εξωτικά δικαιώματα. Τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν χρήσιμα χρηματοοικονομικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο τόσο για την αντιστάθμιση κινδύνου από επιχειρήσεις όσο και για την αύξηση της χρηματοοικονομικής μόχλευσης (leverage) από τους επενδυτές. Η αναφορά αυτή κρίνεται αναγκαία αφού μια κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων αφορά δικαιώματα που είναι γραμμένα σε περισσότερους από έναν υποκείμενους τίτλους και ονομάζονται δικαιώματα συσχέτισης, επειδή η δομή τους υπονοεί μια μορφή συσχέτισης μεταξύ των τίτλων αυτών που επηρεάζει ανάλογα την τιμή τους.

Για την αποτίμηση αυτού του είδους των σύνθετων παραγώγων προϊόντων επελέγη η μέθοδος Monte Carlo. Η μέθοδος αυτή, δεδομένης και της διαρκώς αυξανόμενης υπολογιστικής ισχύος, κρίνεται ολοένα και περισσότερο ελκυστική. Προκειμένου λοιπόν να αποτιμήσουμε πιο σύνθετες μορφές δικαιωμάτων θα αναπτύξουμε κάποια προγράμματα με βάση τη μέθοδο Monte Carlo.

Η δομή της μελέτης θα έχει ως εξής: Στο 1^{o} κεφάλαιο θα παρατεθούν οι βασικές αρχές της λειτουργίας των χρηματοοικονομικών παραγώγων, η χρήση και η σημασία τους, τα οφέλη που προκύπτουν από την ανάπτυξή τους καθώς και τα είδη των παραγώγων που υπάρχουν. Στο 2^{o} κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποια μοντέλα αποτίμησης των δικαιωμάτων, όπως το διωνυμικό μοντέλο και το μοντέλο Black & Scholes, και θα γίνει αναφορά στις βασικές ιδέες που διέπουν αυτό το υπόδειγμα. Στη συνέχεια, στο 3^{o} κεφάλαιο, θα γίνει παρουσίαση των εξωτικών δικαιωμάτων, θα γίνει προσπάθεια ανάλυσης των στοιχείων αποτίμησής τους, και θα γίνει επίσης αναφορά στο ρόλο της συνδιακύμανσης στα δικαιώματα συσχέτισης. Στο 4^{o} κεφάλαιο, ακολουθεί η ανάλυση της μεθόδου Monte Carlo όπου θα γίνει σαφές πώς

λειτουργεί αυτή σε ένα περιβάλλον με ένα υποκείμενο αγαθό και με περισσότερα, καθώς επίσης, θα περιγραφεί και μια μέθοδος για τη μείωση της διακύμανσης (antithetic variable technique). Στο 5^o κεφάλαιο θα παρατεθούν τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από την εκτέλεση του κώδικα , με τη χρήση του πακέτου εφαρμογών MATLAB, για διάφορα είδη δικαιωμάτων συσχέτισης, όπως τα basket, exchange, spread και rainbow options. Τέλος, θα παρατεθούν στο παράρτημα της εργασίας τα προγράμματα που δημιουργήσαμε στο πακέτο MATLAB , καθώς και τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

1. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, σύμφωνα με τον Αγγελόπουλο Παναγιώτη [24], εμφανίστηκαν και αναπτύχθηκαν παράλληλα με την εμφάνιση και ανάπτυξη των χρηματοοικονομικών κινδύνων, δηλαδή κυρίως κατά τις δεκαετίες 1980 και 1990, αφού ο αρχικός τους σκοπός ήταν η αντιστάθμιση (hedging) των κινδύνων στις αγορές χρήματος και κεφαλαίου. Στη συνέχεια αξιοποιήθηκαν από τις επιχειρήσεις, τα πιστωτικά ιδρύματα και τους επενδυτές για την εκμετάλλευση των διαφορών των τιμών ή του ύψους επιτοκίων στις αγορές (arbitrage), την αξιοποίηση των συγκριτικών πλεονεκτημάτων των επιχειρήσεων στις διάφορες αγορές με σκοπό τη μείωση του κόστους δανεισμού και τέλος για κερδοσκοπία (speculation).

Η δημιουργία, η λειτουργία και η εφαρμογή των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, βασίζεται, όπως και το όνομά τους δηλώνει, στην ύπαρξη κάποιων άλλων, ήδη υφιστάμενων, χρηματοοικονομικών προϊόντων ή υποκείμενων τίτλων (underlying assets), όπως μετοχές, ομόλογα, συνάλλαγμα, δάνεια, δείκτες οργανωμένων αγορών, επιτόκια, εμπορεύματα, κ.λ.π.

Πιο συγκεκριμένα, τα παράγωγα προϊόντα είναι συμβόλαια τα οποία βασίζονται ή των οποίων η αξία προκύπτει από έναν υποκείμενο τίτλο (μέσο). Η αξία των παραγώγων προϊόντων υφίσταται, επειδή έχουν αξία οι υφιστάμενοι υποκείμενοι τίτλοι και η μεταβολή της αξίας τους έχει άμεση σχέση και ακολουθεί τη μεταβολή της αξίας των υποκείμενων προϊόντων.

Τα πλέον συνήθη χρηματοοικονομικά παράγωγα μπορούν να ταξινομηθούν σε μία ή σε συνδυασμό περισσοτέρων από τις παρακάτω κατηγορίες:

1. Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)
2. Μελλοντικά Συμβόλαια ή Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)
3. Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)
4. Ανταλλαγές (Swaps)
5. Λοιπά παράγωγα (hybrids), όπως FRAs, Caps, Floors, Collars, Warrants
6. Πιστωτικά παράγωγα (Credit Derivatives).

Υποκείμενος τίτλος, στον οποίο βασίζεται η δημιουργία κάποιου παραγώγου, μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό προϊόν της χρηματαγοράς ή της κεφαλαιαγοράς, καθώς και επιτόκια, δείκτες ή νομίσματα. Δηλαδή κάθε μια από τις παραπάνω γενικές κατηγορίες περιλαμβάνει σειρά παραγώγων προϊόντων, που η λειτουργία τους είναι κοινή, με διαφοροποίηση μόνο ως προς την αντιμετώπιση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του κάθε συγκεκριμένου υποκείμενου τίτλου.

1.2 ΧΡΗΣΗ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Η πρόκληση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων δεν αφήνει σήμερα αδιάφορο κανέναν από τους συμμετέχοντες στις σύγχρονες χρηματοοικονομικές αγορές (χρήματος, κεφαλαίου, συναλλάγματος, επιτοκίων, χρεογράφων, κ.λ.π.).

Οι τράπεζες, οι λοιποί χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί και οι επενδυτές αντιδρώντας στην εμφάνιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων ανέπτυξαν μια σειρά χρηματοοικονομικών προϊόντων σχεδιασμένων έτσι, ώστε να ελέγχουν και να διαχειρίζονται τους κινδύνους αυτούς που υπέβοσκαν στο νέο χρηματοοικονομικό περιβάλλον. Το πρώτο προϊόν που υιοθέτησαν, σχετιζόμενο με τον πρώτο σε σειρά εμφάνισης κίνδυνο, ήταν απλά προθεσμιακά συμβόλαια επί νομισμάτων, όπου ο ένας αντισυμβαλλόμενος υποχρεούται να αγοράσει και ο άλλος να πουλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ξένου νομίσματος σε συγκεκριμένη ισοτιμία σε μια προσυμφωνημένη μελλοντική ημερομηνία. Η σύναψη τέτοιων προθεσμιακών συμβολαίων έδινε τη δυνατότητα στους χρήστες τους να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο μεγάλων διακυμάνσεων των ισοτιμιών. Κατά συνέπεια, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα σχεδιάστηκαν αρχικά για την αποτελεσματική αντιμετώπιση και αντιστάθμιση συγκεκριμένων κινδύνων.

Στην πραγματικότητα, η αντιστάθμιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων ήταν το κλειδί της μεγάλης τους ανάπτυξης. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν τόσο για μεταφορά των κινδύνων όσο και για επένδυση αλλά και για κερδοσκοπία.

Οι βασικοί λόγοι οι οποίοι οδηγούν στην ανάπτυξη και χρήση των παραγώγων προϊόντων, όπως παρουσιάζονται στο βιβλίο του Αγγελόπουλου Παναγιώτη [24], αναφέρονται στη συνέχεια.

1.2.1 Αντιστάθμιση των Χρηματοοικονομικών Κινδύνων

Πρόκειται για τον κύριο λόγο της καταρχήν εμφάνισης, της δημιουργίας και της ανάπτυξης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Στις σημερινές ταχέως μεταβαλλόμενες συνθήκες είναι πολύ σημαντικό κάθε επενδυτική κίνηση ή στρατηγική να μπορεί να προσαρμοσθεί, ανάλογα με την ανοικτή κάθε φορά θέση, θετική ή αρνητική, σε κάθε πιθανή μελλοντική εξέλιξη στις αγορές χρήματος, κεφαλαίου, συναλλάγματος, επιτοκίων κ.τ.λ.

Οι τρόποι αντιστάθμισης του κινδύνου με τη χρήση χρηματοοικονομικών παραγώγων αποτελούν σήμερα κυρίαρχη καθημερινή πρακτική, ακολουθούμενη από όλους τους εμπλεκόμενους στις αγορές, επιχειρήσεις ή ιδιώτες, επενδυτές ή δανειζόμενους, αρκεί αυτοί να έχουν τη δυνατότητα εύκολης και γρήγορης πρόσβασης στις αναπτυγμένες χρηματοπιστωτικές αγορές.

1.2.2 Μεταφορά των Κινδύνων

Με τη χρήση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων παρέχεται παράλληλα η δυνατότητα στους κατέχοντες θέσεις, θετικές (long) ή αρνητικές (short), επενδυτές ή άλλους, να μεταφέρουν τον κίνδυνο σε κάποιον που είναι διατεθειμένος να τον αναλάβει είτε έναντι κάποιας αμοιβής είτε στα πλαίσια των επενδυτικών του επιλογών.

1.2.3 Επενδύσεις σε Παράγωγα

Ανάλογα με το βαθμό του κινδύνου που θέλουν να αναλάβουν οι επενδυτές, ιδιώτες ή θεσμικοί, μπορούν να επιλέξουν το κατάλληλο για τη θέση τους παράγωγο προϊόν ή τον κατάλληλο συνδυασμό παραγώγων προϊόντων, ώστε να αυξήσουν την απόδοση της επένδυσής τους.

Ιδιαίτερα στις σύγχρονες συνθήκες διαχείρισης ενεργητικού – παθητικού οι επενδυτές μπορούν με τη χρήση των προϊόντων αυτών να διαμορφώσουν τις πλέον κατάλληλες στρατηγικές για να αυξήσουν την απόδοσή τους μέσω των πλέον κερδοφόρων επενδύσεων.

Έτσι με τη χρήση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων οι επενδυτές μπορούν στις επενδυτικές τους επιλογές να προσθέσουν δυνατότητες για τις μέγιστες πιθανές θετικές αποδόσεις με τη χαμηλότερη δυνατή χρήση κεφαλαίων, που συνήθως ισούται με κάποιο ασφάλιστρο (premium) ή με κάποιο περιθώριο (margin). Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που χρησιμοποιούν τα παράγωγα οι κερδοσκόποι (speculators).

1.3 ΟΦΕΛΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Με την ανάπτυξη των παραγώγων, πέραν των ανωτέρω αναφερόμενων σημαντικών χρήσεων, οι αγορές και οι επενδυτές ωφελούνται περαιτέρω, αφού η χρήση τους, ιδιαίτερα των προθεσμιακών συμβολαίων και των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, αποκαλύπτει τις πιθανές μελλοντικές τιμές των υποκείμενων τίτλων, οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις δεν διαφέρουν από τις τιμές που τελικά θα διαμορφωθούν. Διευκολύνεται έτσι η οικονομική λειτουργία και η διαδικασία του προγραμματισμού.

Επίσης, τα παράγωγα προσθέτουν ρευστότητα στις αγορές, αφού μια επένδυση στους υποκείμενους τίτλους θα απαιτούσε πολλαπλάσια κεφάλαια, ενώ με τη χρήση των παραγώγων δεσμεύεται ένα ελάχιστο ποσό που αντιστοιχεί μόνο στο περιθώριο (margin) ή στο ασφάλιστρο (premium), που στις περισσότερες των περιπτώσεων ανέρχονται σε ένα μικρό ποσοστό της αξίας του υποκείμενου τίτλου.

Σημαντικά είναι και τα οφέλη που προκύπτουν από τη μείωση του κόστους των συναλλαγών και από τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των αγορών.

Επιπροσθέτως η ευρεία χρήση των παραγώγων ευνοεί το σύνολο της οικονομίας, αφού συντελεί στον έλεγχο των υποκείμενων τίτλων και στη βελτίωση της τιμολόγησής τους στις υποκείμενες αγορές.

1.4 ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Οι βασικές κατηγορίες των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts), τα μελλοντικά συμβόλαια ή συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts), τα δικαιώματα προαίρεσης (options) και οι ανταλλαγές (swaps).

Η πρώτη βασική διάκριση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι ότι εκ των τεσσάρων κατηγοριών τα**συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης** και τα **δικαιώματα προαίρεσης** είναι διαπραγματεύσιμα κυρίως σε **οργανωμένες αγορές** και έχουν τυποποιημένα χαρακτηριστικά διαμορφούμενα από τις αγορές στις οποίες τίθενται προς διαπραγμάτευση, με αποτέλεσμα να είναι γνωστά εκ των προτέρων στους επενδυτές.

Αντίθετα, τα παράγωγα που περιλαμβάνονται και στις άλλες μεγάλες κατηγορίες (**προθεσμιακά συμβόλαια** και **ανταλλαγές**) αλλά και τα λοιπά παράγωγα, κινούνται κυρίως εκτός οργανωμένων αγορών και τα χαρακτηριστικά τους διαμορφώνονται από τους αντισυμβαλλόμενους, έτσι ώστε να καλύπτουν επακριβώς τις ανάγκες τους. Πιο συγκεκριμένα τα βασικά χαρακτηριστικά των παραγώγων είναι:

1.4.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια

Τα **προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts)** είναι συμβόλαια των οποίων οι όροι διαμορφώνονται εκτός οργανωμένων αγορών, βάσει των αναγκών των αντισυμβαλλόμενων, και υποχρεώνουν τον ένα εξ αυτών να αγοράσει μια συγκεκριμένη αξία, όπως συνάλλαγμα, εμπόρευμα ή τίτλο, από το δεύτερο αντισυμβαλλόμενο, σε προκαθορισμένη τιμή σε μια μελλοντική ημερομηνία. Παράλληλα, το ίδιο συμβόλαιο υποχρεώνει το δεύτερο αντισυμβαλλόμενο να παραδώσει το υποκείμενο του συμβολαίουσύμφωνα με τους όρους αυτού.

Δηλαδή, ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** αποτελεί συμφωνία μεταξύ δύο μερών, του αγοραστή και του πωλητή του, για μια αγοραπωλησία που θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον σε τιμή που συμφωνείται σήμερα.

Η φερεγγυότητα ή γενικότερα η ικανότητα του κάθε αντισυμβαλλομένου να καλύψει τους όρους του συμβολαίου εξετάζεται και εκτιμάται από τον άλλο αντισυμβαλλόμενο, ενώ η εξειδίκευση, η καταγραφή και η υλοποίηση των όρων του συμβολαίου είναι αποκλειστικά θέμα των δύο μερών. Με τη διαδικασία αυτή τα αντισυμβαλλόμενα μέρη αναλαμβάνουν και τον κίνδυνο αθέτησης, ο οποίος είναι αυξημένος σε σχέση με τα συμβόλαια τα οποία διακινούνται σε οργανωμένες αγορές.

Επομένως, τα προθεσμιακά συμβόλαια διαμορφώνονται και υλοποιούνται με βάση τις ανάγκες των αντισυμβαλλόμενων, δεν έχουν σταθερή μορφή, δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές και στις συμφωνίες για το περιεχόμενο του συμβολαίου συμμετέχουν απευθείας τα ενδιαφερόμενα μέρη, καθορίζοντας, ανάλογα με τις ανάγκες τους, την τιμή, το χρονικό ορίζοντα,την ποσότητα και κάθε άλλο αναγκαίο όρο που κρίνεται απαραίτητος για το καλό τέλος του συμβολαίου.

Τα χαρακτηριστικά αυτά των προθεσμιακών συμβολαίων δεν επιτρέπουν ουσιαστικά την επαναδιαπραγμάτευσή τους σε οργανωμένη ή σε δευτερογενή αγορά. Η εκπλήρωση των όρων τους εξαρτάται κυρίως από την πιστοληπτική ικανότητα των δύο μερών, χωρίς την κάλυψη των εγγυήσεων που μπορεί να προσφέρει μια οργανωμένη αγορά και επομένως εμφανίζουν αυξημένους κινδύνους με κυριότερο τον πιστωτικό κίνδυνο.

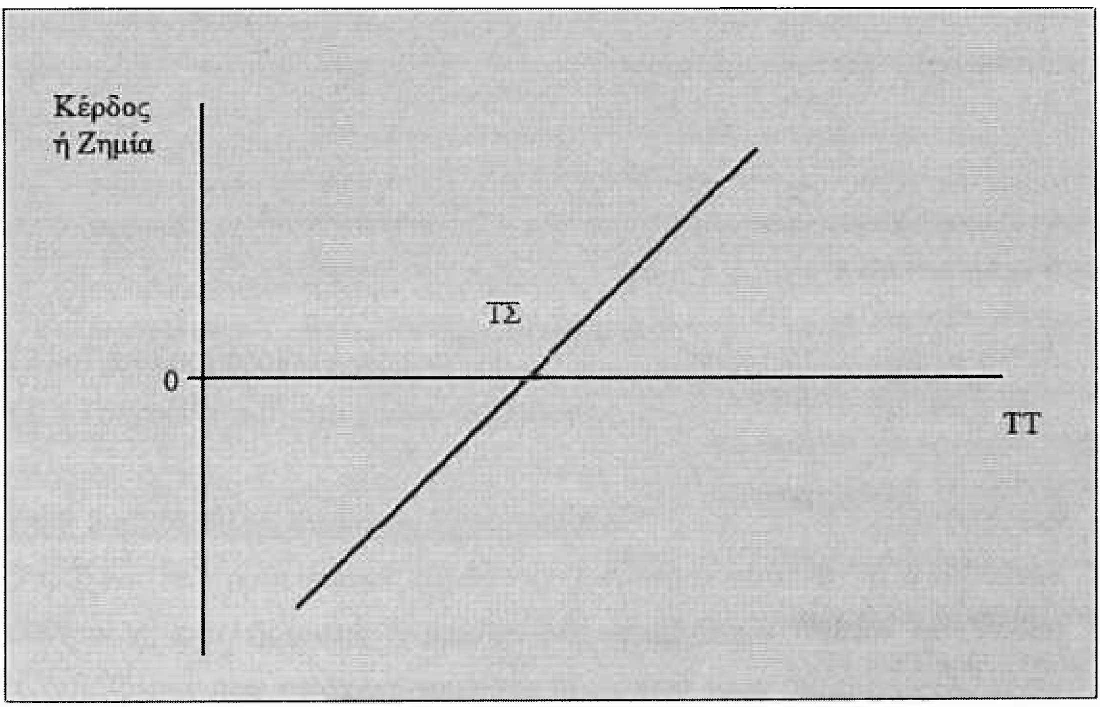
Τα προθεσμιακά συμβόλαια, όσον αφορά το υποκείμενο του συμβολαίου, αναλύονται πάντα σε δύο θέσεις. Μία θετική θέση την οποία κατέχει ο αγοραστής, ο οποίος υποχρεούται να παραλάβει τον υποκείμενο τίτλο και μία αρνητική θέση την οποία κατέχει ο πωλητής, ο οποίος υποχρεούται να παραδώσει τον υποκείμενο τίτλο, όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Νικόλαου Μυλωνά [27].

Το κέρδος ή ζημιά του αγοραστή και του πωλητή ενός προθεσμιακού συμβολαίου εμφανίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:

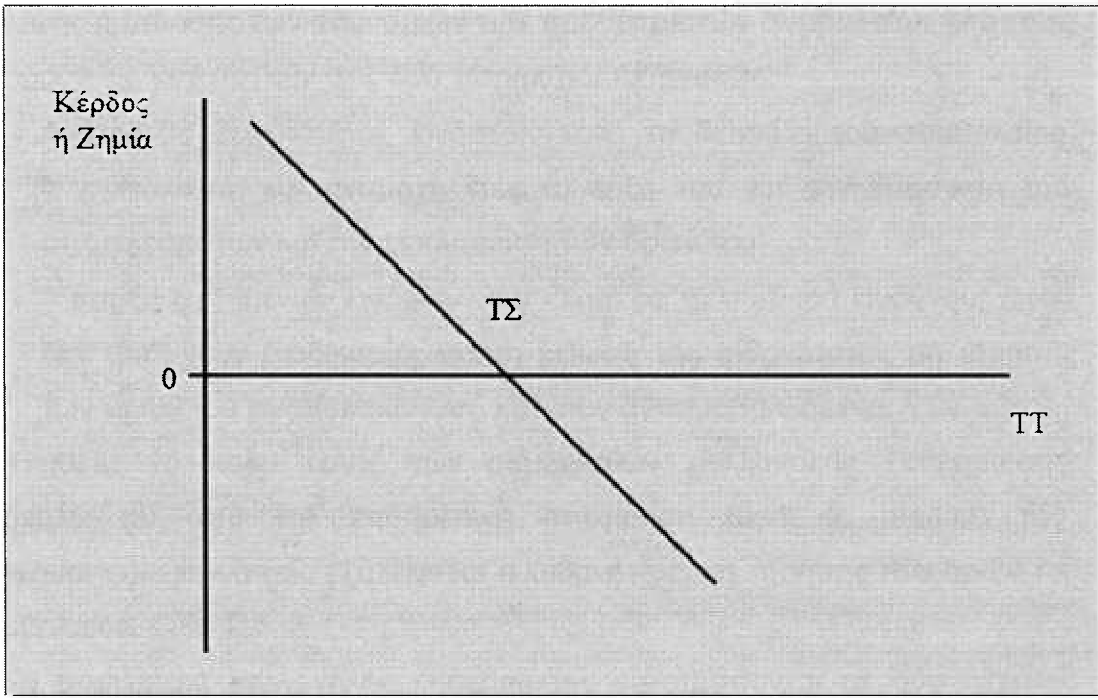
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1

Κέρδος / Ζημιά του Αγοραστή και του Πωλητή Προθεσμιακού Συμβολαίου

A) Αγοραστής Συμβολαίου (Long Position)



Β) Πωλητής Συμβολαίου (Short Position)



Όπου :

ΤΣ = Τιμή Συμβολαίου

ΤΤ = Τρέχουσα τιμή στο χρόνο παράδοσης.

1.4.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Όπως και τα προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts), τα **συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης** ή **μελλοντικά συμβόλαια (future contracts)** είναι συμβόλαια που υποχρεώνουν τον έναν από τους αντισυμβαλλόμενους να αγοράσει και να παραλάβει και τον άλλο να παραδώσει ένα συγκεκριμένο προϊόν ή αξία σε μια ημερομηνία στο μέλλον και σε καθορισμένη στο συμβόλαιο τιμή.

Η κύρια διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα προϊόντα, όσον αφορά την τιμή, το μέγεθος ή την ποσότητα, τη διάρκεια, κ.λ.π., και διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές, τα Χρηματιστήρια Παραγώγων. Παράλληλα, η δημιουργία και η διαπραγμάτευσή τους υπόκεινται σε συγκεκριμένους κανόνες που θεσπίζονται από τις αγορές αυτές.

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης δημιουργήθηκαν από την ανάγκη κάλυψης ή μείωσης των αδυναμιών των προθεσμιακών συμβολαίων οι οποίες μπορούν να καταταγούν στις δύο παρακάτω κατηγορίες:

- Ανυπαρξία δυνατότητας κινήσεων κατά τη διάρκεια του συμβολαίου, π.χ. διακοπή, και αναμονή έως τη λήξη του για την εμφάνιση των αποτελεσμάτων και την εκπλήρωση των όρων του.
- Ύπαρξη αυξημένων κινδύνων και ιδιαίτερα πιστωτικού κινδύνου, αφού δεν υπάρχουν διαδικασίες για τη μείωση της πιθανότητας μη τήρησης των όρων του συμβολαίου από κάποιον αντισυμβαλλόμενο.

Αντίθετα το καλό τέλος των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης διευκολύνεται από την καθημερινή αποτίμηση (mark to market) της επένδυσης με την οποία εξαλείφεται η πιθανότητα μη τήρησης των όρων του συμβολαίου.

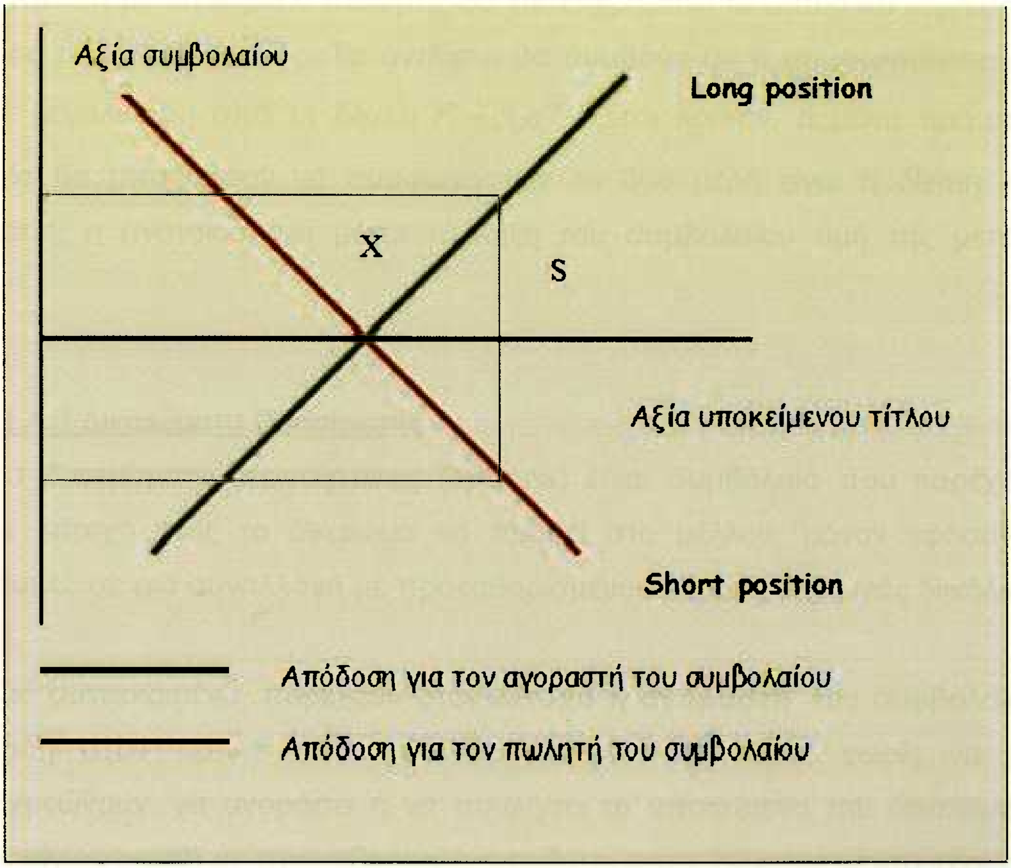
Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης κατατάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- Εκκαθάρισης μετρητοίς ή εκκαθάρισης με ρευστά διαθέσιμα (cash settled).
- Παράδοσης υποκείμενων τίτλων (physical delivery).

Ένα επιπλέον βασικό χαρακτηριστικό των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι η δυνατότητα που παρέχουν στον κάθε αντισυμβαλλόμενο να εγκαταλείψει τη θέση του ανοίγοντας αντίθετη θέση.

Ο αγοραστής ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης κατέχει θέση **long** και ο πωλητής κατέχει θέση **short**. Αν X είναι η συμφωνημένη τιμή μεταξύ των δύο συμβαλλόμενων μερών για την αξία της μετοχής στο μέλλον και S είναι η πραγματική της τιμή στο μέλλον, τότε η απόδοση για τον αγοραστή θα είναι S – X και για τον πωλητή X – S. Όλα τα παραπάνω μπορούν να φανούν στο παρακάτω διάγραμμα απόδοσης του συμβολαίου:

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2



Η δίκαιη τιμή για ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης, δηλαδή η μελλοντική τιμή στην οποία συμφωνούν ο αγοραστής και ο πωλητής του, δίνεται από τον τύπο $F = Se^{rt}$, όπου S είναι η σημερινή τιμή του υποκείμενου τίτλου, r είναι το τρέχον επιτόκιο και t το χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Αν τα δύο μέρη συμφωνήσουν σε οποιαδήποτε άλλη τιμή η αποτίμηση του παραγώγου δεν θα είναι δίκαιη και ευκαιρίες για απεριόριστο κέρδος με πιθανότητα 1 (Arbitrage) θα προκύψουν.

Έστω ότι ο πωλητής ενός συμβολαίου συμφωνεί με τον αγοραστή σε μία τιμή X μικρότερη από τη δίκαιη $F = S_0e^{rt}$. Ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να αποδώσει τη μετοχή τη χρονική στιγμή t για ένα προσυμφωνημένο ποσό. Άντ' αυτού θα μπορούσε να δανειστεί το ποσό S_0 σήμερα, να αγοράσει τη μετοχή στην τιμή S_0 και να περιμένει ως τη λήξη του συμβολαίου. Όταν αυτό λήξει θα πρέπει να αποπληρώσει το δάνειο δίνοντας το ποσό S_0e^{rt} και να παραδώσει τη μετοχή στη συμφωνημένη τιμήΧ. Ωστόσο, ακολουθώντας αυτή την τακτική με σιγουριά ο πωλητής θα χάσει χρήματα τα οποία θα κερδίσει εις βάρος του ο αγοραστής. Τα αντίθετα θα συμβούν αν η συμφωνηθείσα τιμή είναι μεγαλύτερη από τη δίκαιη $F = S_0 e^{rt}$. Έτσι λοιπόν, η μόνη τιμή στην οποία θα μπορούσαν να συμφωνήσουν τα δύο μέρη είναι η δίκαιη τιμή, δηλαδή, η ανατοκισμένη μέχρι τη λήξη του συμβολαίου τιμή της μετοχής $S_0 e^{rt}$.

1.4.3 Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα **δικαιώματα προαίρεσης (options)** είναι συμβόλαια που παρέχουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα να προβεί στο μέλλον, μόνον εφόσον το επιθυμεί, σε μια συναλλαγή με προκαθορισμένους όρους(Μυλωνάς Νικόλαος [27]).

Πιο συγκεκριμένα, παρέχουν στον **κάτοχο ή αγοραστή** του συμβολαίου, δηλαδή στον πρώτο αντισυμβαλλόμενο, τη δυνατότητα, χωρίς να τον υποχρεώνουν, να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο του δικαιώματος (underlying asset) σε προκαθορισμένη τιμή και εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος ή στο τέλος του διαστήματος αυτού.

Ο δεύτερος αντισυμβαλλόμενος είναι ο **πωλητής** του συμβολαίου, ο οποίος, εφόσον ο κάτοχος αποφασίσει την εφαρμογή των όρων του συμβολαίου, δηλαδή την αγορά ή πώληση του υποκείμενου τίτλου, είναι υποχρεωμένος να τηρήσει τους όρους αυτούς.

Ο υποκείμενος τίτλος (underlying asset) μπορεί να είναι κάποιο χρηματοοικονομικό προϊόν, όπως μετοχή, συνάλλαγμα, χρεόγραφο, επιτόκιο ή κάποιο εμπόρευμα, όπως χρυσός, αγροτικό προϊόν, μετάλλευμα κ.ο.κ.

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι τυποποιημένα προϊόντα, όσον αφορά τη διάρκεια, το ποσό, την τιμή κα το συνολικό ύψος και, όπως και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, δημιουργούνται και διαπραγματεύονται κυρίως σε οργανωμένες αγορές παραγώγων. Τα χαρακτηριστικά αυτά των δικαιωμάτων προαίρεσης επιτρέπουν τη διαπραγμάτευσή τους και στη δευτερογενή αγορά.

Η κύρια διαφορά των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και των δικαιωμάτων προαίρεσης έγκειται στη δυνατότητα που παρέχουν τα δικαιώματα προαίρεσης στον κάτοχό τους να μην ασκήσει το συμβόλαιό του, χωρίς καμία επίπτωση γι' αυτόν, ενώ ο κάτοχος του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης πρέπει να τηρήσει τους όρους του συμβολαίου ή να εγκαταλείψει τη θέση του με αντίθετο συμβόλαιο.

Τα δικαιώματα προαίρεσης μπορεί να διαπραγματεύονται και εκτός οργανωμένων αγορών κυρίως μεταξύ επιχειρήσεων ή μεταξύ επιχειρήσεων και τραπεζών με όρους και χαρακτηριστικά που διαμορφώνουν οι αντισυμβαλλόμενοι οι οποίοι αναλαμβάνουν και τον πιστωτικό κίνδυνο.

Ο αγοραστής για να αποκτήσει το δικαίωμα θα πρέπει να καταβάλει ένα τίμημα ανάλογο με την αξία που αυτό έχει, ενώ ο πωλητήςλαμβάνοντας το τίμημα αυτό εκχωρεί το δικαίωμα στον αγοραστή. Για τα δικαιώματα που είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε οργανωμένα χρηματιστήρια, τόσο ο αγοραστής όσο και ο πωλητής μπορούν να αποδεσμευτούν από τη θέση τους πραγματοποιώντας την αντίθετη συναλλαγή: ο αγοραστής θα πουλήσει τα δικαιώματα και ο πωλητής θα αγοράσει τα δικαιώματα. Το τίμημα στο οποίο γίνεται η συναλλαγή αποτελεί την τιμή του δικαιώματος (option premium) και ονομάζεται επίσης *ασφάλιστρο* ή *πριμ*.

Οι όροι που συμφωνούνται σε ένα συμβόλαιο δικαιώματος από τα δύο μέρη αφορούν:

1. τον υποκείμενο τίτλο ή το υποκείμενο αγαθό που χαρακτηρίζει το συμβόλαιο
2. τον αριθμό τίτλων ή την ποσότητα και ποιότητα του αγαθού που θα αλλάξει χέρια εάν εξασκηθεί το συμβόλαιο
3. την τιμή εξάσκησης στην οποία μια μονάδα του τίτλου ή αγαθού θα αγοραπωληθεί
4. την ημέρα λήξης ή εκπνοής του συμβολαίου πέραν της οποίας το συμβόλαιο δεν ισχύει, και τέλος
5. τον τύπο συμβολαίου, εάν δηλαδή το συμβόλαιο εξασκείται μόνο κατά την ημέρα λήξης (ευρωπαϊκός τύπος) ή μπορεί να εξασκηθεί καθόλη τη διάρκεια της ισχύος του (αμερικανικός τύπος).

Τα συμβόλαια δικαιωμάτων διαφέρουν ως προς τους ανωτέρω βασικούς όρους. Όμως ανάλογα με το τι συμβάλλεται να πράξει ο αγοραστής διακρίνονται σε δύο βασικά είδη δικαιωμάτων: το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης.

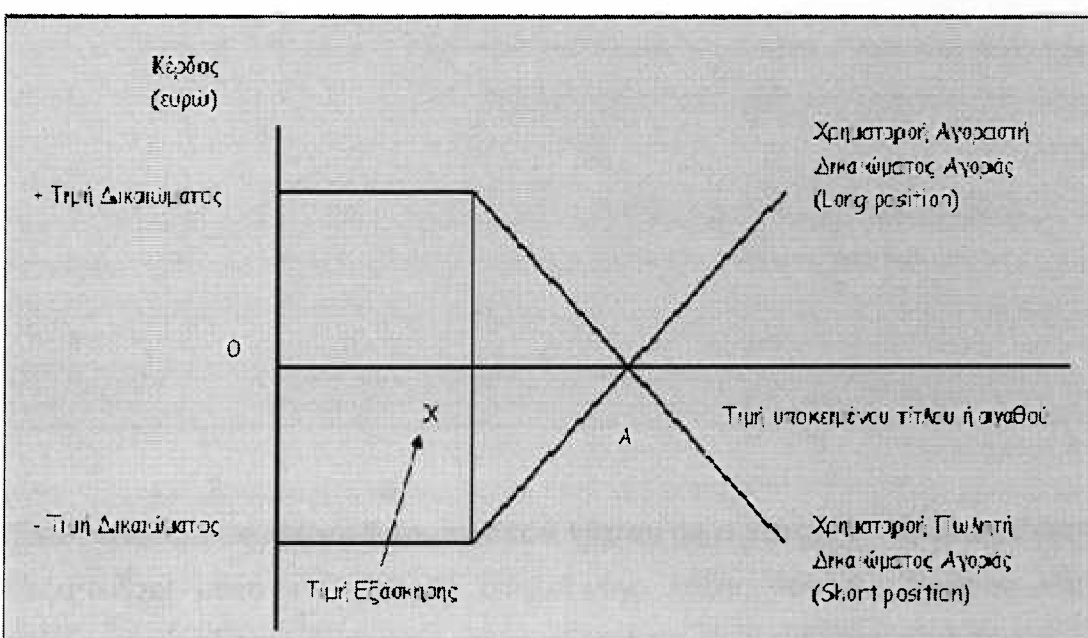
- **Δικαίωμα αγοράς (call option)**

Call option είναι το δικαίωμα αγοράς το υποκείμενου τίτλου στην τιμή άσκησης X μετά από ένα χρονικό διάστημα καταβάλλοντας σήμερα το premium. Αν στο τέλος της περιόδου η τιμή του υποκείμενου τίτλου S είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης ο αγοραστής του call θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα καρπωθεί τη διαφορά S – X, ενώ ο πωλητής θα χάσει το αντίστοιχο ποσό. Στην αντίθετη περίπτωση όπου S < X ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα χάσει το premium το οποίο και θα κερδίσει ο πωλητής.

Όλα αυτά φαίνονται και από το πιο κάτω διάγραμμα χρηματοροών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3

Οι χρηματοροές Αγοραστή και Πωλητή στο Δικαίωμα Αγοράς



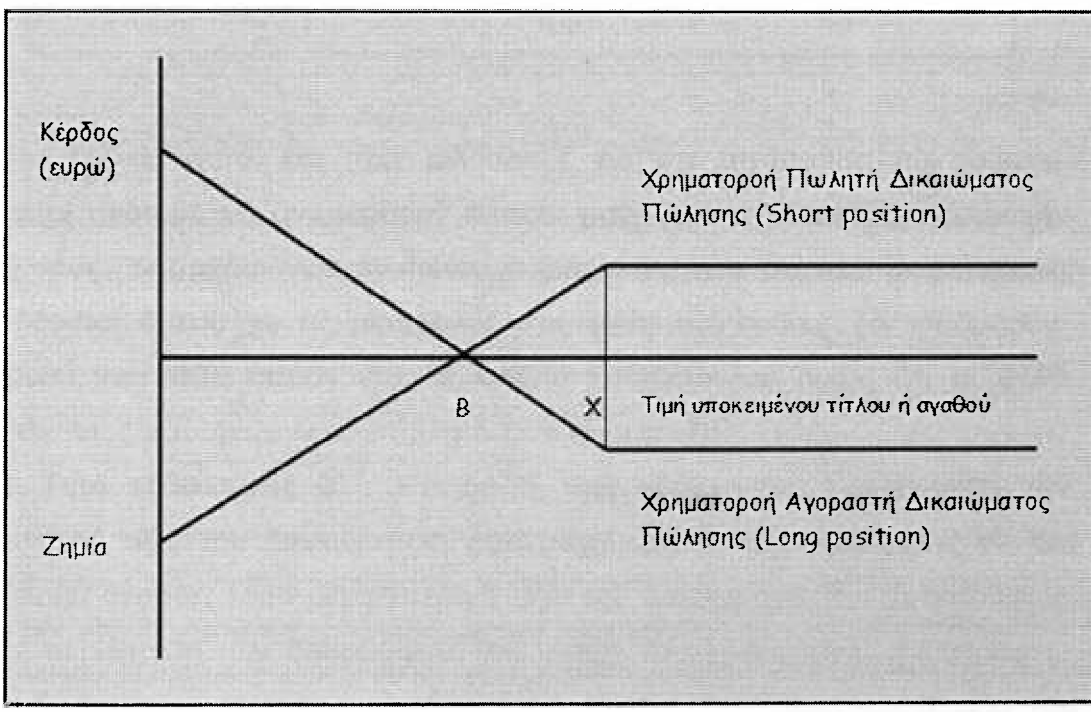
❖ **Δικαίωμα Πώλησης (Put option)**

Put option είναι το δικαίωμα πώλησης του υποκείμενου τίτλου στην τιμή άσκησης X μετά από ένα χρονικό διάστημα καταβάλλοντας σήμερα το premium. Αν στο τέλος της περιόδου η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης (S < X), ο αγοραστής του put option θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα κερδίσει τη διαφορά X – S, ενώ ο πωλητής θα χάσει το αντίστοιχο ποσό. Στην αντίθετη περίπτωση όπου X < S, ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα χάσει το premium το οποίο και θα καρπωθεί ο πωλητής.

Στη συνέχεια παρατίθεται το αντίστοιχο διάγραμμα χρηματοροών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4

Οι χρηματοροές Αγοραστή και Πωλητή στο Δικαίωμα Πώλησης



Ένα δικαίωμα θεωρείται **Ευρωπαϊκού τύπου** αν ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει μόνο τη χρονική στιγμή της λήξης του συμβολαίου και **Αμερικανικού τύπου** αν μπορεί να το εξασκήσει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Είναι χρήσιμο βέβαια να αναφερθεί ότι ένα

Αμερικανικού τύπου option θα μπορούσε εναλλακτικά να οριστεί ως μια σειρά από options Ευρωπαϊκού τύπου, με την ίδια τιμή εξάσκησης, καθένα από τα οποία ξεκινά εκεί που λήγει το προηγούμενο. Λόγω λοιπόν της διαφοράς που υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών ειδών option είναι σαφές πως υπάρχει και διαφορά μεταξύ των τιμών τους. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα.

Άλλη μια διάκριση των options έχει να κάνει με τη σχέση μεταξύ τιμής άσκησης και τιμής του υποκείμενου τίτλου. Η διάκριση αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

In the money	At the money	Out of the money
Calls με S > X & Puts με X > S	Calls και Puts για τα οποία ισχύει S = X	Calls με S < X & Puts με X < S

Στο σημείο αυτό, και πριν μιλήσουμε για την αποτίμηση των options, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν κάποιοι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή τους. Υπάρχουν λοιπόν πέντε παράγοντες των οποίων οι μεταβολές συνδέονται άμεσα με τις μεταβολές στις τιμές των options (οι επιδράσεις ισχύουν για κάθε παράγοντα ξεχωριστά υποθέτοντας όμως ότι οι άλλοι παράγοντες παραμένουν αμετάβλητοι) και είναι οι εξής:

1. Τιμή εξάσκησης X : Επειδή η τιμή εξάσκησης προσδιορίζει την εσωτερική αξία του δικαιώματος, όσο μικρότερη η τιμή εξάσκησης σε ένα δικαίωμα αγοράς, τόσο μεγαλύτερη η αξία του δικαιώματος και αντιστρόφως. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων πώλησης, οι σχέσεις είναι αντίστροφες. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή εξάσκησης, τόσο μεγαλύτερη και η αξία του δικαιώματος πώλησης και αντιστρόφως.

2. Τιμή υποκειμένου τίτλου S : Η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος υπολογίζεται και από την τιμή το υποκείμενου τίτλου. Για ένα δικαίωμα αγοράς, όσο μεγαλύτερη η τιμή του υποκείμενου τίτλου τόσο μεγαλύτερη η αξία του και αντιστρόφως. Αντιθέτως, για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο μεγαλύτερη η τιμή του υποκειμένου τόσο μικρότερη η αξία του δικαιώματος και αντιστρόφως.

3. Χρόνος διάρκειας T – t : Ο χρόνος της διάρκειας του συμβολαίου μέχρι τη λήξη του είναι καθοριστική για την αξία του άσχετα από το είδος του συμβολαίου. Όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα το δικαίωμα τελικά να καταστεί ωφέλιμο να εξασκηθεί, δηλαδή να δοθεί αρκετός χρόνος ώστε η τιμή του υποκειμένου τίτλου να μεταβληθεί κατά τρόπο ευνοϊκό για το δικαίωμα.

4. Διακύμανση σ^2 **:** Η τυπική απόκλιση μετρά τη μεταβλητότητα της τιμής του υποκειμένου τίτλου και επιδρά θετικά στην αξία των δικαιωμάτων άσχετα από το είδος του συμβολαίου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα η τιμή του υποκειμένου να υπερβεί την τιμή εξάσκησης στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς ή να οδηγηθεί κάτω από την τιμή εξάσκησης στην περίπτωση των δικαιωμάτων πώλησης. Αντίθετα, μικρή μεταβλητότητα του τίτλου υποδηλώνει μικρή πιθανότητα μεταβολής της τιμής του υποκειμένου και επομένως μικρή προσδοκία να καταστεί επωφελές για εξάσκηση με αποτέλεσμα να επηρεάζει ελάχιστα την αξία των δικαιωμάτων.

5. Επιτόκιο ακίνδυνου αξιόγραφου r_f **:**Το ισχύον επιτόκιο ακίνδυνου αξιόγραφου για το διάστημα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος επηρεάζει την αξία του δικαιώματος μέσω της παρούσας αξίας της τιμής εξάσκησης. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς, όσο μεγαλύτερο το ακίνδυνο επιτόκιο τόσο μικρότερη θα είναι η παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης αυξάνοντας την εσωτερική του αξία επηρεάζοντας έτσι θετικά την αξία του δικαιώματος και αντιστρόφως. Στην περίπτωση του δικαιώματος πώλησης, όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο τόσο μικρότερη θα είναι η παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης μειώνοντας την εσωτερική του αξία και επηρεάζοντας αρνητικά την αξία του δικαιώματος, και αντιστρόφως.

Οι επιδράσεις των πέντε βασικών παραγόντων στην τιμή των δικαιωμάτων συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Η επίδραση 5 μεταβλητών στην αξία των δικαιωμάτων			
Μεταβλητή	Μεταβολή	Δικαίωμα Αγοράς	Δικαίωμα Πώλησης
X	+	-	+
S	+	+	-
T - t	+	+	+
σ^2	+	+	+
r_f	+	+	-

Με βάση λοιπόν τις τιμές όλων αυτών των μεταβλητών προσδιορίζεται και η τιμή ενός δικαιώματος. Ωστόσο όμως, αυτή η τιμή δεν κυμαίνεται ανεξέλεγκτα αλλά σε συγκεκριμένα πλαίσια. Τα πλαίσια αυτά ονομάζονται φράγματα και περιγράφονται στη συνέχεια.

- **Ανώτατα φράγματα**

Ένα call option δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να αγοράσει μια μετοχή σε μια συγκεκριμένη τιμή στο μέλλον. Ο,τιδήποτε κι αν συμβεί το δικαίωμα δεν μπορεί ποτέ να αξίζει περισσότερο από τη μετοχή. Έτσι λοιπόν θα λέμε ότι η τιμή της μετοχής είναι το ανώτατο φράγμα για την τιμή του δικαιώματος, δηλαδή $C < S_0$. Αν αυτή η σχέση δεν ίσχυε, ένας επενδυτής θα μπορούσε εύκολα να βγάλει κέρδος χωρίς κίνδυνο αγοράζοντας τη μετοχή και πουλώντας ένα call option.

Αντίθετα ένα put option δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να πουλήσει μια μετοχή σε μια συγκεκριμένη τιμή στο μέλλον. Ανεξάρτητα λοιπόν από τo πόσο χαμηλή είναι η τιμή της μετοχής, το δικαίωμα δεν μπορεί ποτέ να αξίζει περισσότερο από την τιμή εξάσκησης στη λήξη, άρα $P <= X$. Συνεπώς, δεν μπορεί να αξίζει σήμερα περισσότερο από την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης, δηλαδή $P <= Xe^{-rT}$. Σε κάθε περίπτωση αν αυτό δεν ισχύει ένας επενδυτής θα μπορούσε να πραγματοποιήσει κέρδη χωρίς κίνδυνο γράφοντας ένα option και επενδύοντας τα έσοδα της πώλησης στο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο.

- **Κατώτατα φράγματα**

Το κατώτατο φράγμα για ένα call option είναι $S_0 - Xe^{-rT}$.

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω ότι έχω τα εξής δύο χαρτοφυλάκια.

Χαρτοφυλάκιο 1: περιλαμβάνει ένα call option και ένα χρηματικό ποσό ίσο με την προεξοφλημένη τιμή εξάσκησης Xe^{-rT}.

Χαρτοφυλάκιο 2: περιλαμβάνει μια μετοχή.

Αν ο επενδυτής επενδύσει το χρηματικό ποσό Xe^{-rT} στο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, μετά από χρόνο T αυτό θα ισούται με X. Αν $S_T > X$ το δικαίωμα στη λήξη του θα εξασκηθεί και το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει $S_T - X + X = S_T$. Αν $S_T < X$ το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί και το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει X. Επομένως, τη χρονική στιγμή T το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει $\max(S_T, X)$. Το 2ο χαρτοφυλάκιο αξίζει S_T τη χρονική στιγμή T. Έτσι το 1ο χαρτοφυλάκιο αξίζει πάντα τουλάχιστον όσο το 2ο στη λήξη του option, και επομένως αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage το ίδιο θα ισχύει και σήμερα. Δηλαδή $C + Xe^{-rT} \geq S_0$ ή $C \geq S_0 - Xe^{-rT}$. Ωστόσο, επειδή το option μπορεί να μην εξασκηθεί, η αξία του σ' αυτή την περίπτωση θα είναι 0. Άρα $C > 0$ ή αλλιώς $C \geq \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0)$.

Αντίθετα το κατώτατο φράγμα για ένα put είναι $Xe^{-rT} - S_0$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συλλογιστική με δύο διαφορετικά χαρτοφυλάκια καταλήγουμε ότι $P \geq Xe^{-rT} - S_0$ ή καλύτερα $P \geq \max(Xe^{-rT} - S_0, 0)$. Τα εν λόγω χαρτοφυλάκια έχουν ως εξής:

Χαρτοφυλάκιο 3: περιλαμβάνει ένα put option και μια μετοχή.

Χαρτοφυλάκιο 4: περιλαμβάνει ένα χρηματικό ποσό ίσο με Xe^{-rt}.

<u>Put – Call Parity</u>

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τους παραπάνω ορισμούς για τα φράγματα και γνωρίζοντας πώς αυτοί προκύπτουν, μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια πάρα πολύ σημαντική σχέση που συνδέει τα puts με τα calls και είναι ευρύτερα γνωστή ως put – call parity. Έστω, λοιπόν, ότι έχω το 1° και 3° χαρτοφυλάκιο από τα προηγούμενα παραδείγματα.

Χαρτοφυλάκιο 1: περιλαμβάνει ένα call option και ένα χρηματικό ποσό ίσο με την προεξοφλημένη τιμή εξάσκησης Xe^{-rT}.

Χαρτοφυλάκιο 3: περιλαμβάνει ένα put option και μια μετοχή.

Και τα δύο χαρτοφυλάκια κατά τη λήξη των options αξίζουν $\max(S_T, X)$. Αλλά επειδή τα options είναι ευρωπαϊκά δεν μπορούν να εξασκηθούν πριν τη λήξη. Αφού λοιπόν τα χαρτοφυλάκια στη λήξη αξίζουν το ίδιο και δεν ισχύει το δικαίωμα πρόωρης εξάσκησης, θα πρέπει και σήμερα να αξίζουν το ίδιο, πράγμα που σημαίνει ότι $P + S_0 = Xe^{-rT} + C$.

Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως put – call parity, σύμφωνα με τον John Hull [10], και δείχνει πως η τιμή ενός call option με συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης και λήξη μπορεί να βρεθεί από την τιμή ενός put option με την ίδια λήξη και εξάσκηση. Αν αυτή η εξίσωση δεν ισχύει, τότε παρουσιάζονται ευκαιρίες για arbitrage.

1.4.4 Ανταλλαγές

Οι **ανταλλαγές (swaps)** είναι συμφωνίες μεταξύ δύο πλευρών που αφορούν την ανταλλαγή στο μέλλον μιας σειράς εισροών ή εκροών (κεφαλαίων ή αξιών) με όρους που προσυμφωνούνται (Αγγελόπουλος Παναγιώτης [24]).

Με άλλα λόγια οι **ανταλλαγές** είναι χρηματοοικονομικές συναλλαγές βάσει των οποίων δύο οικονομικές μονάδες συμφωνούν να ανταλλάξουν μεταξύ τους στο μέλλον χρηματοοικονομικά μέσα, όπως συνάλλαγμα ή μια χρηματοοικονομική ροή ή μια σειρά χρηματοοικονομικών ροών που συνδέονται με κάποιο χρηματοπιστωτικό μέσο, όπως π.χ. τόκους δανείων.

Οι ανταλλαγές δεν είναι τυποποιημένα προϊόντα και κινούνται κυρίως εκτός οργανωμένων αγορών. Σήμερα στις αγορές χρήματος και κεφαλαίου έχουν αναπτυχθεί πολλοί τύποι ανταλλαγών και συνεχώς αναπτύσσονται νέοι με γρήγορο ρυθμό. Τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της κάθε ανταλλαγής διαμορφώνονται από τα ενδιαφερόμενα μέρη σύμφωνα με τις ανάγκες τους και τη διαπραγματευτική τους δυνατότητα.

Μπορούμε όμως να διακρίνουμε κάποιες βασικές κατηγορίες ανταλλαγών, οι οποίες αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη περισσότερο σύνθετων ή εξειδικευμένων προϊόντων.

Οι βασικές αυτές κατηγορίες είναι:

- Ανταλλαγές Νομισμάτων (Currency Swaps)
- Ανταλλαγές Επιτοκίων (Interest Rate Swaps)
- Ανταλλαγές Πιστωτικού Κινδύνου (Credit Swaps ή Credit Derivatives)
- Ανταλλαγές Αξιών ή Απαιτήσεων (Asset Swaps)
- Ανταλλαγές Υποχρεώσεων (Liability Swaps)
- Ανταλλαγές Προθεσμιακών Συμβολαίων (Forward Swaps)
- Swaptions (Προαίρεση που δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό της να πραγματοποιήσει ένα Swap ή να ακυρώσει ένα Swap στο μέλλον).

1.4.5 Λοιπά Παράγωγα

Τα κυριότερα εκ των παραγώγων που δεν εμπίπτουν εύκολα σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες είναι οι Προθεσμιακές Συμφωνίες Επιτοκίων (Forward Rate Agreements ή FRAs) και τα Caps, Floors, Collars, Warrants και τα Πιστωτικά Παράγωγα. Ένα άλλο σημαντικό προϊόν της κατηγορίας αυτής είναι το δικαίωμα προαίρεσης επί συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.

Γενικά οι συμμετέχοντες στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό σύστημα, αναλαμβάνοντας και τους κινδύνους που αυτό εμπερικλείει, διαμορφώνουν ανάλογα με τις ανάγκες τους παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα που αποτελούν συνδυασμούς χαρακτηριστικών διαφόρων συμβολαίων. Τα προϊόντα αυτά είναι γνωστά ως μικτά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (hybrids).

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Οι ανεξάρτητες επιδράσεις των βασικών μεταβλητών στην αξία των δικαιωμάτων που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα δεν είναι ικανές για να αποτιμήσουν την αξία ενός δικαιώματος πριν τη λήξη του καθώς υποθέτουν ότι όταν μια μεταβλητή μεταβάλλεται, οι άλλες μεταβλητές παραμένουν σταθερές και χωρίς επίδραση στην τιμή του δικαιώματος. Για το λόγο αυτό αναζητείται μια ρεαλιστική αντιμετώπιση του προβλήματος μέσω ενός κατάλληλου υποδείγματος.

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι η πραγματική δυσκολία προσδιορισμού της αξίας του δικαιώματος έγκειται κυρίως στο γεγονός της συνεχούς μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Η τυχαιότητα στις μεταβολές της τιμής καθοδηγεί άμεσα, αν και όχι συμμετρικά, τις μεταβολές της τιμής του δικαιώματος. Έτσι για την κατασκευή ενός υποδείγματος αποτίμησης της αξίας του δικαιώματος απαιτείται αφενός να προσδιοριστεί η συμπεριφορά το υποκείμενου τίτλου και αφετέρου να ληφθεί υπόψη ο χρόνος που απομένει για τη λήξη του δικαιώματος και το μέγεθος της μεταβλητότητας της τιμής του υποκειμένου. Ανάλογα με την υπόθεση της συμπεριφοράς των τιμών της υποκείμενης μετοχής προκύπτει και διαφορετικό υπόδειγμα αποτίμησης των δικαιωμάτων. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο υποδείγματα αποτίμησης δικαιωμάτων που κάνουν διαφορετικές υποθέσεις της συμπεριφοράς των τιμών του υποκειμένου τίτλου: το διωνυμικό υπόδειγμα και το υπόδειγμα Black & Scholes.

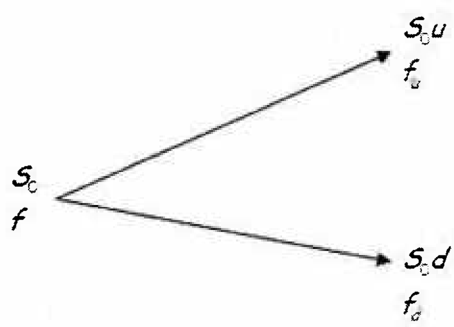
2.1 ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Ένας απλός και παραστατικός τρόπος να αξιολογήσει κανείς ένα option είναι χρησιμοποιώντας μια τεχνική που στηρίζεται στα διωνυμικά δέντρα (Binomial Trees). Τα διωνυμικά δέντρα δεν είναι τίποτα άλλο παρά παραστάσεις που μας βοηθούν να βλέπουμε την αξία των options ανά πάσα στιγμή σε διακριτούς χρόνους στο μέλλον. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Cox, Ross & Rubinstein το 1979 και στηρίζεται στις εξής απλές υποθέσεις:

1. Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών
2. Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r είναι σταθερό σε όλες τις περιόδους
3. Οι πολλαπλασιαστές u και d είναι σταθεροί για κάθε περίοδο και υπόκεινται στον παρακάτω περιορισμό (όπου u > 1, d < 1).

Στη συνέχεια θα δοθεί μια σύντομη περιγραφή του μοντέλου προκειμένου να έχει κανείς μια πιο ολοκληρωμένη άποψη για το θέμα της αξιολόγησης των options, όπως αυτή παρουσιάζεται από τον John Hull [10].

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει μια μετοχή (υποκείμενος τίτλος) με τιμή S_0 η οποία κατά το χρονικό διάστημα T μπορεί να κινηθεί είτε προς τα πάνω στο επίπεδο S_0u, είτε προς τα κάτω στο επίπεδο S_0d, και ένα δικαίωμα γραμμένο πάνω σε αυτή τη μετοχή του οποίου η αξία είναι f και η διάρκεια T. Η αύξηση στην τιμή της μετοχής όταν υπάρχει ανοδική κίνηση θα είναι u-1 και αντίθετα η μείωση σε μια καθοδική κίνηση θα είναι 1-d. Αν η μετοχή κινηθεί ανοδικά στο επίπεδο S_0u τότε η απόδοση του δικαιώματος θα είναι f_u και αντίθετα αν η μετοχή κινηθεί καθοδικά η απόδοση του δικαιώματος θα είναι f_d. Όλα αυτά περιγράφονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια θέση long σε **Δ** αριθμό μετοχών και μια θέση short σε ένα option. Στη συνέχεια υπολογίζεται εκείνο το **Δ** που κάνει το χαρτοφυλάκιο ακίνδυνο. Έτσι αν υπάρξει μια ανοδική κίνηση στη μετοχή η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος της διάρκειας του option θα είναι

$$S_0 u\Delta - f_u .$$

Αντίθετα, αν υπάρξει μια καθοδική κίνηση στη μετοχή η αξία του χαρτοφυλακίου γίνεται

$$S_0 d\Delta - f_d .$$

Σε κάθε περίπτωση η αξία του χαρτοφυλακίου δεν αλλάζει. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} & S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d \rightarrow \\ & \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι το χαρτοφυλάκιο που κατασκευάσαμε είναι ακίνδυνο και μπορεί να αποδώσει μόνο όσο το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Αν λοιπόν το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι r η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου είναι η εξής:

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT} .$$

Από την άλλη πλευρά, το κόστος δημιουργίας ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου δίνεται από την παρακάτω παράσταση

$$S_0\Delta - f .$$

Άρα θα πρέπει:

$$\begin{aligned} & S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT} \rightarrow \\ & f = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT} \end{aligned} \qquad \textbf{(2).}$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο τη τιμή του Δ από τη σχέση **(1)** παίρνουμε την ακόλουθη παράσταση για την τιμή του δικαιώματος:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d], \text{ όπου } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατόν να τιμολογήσει κανείς ένα δικαίωμα χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο ενός βήματος. Φυσικά η όλη ανάλυση ίσως να φαίνεται απλοϊκή. Ωστόσο, η παραπάνω ανάλυση θα μπορούσε να επεκταθεί σε περισσότερο πολύπλοκα δέντραμε περισσότερους κόμβους και μεγαλύτερο αριθμό βημάτων. Αν και κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να γίνει, η μεγάλη πολυπλοκότητα που μπορεί να προκύψει είναι πιθανόν να κάνει την ανάλυση υπολογιστικά αδύνατη. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα του διωνυμικού μοντέλου που περιορίζει την ευρύτατη χρησιμοποίησή του. Από την άλλη πλευρά η τελευταία εξίσωση μέσωτης οποίας επιτρέπεται η αξιολόγηση του option δεν περιλαμβάνει πουθενά την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να ανέβει ή να πέσει. Θα ήταν φυσικό να υποθέσει κανείς πως μια αύξηση της πιθανότητας για ανοδική κίνηση της μετοχής θα αύξανε ταυτόχρονα την αξία ενός call option και το αντίστροφο. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει.

Παρατηρώντας κανείς την τελευταία εξίσωση θα μπορούσε εύκολα να πει ότι η μεταβλητή p είναι η πιθανότητα μια μετοχή να ανέβει, και αντίστοιχα η 1-p η πιθανότητα ο υποκείμενος τίτλος να πέσει. Έτσι λοιπόν η έκφραση

$$[pf_u + (1-p)f_d]$$

δίνει την αναμενόμενη απόδοση από το δικαίωμα. Αν λοιπόν η μεταβλητή p ερμηνευτεί έτσι, τότε θα μπορούσε κανείς να πει ότι η αξία ενός option σήμερα είναι η μελλοντική αναμενόμενη απόδοση του option προεξοφλημένη σήμερα με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Η αναμενόμενη απόδοση από τη μετοχή όταν η πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης είναι p τη χρονική στιγμή T είναι:

$$\mathrm{E}(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d.$$

Υποκαθιστώντας σε αυτή την εξίσωση την τιμή του p όπως την υπολογίσαμε παραπάνω, έχουμε ότι $E(S_T) = S_0 e^{rT}$, που σημαίνει ότι η μετοχή αυξάνεται κατά μέσο όρο με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Η τελευταία εξίσωση αφορά έναν ουδέτερου κίνδυνου κόσμο (isk neutral world) όπου η πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησηςείναι p. Επομένως η εξίσωση **(2)** δείχνει ότι η αξία ενός option είναι η αναμενόμενη απόδοση προεξοφλημένη με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου

2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK & SCHOLES

Το διωνυμικό μοντέλο είναι μια καλή προσέγγιση της κίνησης των μετοχών. Έχει όμως μερικά βασικά μειονεκτήματα που κάνουν την ευρύτερη χρησιμοποίησή του αδύνατη. Το κυριότερο μειονέκτημα είναι ότι επιτρέπει στη μετοχή στην επόμενη χρονική στιγμή να πάρει μόνο δύο τιμές. Επιπλέον, όλη η ανάλυση στηρίζεται στο διακριτό χρόνο, ενώ στην πραγματικότητα οι μεταβολές στις τιμές των μετοχών λαμβάνουν χώρα στο συνεχή χρόνο. Οι Fischer Black & Myron Scholes (1972) κατάφεραν να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο βρίσκοντας έναν τύπο συνεχούς μορφής για τον υπολογισμό των options.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην εξέταση του μοντέλου**Black & Scholes** καλό θα ήταν να σταθούμε σε κάποιες ιδέες που οδήγησαν σε αυτό και τελικά επέτρεψαν την ανάπτυξή του.

2.2.1 Ιδιότητα Markov – Τυχαίος Περίπατος – Κίνηση Brown

Μια στοχαστική διαδικασία, σύμφωνα με όσα αναφέρει στο βιβλίο του ο John Hull [10], λέγεται **Markov** όταν μόνο η παρούσα αξία μιας μεταβλητής είναι χρήσιμη για την πρόβλεψη της μελλοντικής της τιμής. Μια τέτοια ιδιότητα είναι σύμφωνη με την ασθενή μορφή αποτελεσματικότητας της αγοράς καθώς οι ιστορικές τιμές δεν έχουν καμία σημασία για τις μελλοντικές προβλέψεις αφού όλες οι υπάρχουσες πληροφορίες έχουν ήδη ενσωματωθεί στην παρούσα τιμή της μετοχής.

Μια ειδική κατηγορία της διαδικασίας Markov που θα μας βοηθήσει στην κατασκευή του μοντέλου που αποτυπώνει την κίνηση των μετοχών είναι η κίνηση Brown. Μια πρώτη προσέγγιση για την ανάλυση της κίνησης Brown είναι η μελέτη μιας συγκεκριμένης ομάδας διακριτών διωνυμικών διαδικασιών, των τυχαίων περιπάτων.

Πιο συγκεκριμένα, ο τυχαίος περίπατος $W_n(t)$ περιγράφεται ως εξής:

Για n θετικός ακέραιος ορίζεται μια διωνυμική διαδικασία $W_n(t)$ με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- $W_n(0) = 0$
- Μέγεθος βήματος 1/n
- Μεταβολές προς τα πάνω ή κάτω ίσες κα σε μέγεθος $1/\sqrt{n}$
- Το μέτρο πιθανότητας P, που δίνεται από τις άνω και κάτω κινήσεις είναι παντού ίδιο και ίσο με ½ .

Δηλαδή, αν $X_1, X_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών που παίρνει τιμές +1 ή -1, με ίση πιθανότητα, τότε η τιμή του τυχαίου περίπατου W_n στο βήμα i ορίζεται ως ακολούθως:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}.$$

Καθώς λοιπόν το n μεγαλώνει, λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η κατανομή $W_n(t)$ τείνει στην κανονική κατανομή N(0,t). Η δε τιμή του $W_n(t)$ δίνεται από την παρακάτω παράσταση

$$W_n(t) = \sqrt{t}\,\frac{\left(\sum_{i=1}^{nt} X_i\right)}{\sqrt{nt}}.$$

Έτσι, μέσω του τυχαίου περίπατου ορίζεται η **κίνηση Brown:**

Η διαδικασία $W = W_t$, όπου $t \geq 0$, είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας P αν και μόνο αν

- Η W_t είναι συνεχής και $W_0 = 0$
- Η τιμή της W_t κατανέμεται κάτω από το μέτρο P σαν κανονική τυχαία μεταβλητή N(0,t)
- Η οριακή μεταβολή $W_{s-t} - W_s$ κατανέμεται κανονικά N(0,t) κάτω από το μέτρο P και είναι ανεξάρτητη από το F_s, δηλαδή την ιστορία της διαδικασίας μέχρι τη στιγμή s.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της κίνησηςBrown είναι η ιδιότητά της ανεξάρτητα από την κλίμακα στην οποία εξετάζεται να παραμένει η ίδια. Μια τέτοια παράσταση στη γλώσσα των μαθηματικών θα λέμε πως είναιfractal. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι που διαφοροποιεί τις στοχαστικές διαδικασίες όπως η κίνηση Brown από τις κλασικές νευτώνειες συναρτήσεις, καθώς για τις τελευταίες θεωρούμε πως ανεξαρτήτως σχήματος λαμβάνοντας πολύ μικρά διαδοχικά διαστήματα καταλήγουμε σε μία ακολουθία ευθειών, γεγονός που μας δίνει τη δυνατότητα να τις παραγωγίσουμε (Martin Baxter – Andrew Rennie [16]).

2.2.2 Η διαδικασία Ito - Λήμμα Ito

Από την άλλη μεριά, στις στοχαστικές διαδικασίες, όπου η απλή παραγώγιση δεν μπορεί να εφαρμοστεί λόγω των παραπάνω χαρακτηριστικών, η μέθοδος που μας επιτρέπει να δούμε πως συμπεριφέρεται μία μεταβλητή όταν αλλάζει μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή είναι η στοχαστική ανάλυση που μας παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο, το λήμμα Ito.

Έστω ότι η απόδοση ενός υποκείμενου S τίτλου περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση

$$dS(t) = a(S,t)dt + b(S,t)dW \quad \textbf{(3)},$$

όπου

- $dW \quad X\sqrt{dt}$ κίνηση Brown, με $X \quad N(0,1)$
- $a(S,t)$: Μέση απόδοση ή τάση
- $b(S,t)$: Τυπική απόκλιση

Διαδικασίες που ικανοποιούν μια εξίσωση όπως η παραπάνω λέγονται διαδικασίες Ito. Ο Ito λοιπόν έδειξε, και ο Hans – Peter Deutsch το παρουσιάζει στο βιβλίο του [7], ότι αν μία μεταβλητή ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία και μια συνάρτηση της μεταβλητής αυτής και του χρόνου $f(S,t)$ είναι διπλά διαφορίσιμη, τότε:

$$df(S,t) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial S}a(S,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}b(S,t)\right]}_{a_f(S,t)}dt + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial S}b(S,t)}_{b_f(S,t)}dW \quad \textbf{(4)}$$

Η συνάρτηση $f(S,t)$ είναι επίσης μια διαδικασία Ito, αφού έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (3).

2.2.3 Αλλαγή μέτρου πιθανότηταςRadon Nikodym Derivative

Στον ορισμό της κίνησης Brown έγινε σαφές πως αυτή κατανέμεται κανονικά με N(0,t) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι συμβαίνει στην κίνηση Brown όταν το μέτρο πιθανότητας αλλάζει; Αν αντιστοιχίσει κανείς μια πιθανότητα p_i μια μετοχή ή ένας τυχαίος περίπατος να ακολουθήσει ένα συγκεκριμένο μονοπάτι, τότε το μέτρο πιθανότητας P θα προσδιορίζει το σύνολο των πιθανοτήτων που χαρακτηρίζουν όλα τα δυνατά μονοπάτια. Αν ωστόσο, κάποιος αντιστοιχίσει μια πιθανότητα q_i η ίδια μετοχή ή ο τυχαίος περίπατος να ακολουθήσει ένα συγκεκριμένο μονοπάτι, τότε θα υπάρχει ένα άλλο μέτρο πιθανότηταςQ που θα προσδιορίζει ένα διαφορετικό σύνολο πιθανοτήτων που θα χαρακτηρίζουν όλα τα δυνατά μονοπάτια.

Υπάρχει λοιπόν ένας τρόπος με τον οποίο είναι δυνατόν κάθε φορά από το ένα μέτρο πιθανότητας να παράγουμε το άλλο. Αν πάρουμε το λόγο $\frac{dQ}{dP}$, τότε θα έχουμε δημιουργήσει μια τυχαία μεταβλητή που ονομάζεται **Radon – Nikodym** παράγωγος του Q ως προς το μέτρο P, μέσω της οποίας θα είναι δυνατόν γνωρίζοντας το σύνολο P να παράγουμε το σύνολο Q. Ο παραπάνω λόγος ορίζεται στην περίπτωση που έχουμε ισοδύναμα μέτρα. Δηλαδή αν A είναι κάποιο ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου, τότε

$$P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$$

που σημαίνει ότι τα δύο μέτρα κατά κάποιο τρόπο συμφωνούν ως προς το τι είναι δυνατό και τι όχι.

Γενικότερα για την παράγωγο Radon – Nikodym ισχύουν τα εξής, όπως αναφέρονται στο βιβλίο των Martin Baxter και Andrew Rennie [16]:

Δεδομένων δύο ισοδύναμων μέτρων P και Q και ενός χρονικού ορίζοντα T, μπορούμε να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή $\frac{dQ}{dP}$ πάνω σε P-πιθανά μονοπάτια η οποία θα παίρνει πραγματικές τιμές έτσι ώστε:

- $E_Q(X_T) = E_P\left(\frac{dQ}{dP}X_T\right)$, για κάθε γνωστή απαίτηση στο χρόνο T
- $E_Q(X_t \mid F_s) = \zeta_s^{-1} E_P(\zeta_t X_t \mid F_s)$, με $s \le t \le T$ και ζ μια διαδικασία $E_P\left(\frac{dQ}{dP} \mid F_t\right)$.

Αναφέραμε προηγουμένως πως η αξία ενός δικαιώματος είναι η αναμενόμενη απόδοση προεξοφλημένη με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Στην ουσία λοιπόν όλα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω για την αλλαγή μέτρου πιθανότητας έχουν να κάνουν με τη δημιουργία ενός κόσμου ουδέτερου κινδύνου.

2.2.4 Θεώρημα Cameron – Martin – Girsanov

Αποκτώντας μια ευχέρεια με τα μέτρα πιθανότητας και τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε πως η μόνη συνέπεια της αλλαγής μέτρου μιας κίνησης Brown είναι η αλλαγή στην τάση (drift). Αυτή η παρατήρηση οδήγησε σε ένα θεώρημα γνωστό ως **Cameron – Martin – Girsanov**.

Αν W_t είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας P και γ_t μια F previsible[1] διαδικασία που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη $E_P e^{\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)} < \infty$, τότε υπάρχει ένα μέτρο Q τέτοιο ώστε:

- Το μέτρο Q είναι ισοδύναμο με το μέτρο P
- $\dfrac{dQ}{dP} = e^{\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t dt\right)}$
- $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ είναι μια κίνηση Brown υπό το μέτρο Q.

Με άλλα λόγια η W_t είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q με τάση $-\gamma_t$ τη στιγμή t. Δηλαδή, κάτω από περιορισμούς αν θέλει κανείς να μετατρέψει μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P, σε μια κίνηση Brown με τάση $-\gamma_t$, τότε υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q που το κάνει αυτό. Το αντίστροφο ισχύει ως εξής:

αν W_t είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P και Q είναι ένα μέτρο ισοδύναμο με το P, τότε υπάρχει μια F previsible διαδικασία γ_t τέτοια ώστε η $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ να είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q.

[1] Πρόκειται για μια διαδικασία η αξία της οποίας τη χρονική στιγμή i εξαρτάται μόνο από την ιστορία μέχρι τη χρονική στιγμή πριν δηλαδή F_{i-1}.

2.2.5 Martingales

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι η αξία ενός δικαιώματος είναι η αναμενόμενη απόδοση προεξοφλημένη με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Είναι δηλαδή η αναμενόμενη απόδοση όχι κάτω από ένα οποιοδήποτε μέτρο P αλλά κάτω από εκείνο το μέτρο Q που εξασφαλίζει έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Η ιδέα υπό εξέταση στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η εύρεση ενός μέτρου σε σχέση με το οποίο η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την κίνηση του υποκείμενου στοιχείου να παραμένει η ίδια. Το μέτρο που εξασφαλίζει μια τέτοια συνθήκη λέγεται **Martingale** μέτρο. Γενικά ισχύουν τα εξής:

Μια στοχαστική διαδικασία S_t είναι Martingale κάτω από το μέτρο P αν και μόνο αν

- $E_P\left(|S_t|\right) < \infty$ για όλα τα t
- $E_P\left(S_t \mid F_s\right) = S_s$ για όλα τα $s \le t$.

Μία πολύ σημαντική συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ο λεγόμενος κανόνας του πύργου για τις υπό συνθήκη αναμενόμενες τιμές. Δηλαδή

$$E_P\left(E_P\left(X \mid F_t\right) \mid F_s\right) = E_P\left(X \mid F_s\right).$$

2.2.6 Martingale representation theorem

Έστω ότι έχουμε δύο διαδικασίες που είναι Martingale κάτω από το ίδιο μέτρο πιθανότητας. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να φτιάξουμε τη μια διαδικασία μέσω της άλλης. Η απάντηση είναι ναι και δίνεται από το **Martingale Representation Theorem**, όπως αυτό παρουσιάζεται από τους Martin Baxter και Andrew Rennie [16], το οποίο έχει ως εξής.

Αν δύο διαδικασίες M_t και N_t είναι Martingales κάτω από το ίδιο μέτρο και ισχύει πάντα ότι $\sigma_{M_t} \neq 0$ τότε υπάρχει μια F previsible διαδικασία φ μοναδική για την οποία ισχύει $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ με πιθανότητα ένα, έτσι ώστε η διαδικασία N να μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s .$$

2.3 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Μέχρι στιγμής έχουν περιγραφεί όλες οι απαραίτητες ιδέες που διέπουν το μοντέλο των Black & Scholes. Ωστόσο, δεν υπάρχει καμία ιδέα για το πώς θα μπορούσαν αυτές να χρησιμοποιηθούν σε ένα ενιαίο μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από μετοχές και ομόλογα όπου ϕ_t και ψ_t είναι δύο διαδικασίες που περιγράφουν αντίστοιχα τον αριθμό των παραπάνω στοιχείων του χαρτοφυλακίου και ϕ_t είναι μια F previsible διαδικασία. Αν S_t και B_t είναι αντίστοιχα η αξία της μετοχής και του ομολόγου, τότε μπορούμε εύκολα να βρούμε την αξία του χαρτοφυλακίου με βάση την παρακάτω εξίσωση

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t .$$

Αν οι μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου προέρχονται μόνο από μεταβολές στην αξία των περιουσιακών στοιχείων που το απαρτίζουν, τότε λέμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο (self – financing). Κάτι τέτοιο στη γλώσσα των μαθηματικών περιγράφεται από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t .$$

Στην ουσία σε ένα self – financing χαρτοφυλάκιο δεν χρειάζεται ο επενδυτής να βγάζει και να βάζει χρήματα αγοράζοντας ή πουλώντας μετοχές και ομόλογα, αλλά αρκεί να ρυθμίζει ανάλογα τον αριθμό των μετοχών και ομολόγων που κάθε φορά θα διαθέτει ώστε η αξία του να είναι ίση με την τιμή του παραγώγου που εμείς θέλουμε να αποτιμήσουμε. Μια τέτοια στρατηγική στην οποία υπάρχει ένα self – financing χαρτοφυλάκιο, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\phi_t S_t + \psi_t B_t = V_t = X \text{ με } \int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$$

όπου X είναι η απόδοση του παραγώγου τη στιγμή T, είναι γνωστή ως replicating στρατηγική (στρατηγική αντιγραφής ή μίμησης).

Έστω λοιπόν ότι ένας επενδυτής έχει το εξής μοντέλο:

- $B_t = e^{rt}$
- $S_t = S_0 e^{(\sigma W_t + \mu t)}$

όπου B_t είναι ένα ομόλογο, S_t μια μετοχή , **r** το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (σταθερό), **σ** η τυπική απόκλιση της μετοχής (σταθερή), **μ** η τάση (σταθερή) και W_t τυχαίος περίπατος που περιγράφει την κίνηση της μετοχής.

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ο επενδυτής για να παράγει μια replicating στρατηγική είναι τρία και έχουν να κάνουν με την εφαρμογή όλων των παραπάνω εργαλείων που αναλύθηκαν.

- Πρέπει να βρεθεί ένα μέτρο Q κάτω από το οποίο η διαδικασία S_t να είναι martingale
- Πρέπει από την απαίτηση X (απόδοση δικαιώματος κατά T) να μπορεί να δημιουργηθεί μια διαδικασία $E_t = E_Q\left(X \mid F_t\right)$
- Πρέπει να βρεθεί μια previsible διαδικασία ϕ_t (γνωρίζω την τιμή της το χρόνο t αλλά όχι πριν), τέτοια ώστε $dE_t = \phi_t dS_t$.

Συνεπώς, αν εφαρμοστούν τα παραπάνω βήματα στο μοντέλο έχουμε:

Αν θέσουμε

$$Y_t = \ln(S_t) = \sigma W_t + \mu t$$

τότε έχουμε $S_t = e^{Y_t}$.

Οπότε αν εφαρμόσουμε το **Λήμμα Ito** στην παραπάνω διαδικασία θα έχουμε

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt\,.$$

Για να είναι μια τέτοια διαδικασία **martingale** θα πρέπει να αφαιρεθεί από αυτή η τάση. Θέτοντας μια διαδικασία γ_t με σταθερή τιμή $\gamma = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ και με βάση το θεώρημα των **Cameron – Martin – Girsanov** θα πρέπει να υπάρχει ένα μέτρο Q κάτω από το οποίο η **διαδικασία Ito** να γίνεται μια διαδικασία χωρίς τάση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα παίρνουμε την παρακάτω διαδικασία χωρίς τάση

$$dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t\,.$$

Αν τώρα υπάρχει μια μεταβλητή $X = (S_T - k)^+$ που μας δίνει την απόδοση του δικαιώματος στη λήξη, τότε, δεδομένου ενός μέτρου Q μπορούμε να φτιάξουμε μια διαδικασία $E_t = E_Q(X \mid F_t)$ η οποία μπορεί να αποδειχτεί πως είναι **martingale** κάτω από το μέτρο Q.

Τέλος, αφού έχουμε δύο διαδικασίες martingale κάτω από το ίδιο μέτρο Q μπορεί να εφαρμοστεί το **martingale representation theorem** και από τη μία να δημιουργήσουμε την άλλη. Υπάρχει λοιπόν μια F previsible διαδικασία ϕ_t τέτοια ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

$$E_t = E_Q\left(X \mid F_t\right) = E_Q(X) + \int_0^t \phi_s dS_s \Rightarrow dE_t = \phi_t dS_t \quad \textbf{(5)}.$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο με ϕ_t μετοχές και ψ_t ομόλογα όπως περιγράφηκε προηγουμένως

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t .$$

Αν το ομόλογο είναι σταθερό όπως αναφέρεται στις υποθέσεις και η αξία του είναι ίση με 1 ($B_T = 1, r = 0$) τότε η μεταβολή της αξίας του στο χρόνο θα είναι 0 ($dB_T = 0$), άρα

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t \quad \textbf{(6)}$$

και για να είναι το χαρτοφυλάκιο self – financing θα πρέπει να ισχύει

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t = \phi_t dS_t = dE_t \qquad \text{λόγω της } \textbf{(5)},$$

δηλαδή $V_t = E_t$

συνεπώς από **(6)** $\psi_t = E_t - \phi_t S_t$.

Άρα στη λήξη του δικαιώματος η στρατηγική μίμησης θα αποδώσει $V_t = E_t = X$ που σημαίνει πως υπάρχει ανά πάσα στιγμή μια τιμή εξισορρόπησης (arbitrage) για αυτό. Επιπλέον, υπάρχει και τη χρονική στιγμή 0 τιμή arbitrage που ισούται με την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή 0, δηλαδή $V_0 = E_0 = E_Q(X)$, που σημαίνει ότι η τιμή του δικαιώματος ισούται με την αναμενόμενη απόδοση της απαίτησης (claim) X (απόδοση στη λήξη) κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q που κάνει τη διαδικασία S_t martingale.

Ακόμα και στην περίπτωση που το επιτόκιο είναι μη μηδενικό μπορούμε να κατασκευάσουμε μια παρόμοια στρατηγική και να αποτιμήσουμε το δικαίωμα μόνο που σε αυτή την περίπτωση η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή 0 θα ισούται με την προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή του claim $X = (S_T - k)^+$ κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q που κάνει την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής martingale. Δηλαδή :

$$V_0 = e^{-rT} E_Q\left[(S_T - k)^+ \right].$$

Συνοπτικά, θα αναφερθεί πως καταλήγουμε σε αυτό το συμπέρασμα. Στην περίπτωση μη μηδενικών επιτοκίων είναι απαραίτητο να λάβουμε προεξοφλημένες τιμές για την απαίτηση και τη μετοχή. Άρα

$Z_t = B_t^{-1} S_t$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής

$B_t = e^{rt}$ είναι το ομόλογο

B_t^{-1} είναι η προεξοφλημένη τιμή για το ομόλογο

$B_t^{-1} X$ είναι η προεξοφλημένη τιμή για την απαίτηση X

Αν $S_t = e^{(\sigma W_t + \mu t)}$ τότε με βάση τα παραπάνω $Z_t = e^{(\sigma W_t + (\mu - r)t)}$ και αν στην τελευταία θέσουμε τον εκθέτη με Y_t, τότε θα έχουμε $Z_t = e^{Y_t}$, συνεπώς λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\log(Z_t) = Y_t = \sigma W_t + (\mu - r)t \, .$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα Ito και στη συνέχεια το θεώρημα Cameron – Martin – Girsanov βρίσκουμε ότι $dZ = \sigma Z_t d\tilde{W}_t$, η οποία είναι martingale υπό το μέτρο Q. Έπειτα από την προεξοφλημένη μεταβλητή της απαίτησης $B_t^{-1} X$ φτιάχνουμε τη διαδικασία $E_t = E_Q\left(B_t^{-1} X \mid F_t\right)$ που αποδεικνύεται martingale υπό το μέτρο Q. Τέλος, αφού έχουμε δύο martingales διαδικασίες κάτω από το ίδιο μέτρο εφαρμόζουμε το martingale representation theorem και καταλήγουμε ότι $dE_t = \phi_t dZ_t$.

Από την κατασκευή ενός replicating χαρτοφυλακίου με $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ προκύπτει ότι $V_t = E_t B_t = B_t E_Q(B_t^{-1} X) = X$. Εν τέλει, αποδεικνύεται ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο είναι και self – financing και καταλήγουμε ότι

$$V_0 = E_0 B_0 = E_Q(B_0^{-1} X) = E_Q(e^{-rt} X) = e^{-rt} E_Q(X) = e^{-rt} E_Q\left[(S_T - k)^+\right]$$

που είναι και αυτό που αναζητούσαμε.

Αν λοιπόν υπάρχει ένα call option γραμμένο πάνω σε μια μετοχή και $S_t = e^{(\sigma W_t + rt)}$ είναι το μοντέλο που περιγράφει την κίνησή της με τάσηr, τότε όπως είδαμε και προηγουμένως για να είναι το μοντέλο χωρίς τάση κάτω από το μέτρο Q και συνεπώς μια διαδικασία martingale θα πρέπει, όπως αναφέρεται από τον Πέτρο Δελλαπόρτα [26]

$$S_t = e^{\left(\sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)} \Leftrightarrow$$
$$d(\log S_t) = \sigma d\tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt \,.$$

Αν S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή μηδέν, τότε θα έχουμε:

$$\log S_t = \log S_0 + \sigma \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \Leftrightarrow$$
$$S_t = S_0 e^{\left[\sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]} \,.$$

Τέλος, αν θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $Z \quad N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{T}, \sigma^2 \mathrm{T}\right)$, τότε $S_T = S_0 e^{Z+rt}$ και επομένως η τιμή του δικαιώματος θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_0 = e^{-rT} E\left[\left(S_0 e^{(Z+rt)} - k\right)^+\right] =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \mathrm{T}}} \int_{\log\left(\frac{k}{S_0}\right)}^{\infty} \left\{ e^{-rt}\left(S_0 e^{(Z+rt)} - k\right) e^{-\frac{(x+\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{T})^2}{2\sigma^2\mathrm{T}}} \right\} dx \,.$$

Θέτοντας $\phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X} e\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy$ να συμβολίζει την πιθανότητα η κανονική κατανομή N(0,1) να έχει αξία μικρότερη από X (είναι δηλαδή η αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής στο X) και έπειτα από μερικούς αλγεβρικούς χειρισμούς μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $V_0=V(S_0,T)$, η οποία όπως απέδειξαν οι Black Fischer και Scholes Myron[2], δίνεται από τον τύπο:

$$V(S_0,T)=S_0\phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{k}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right)-ke^{-rt}\phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{k}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right)$$ ή

$$V(S_0,T)=S_0\phi(d_1)-ke^{-rt}\phi(d_2)$$ με

$$d_1=\frac{\log\frac{S_0}{k}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$$

$$d_2=\frac{\log\frac{S_0}{k}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$$

Η παραπάνω παράσταση αποτελεί το γνωστό τύπο των Black & Scholes με βάση τον οποίο γίνεται σήμερα η αποτίμηση απλών δικαιωμάτων όπως τα ευρωπαϊκά και αποτελεί τη βάση για την αποτίμηση και πιο σύνθετων σύμφωνα με τους Martin Baxter και Andrew Rennie [16].

3. ΕΞΩΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Πριν προχωρήσουμε στις άλλες μεθόδους με τις οποίες μπορεί να γίνει η αποτίμηση των δικαιωμάτων είναι χρήσιμο να σταθούμε σε μια συγκεκριμένη κατηγορία δικαιωμάτων που σκοπίμως δεν αναφέρθηκε προηγουμένως, λόγω της ιδιαιτερότητάς της και της σημασίας της για την παρούσα μελέτη Πρόκειται λοιπόν για τα **εξωτικά δικαιώματα (exotic options)**. Τα εξωτικά δικαιώματα έχουν δημιουργηθεί για διαφόρους λόγους. Σε κάποιες περιπτώσεις αποτελούν εργαλεία αντιστάθμισης του κινδύνου από διάφορες επενδυτικές επιλογές. Αρκετές φορές εξυπηρετούνφορολογικούς, λογιστικούς ή νομικούς σκοπούς και είναι ιδιαίτερα ελκυστικά επειδή μπορούν να αποφέρουν μεγαλύτερο κέρδος από τα απλά δικαιώματα. Μερικές φορές βέβαια τα δικαιώματα αυτά εκδίδονται από τραπεζικούς οργανισμούς απλά για να φαίνονται ελκυστικάστους υποψήφιους αγοραστές.

Προηγουμένως έγινε σαφές ότι έναoption δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή του να αγοράσει (call) ή να πουλήσει (put) ένα συγκεκριμένο υποκείμενο προϊόν σε μια συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης– exercise price), σε μια (αν πρόκειται για ευρωπαϊκό) ή μέχρι μια (αν πρόκειται για αμερικανικό) προσυμφωνημένη ημερομηνία (ημερομηνία λήξης). Ωστόσο, στην περίπτωση των εξωτικών δικαιωμάτων ο παραπάνω ορισμός φαίνεται ανεπαρκής. Απαιτείται λοιπόν μια γενίκευση προκειμένου να συμπεριλαμβάνονται και τα εξωτικά δικαιώματα σ' αυτόν, πουσύμφωνα με τονHans – Peter Deutsch [7], έχει ως ακολούθως.

Ένα option σε ένα ή περισσότερα υποκείμενα αγαθά με τιμές $S_1, S_2, \ldots, S_n$ χαρακτηρίζεται από το είδος της απόδοσής του. Η απόδοση του δικαιώματος είναι μια συνάρτηση $F(S_1, S_2, \ldots S_n)$ των υποκείμενων αγαθών, και δείχνει τις ταμειακές ροές για τον κάτοχό του κατά την εξάσκηση. Είναι φανερό, λοιπόν, πως στον κόσμο των εξωτικών δικαιωμάτων η συνάρτηση της απόδοσης είναι σημαντικά πιο περίπλοκη από ότι των απλών δικαιωμάτων, γεγονός που κάνει και πιο δύσκολη την αποτίμησή τους.

3.1 ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Τα εξωτικά δικαιώματα διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες. Είναι δικαιώματα που ανήκουν στην κατηγορία αυτών που εξαρώνται από το μονοπάτι που ακολουθεί ο υποκείμενος τίτλος (**path dependent options**), τα δικαιώματα συσχέτισης (**correlation options**) και τέλος εκείνα που δεν ανήκουν σε καμία από τις πιο πάνω κατηγορίες(Zhang G. Peter [23]).

3.1.1. Path dependent options

Σε αυτή την κατηγορία τα δικαιώματα είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε να συλλαμβάνουν με κάποιο τρόπο την ιστορία του μονοπατιού της τιμής του υποκείμενου αγαθού μέχρι τη λήξη. Γενικά υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη τέτοιων δικαιωμάτων.

- **Asian options**

Το τελικό κέρδος από τη χρήση των δικαιωμάτων αυτών εξαρτάται από το μέσο όρο των τιμών του υποκείμενου τίτλου μέχρι την λήξη τους ή σε κάποιο προκαθορισμένο διάστημα. Επειδή ο μέσος όρος των τιμών του υποκείμενου τίτλου πριν τη λήξη του έχει μικρότερη διακύμανση από ην τελική τιμή του, τα δικαιώματα αυτά είναι πιο φθηνά από τα κλασικά αντίστοιχα δικαιώματα που εξαρτώνται μόνο από την τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου. Τα δικαιώματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμιστεί ο κίνδυνος στον οποίο μπορεί να εκτεθεί μια εταιρία η οποία αγοράζει ή πουλά ανά τακτά χρονικά διαστήματα οποιοδήποτε είδος εμπορεύσιμου περιουσιακού στοιχείου. Οι συναλλαγές των δικαιωμάτων αυτών συνήθως γίνονται στιςOTC αγορές (over the counter markets), οι οποίες δεν έχουν μεγάλο βάθος (δεν εμπλέκεται μεγάλος αριθμός επενδυτών). Σε αυτές τις περιπτώσεις ο γρήγορος υπολογισμός της τιμής τους εξυπηρετεί την εξασφάλιση δίκαιων διαπραγματεύσεων.

Τα δικαιώματα Ασιατικού τύπου έχουν αρκετές παραλλαγές οι οποίες κυρίως βασίζονται στον τρόπο που υπολογίζεται ο μέσος όρος, S_{ave}, των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Έτσι, έχουμε δικαιώματα Ασιατικού τύπου που βασίζονται στον *αριθμητικό* ή στον *γεωμετρικό* μέσο. Επίσης αν το

S_{ave} υπολογίζεται για όλη τη χρονική διάρκεια που ισχύει το δικαίωμα τότε λέμε ότι έχουμε ένα plain vanilla Ασιατικό δικαίωμα. Αν ο υπολογισμός του S_{ave} γίνεται για κάποιο χρονικό σημείο και μέχρι τη λήξη του τότε λέμε ότι έχουμε ένα backward – starting δικαίωμα Ασιατικού τύπου. Αν η τιμή εξάσκησης Κ είναι σταθερή, τότε δικαιώματα αγοράς και πώλησης με συνάρτηση κέρδους H_u

$$k_{call}(S_T) = (S_{ave} - K)^+, k_{put}(S_T) = (K - S_{ave})^+$$

αντίστοιχα, λέγονται fixed – strike, ενώ αν αντίστοιχα είναι

$$k_{call}(S_T) = (S_T - S_{ave})^+, k_{put}(S_T) = (S_{ave} - S_T)^+$$

λέγονται floating – strike. Αν το S_{ave} είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος τότε λέγονται *flexible*, ενώ αν το S_{ave} έχει υπολογιστεί με ίσα βάρη λέγεται *equally – weighted*. Ένα Ασιατικό δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου λέγεται και *Eurasian*.

- **Barrier options**

Τα δικαιώματα αυτά είναι παρόμοια με τα τυπικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου με τη μόνη διαφορά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου πρέπει να υπερβεί ή όχι (ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος) μια συγκεκριμένη τιμή (που ονομάζεται φράγμα - barrier) για να θεωρηθούν ενεργά (alive). Διαφορετικά θεωρούνται ανενεργά (dead). Επειδή το κέρδος που αποδίδουν είναι το ίδιο με το κέρδος που αποδίδουν τα τυπικά δικαιώματα, δεδομένης κάποιας συνθήκης , είναι επόμενο ότι το ασφάλιστρό τους θα είναι πιο φθηνό από ένα αντίστοιχο τυπικό δικαίωμα. Υπάρχουν τέσσερις παραλλαγές του συγκεκριμένου τύπου:

- Αν η τιμή του φράγματος H_d είναι μικρότερη από την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου:

  a) **Down – and – in.** Το δικαίωμα θα θεωρείται ενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει μικρότερη ή ίση από την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

b) **Down – and – out.** Το δικαίωμα θα θεωρείται ανενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει μικρότερη ή ίση από την τιμή H_d μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

❖ Αν η τιμή του φράγματος H_u είναι μεγαλύτερη από την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου :

c) **Up – and – in.** Το δικαίωμα θα θεωρείται ενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει ίση ή υπερβεί την τιμή H_u μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

d) **Up – and – out.** Το δικαίωμα θα θεωρείται ανενεργό όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει ίση ή υπερβεί την τιμή H_u μέχρι το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

Υπάρχει παραλλαγή του Barrier δικαιώματος σύμφωνα με την οποία, όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου φτάσει το φράγμα, τα δικαιώματα γίνονται μη ενεργά και επιστρέφονται κάποια χρήματα του ασφαλίστρου στον κάτοχό τα. Αυτή η παραλλαγή είναι ακριβότερη.

Τα barrier δικαιώματα μπορούν να θεωρηθούν είτε Ευρωπαϊκού τύπου (αν μπορούν να εξασκηθούν μόνο κατά την λήξη τους), είτε Αμερικανικού τύπου (αν μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη τους). Τα δικαιώματα αυτά λόγω του χαμηλού κόστους χρησιμοποιούνται ευρέως . Ένας επενδυτής εκτός από αντιστάθμιση κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δικαιώματα αυτά και για να αυξήσει τη χρηματοοικονομική μόχλευση (leverage) (μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους αναλαμβάνοντας μεγαλύτερο κίνδυνο).

➢ **Look-back options**

Το κέρδος από τη χρήση δικαιωμάτων τέτοιου τύπου εξαρτάται από τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο υποκείμενος τίτλος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Συγκεκριμένα το κέρδος ενός look - back option Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τιμής του υποκείμενου τίτλου στη λήξη του και της μικρότερης τιμής που έχει πάρει μέχρι εκείνη τη στιγμή. Το κέρδος ενός look – back Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης ισούται με τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης τιμής που έχει πάρει ο υποκείμενος τίτλος μέχρι τη λήξη του και στην τιμή που έχει τη στιγμή της λήξης του. Έτσι ο κάτοχος ενόςlook – back δικαιώματος αγοράς στην ουσία αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο στη χαμηλότερη τιμή που έχει πάρει από τη στιγμή που άρχισε να ισχύει μέχρι τη λήξη του και ο κάτοχος ενόςlook – back δικαιώματος πώλησης πουλά τον υποκείμενο τίτλο στην υψηλότερη τιμή που έχει πάρει ο τίτλος μέχρι τη λήξη του.

➢ **Forward – start options**

Στην περίπτωση αυτή συγκαταλέγονται δικαιώματα των οποίων τα premium προκαταβάλλονται και η ζωή των οποίων ξεκινά σε μια προκαθορισμένη μελλοντική στιγμή με τιμή εξάσκησης ίση με την τιμή που έχει το υποκείμενο κατά την έναρξη του δικαιώματος.

3.1.2 Correlation options

Τα δικαιώματα συσχέτισης αφορούν εκείνα τα προϊόντα των οποίων η απόδοση σχετίζεται με πολλά υποκείμενα αγαθά. Είναι φυσικό λοιπόν η συσχέτιση των υποκειμένων στοιχείων να επηρεάζει και την τιμολόγηση των συγκεκριμένων δικαιωμάτων. Μάλιστα τέτοιου είδους δικαιώματα είναι επίσης γνωστά υπό τον τίτλο **“multi – asset derivatives”**. Τα προϊόντα αυτά ταξινομούνται ως ακολούθως:

- **Spread options**

Ένα spread option είναι γραμμένο σε δύο διαφορετικά υποκείμενα προϊόντα και η απόδοσή του δίνεται από τη διαφορά των τιμών του σε σχέση με την τιμή εξάσκησης αν αυτή είναι θετική. Με άλλα λόγια

spread call: **max ((S1-S2-X),0)**

- **Out – performance options**

Ένα out – performance option είναι μια ειδική περίπτωση δικαιώματος που εκμεταλλεύεται τις αναμενόμενες διαφορές στις σχετικές αποδόσεις των υποκείμενων αγαθών. Η απόδοση ενός τέτοιου δικαιώματος στη λήξη ισούται με την σχετική απόδοση του ενός υποκείμενου μείον την σχετική απόδοση του άλλου πολλαπλασιασμένη με ένα δεδομένο ποσό. Δηλαδή

$$\max\left\{w\left[\frac{S_1(T)}{S_1}-\frac{S_2(T)}{S_2}\right]-wk,0\right\}.$$

- **Exchange options**

Με αυτά τα δικαιώματα ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα να ανταλλάσσει το ένα υποκείμενο αγαθό με ένα άλλο. Με άλλα λόγια ένα τέτοιο δικαίωμα μπορεί να φανεί σαν ένα call option σε ένα υποκείμενο με τιμή εξάσκησης ίση με τη μελλοντική τιμή του δεύτερου υποκειμένου στη λήξη (**max(S1-S2,0)**) ή σαν ένα put option στο δεύτερο υποκείμενο με τιμή εξάσκησης ίση με τη μελλοντική τιμή του πρώτου υποκείμενου στη λήξη.

- **Complex or rainbow options**

Τα δικαιώματα αυτά αφορούν συμφωνίες πάνω στην καλύτερη ή χειρότερη απόδοση δύο ή περισσότερων υποκείμενων προϊόντων. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει ένα **call on max option** που η τιμή δίνεται από τη σχέση: **max(max(S1,S2)-X,0)**

- **Quanto options**

Πρόκειται για σύνθετα δικαιώματα που περιλαμβάνουν επένδυση σε ξένα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία αλλά με καθορισμένο επιτόκιο, έτσι ώστε ο επενδυτής να συλλαμβάνει το κέρδος από μια ευνοϊκή μεταβολή της τιμής του υποκείμενου, μηδενίζοντας ταυτόχρονα το συναλλαγματικό κίνδυνο, αφού το κέρδος είναι σε εγχώριο νόμισμα.

- **Basket options**

Ένα basket option είναι γραμμένο σε ένα καλάθι από υποκείμενα προϊόντα. Πολύ συχνά τέτοια προϊόντα είναι γνωστά και ως portfolio options και η τιμή τους δίνεται από τη σχέση **max(S1+S2-X, 0)**.

3.1.3 Διάφορα εξωτικά δικαιώματα

Θα γίνει μια αναφορά σε διάφορα εξωτικά δικαιώματα που δεν ανήκουν στις δύο παραπάνω κατηγορίες.

- **Digital options ή Binary options**

Πρόκειται για δικαιώματα για τα οποία το μέγεθος της απόδοσης είναι ανεξάρτητο από την τιμή του υποκειμένου. Το υποκείμενο προϊόν προσδιορίζει μόνο αν το δικαίωμα θα εξασκηθεί ή όχι, ενώ ο επενδυτής λαμβάνει το ίδιο ποσό ανεξάρτητα του πόσο in the money είναι το δικαίωμα.

- **Compound options**

Σε αυτή την περίπτωση γίνεται λόγος για δικαιώματα που είναι γραμμένα πάνω σε άλλα δικαιώματα. Δεδομένου ότι υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων, τα puts και τα calls, μπορούμε να έχουμε τέσσερα είδη compound options.

i. Calls γραμμένα σε calls
ii. Calls γραμμένα σε puts
iii. Puts γραμμένα σε puts
iv. Puts γραμμένα σε calls.

- **Chooser options**

Στα δικαιώματα αυτά ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να επιλέξει σε μια προκαθορισμένη περίοδο πριν τη λήξη το είδος του δικαιώματος. Με άλλα λόγια μπορεί ο επενδυτής να επιλέξει αν το δικαίωμα θα λήξει ως put ή call.

- **Non – linear payoff options**

Τα πιο γνωστά μη γραμμικής απόδοσης δικαιώματα είναι τα λεγόμενα power options. Πρόκειται για δικαιώματα των οποίων η απόδοση παρουσιάζεται σαν τη διαφορά μεταξύ μιας δύναμης της τιμής λήξης του υποκείμενου $S^n(T)$ και της τιμής εξάσκησηςk.

- **Contingent premium options ή pay – later options**

Ο κάτοχος ενός τέτοιου δικαιώματος δεν πληρώνει κανένα premium για να το αποκτήσει. Αντίθετα, στη λήξη, αν το δικαίωμα λήξει με κέρδος, τότε ο κάτοχος πληρώνει ένα προκαθορισμένοpremium για να το εξασκήσει, ενώ αν λήξει out of the money δεν πληρώνει τίποτα.

- **Mid – atladic options ή Bermuda options**

Αυτού του είδους τα δικαιώματα είναι κάτι μεταξύ αμερικανικών και ευρωπαϊκών. Αντί να μπορεί ο επενδυτής να εξασκήσει το δικαίωμα οποιαδήποτε στιγμή, μπορεί να το κάνει μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές πριν τη λήξη.

- **Installment options**

Πρόκειται για δικαιώματα που επιτρέπουν στον επενδυτή να πληρώνει τα premium σε δόσεις. Επομένως, προσφέρουν τη δυνατότητα για ακύρωση των options αν κάτι τέτοιο κρίνεται απαραίτητο.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η αναφορά στις διακρίσεις των εξωτικών δικαιωμάτων. Ωστόσο, πρέπει να γίνει σαφές ότι η παραπάνω κατηγοριοποίηση περιλαμβάνει τους πιο αντιπροσωπευτικούς τύπους εξωτικών δικαιωμάτων χωρίς αυτό να σημαίνει πως τους περιλαμβάνει όλους, καθώς το πεδίο αυτό φαίνεται να είναι αρκετά ευρύ. Από όλα τα παραπάνω προϊόντα, η παρούσα μελέτη επικεντρώνει το ενδιαφέρον της στην κατηγορία των δικαιωμάτων συσχέτισης, αφού αυτά βασίζονται σε περισσότερους του ενός υποκείμενους τίτλους και συνεπώς ο ρόλος της συσχέτισης μεταξύ τους είναι σημαντικός.

3.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Η βασική ιδέα για την αποτίμηση ενός δικαιώματος που βασίζεται σε ένα μόνο υποκείμενο αγαθό είναι ο λογαριθμικός τυχαίος περίπατος

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dX \;.$$

Η ιδέα αυτή μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην περίπτωση ενός μοντέλου για δικαιώματα σε πολλά υποκείμενα αγαθά, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο του Paul Wilmott [22]

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dX$$

όπου S_i είναι η τιμή του ενός τίτλου με $i = 1,2,\ldots,d$, μ_i και σ_i είναι η τάση και η τυπική απόκλιση κάθε στοιχείου αντίστοιχα και dX_i είναι η οριακή τυχαία μεταβολή στην κίνηση Brown. Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να σκεφτούμε το dX_i σαν ένα τυχαίο αριθμό από την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση $dt^{1/2}$, έτσι ώστε

$$\mathrm{E}\left[dX_i\right] = 0 \text{ και } \mathrm{E}\left[dX_i^2\right] = dt \,.$$

Επιπλέον, οι αριθμοί dX_i και dX_j στην περίπτωση αυτή είναι συσχετισμένοι ώστε

$$\mathrm{E}\left[dX_i dX_j\right] = \rho_{ij} dt \,.$$

Προκειμένου λοιπόν τώρα να χειριστούμε συναρτήσεις πολλών τυχαίων μεταβλητών χρειαζόμαστε την πολυδιάστατη έκδοση του λήμματος Ito. Συνεπώς, αν έχω μια συνάρτηση των μεταβλητών $S_1,\ldots S_d$ και του χρόνου t, $V(S_1,\ldots S_d,t)$, τότε θα βρω

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} \right)dt + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial V}{\partial S_i}dS_i \,.$$

Η θεωρητική πλευρά της αποτίμησης ενός δικαιώματος που έχει γραφεί πάνω σε πολλούς υποκείμενους τίτλους παραμένει ίδια όπως την αναλύσαμε προηγουμένως, μόνο που τώρα η μεθοδολογία Black – Scholes λαμβάνει χώρα σε περισσότερες διαστάσεις. Έτσι λοιπόν δημιοφγούμε ένα χαρτοφυλάκιο που να αποτελείται για παράδειγμα από μια θέσηlong σε ένα basket option και μια θέση short σε Δ_i αριθμό μετοχών από το κάθε υποκείμενο

$$\Pi = V(S_1,\ldots S_d,t) - \sum_{i=1}^{d}\Delta_i S_i \,.$$

Οι μεταβολές σε αυτό το χαρτοφυλάκιο θα δίνονται από την παρακάτω παράσταση:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} \right)dt + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial V}{\partial S_i} - \Delta_i \right)dS_i \,.$$

Αν τώρα επιλέξουμε κατάλληλα Δ_i ώστε $\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}$ για κάθε i, τότε το χαρτοφυλάκιο θα είναι αντισταθμισμένο και χωρίς κίνδυνο. Αν μάλιστα θέσουμε και επιτόκιο ίσο με το επιτόκιο το χωρίς κίνδυνο, θα καταλήξουμε στην πολυδιάστατη έκδοση του τύπου τωνBlack –Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} + \sum_{i=1}^{d}S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 \,.$$

3.3. ΛΗΜΜΑ ΙΤΟ ΓΙΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΣΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε μια επέκταση του λήμματος Ito που θα φανεί χρήσιμη στη συνέχεια. Έστω $V(S_1(t), S_2(t))$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος συσχέτισης με $S_1(t)$ να είναι η τιμή του ενός υποκείμενου τίτλου και $S_2(t)$ του άλλου τη χρονική στιγμή t. Έστω επίσης ότι η V είναι απεριόριστα διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor, όπως αυτό παρουσιάζεται από την Lancu Aniella Karina [12], έχουμε:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_1}dS_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}(dS_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} +$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial t}dS_1 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S_2 \partial t}dS_2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}dS_1 dS_2$$

Έστω τώρα ότι $\rho = corr(S_1, S_2)$ και ότι

$$dS_1 = S_1\mu_1 dt + S_1\sigma_1 dW_1$$
$$dS_2 = S_2\mu_2 dt + S_2\sigma_2 dW_2 \cdot$$

Αν W_1 και W_3 είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown, τότε αποδεικνύεται ότι η

$$W_2 = \rho W_1 + \sqrt{1-\rho^2}W_3$$

είναι και αυτή κίνηση Brown με συσχέτιση ρ σε σχέση με την αρχική W_1.

Αν $(dt^2) \cong 0, dtdW_1 \cong 0, dtdW_2 \cong 0, (dW_1)^2 \cong dt, (dW_2)^2 \cong dt$ και $dW_1 dW_2 \cong \rho dt$, τότε ισχύουν ακολούθως τα εξής:

/

$$(dS_1)^2 \cong \sigma_1 S_1 dt$$
$$(dS_2)^2 \cong \sigma_2 S_2 dt$$
$$dt dS_1 \cong 0$$
$$dt dS_2 \cong 0$$
$$dS_1 dS_2 \cong \sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2 dt$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν κατάλληλα βρίσκω το dV :

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right] dt \, .$$
$$+ \sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2$$

3.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK – SCHOLES ΓΙΑ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ

Πριν προχωρήσουμε, θα θέσουμε μερικές υποθέσεις που διέπουν το μοντέλο που θα αναπτύξουμε, οι οποίες ισχύουν γενικότερα για το μοντέλο των Black –Scholes

1. Οι τιμές των υποκείμενων τίτλων ακολουθούν λογαριθμικούς τυχαίους περίπατους
2. Το επιτόκιο αγοράς r, οι τυπικές αποκλίσεις σ_1 και σ_2, και ο συντελεστής συσχέτισης ρ, είναι γνωστά για όλη τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος
3. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών
4. Δεν υπάρχει πιθανότητα για arbitrage (κέρδος χωρίς κίνδυνο)
5. Δεν υπάρχουν μερίσματα
6. Οι συναλλαγές είναι συνεχείς
7. Επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις (short selling)
8. Οι υποκείμενοι τίτλοι είναι διαιρετοί

Δημιουργούμε, λοιπόν, ένα χαρτοφυλάκιο Π με θέσηlong σε ένα basket option V πάνω σε δύο υποκείμενους τίτλους, και θέσηshort σε $-\Delta_1$ αριθμό μετοχών του πρώτου τίτλου και $-\Delta_2$ αριθμό μετοχών του δεύτερου

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2 \Leftrightarrow$$
$$d\Pi = V - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2 \cdot$$

Αντικαθιστώντας από το λήμμα Ito την αξία του dV στην παραπάνω σχέση έχω:

$$d\Pi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \mu_1 S_1 \dfrac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 \dfrac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_2 \mu_2 S_2 + \\ + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \end{bmatrix} dt + $$
$$+ \left(\sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 \sigma_1 S_1\right) dW_1 + \left(\sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_2 \sigma_2 S_2\right) dW_2 .$$

Θέτοντας, λοιπόν, τώρα τα κατάλληλα Δ, $\Delta_1 = \dfrac{\partial V}{\partial S_1}$ και $\Delta_2 = \dfrac{\partial V}{\partial S_2}$, μπορούμε να απαλείψουμε το τυχαίο στοιχείο του παραπάνω τυχαίου περίπατου. Το αποτέλεσμα αυτής της κίνησης είναι η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που μεταβάλλεται εντελώς προσδιορισμένα

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\right] dt .$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδέα του arbitrage. Η απόδοση ενός ποσού Π που επενδύεται σε τίτλους χωρίς κίνδυνο μετά από χρόνο dt θα είναι rΠdt. Αν τώρα το πρώτο μέρος τις παραπάνω εξίσωσης είναι μεγαλύτερο από αυτό το ποσό, τότε ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε α βγάλει ένα εγγυημένο κέρδος χωρίς κίνδυνο, δανειζόμενος μόνο ένα ποσό Π και επενδύοντάς το στο χαρτοφυλάκιο. Αντίθετα, αν το πρώτο μέρος είναι μικρότερο από το ποσό rΠdt, τότε θα μπορούσε ο κερδοσκόπος να πουλήσει short το χαρτοφυλάκιο και να επενδύσει το ποσό Π σε μια τράπεζα. Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

$$r\Pi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right] dt$$

αλλά όπως είπαμε προηγουμένως, ισχύει ότι:

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2 = V - \Delta_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta \frac{\partial V}{\partial S_2}$$

και συνεπώς αντικαθιστώντας, παίρνουμε τον τύπο τωνBlack – Scholes για ένα Basket option που αναζητούσαμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0.$$

3.5 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΣΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Όπως είδαμε, τα δικαιώματα συσχέτισης είναι μια ειδική κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων όπου το ρόλο του υποκείμενου στοιχείου δεν παίζει ένα αγαθό αλλά πολλά περιουσιακά στοιχεία. Είναι λοιπόν πιθανό, αφού υπάρχουν πολλά περιουσιακά στοιχεία ως υποκείμενα, αυτά να αλληλοεπηρεάζονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα αυτή η σχέση να επηρεάζει και τη συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος που θέλουμε να αποτιμήσουμε. Κάτι τέτοιο μας επιβάλλει να ερευνήσουμε τον αντίκτυπο της συνδιακύμανσης μεταξύ των τιμών των υποκείμενων στη συμπεριφορά του δικαιώματος (Satyajit Das [19]).

Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό γιατί τέτοιου είδους δικαιώματα υποβάλλονται σε δύο κύριες πηγές κνδύνου που προσδιορίζονται από τον αριθμό των υποκείμενων στοιχείων πάνω στα οποία δομείται το δικαίωμα. Έτσι οι επενδυτές έχουν τη δυνατότητα να επιτύχουν τους παρακάτω στόχους βασιζόμενοι ακριβώς στις δύο πηγές κινδύνου:

- Μπορούν να συλλάβουν τη μεταβλητότητα στις τιμές καθενός από τα υποκείμενα στοιχεία
- Μπορούν να προβούν σε πράξεις βασισμένοι στη συσχέτιση μεταξύ της κίνησης των τιμών των αντίστοιχων στοιχείων.

Όπως λοιπόν αναφέραμε, ένα basket option είναι ένα δικαίωμα του οποίου η απόδοση σχετίζεται με την αθροιστική απόδοση ενός συγκεκριμένου καλαθιού υποκείμενων αγαθών (μετοχών, ξένων νομισμάτων, κλπ).

Η απόδοση ενός basket option έχεις ως εξής:

Call option = Maximum $\left[\sum_{i=1}^{n} w_i S_i - K, 0\right]$

Put option = Maximum $\left[\sum_{i=1}^{n} K - w_i S_i, 0\right]$

όπου

S_i είναι η τιμή του υποκείμενου i στο basket option

w_i είναι η στάθμιση (ως ποσοστό) του υποκείμενου i μέσα στο basket option

K είναι η τιμή εξάσκησης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε ότι στον κώδικα που αναπτύσσουμε για την αποτίμηση ενός basket option με δύο στοιχεία, η στάθμιση των υποκείμενων προϊόντων έχει θεωρηθεί για λόγους απλότητας ίδια για κάθε ένα από αυτά. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε έναν κατάλληλα διαμορφωμένο πίνακα με διαφορετικά βάρη για κάθε μετοχή.

Επιπλέον, ένα basket option μοιάζει πολύ με το να αγοράζει ένας επενδυτής ξεχωριστά δικαιώματα πάνω στα στοιχεία του καλαθιού. Ωστόσο, υπάρχουν βασικές διαφορές στο ότι η απόδοση ενός basket option προέρχεται από τη συνολική απόδοση του καλαθιού και όχι από την απόδοση καθενός από τα περιουσιακά στοιχεία που το αποτελούν. Ως εκ τούτου, το premium ενός basket option θα είναι γενικά χαμηλότερο από τα premia για δικαιώματα σε κάθε ένα από τα ξεχωριστά στοιχεία που το αποτελούν. Αυτή η συμπεριφορά είναι απόρροια του είδους της συσχέτισης μεταξύ των στοιχείων του basket option. Δηλαδή αν τα υποκείμενα στοιχεία που απαρτίζουν το δικαίωμα είναι λιγότερο από τέλεια συσχετισμένα τότε το basket option θα κοστίζει λιγότερο από ότι θα κόστιζε να αγοράσουμε διαφορετικά δικαιώματα στα στοιχεία του καλαθιού.

Η βασική ιδέα πίσω από τη δημιουργία ενός basket option στηρίζεται στη θεωρία χαρτοφυλακίου. Πιο συγκεκριμένα η διαφοροποίηση και η μη τέλεια συνδιακύμανση σε ένα δικαίωμα αυτού του είδους χρησιμοποιείται για να μειώσουμε το κόστος του δικαιώματος. Το σκεπτικό είναι το εξής: η διακύμανση του καλαθιού είναι μικρότερη από ότι η διακύμανση κάθε στοιχείου του ξεχωριστά, δείχνοντας έτσι τον αντίκτυπο της μη τέλειας συσχέτισης. Είναι δηλαδή το ίδιο με το να δημιουργούσαμε έναν δείκτη (π.χ. μετοχών) για να διαφοροποιήσουμε τον κίνδυνο και να μειώσουμε τη διακύμανση. Έτσι λοιπόν ένα basket option δημιουργείται με στόχο να μειώσει τη συσχέτιση μεταξύ των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων.

Το ερώτημα που δημιουργείται είναι πώς μεταβάλλεται η τιμή του δικαιώματος όταν μεταβάλλεται αντίστοιχα ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων. Είναι λογικό ότι τοpremium ενός basket option μειώνεται καθώς μειώνεται η συσχέτιση μεταξύ των στοιχείων που το αποτελούν και αυξάνεται αντίστοιχα όσο αυξάνεται η συσχέτιση.

Αντίστοιχα, αν δούμε κι άλλες μορφές δικαιωμάτων συσχέτισης θα διαπιστώσουμε όμοιου είδους εξαρτήσεις από τη συσχέτιση μεταξύ των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων. Για παράδειγμα, ας δούμε τι γίνεται στην περίπτωση ενός rainbow option (best – of / worst – of option) με δύο υποκείμενους τίτλους. Στο είδος αυτό του δικαιώματος ο επενδυτής λαμβάνει την υψηλότερη ή αντίστοιχα τη χαμηλότερη μεταβολή της τιμής (σε ποσοστό) μεταξύ της τιμής του υποκείμενου και της τιμής εξάσκησης. Η απόδοση για αυτού του είδους τα δικαιώματα έχει ως ακολούθως:

Best of option: Maximum $\left(\Delta S_1, \Delta S_2\right)$

Worst of option: Minimum $\left(\Delta S_1, \Delta S_2\right)$

όπου ΔS_i είναι η ποσοστιαία μεταβολή της τελικής τιμής του υποκείμενου σε σχέση με την τιμή εξάσκησης.

Το πλεονέκτημα και σε αυτή την περίπτωση προέρχεται από το γεγονός ότι ένα best – of / worst – of option είναι φθηνότερο από ότι θα ήταν αν αγόραζε κανείς ένα δικαίωμα σε κάθε υποκείμενο στοιχείο. Και πάλι το χαμηλότερο premium σχετίζεται άμεσα με τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών των τιμών των υποκείμενων αγαθών. Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή του δικαιώματος σε ενδεχόμενες μεταβολές του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των μετοχών έχει ως εξής: όσο μεγαλύτερη είναι η συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών των τιμών των υποκείμενων τίτλων τόσο φθηνότερο θα είναι το δικαίωμα σε σύγκριση με δύο ξεχωριστά δικαιώματα πάνω στους τίτλους αυτούς. Αυτό δείχνει ότι όπου η συσχέτιση είναι υψηλή η απόδοση τουbest – of / worst – of option θα είναι ίδια με αυτή ενός συμβατικού δικαιώματος στο ένα αγαθό. Η συγκεκριμένη δομή του δικαιώματος χρησιμοποιείται όταν ο αγοραστής αναμένει ότι και τα δύο υποκείμενα στοιχεία θα κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση αλλά όχι με τον ίδιο ρυθμό.

Επιπλέον, μια άλλη κατηγορία δικαιωμάτων τα οποία επηρεάζονται από το μέγεθος του συντελεστή συσχέτισης είναι τα out performance options. Αυτά τα δικαιώματα αποτελούν μια δομή όπου ο αγοραστής λαμβάνει μια απόδοση με βάση τη διαφορά στην απόδοση των δύο υποκείμενων τίτλων. Δηλαδή η απόδοση ενός out performance option είναι η ποσοστιαία απόδοση της μιας μετοχής μείον την ποσοστιαία απόδοση της άλλης. Αυτό περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Maximum}\left(\Delta S_1 - \Delta S_2, 0\right).$$

Στο σημείο αυτό πρέπει πάλι να πούμε πως το πλεονέκτημα αυτών των δικαιωμάτων ταυτίζεται με αυτό των best – of / worst – of options και basket options, τα οποία είναι φθηνότερα από το να αγοράσει κανείς δικαιώματα πάνω στους υποκείμενους τίτλους ξεχωριστά. Το χαμηλότερο premium σχετίζεται άμεσα και σε αυτή την περίπτωση με το βαθμό συσχέτισης που χαρακτηρίζει τα υποκείμενα αγαθά. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών στις τιμές των μετοχών τόσο φθηνότερο είναι το δικαίωμα σε σχέση με δύο διακριτά δικαιώματα πάνω στους υποκείμενους τίτλους. Αυτό σημαίνει ότι όπου η συσχέτιση είναι μεγάλη, η αναμενόμενη διαφορά μεταξύ των τίτλων θα είναι μικρότερη. Ταυτόχρονα, γίνεται φανερό ότι αυτή η μορφή δικαιώματος χρησιμοποιείται όταν ο αγοραστής αναμένει ότι οι τιμές των μετοχών θα κινηθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση.

4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ MONTE CARLO

Η αδυναμία της μεθόδου των Black & Scholes να προτείνει μια αναλυτική λύση ή η πολυπλοκότητα της λύσης για πιο σύνθετα προβλήματα, όπως αυτό της αποτίμησης ορισμένων εξωτικών δικαιωμάτων, οδήγησε στην ανάπτυξη νέων μεθόδων, κυρίως αριθμητικών – υπολογιστικών. Οι πιο γνωστές και ευρέως διαδεδομένες τεχνικές προσέγγισης της αξίας ενός δικαιώματος είναι:

- Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών προσέγγισης (finite difference method)
- Η μέθοδος Monte Carlo.

Η τελευταία μέθοδος είναι και αυτή που θα αναλυθεί στη συνέχεια και θα χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση ορισμένων εξωτικών δικαιωμάτων.

Η προσομοίωση Monte Carlo αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μιας μεταβλητής που παρουσιάζει τυχαία συμπεριφορά. Η προσέγγιση αυτή επιτυγχάνεται, σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στο βιβλίο του Συρράκου Ελευθέριου [29], με τη δημιουργία πολλών τυχαίων μεταβλητών από μια συνάρτηση πιθανότητας (έστω την κανονική κατανομή). Εκμεταλλευόμενοι στη συνέχεια το νόμο των μεγάλων αριθμών, βρίσκουμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων αυτών και έχουμε στην ουσία πλησιάσει την τιμή της μεταβλητής που αναζητούμε. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η απλότητά της, που επιτρέπει την ευρεία εφαρμογή της σε ένα πλήθος προβλημάτων αξιολόγησης δικαιωμάτων. Παρόλα αυτά έχει και αυτή τα μειονεκτήματά της, αφού πολλές φορές απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων για μεγαλύτερη ακρίβεια και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγάλη καθυστέρηση στην εξαγωγή συμπερασμάτων και την κατανάλωση υπολογιστικής ισχύος.

Πρακτικά, αν κάποιος θέλει να αξιολογήσει ένα call option θα πρέπει να βρει την απόδοσή του στη λήξη και να την προεξοφλήσει στο σήμερα. Κάτι τέτοιο προηγουμένως στη γλώσσα των μαθηματικών το περιγράψαμε ως εξής:

$$V_0 = e^{-rT} \mathrm{E}_Q \left[(S_T - k)^+ \right].$$

Αν τώρα η S_T είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη την οποία βρίσκουμε μέσω της μεθόδου Monte Carlo, τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος. Έστω λοιπόν πως το παρακάτω μοντέλο περιγράφει τη μετακίνηση της τιμής του αξιόγραφου:

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[\sigma X \sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t\right]}$$ με X τυχαία μεταβλητή $N(0,1)$,

τότε στην έναρξη θα ισχύει

$$S_1 = S_0 e^{\left[\sigma X \sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t\right]}.$$

Επομένως, αν θέσουμε στον παραπάνω τύπο όλες τις μεταβλητές που γνωρίζουμε και στη θέση της τυχαίας μεταβλητής X επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό από την κανονική κατανομή N(0,1) θα πάρουμε μια τιμή για τη μεταβλητή S_1. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, μπορούμε να βρούμε τιμές για το $S_2, S_3, \ldots S_T$. Έτσι γεννώντας ένα συγκεκριμένο μονοπάτι καταλήξαμε σε μια τιμή λήξης για τον υποκείμενο τίτλο και συνεπώς μια τιμή για το δικαίωμα. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία πολλές φορές μπορούμε να βρούμε ισάριθμες τιμές λήξης για τον υποκείμενο τίτλο και τιμές για το δικαίωμα, ο μέσος όρος των οποίων θα μας δώσει την τιμή που αναζητάμε. Τέλος, μπορούμε να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση και στη συνέχεια να βρούμε την πιθανότητα αυτή να πέφτει σε ένα συγκεκριμένο διάστημα.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι όταν προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής στην ουσία προσπαθούμε να εκτιμήσουμε ένα ολοκλήρωμα. Αυτό το αποτέλεσμα έχει μεγάλη σημασία για την περίπτωσή μας, καθώς η αποτίμηση ενός δικαιώματος καταλήγει να μην είναι τίποτα άλλο από τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Πράγματι, είδαμε ότι

$$V_0 = e^{-rT}\mathrm{E}_Q\left[(S_T - k)^+\right].$$

Ωστόσο, αυτή η ίδια έκφραση ισοδυναμεί με την παρακάτω:

$$V_0 = e^{-rT}\int_X^{\infty}\left(S_T - X\right)\varphi(S_T)dS_T$$

όπου $\varphi(S_T)$ είναι η λογαριθμική κανονική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που στην ουσία περιγράφει το μέτρο πιθανότηταςQ της πρώτης εξίσωσης.

Αν λοιπόν βρούμε ένα τρόπο να προσεγγίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, στην πράξη θα έχουμε προσεγγίσει και την αξία του δικαιώματος. Το ολοκλήρωμα αυτό φυσικά είναι δυνατόν να υπολογιστεί αναλυτικά όπως περιγράψαμε πιο πάνω, ωστόσο υπάρχουν και διάφορες αριθμητικές μέθοδοι που μας δίνουν μια καλή προσέγγιση. Εάν επρόκειτο για μια απλή συνάρτηση ο κανόνας των ορθογωνίων ή των τραπεζίων θα ήταν αρκετός για την ολοκλήρωσή της. Δυστυχώς όμως, πρόκειται για μια πιο δύσκολη συνάρτηση συνεπώς καταφεύγουμε στη μέθοδοMonte Carlo.

Από μια άλλη σκοπιά, σαφώς αυστηρότερα μαθηματικά διατυπωμένη, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μέθοδοςMonte Carlo βασίζεται στην αναλογία μεταξύ πιθανότητας και μάζας (κάτω από μια συγκεκριμένη κατανομή). Η στατιστική διατυπώνει αυστηρά αυτή την ιδέα της πιθανότητας σχετίζοντας ένα ενδεχόμενο με ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων και ορίζοντας την πιθανότητα του ενδεχόμενου να είναι ίση με τη μάζα κάτω από μια συγκεκριμένη κατανομή ή με ένα μέτρο σχετικό με ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων. Η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιεί αυτή την ιδέα αντίστροφα. Υπολογίζει τη μάζα ενός συνόλου ερμηνεύοντας τη μάζα αυτή σαν πιθανότητα. Στην απλούστερη περίπτωση αυτό σημαίνει πως κάνοντας τυχαίες δειγματοληψίες από ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων, λαμβάνουμε ένα κομμάτι τυχαίων επιλογών που πέφτει σε ένα δεδομένο σύνολο σαν μια εκτίμηση για τη μάζα αυτού του συνόλου. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών επιβεβαιώνει πως η εκτίμηση συγκλίνει προς την πραγματική τιμή καθώς ο αριθμός των τυχαίων επιλογών αυξάνεται.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης f για το διάστημα [0,1]:

$$a = \int_0^1 f(x)dx .$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να παρασταθεί σαν τη μέση τιμή $\mathrm{E}[f(U)]$ όπου U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [0,1]. Έστω ότι έχουμε ένα μηχανισμό που επιλέγει ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία $U_1, U_2, \ldots$ από το παραπάνω διάστημα. Βρίσκοντας την τιμή της συνάρτησης f στα n τυχαία σημεία που επιλέξαμε και παίρνοντας το μέσο όρο τους έχουμε παράγει μια εκτίμηση Monte Carlo

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) .$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1], τότε από το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι:

$\hat{a}_n \to a$ με πιθανότητα 1 καθώς $n \to \infty$.

Επίσης, αν η f είναι στο τετράγωνο ολοκληρώσιμη και πάρουμε

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 \left(f\left(x\right) - a\right)^2 dx ,$$

τότε το λάθος $\hat{a}_n \to a$ στην εκτίμηση Monte Carlo είναι κανονικά κατανεμημένο με μέσο 0 και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}$. Η ποιότητα αυτής της προσέγγισης βελτιώνεται καθώς το n αυξάνεται.

4.1 MONTE CARLO ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ – ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Γενικά η μέθοδος Monte Carlo δεν είναι η καλύτερη λύση για τον υπολογισμό μονοδιάστατων ολοκληρωμάτων όπως παραπάνω. Η αξία της μεθόδου σαν υπολογιστικό εργαλείο βασίζεται στο γεγονός ότι ο βαθμός σύγκλισης της εκτίμησης προς την πραγματική μεταβλητή $O(n^{-1/2})$ δεν περιορίζεται σε ολοκληρώματα στο μοναδιαίο διάστημα [0,1]. Πράγματι, τα βήματα που περιγράψαμε παραπάνω επεκτείνονται και σε πιο πολύπλοκα ολοκληρώματα πολλών διαστάσεων στο διάστημα $[0,1]^d$ οπότε και η μέθοδος φαίνεται πιο ανταγωνιστική σε σχέση με άλλες, αφού διατηρεί τον ίδιο βαθμό σύγκλισης $O(n^{-1/2})$ για κάθε d. Όλα τα παραπάνω σχετίζονται με τα δικαιώματα ως ακολούθως: η αποτίμηση ενός δικαιώματος μπορεί να καταλήξει στον υπολογισμό μιας μέσης τιμής. Σε πολλές περιπτώσεις που χρειάζεται να γράψουμε αυτή τη μέση τιμή με τη μορφή ολοκληρώματος παρατηρούμε ότι μπορεί να καταλήξουμε σε μια μορφή ολοκληρωμάτων πολλών διαστάσεων. Αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση στην οποία η μέθοδος Monte Carlo γίνεται πραγματικά ελκυστική.

Πράγματι, μπορούμε να προβούμε στην πολλαπλή ολοκλήρωση βρίσκοντας την τιμή της συνάρτησης ανά ομοιόμορφα χρονικά σημεία (grids) στο χώρο των d διαστάσεων που προσδιορίζει ο αριθμός των υποκείμενων προϊόντων. Επομένως, θα υπάρχουν $N^{1/d}$ τέτοια χρονικά σημεία, όπου N ο συνολικός αριθμός σημείων που χρησιμοποιούνται. Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του τραπεζίου για την προσέγγιση του ολοκληρώματος, το λάθος στην εκτίμησή του θα είναι $O\left(N^{-2/d}\right)$ και ο χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι συνάρτηση του N, O(N), αφού υπάρχουν N συναρτήσεις που προσεγγίζουμε. Καθώς οι διαστάσεις d αυξάνονται, αυτή η μέθοδος γίνεται απαγορευτικά αργή. Προκειμένου λοιπόν να ξεπεράσουμε αυτή την «κατάρα των διαστάσεων», καταφεύγουμε στη μέθοδοMonte Carlo.

Η αξιολόγηση ενός παραγώγου προϊόντος με τη μέθοδο Monte Carlo βασικά περιλαμβάνει την προσομοίωση μονοπατιών στοχαστικών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την πορεία των υποκείμενων αγαθών. Αντί λοιπόν να επιλέγουμε τυχαία σημεία από το διάστημα [0,1] ή το $[0,1]^d$, πολλές φορές προσπαθούμε να επιλέξουμε τυχαία από ένα χώρο μονοπατιών. Ανάλογα με το πώς διατυπώνεται το πρόβλημα ή το μοντέλο, η διάσταση αυτού του χώρου μπορεί να είναι μεγάλη ή άπειρη. Στην ουσία, η διάσταση θα είναι τόσο μεγάλη όσο μεγάλος είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων της προσομοίωσης και αυτός μπορεί εύκολα να είναι αρκετά μεγάλος ώστε ο βαθμός σύγκλισης να βελτιώνεται έναντι άλλων μεθόδων (Glasserman Paul [9]).

Έστω, ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \ldots \int f\left(x_1,\ldots,x_d\right) dX_1 .. dX_d \,.$$

Η ιδέα πίσω από την ολοκλήρωση Monte Carlo είναι η δυνατότητα που έχουμε να γράψουμε την παραπάνω παράσταση ως εξής:

$$\int \ldots \int f\left(x_1,\ldots,x_d\right) dX_1 .. dX_d = \text{όγκος περιοχής ολοκλήρωσης} \times \text{ μέση τιμή της f},$$

όπου η μέση τιμή της f λαμβάνεται σε όλη την περιοχή ολοκλήρωσης. Προκειμένου τώρα να απλοποιηθούν τα πράγματα περισσότερο αναδιαμορφώνουμε λίγο την περιοχή ολοκλήρωσης σύμφωνα με το μοναδιαίο υπερκύβο, δηλαδή:

$$A = \text{περιοχή ολοκλήρωσης} = [0,1]\times[0,1]\times\ldots[0,1]$$

οπότε θα έχουμε:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, .. x_d) dX_1 .. dX_d = \text{μέση τιμή της f}$$

αφού ο όγκος θα ισούται με 1. Μπορούμε τώρα να βρούμε τη μέση τιμή της f χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo και λαμβάνοντας ισόνομα κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς από το χώρο των d διαστάσεων. Έτσι λοιπόν μετά από N τέτοια δείγματα θα έχουμε:

$$\text{μέση τιμή της f} = \mathrm{E}\left(f\left(X\right)\right) = f \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

όπου X είναι το διάνυσμα των τιμών των d υποκείμενων στοιχείων κατά τη δειγματοληψία i. Καθώς λοιπόν το N αυξάνεται, η προσέγγιση βελτιώνεται. Το μέγεθος του λάθους αυτής της προσέγγισης μπορεί να μετρηθεί από την τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου. Δηλαδή:

$$\sqrt{\frac{1}{N}\left(\overline{f^2} - \overline{f}^2\right)}$$

όπου $\overline{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ και όπου $\overline{f^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^2(x_i)$.

Είναι λοιπόν φανερό ότι το λάθος στην εκτίμηση με τη μέθοδο Monte Carlo είναι $O(N^{-1/2})$, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ανεξαρτήτως του αριθμού των διαστάσεων που προσδιορίζουν τα υποκείμενα αγαθά.

Μέχρι στιγμής παρουσιάσαμε πως γίνεται η ολοκλήρωση κατά Monte Carlo για πολλές διαστάσεις. Έστω λοιπόν τώρα ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με d υποκείμενα αγαθά που ακολουθούν συσχετισμένους τυχαίους περίπατους. Η ουδέτερου κίνδυνου αξία (risk neutral value) αυτών των τίτλων τη χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$S_i(T) = S_i(t) e^{\left(r - D_i - \left(\frac{1}{2}\right)\sigma_i^2\right)\delta t + \sigma_i \varphi_i \sqrt{\delta t}}$$

όπου φ_i τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη και συσχετισμένη. Επίσης, όπου r το επιτόκιο, D το μέρισμα και σ η τυπική απόκλιση. Επομένως, η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος θα δίνεται από την παρακάτω παράσταση:

$$e^{-r\delta t}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} Payoff\left(S_1(T),\ldots S_d(T)\right)p\left(\varphi_1,\ldots\varphi_d\right)d\varphi_1\ldots d\varphi_d$$

όπου $p\left(\varphi_1,\ldots\varphi_d\right)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για d συσχετισμένες κανονικές μεταβλητές με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ένα. Συνεπώς, για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα πρέπει να δημιουργήσουμε τις κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές. Το πρώτο βήμα λοιπόν, είναι να βρούμε μια διαδικασία που να μας επιτρέπει να γεννήσουμε d ασυσχέτιστες μεταβλητές και το δεύτερο να βρούμε μια άλλη διαδικασία με την οποία να τις μετατρέψουμε σε συσχετισμένες σύμφωνα με τον Paul Wilmott [22].

4.2 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η γένεση τυχαίων αριθμών σε έναν υπολογιστή δεν είναι μια αυτονόητη διαδικασία. Κάτι τέτοιο προκύπτει από το γεγονός πως τίποτα δεν είναι τυχαίο στη λειτουργία ενός υπολογιστή. Για το λόγο αυτό γίνεται λόγος για τη δημιουργία ψευδο-τυχαίων αριθμών, που ενώ διαθέτουν όλα τα χαρακτηριστικά μιας τυχαίας ακολουθίας αριθμών, εντούτοις έχουν προκύψει από μια εντελώς ντετερμινιστική διαδικασία. Οι περισσότερες σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού και εφαρμογές διαθέτουν έτοιμες ρουτίνες και συναρτήσεις που κάνουν ακριβώς αυτή τη δουλειά. Γεννούν δηλαδή ψευδο-τυχαίους αριθμούς.

Το κυριότερο πρόβλημα που μπορεί να παρουσιαστεί στην προσπάθειά μας για δημιουργία ενός συνόλου τυχαίων αριθμών, είναι αυτοί μετά από κάποιες επαναλήψεις της διαδικασίας γένεσης να αρχίζουν να επαναλαμβάνονται με απολύτως προβλέψιμο τρόπο. Επίσης, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε τις κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη μέθοδο αντίστροφης μετατροπής (inverse transform method), τη μέθοδο αποδοχής – απόρριψης (acceptance rejection method) και τη μέθοδο Box – Muller.

Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στην τελευταία μέθοδο καθώς είναι αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια της ανάλυσής μας. Αν θέλουμε λοιπόν να δημιουργήσουμε κανονικά κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς η απλούστερη μέθοδος είναι αυτή των Box – Muller. Με τη μέθοδο αυτή παίρνουμε ομοιόμορφα κατανεμημένες μεταβλητές και τις μετατρέπουμε σε κανονικές. Δημιουργούμε λοιπόν δύο ομοιόμορφα κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς από τα διάστημα μεταξύ μηδέν και ένα ([0,1]) και τους συνδυάζουμε κατά τέτοιοι τρόπο ώστε να δώσουν δύο τυχαίους αριθμούς που να είναι και οι δύο κανονικά κατανεμημένοι. Δηλαδή,

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\sigma\upsilon\nu(2\pi x) \text{ και } y_2 = \sqrt{-2\ln x_2}\,\eta\mu(2\pi x).$$

Ένας απλός αλγόριθμος που συνδυάζει τη μέθοδο Box – Muller με τη μέθοδο απόρριψης αποφεύγοντας έτσι τη σπατάλη μνήμης στον υπολογισμό τριγωνομετρικών συναρτήσεων περιγράφεται από τον Brandimarte Paolo στο βιβλίο του [4], και έχει ως εξής:

- Γέννησε δύο ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές $U_1, U_2 \quad U(0,1)$

- Θέσε $V_1 = 2U_1 - 1, V_2 = 2U_2 - 1$ και $S = V_1^2 + V_2^2$

- Αν S>1, γύρνα στο πρώτο βήμα, αλλιώς υπολόγισε τις ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές ως εξής :

$$X = \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}V_1 \text{ και } Y = \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}V_2 .$$

4.3 CHOLESKY DECOMPOSITION

Το δεύτερο βήμα που αναφέραμε προηγουμένως για τη δημιουργία των κατάλληλων τυχαίων μεταβλητών έχει να κάνει με τη δημιουργία συσχετισμένων μεταβλητών. Αφού λοιπόν με τη μέθοδο Box – Muller γεννήσουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιούμε μια άλλη διαδικασία γνωστή ως “Cholesky Decomposition” για να παράγουμε τις συσχετισμένες μεταβλητές που θέλουμε.

Σε πολλά προβλήματα, όπως και σε αυτό της αποτίμησης δικαιωμάτων συσχέτισης, είναι χρήσιμο να εργαζόμαστε με έναν πίνακα ο οποίος όταν θα πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του θα δίνει τον πίνακα συσχέτισης. Έστω λοιπόν ότι ο πίνακας αυτός είναι ο **A** και ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$AA^T = \delta\Sigma ,$$

όπου A^T συμβολίζει τον ανάστροφο του A. Δηλαδή $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα του A είναι ότι μετατρέπει τυχαίες μεταβλητές σε συσχετισμένες με συσχέτιση $\delta\Sigma$. Έστω ότι X_i, $i = 1,2,...n$, είναι ασυσχέτιστες κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \text{ με } X \quad N(0,1) .$$

Το σύμβολο **1** χρησιμοποιείται για να δηλώσει το μοναδιαίο πίνακα

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα $(1)_{ij} = \delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & for \quad i = j \\ 0 & for \quad i \neq j \end{cases}$.

Επομένως , για τη μεταβλητή X ισχύουν τα εξής:

$$Cov[X_i, X_j] = \delta_{ij},\ \mathrm{E}[X_i] = 0 \text{ για κάθε } i, j = 1,...,n.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα **A** με τον **X** μας δίνει ένα πίνακα **Y** με νέες τυχαίες μεταβλητές για τον οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

$$Y = AX \Leftrightarrow Y_i = \sum_k A_{ik} X_k .$$

Οι συνδιακυμάνσεις αυτών των νέων τυχαίων μεταβλητών είναι:

$$Cov\left[X_i, X_j\right] = Cov\left[\sum_k A_{ik} X_k, \sum_m A_{jm} X_m\right],$$
$$= \sum_k A_{ik} \sum_m A_{jm} Cov\left[X_k, X_m\right]$$

όπου $Cov\left[X_k, X_m\right] = \delta_{km} = \sum_k A_{ik} A_{jk} = \left(AA^T\right)_{ij} = \delta\Sigma_{ij}$, που αντιστοιχεί στη ιδιότητα του πίνακα **A** που ορίσαμε προηγουμένως. Από την άλλη πάλι η μέση τιμή της **Y** έχει ως εξής:

$$\mathrm{E}\left[Y_i\right] = \mathrm{E}\left[\sum_k A_{ik} X_k\right] = \sum_k A_{ik} \mathrm{E}\left[X_k\right] = 0 \text{ , αφού } \mathrm{E}\left[\mathrm{X}_k\right] = 0,$$

που σημαίνει ότι το τυχαίο διάνυσμα με στοιχεία Y_i είναι πολύ-μεταβλητό και κανονικά κατανεμημένο με πίνακα συνδιακύμανσης $\delta\Sigma$ και μέσο μηδέν (Hans - Peter Deutsch [7])

$$\mathrm{AX} = \mathrm{Y} \quad \mathrm{N}(0, \delta\Sigma).$$

Στην περίπτωση της αποτίμησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος με τη μέθοδο Monte Carlo που γράφεται πάνω σε πολλά υποκείμενα αγαθά όλα τα παραπάνω εφαρμόζονται ως εξής: η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή στο χρόνο της τιμής ενός χαρτοφυλακίου υποκείμενων τίτλων, σύμφωνα με τον Paul Wilmott [22], φαίνεται παρακάτω

$$S_i(t + \delta t) = S_i(t) e^{\left(r - D_i - \left(\frac{1}{2}\right)\sigma_i^2\right)\delta t + \sigma_i \varphi_i \sqrt{\delta t}}.$$

Το σημαντικό λοιπόν σε αυτή την περίπτωση είναι ότι οι μεταβλητές φ_i είναι συσχετισμένες που σημαίνει ότι

$$\mathrm{E}\left[\varphi_i \varphi_j\right] = \rho_{ij}.$$

Ακριβώς εδώ είναι που έχει εφαρμοστεί η διαδικασία "Cholesky Decomposition". Παίρνουμε δηλαδή d ασυσχέτιστες και κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές ε_i και έπειτα τις μετατρέπουμε σε συσχετισμένες κάνοντας το μετασχηματισμό

$$\varphi = \mathrm{M}\varepsilon$$

όπου **φ** και **ε** είναι διανύσματα στήλες με στοιχεία φ_i και ε_i αντίστοιχα, όπου **M** ο ειδικός πίνακας που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη και **Σ** ο πίνακας συνδιακύμανσης

$$\mathrm{MM}^T = \Sigma.$$

4.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει κανείς για να προσομοιώσει ένα δικαίωμα συσχέτισης που η αξία του στηρίζεται στη συμπεριφορά των πολλών διαφορετικών υποκείμενων τίτλων. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με ένα δικαίωμα, έστωbasket option, το οποίο στηρίζεται σε δύο υποκείμενους παράγοντες κινδύνου για λόγους απλότητας.

Έστω λοιπόν ότι S_1 και S_2 είναι δύο διαδικασίες που περιγράφουν τις τιμές δύο μετοχών, με τάση μ_1 και μ_2, τυπικές αποκλίσεις σ_1 και σ_2, αντίστοιχα, και συσχέτιση ρ_{12}. Ο λογάριθμος των τυχαίων περιπάτων θα χρησιμοποιηθεί πάλι για να περιγράψει την εξέλιξη των τιμών των μετοχών. Επομένως, θα έχουμε:

$$\delta \ln S_1(t) = \mu_1 dt + Y_1$$

$$\delta \ln S_2(t) = \mu_2 dt + Y_2$$

όπου Y_1 και Y_2 συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές.

Τέτοια ζευγάρια συσχετισμένων τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να δημιουργήσουμε ως εξής: πρώτα από όλα οι δύο εξισώσεις $\delta \ln(S_i)$ μπορούν να ειδωθούν ως στοιχεία ενός τυχαίου διανύσματος

$$\begin{pmatrix} \delta \ln S_1(t) \\ \delta \ln S_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \delta t + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Αν οι τιμές ήταν ασυσχέτιστες, τότε οι τυχαίες μεταβλητές Y_i θα ήταν ανεξάρτητες κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με διακύμανση $\sigma_i^2 \delta t$. Ωστόσο, αφού συμβαίνει οι τιμές να είναι συσχετισμένες δεν αρκεί απλά να προσδιορίσουμε τη διακύμανση και των δύο μεταβλητών για να προσδιορίσουμε πλήρως την κατανομή τους. Αντίθετα, η συνδιακύμανση είναι αυτή που θα μας δώσει πληροφορίες τόσο για τις διακυμάνσεις όσο καιγια τις συσχετίσεις. Είναι φανερό πως αφού έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές και ένα μοντέλο στη μορφή πινάκων, η συνδιακύμανση δεν θα είναι ένας απλός αριθμός αλλά ένας 2×2 πίνακας, γνωστός και ως «πίνακας συνδιακύμανσης». Ο πίνακας συνδιακύμανσης $\delta\Sigma$ δύο τυχαίων μεταβλητών αποτελείται από τις συσχετίσεις και τις τυπικές αποκλίσεις των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών ως εξής:

$$\delta\Sigma = \begin{pmatrix} \delta\Sigma_{11} & \delta\Sigma_{12} \\ \delta\Sigma_{21} & \delta\Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

όπου $\delta\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sqrt{\delta t}\sigma_j\sqrt{\delta t}$ για $i,j = 1,2$ και όπου

ρ_{ij} = ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύi και j

$\sigma_i\sqrt{\delta t}$ =η τυπική απόκλιση του i

$\sigma_j\sqrt{\delta t}$ = η τυπική απόκλιση του j.

Επιπλέον, οι συσχετίσεις είναι συμμετρικές, πράγμα που σημαίνει ότι $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ και $\rho_{ii} = 1$. Αν λοιπόν $\rho = \rho_{ij} = \rho_{ji}$, τότε ο πίνακας συνδιακύμανσης των δύο μεταβλητών θα είναι

$$\delta\Sigma = \delta t\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Προκειμένου τώρα να δημιουργήσουμε κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές Y_i με πίνακα συσχέτισης $\delta\Sigma$ από ανεξάρτητες κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, χρειάζεται να βρω ένα νέο πίνακα**A**, τη τετραγωνική ρίζα του $\delta\Sigma$. Αυτός ο πίνακας χαρακτηρίζεται έτσι γιατί έχει την ιδιότητα όταν πολλαπλασιάζεται με τον ανάστροφό του να δίνει τον $\delta\Sigma$. Δηλαδή

$$AA^T = \delta\Sigma.$$

Όπως εξηγήσαμε και προηγουμένως, αυτός ο πίνακας μας δίνει τον επιθυμητό μετασχηματισμό

$$Y = AX$$

όπου

Y = διάνυσμα κανονικά κατανεμημένων συσχετισμένων τυχαίων μεταβλητών με πίνακα διακύμανσης $\delta\Sigma$

X = διάνυσμα κανονικά κατανεμημένων ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών

Ο πίνακας «τετραγωνική ρίζα» A μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Cholesky Decomposition που περιγράψαμε παραπάνω. Εφαρμόζοντας λοιπόν τη διαδικασία, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\delta t}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{(1-\rho^2)\sigma_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$Y_1 = \sqrt{\delta t}\sigma_1 X_1$$

$$Y_2 = \sqrt{\delta t \rho}\sigma_2 X_1 + \sqrt{\delta t}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 X_2 .$$

Συνεπώς, μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε έναν τυχαίο περίπατο για δύο συσχετισμένες διαδικασίες σε όρους δύο ασυσχέτιστων κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2

$$\begin{aligned} \delta \ln S_1(t) &= \mu_1 \delta t + \sqrt{\delta t}\sigma_1 X_1 \\ \delta \ln S_2(t) &= \mu_2 \delta t + \sigma_2\left(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\right)\sqrt{\delta t} \end{aligned} .$$

Εντέλει, με μερικούς αλγεβρικούς χειρισμούς, καταλήγουμε στην τελική έκφραση που θα προσομοιώσουμε με τη διαδικασίαMonte Carlo:

$$\begin{aligned} \delta \ln S_1(T) &= \ln S_1(t) + \mu_1(T-t) + \sqrt{(T-t)}\sigma_1 X_1 \\ \delta \ln S_2(T) &= \ln S_2(t) + \mu_2(T-t) + \sigma_2\left(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\right)\sqrt{(T-t)} \end{aligned} .$$

Αυτή είναι η έκφραση που μας αφορά στην περίπτωση που μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές στο τέλος της περιόδου και ακολουθεί η έκφραση που μας ενδιαφέρει στην περίπτωση που προσομοιώνουμε τα μονοπάτια των υποκείμενων τίτλων:

$$\ln S_1(t_i) = \ln S_1(t_{i-1}) + \mu_1 \delta t + \sqrt{\delta t}\,\sigma_1 X_1(t_i)$$
$$\ln S_2(t_i) = \ln S_2(t_{i-1}) + \mu_2 \delta t + \sigma_2\left(\rho X_1(t_i) + \sqrt{1-\rho^2}\,X_2(t_i)\right)\sqrt{\delta t}\ .$$

4.5 ΑΝΤΙΘΕΤΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ (ANTITHETIC VARIABLE TECHNIQUE)

Στην «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας», όπως αυτή περιγράφεται από τον John Hull [10], οι επαναλήψεις της προσομοίωσης περιλαμβάνουν τον υπολογισμό δύο τιμών του δικαιώματος. Η πρώτη τιμή, C_1, υπολογίζεται όπως συνήθως. Η δεύτερη τιμή, C_2, υπολογίζεται αλλάζοντας το πρόσημο των τυχαίων μεταβλητών από την τυποποιημένη κανονική κατανομή. (Εάν $\in$ είναι το τυχαίο δείγμα για τον υπολογισμό της πρώτης τιμής, το-$\in$ είναι το αντίστοιχο δείγμα για τον υπολογισμό της δεύτερης τιμής). Η τιμή του option σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται από το μέσο όρο της πρώτης και δεύτερης τιμής. Αυτή η μέθοδος είναι «αποτελεσματική» γιατί όταν η μια τιμή είναι μεγαλύτερο από την πραγματική, η άλλη θα είναι μικρότερη, και αντίστροφα. Συμβολίζοντας με $\bar{C}$ το μέσο όρο των τιμών, έχουμε:

$$\bar{C} = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Η τελική τιμή του δικαιώματος προκύπτει από το μέσο όρο όλων των $\bar{C}$. Εάν σ είναι η τυπική απόκλιση των $\bar{C}$, και N είναι ο αριθμός των επαναλήψεων της προσομοίωσης, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι $\sigma / \sqrt{N}$.

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ MATLAB

Στο σημείο αυτό θα δούμε κάποιες εφαρμογές με τη βοήθεια του πακέτου εφαρμογών MATLAB R2007b. Συγκεκριμένα, θα επικεντρώσουμε τις προσπάθειές μας σε προγράμματα προσομοίωσηςMonte Carlo.

Να σημειώσουμε εδώ ότι ως στοιχεία για τις εφαρμογές μας χρησιμοποιούμε τις μηνιαίες τιμές δύο assets του S&P500, και πιο συγκεκριμένα των 3M και Abercrombie & Fitch, για την περίοδο από το Μάρτιο του 1999 μέχρι και το Μάρτιο του 2008. Από αυτές τις τιμές υπολογίζουμε τις διακυμάνσεις, τις τυπικές αποκλίσεις και τη συσχέτιση των assets. Ως τιμή των υποκείμενων τίτλων χρησιμοποιούμε την τιμή του τελευταίου μήνα (Μάρτιος 2008) για το κάθεasset.

Επίσης, ως επιτόκιο χρησιμοποιούμε αυτό της Αμερικής, το οποίο είναι σε μηναία βάση και το μετατρέπουμε σε ετήσιο, και ως χρόνο λήξης του δικαιώματος θεωρούμε τον ένα μήνα.

5.1 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΑΠΛΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

Γνωρίζουμε ότι η αποτίμηση ενός απλού ευρωπαϊκούcall option μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των Black & Scholes, όπως αυτή περιγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, από τον τύπο:

$$C = SN\left(d_1\right) - Xe^{-rt}N\left(d_2\right) \text{ με}$$

$$d_1 = \frac{\log\frac{S_0}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \text{ και}$$

$$d_2 = \frac{\log\frac{S_0}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \quad \text{ή} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

Να αναφέρουμε εδώ, ότι επειδή τα στοιχεία μας είναι μηνιαία και ισχύει ότι

$$\sigma(monthly) = \sigma(annually) * sqrt(T)$$

οι παραπάνω τύποι μετατρέπονται ως εξής(John Hull [10]):

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad \text{με}$$

$$d_1 = \frac{\log\frac{S}{X} + rT + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma\,.$$

Χρησιμοποιώντας επομένως τα παραπάνω δεδομένα και αυτούς τους τύπος, και με τη βοήθεια του Excel, καταλήγουμε ότι η τιμή του call option είναι 5.395. Επομένως, **C = 5.395.**

Για την αποτίμηση, τώρα, ενός απλού ευρωπαϊκού call option χρησιμοποιώντας την προσομοίωση Monte Carlo, περιγράψαμε με σαφήνεια τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε σε προηγούμενες ενότητες, για να προσομοιώσουμε τις μεταβολές που ακολουθεί ο υποκείμενος τίτλος με σκοπό προεξοφλώντας το μέσο όρο των τελικών τιμών των μονοπατιών, να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα. Με άλλα λόγια αν η κίνηση μιας μετοχής περιγράφεται από μια κίνηση Brown με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, τότε θα ισχύει:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz\,.$$

Αποδεικνύεται λοιπόν μετά από μερικούς αλγεβρικούς χειρισμούς ότι η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$d\ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz\,.$$

Αν τώρα ολοκληρώσουμε αυτή την έκφραση θα πάρουμε:

$$S(t) = S(0)e^{\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\int_0^1 dz\right)}.$$

Τέλος, για να προσομοιώσουμε το ένα μονοπάτι για την τιμή της μετοχής για ένα χρονικό διάστημα, έστω μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, (0,T), θα πρέπει πρώτα να το χωρίσουμε σε υποδιαστήματα ή αλλιώς χρονικά βήματα δt. Κάτι τέτοιο έχει το εξής αποτέλεσμα για την τελευταία εξίσωση:

$$S(t+\delta t) = S(t)e^{\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{\delta t}\varepsilon\right)} \quad (1)$$

όπου $\varepsilon \quad N(0,1)$ είναι τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή. Βασιζόμενοι τώρα σε αυτή την εξίσωση είναι εύκολο γεννώντας τυχαίες μεταβλητές για κάθε υποδιάστημα να δημιουργήσουμε ένα μονοπάτι και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία να δημιουργήσουμε ένα πλήθος τέτοιων μονοπατιών Η βασική συνάρτηση με την οποία μπορεί κάποιος να γεννήσει στηMATLAB τυχαίους αριθμούς είναι η rand. Αυτή η συνάρτηση στην ουσία μας δίνει ψευδο τυχαίους ομοιόμορφα κατανεμημένους αριθμούς από την κατανομή $U \quad (0,1)$. Για να πάρουμε όμως τυχαίους αριθμούς από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Brandimarte Paolo [4], η συνάρτηση που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι ηrandn.

Για να αποτιμήσουμε ένα απλό ευρωπαϊκό call option χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **MonteCarlo**, η οποία παρατίθεται στο παράρτημα.

Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με την Cara Marshall [15], δέχεται ως ορίσματα την τιμή του υποκείμενου τίτλου στη spot αγορά (S_1), την τιμή εξάσκησης (**X**), την τυπικά απόκλιση (**sigma1**), το χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (**T**), το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (**r**), τον αριθμό των επαναλήψεων (**NRepl**), τον αριθμό των χρονικών βημάτων (**NSteps**) και τη μεταβλητή **cp** η οποία παίρνει τις τιμές 1 ή -1 ανάλογα με το αν το δικαίωμα είναιcall ή put.

Στην ουσία αυτός ο κώδικας προσομοιώνει την εξής έκφραση

$$S_T \max\left\{0, S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\varepsilon} - X\right\}$$

όπου X είναι η τιμή εξάσκησης.

Αρχικά δημιουργούμε τις τυχαίες μεταβλητές με την εντολή (eps=normrnd(0,1)). Στη συνέχεια παίρνουμε την τελευταία τιμή S_T, βρίσκουμε τη διαφορά με την τιμή εξάσκησηςX, προεξοφλούμε με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο και βρίσκουμε τιμή για το δικαίωμα. Αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία για πολλά μονοπάτια βρίσκουμε ένα πλήθος από τιμές, ο μέσος όρος των οποίων μας δίνει την τιμή που αναζητούμε.

Εκτελώντας τον κώδικα της συνάρτησηςMonteCarlo με παραμέτρους:

S= 78.42064488

r = 0.03676938

T = 1/12

Sigma = 0.156183469

X= 75

και cp =1 αφού αποτιμούμε ένα call option, καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα, για διάφορες τιμές χρονικών βημάτων και επαναλήψεων:

NSteps/NRepl	**1000**	**2000**	**3000**	**5000**	**10000**	**50000**	**100000**	**500000**
100	5.329	5.345	5.427	5.549	5.611	5.058	5.540	5.535
200	4.957	5.582	5.603	5.543	5.632	5.516	5.558	5.544
300	5.516	5.205	5.513	5.462	5.458	5.471	5.551	5.538

Χρησιμοποιώντας την «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητα» (antithetic variable technique) για τη μείωση του λάθους εκτίμησης του option και εκτελώντας τον κώδικα της συνάρτησης **MonteCarloAntithetic** και για τα ίδια δεδομένα, καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	5.047	5.554	5.532	5.251	5.435	5.479	5.538	5.521
200	5.055	5.491	5.352	5.431	5.601	5.504	5.488	5.537
300	5.924	5.846	5.306	5.495	5.640	5.544	5.508	5.509

Η τιμή του call option προκύπτει από την εύρεση του μέσου όρου των δύο αυτών προσομοιώσεων και είναι:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	5.188	5.450	5.480	**5.400**	5.523	5.269	5.539	5.528
200	5.006	5.537	5.478	5.487	5.617	5.510	5.523	5.541
300	5.720	5.526	5.410	5.479	5.549	5.508	5.530	5.524

Παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα ότι οι τιμές που προκύπτουν με την προσομοίωση Monte Carlo είναι πολύ κοντά στην τιμή που βρήκαμε με τη μέθοδο Black & Scholes, με σχεδόν ίδια την τιμή που υπολογίζεται με αριθμό χρονικών βημάτων ίσο με 100 και αριθμό επαναλήψεων ίσο με 5000.

5.2 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΝΟΣ BASKET OPTION ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ

Για την αποτίμηση ενός **basket option** χρησιμοποιείται η μέθοδος Black. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο το δικαίωμα (option) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα πάνω σε ένα συμβόλαιο μελλοντική εκπλήρωσης (option on future contract), έχοντας την ίδια ημερομηνία λήξης με το δικαίωμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το δικαίωμα ακολουθεί geometric Brownian motion. Έχοντας υπόψη όλα αυτά, μπορούμε να βρούμε την τιμή του δικαιώματος από τον παρακάτω τύπο, όπως αυτός παρουσιάζεται από τους Moshe Arye Milevsky και Steven E. Posner [8]:

$$C = e^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - XN(d_2)\right], \text{ όπου}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \text{ και}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma .$$

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τύπους πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των futures και την διακύμανση. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right)$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

$$F_0 = M_1 .$$

Το n συμβολίζει τον αριθμό των assets που στην περίπτωση μας είναι δύο, το F_i συμβολίζει τις τιμές των futures του κάθε asset i, το ρ_{ij} τη συσχέτιση των δύο asset, το σ δείχνει την τυπική απόκλιση του κάθε asset , το T δείχνει το χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος και τοr το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Επομένως, με τα δεδομένα πaυ αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου και τη βοήθεια του Excel υπολογίζουμε τις παραπάνω τιμές προκειμένου να τις χρησιμοποιήσουμε για την αποτίμηση του **basket option** που μας ενδιαφέρει.

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε για τις τιμές

S1 = 78.42064488 «τιμή υποκείμενου τίτλου, 3M»

S2 = 73.28049706 «τιμή υποκείμενου τίτλου, Abercrombie & Fitch»

r = 0.03676938 «risk free rate»

T = 1/12 «χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος»

Sigma1 = 0.156183469 «τυπική απόκλιση του asset 3M»

Sigma2 = 0.061848479 «τυπική απόκλιση του asset Abercrombie & Fitch»

rho = 0.12681588 «συντελεστής συσχέτισης των δύο assets»

K = 75 «Τιμή εξάσκησης»

F1 = 78.66120686 «Future price για το πρώτο asset, 3M»

F2=73.50529120 «Future price για το δεύτερο asset, Abercrombie & Fitch»

M1 = 152.16649806

M2 = 23170.13083

Sigma = 0.089576163

d1 = 7.942951688

d2 = 7.853375525

είναι ότι η τιμή του call basket option με δύο υποκείμενους τίτλους (τους 3M και Abercrombie & Fitch) είναι ίση με **76.930**.

Με τη μέθοδο Monte Carlo, και με την ίδια λογική πaυ ακολουθήσαμε για την αποτίμηση του απλού call option, δημιουργούμε τη συνάρτηση **BasketMC**. Αυτή δέχεται ως ορίσματα τις τιμές των υποκείμενων τίτλων στη spot αγορά (S_1, S_2), την τιμή εξάσκησης (**X**), τις τυπικές αποκλίσεις (**Sigma1, Sigma2**), τη συσχέτιση (**rho**), τον αριθμό επαναλήψεων (**NRepl**), τον αριθμό των χρονικών βημάτων (**NSteps**), και τη μεταβλητή **cp** με τιμές 1 ή -1, ανάλογα με το αν πρόκειται για call ή put option. Αρχικά δημιουργούμε τις τυχαίες συσχετισμένες μεταβλητές σύμφωνα με τους Ngai Hang Chan και Hoi Ying Wong [18], με τις εντολές

eps1=normrnd (0,1) και
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*normrnd (0,1).

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές S_T για τα δύο assets και αφαιρούμε από το άθροισμα τους την τιμή εξάσκησης **X**. Βρίσκουμε το maximum ανάμεσα στο μηδέν και στη διαφορά αυτή **(max(0,S1T+S2T-X))**. Το αποτέλεσμα αυτό το προσθέτουμε στη μεταβλητή**sum,** η οποία αρχικά έχει την τιμή μηδέν (Brandimarte Paolo [4]). Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσο είναι και ο αριθμός των επαναλήψεων που έχουμε ορίσει. Από το τελικό άθροισμα (**sum**), βρίσκουμε το μέσο όρο και τον προεξοφλούμε με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο για να βρούμε την τιμή του basket option (Martinez L. Wendy – Martinez R. Angel [17], Γεωργίου – Ξενοφώντος [25] και Παπαγεωργίου – Τσίτουρας [28]).

Εκτελώντας λοιπόν τον κώδικα για

S1 = 78.42064488 «τιμή υποκείμενου τίτλου, 3M»

S2 = 73.28049706 «τιμή υποκείμενου τίτλου, Abercrombie & Fitch»

r = 0.03676938 «risk free rate»

T = 1/12 «χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος»

Sigma1 = 0.156183469 «τυπική απόκλιση του asset 3M»

Sigma2 = 0.061848479 «τυπική απόκλιση του asset Abercrombie & Fitch»

rho = 0.12681588 «συντελεστής συσχέτισης των δύο assets»

K = 75 «Τιμή εξάσκησης»

cp = 1 «μεταβλητή που δηλώνει ότι πρόκειται για call option»

και για διάφορες τιμές των NRepl και NSteps έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	76.690	76.847	76.596	76.675	76.755	76.467	76.531	76.472
200	76.895	76.164	76.411	76.315	76.610	76.440	76.493	76.433
300	76.431	76.353	76.575	76.264	76.573	76.379	76.430	76.458

Με την «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας» για τη μείωση του λάθους της τιμής έχουμε:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	76.562	77.031	76.477	76.509	76.295	76.298	76.456	76.463
200	76.643	76.494	76.504	76.510	76.566	76.448	76.402	76.483
300	76.863	75.889	75.951	76.864	76.603	76.485	76.427	76.465

Η τιμή του call option προκύπτει από την εύρεση του μέσου όρου των δύο αυτών προσομαιώσεων και είναι:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	76.626	**76.939**	76.537	76.592	76.525	76.383	76.494	76.468
200	76.769	76.329	76.458	76.413	76.588	76.444	76.448	76.458
300	76.647	76.121	76.263	76.564	76.588	76.432	76.429	76.462

Συμπεραίνουμε λοιπόν, από τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι με τη μέθοδο Monte Carlo βρίσκουμε μια τιμή για το **basket option** που είναι πάρα πολύ κοντά στη τιμή που βρήκαμε με τη μέθοδο Black, ειδικά με αριθμό επαναλήψεων ίσο με 2000 και αριθμό χρονικών βημάτων ίσο με 100. Παρόλα αυτά και οι υπόλοιπες τιμές είναι πολύ κοντά στη «θεωρητική» τιμή.

5.3 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΝΟΣ EXCHANGE OPTION

Για την αποτίμηση ενός **exchange option** χρησιμοποιούμε στην ουσία τη μέθοδο Black & Scholes, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε το exchange option σαν ένα option με έναν υποκείμενο τίτλο, και τιμή εξάσκησης τη μελλοντική τιμή του δεύτερου υποκείμενου τίτλου Ισχύει, δηλαδή, για την τιμή του option : **max (S1-S2,0)**.

Η τιμή του option, όπως παρουσιάζεται από τους Graeme West [21] και Paul Wilmott [22], δίνεται από τον τύπο

$$C = S_1 N(d_1) - S_2 e^{-rT} N(d_2) \text{ με}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + rT - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma .$$

Να σημειώσουμε ότι η τυπική απόκλιση που χρησιμοποιείται για την εύρεση της τιμής του option δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} .$$

Με τη βοήθεια ενός μικρού κώδικα (**Exchangebs**) στη MATLAB και τα ίδια δεδομένα που αναφέρουμε στην αρχή του κεφαλαίου και παρουσιάζονται στο παράρτημα, καταλήγουμε ότι η τιμή του exchange option υπολογίζεται σε **7.847**.

Σύμφωνα με τη λογική της μεθόδου Monte Carlo, δημιουργούμε μια συνάρτηση, την **ExchangeMC**, με ορίσματα τις τιμές των υποκείμενων τίτλων στη spot αγορά (S_1, S_2), την τιμή εξάσκησης (**X**), τις τυπικές αποκλίσεις (**sigma1, sigma2**), τη συσχέτιση (**rho**), το χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (**T**), το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (**r**), τον αριθμό των επαναλήψεων (**NRepl**) και τον αριθμό των χρονικών βημάτων (**NSteps**).

Αρχικά δημιουργούμε τυχαίες συσχετισμένες μεταβλητές, όπως και στην περίπτωση του **basket option**, και στη συνέχεια βρίσκουμε τις τιμές των υποκείμενων τίτλων **S1T** και **S2T**. Με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουμε το μέγιστο ανάμεσα στη διαφορά των τιμών των assets και του μηδενός (**max(S1T-S2T,0)**) και την προσθέτουμε στη μεταβλητή**sum**. Στη συνέχεια βρίσκουμε το μέσο όρο του αθροίσματος και τον προεξοφλούμε για να βρούμε την τιμή του **exchange option**. Όλα αυτά σύμφωνα με τους William Margrabe [14] και George Levy [13].

Με την εκτέλεση του κώδικα για τιμές

S1 = 78.42064488 «τιμή υποκείμενου τίτλου, 3M»

S2 = 73.28049706 «τιμή υποκείμενου τίτλου, Abercrombie & Fitch»

r = 0.03676938 «risk free rate»

T = 1/12 «χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος»

Sigma1 = 0.156183469 «τυπική απόκλιση του asset 3M»

Sigma2 = 0.061848479 «τυπική απόκλιση του asset Abercrombie & Fitch»

rho = 0.12681588 «συντελεστής συσχέτισης των δύο assets»

βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων και τον αριθμό των χρονικών βημάτων

NSteps/NRepl	**1000**	**2000**	**3000**	**5000**	**10000**	**50000**	**100000**	**500000**
100	7.789	7.940	7.595	7.781	7.996	7.880	7.922	7.919
200	7.485	7.906	7.934	7.996	7.939	7.908	7.899	7.900
300	8.192	8.086	7.770	7.972	7.927	7.911	7.917	7.910

Αντίστοιχα με την «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας», χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **ExchangeMCAntithetic**, βρίσκουμε τις τιμές:

NSteps/NRepl	**1000**	**2000**	**3000**	**5000**	**10000**	**50000**	**100000**	**500000**
100	7.389	7.733	7.880	7.786	7.834	7.917	7.859	7.898
200	7.885	7.766	7.985	7.860	7.849	7.909	7.944	7.913
300	7.798	8.031	8.083	7.828	7.861	7.939	7.916	7.910

Γνωρίζοντας και από τα προηγούμενα ότι η τιμή του option βρίσκεται από το μέσο όρο των παραπάνω τιμών, έχουμε:

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	7.589	**7.837**	7.738	7.784	7.915	7.899	7.891	7.909
200	7.685	7.836	7.960	7.928	7.894	7.909	7.922	7.907
300	7.995	8.059	7.927	7.900	7.894	7.925	7.917	7.910

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα βρίσκουμε για μια ακόμη φορά ότι η μέθοδος Monte Carlo είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της τιμής του **exchange option**, και βλέπουμε ότι η τιμή που προκύπτει γιαNSteps = 100 και NRepl = 2000 είναι ακόμα πιο κοντά στην τιμή που υπολογίσαμε με τη μέθοδο Black & Scholes.

5.4 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΝΟΣ SPREAD OPTION

Για μια «θεωρητική» εκτίμηση της τιμής ενός **spread option,** χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που πρότεινε ο Kirk (1995), όπως αυτή παρουσιάζεται από τους Peter Bjerksund – Gunnar Strensland [3] και Paolo Bruni [6], και η οποία προτείνει τα εξής:

$$C = e^{-rT}\left\{F_1 N(d_1) - (F_2 + X)N(d_2)\right\}$$

Όπου F_1 και F_2 είναι οι future τιμές των δύο assets, οι οποίες δίνονται από τον τύπο $F_i = S_i e^{rT}$.

Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\frac{F_1}{F_2 + X}\rho\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{F_2}{F_2 + X}\right)^2 \sigma_2^2}$$

και για τις κατανομές έχουμε ότι

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_1}{F_2 + X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \text{ και } d_2 = d_1 - \sigma .$$

Έχοντας υπόψη αυτούς τους τύπους και με τη βοήθεια του Excel, για τα ίδια δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε για τα προηγούμενα είδη των multi-asset options, καταλήγουμε στην τιμή του **spread option** , η οποία είναι: **C=0**.

Για αποτίμηση, τώρα, ενός spread option με τη μέθοδο Monte Carlo, δημιουργούμε τη συνάρτηση **MCSpreadOption**, με ορίσματα τις τιμές των υποκείμενων τίτλων στη spot αγορά (S_1, S_2), την τιμή εξάσκησης (**X**), το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (**r**), το χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (**T**), τις τυπικές αποκλίσεις των assets (**sigma1, sigma2**), τη συσχέτιση των assets (**rho**), τον αριθμό των επαναλήψεων (**NRepl**) , τον αριθμό των χρονικών βημάτων (**NSteps**) και τη μεταβλητή **cp** που παίρνει τιμές 1 ή -1, ανάλογα με το αν πρόκειται για call ή put option.

Για τη δημιουργία του κώδικα ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε για τα **basket** και **exchange options**, με τη διαφορά ότι σύμφωνα με τους Brandimarte Paolo [4] και Graeme West [21], για το **spread option** ισχύει ότι **max(0,(S1T-S2T-X))**.

Με την εκτέλεση του κώδικα της συνάρτησης **MCSpreadOption** και χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις τιμές:

S1 = 78.42064488 «τιμή υποκείμενου τίτλου, 3M»

S2 = 73.28049706 «τιμή υποκείμενου τίτλου, Abercrombie & Fitch»

r = 0.03676938 «risk free rate»

T = 1/12 «χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος»

Sigma1 = 0.156183469 «τυπική απόκλιση του asset 3M»

Sigma2 = 0.061848479 «τυπική απόκλιση του asset Abercrombie & Fitch»

rho = 0.12681588 «συντελεστής συσχέτισης των δύο assets»

K = 75 «Τιμή εξάσκησης»

cp = 1 «μεταβλητή που δηλώνει ότι πρόκειται γιαcall option»

και για διάφορες τιμές επαναλήψεων και χρονικών βημάτων, παίρνουμε την τιμή του option, η οποία είναι **μηδέν** (**C=0**).

Χρησιμοποιώντας και την «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας» για τη μείωση του λάθους της τιμής εκτελώντας τον κώδικα της συνάρτησης **MCSpreadOptionAntithetic** καταλήγουμε πάλι σε τιμή του option **C=0**.

Κατά συνέπεια, η τιμή του option, που δίνεται από το μέσο όρο των παραπάνω τιμών, είναι ίση με το μηδέν (**C=0**) , η οποία παρατηρούμε ότι συμπίπτει με τη «θεωρητική» τιμή του**spread option**.

Αξίζει να σημειώσουμε, πως για κάποια άλλη τιμή εξάσκησης (strike price) η οποία θα είναι αρκετά μικρή, η τιμή του spread option είναι διάφορη του μηδενός, αλλά εξακολουθεί να είναι αρκετά χαμηλή.

5.5 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΝΟΣ RAINBOW OPTION (CALL ON MAX)

Για ένα **rainbow option (call on max)** ισχύει ότι η τιμή του δίνεται από το μέγιστο που προκύπτει από τη διαφορά της μέγιστης τιμής τωνassets και της τιμής εξάσκησης, και του μηδενός, δηλαδή **max (max(S1,S2)-X,0)**.

Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο option θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που πρότειναν οι Stulz (1982) [20] και Johnson (1987) [11] και η οποία υποστηρίζει ότι η τιμή ενός **rainbow option (call on max)** δίνεται από τον τύπο :

$$c = S_1 M(d_{11}, d_1, rho_1) + S_2 M(d_{21}, -d_2, rho_2) + e^{-rT} X M(-d_{12}, -d_{22}, \rho) - e^{-rT} X$$

για τον οποίο έχουμε ότι

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma$$

$$d_{11} = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{K}\right) + \left(rT + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)}{\sigma_1} \text{ και } d_{12} = d_{11} - \sigma_1$$

$$d_{21} = \frac{\ln\left(\frac{S_2}{K}\right) + \left(rT + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)}{\sigma_2} \text{ και } d_{22} = d_{21} - \sigma_2$$

$$rho_1 = \frac{\sigma_1 - \rho\sigma_2}{\sigma} \text{ και } rho_2 = \frac{\sigma_2 - \rho\sigma_1}{\sigma}$$

και τέλος $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$.

Να σημειώσουμε εδώ ότι χρησιμοποιείται η διωνυμική αθροιστική κατανομή (bivariate cumulative distribution function), η οποία δέχεται τρία ορίσματα και όχι ένα, όπως η τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Έχοντας όλα αυτά υπόψη μας και με τη χρήση τουExcel, βρίσκουμε ότι η τιμή του **rainbow option (call on max)** είναι ίση με **7.312**.

Για τον υπολογισμό της τιμής με τη μέθοδοMonte Carlo, δημιουργούμε μια συνάρτηση, την **MCRainbow** , όπως κάναμε και για τον υπολογισμό των άλλων options, δηλαδή των basket, exchange και spread options.

Η συνάρτηση **MCRainbow** παίρνει ως ορίσματα τις τιμές των υποκείμενων τίτλων στη spot αγορά (S_1, S_2), την τιμή εξάσκησης (**X**), το χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (**T**), τις τυπικές αποκλίσεις των assets (**sigma1, sigma2**), το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (**r**), τη συσχέτιση ανάμεσα στα δύοassets (**rho**), τον αριθμό των επαναλήψεων (**NRepl**), τον αριθμό των χρονικών βημάτων (**NSteps**) καθώς και τη μεταβλητή **cp**.

Με την εκτέλεση του κώδικα, (George Levy [13]), για τις ακόλουθες τιμές :

S1 = 78.42064488 «τιμή υποκείμενου τίτλου, 3M»

S2 = 73.28049706 «τιμή υποκείμενου τίτλου, Abercrombie & Fitch»

r = 0.03676938 «risk free rate»

T = 1/12 «χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος»

Sigma1 = 0.156183469 «τυπική απόκλιση του asset 3M»

Sigma2 = 0.061848479 «τυπική απόκλιση του asset Abercrombie & Fitch»

rho = 0.12681588 «συντελεστής συσχέτισης των δύοassets»

K = 75 «Τιμή εξάσκησης»

cp =1 «μεταβλητή που δηλώνει ότι πρόκειται γιαcall option»

παίρνουμε, για διάφορες τιμές επαναλήψεων και χρονικών βημάτων τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	7.284	7.160	7.599	7.394	7.141	7.314	7.376	7.340
200	7.443	7.448	7.328	7.394	7.224	7.326	7.334	7.321
300	7.326	7.538	7.391	7.343	7.376	7.351	7.330	7.355

Χρησιμοποιώντας την «αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας» για τη μείωση του λάθους της τιμής του option ,με τη συνάρτηση **MCRainbowAntithetic**, βρίσκουμε τις τιμές του παρακάτω πίνακα

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	7.291	7.128	7.276	7.521	7.290	7.375	7.330	7.343
200	7.295	7.674	7.647	7.427	7.381	7.339	7.368	7.338
300	7.893	7.497	7.266	7.395	7.262	7.299	7.352	7.347

Τέλος, επειδή η τιμή του option υπολογίζεται από το μέσο όρο των παραπάνω τιμών, καταλήγουμε στις τιμές που εμφανίζονται παρακάτω

NSteps/NRepl	1000	2000	3000	5000	10000	50000	100000	500000
100	7.288	7.144	7.438	7.458	7.216	7.345	7.353	7.342
200	7.369	7.561	7.488	7.411	**7.303**	7.333	7.351	7.330
300	7.610	7.518	7.329	7.369	7.319	7.325	7.341	7.351

Παρατηρώντας τις παραπάνω τιμές βλέπουμε ότι με τη μέθοδο Monte Carlo, μπορούμε να προσεγγίσουμε αρκετά καλά την τιμή του **rainbow option (max on call)** που υπολογίσαμε με τη μέθοδο των Stulz και Johnson, με την «καλύτερη» τιμή να δίνεται με αριθμό χρονικών βημάτων 200 και αριθμό επαναλήψεων ίσο με 10000.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν να καταδείξει μια μέθοδο αξιολόγησης δικαιωμάτων που βασίζονται σε παραπάνω από ένα περιουσιακά στοιχεία. Αφού λοιπόν αναλύσαμε αρχικά τις βασικές αρχές που διέπουν την αποτίμηση απλών δικαιωμάτων, αναφερθήκαμε συνοπτικά σε μια σχετικά νέα περιοχή στο χώρο αυτό, τα εξωτικά δικαιώματα. Η αναφορά αυτή κρίθηκε αναγκαία αφού μια κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων αφορά δικαιώματα που είναι γραμμένα σε περισσότερους από έναν υποκείμενους τίτλους και ονομάζονται δικαιώματα συσχέτισης, επειδή η δομή του υπονοεί μια μορφή συσχέτισης μεταξύ των τίτλων αυτών που επηρεάζει ανάλογα την τιμή τους.

Επελέγη λοιπόν για την αποτίμηση αυτού του είδους των σύνθετων παραγώγων προϊόντων η μέθοδος Monte Carlo. Η μέθοδος αυτή δεδομένης και της διαρκώς αυξανόμενης υπολογιστικής ισχύος κρίνεται ολοένα και περισσότερο ελκυστική. Αναπτύξαμε, λοιπόν, προκειμένου να αποτιμήσουμε πιο σύνθετες μορφές δικαιωμάτων κάποια προγράμματα με βάση τη μέθοδο Monte Carlo. Οφείλουμε ωστόσο να τονίσουμε ότι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αυτή σε μια αρκετά απλή μορφή, χωρίς να χρησιμοποιούμε όλες τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη βελτίωσή της, αφού σκοπός μας ήταν να αναδείξουμε το πρόβλημα της αποτίμησης δικαιωμάτων συσχέτισης.

Οι κώδικες, λοιπόν, που αναπτύξαμε σε περιβάλλον MATLAB, αν και αρκετά συγκεκριμένος, μπορεί με μικρές μετατροπές να χρησιμοποιηθεί και για την αποτίμηση άλλων ειδών δικαιωμάτων συσχέτισης.

Πέρα λοιπόν από το «προγραμματιστικό» κομμάτι, αξίζει να σταθούμε στις δυνατότητες που παρέχουν τα εξωτικά δικαιώματα, και συγκεκριμένα αυτά που μελετήσαμε, δηλαδή τα δικαιώματα συσχέτισης (**correlation options**). Δηλαδή, οι δυνατότητες που είχαν οι επενδυτές για διαφοροποίηση του κινδύνου που αναλάμβαναν στην υποκείμενη αγορά μέσω δημιουργίας κατάλληλων χαρτοφυλακίων, φαίνεται πως δεν αφήνει ανεπηρέαστη την αγορά παραγώγων προϊόντων. Ο ρόλος της συσχέτισης είναι καθοριστικός για την αποτίμηση περίπλοκων δικαιωμάτων, όπως επίσης είναι καθοριστικός και για τη διαμόρφωση της κατάλληλης στρατηγικής, μέσα από την επιλογή του κατάλληλου δικαιώματος που συλλαμβάνει τις προσδοκίες των επενδυτών σχετικά με τη μελλοντική εξέλιξη των τιμών των υποκείμενων τίτλων.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε πως αντίστοιχα με τα ευρωπαϊκού τύπου εξωτικά δικαιώματα που αναπτύξαμε υπάρχουν και τα αμερικανικού τύπου. Μέχρι πριν λίγα χρόνια λοιπόν υπήρχαν αρκετές δυσκολίες στην αποτίμηση δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου με πολλά υποκείμενα προϊόντα, τόσο με άλλες μεθόδους όσο και με τη μέθοδο Monte Carlo. Ωστόσο, τελευταία έχουν αναληφθεί σημαντικές προσπάθειες προς την κατεύθυνση αυτή. Ενδεικτικά αναφέρουμε την προσπάθεια των Mark Broadie & Paul Glasserman (1997) [5], οι οποίοι ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο στη βάση της μεθόδουMonte Carlo, ο οποίος γεννά δύο κατάλληλα μεροληπτικές εκτιμήσεις οι οποίες ασυμπτωτικά συγκλίνουν προς την πραγματική τιμή του δικαιώματος. Επίσης αναφέρουμε και την προσπάθεια τωνJerome Barraquand & Didier Martineau (1995) [1], οι οποίοι ανέπτυξαν μια αποτελεσματική αριθμητική τεχνική που συνδυάζει τη μέθοδο Monte Carlo με μια ειδική μέθοδο διαμερισμού του χώρου των υποκείμενων περιουσιακών τίτλων που ονομάζεταιStratified State Aggragation. Χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική κατάφεραν να λάβουν ακριβείς προσεγγίσεις των τιμών αμερικανικών δικαιωμάτων με αυθαίρετα μεγάλο αριθμό υποκείμενων τίτλων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Barraquand Jerome – Martineau,** Numerical valuation of high dimensional multivariate American securities, Journal of Financial & Quantitative Analysis, vol. 30, No 3, September 1995
2. **Black Fischer – Scholes Myron,** The pricing of options & corporate liabilities, Journal of political economy, May/June 1973
3. **Bjerksund Peter – Strensland Gunnar,** Closed Form Spread Option Valuation, October 2006
4. **Brandimarte Paolo,** Numerical Methods in Finance, Wiley, 1^{st} edition, 2002
5. **Broadie Mark – Glasserman Paul,** Pricing American – style securities using simulation, Journal of economics Dynamics & Control, 21, 1997
6. **Bruni Paolo,** Pricing Spread Options, 2005
7. **Deutsch Hans – Peter,** Derivatives and Internal Models, Palgrave, 2^{nd} edition 2002
8. **A closed – form Approximation for valuing Basket Options,** Moshe Arye Milevsky – Steven E. Posner, The Journal of Derivatives, summer 1998
9. **Glasserman Paul,** Monte Carlo Simulation in the pricing of derivatives, May 2008
10. **Hull C. John,** Options, Futures and other derivatives, Prentice Hall, 5^{th} edition 2003
11. **Johnson Herb,** Options on the minimum or the maximum of several assets, Vol. 22, Issue 3, September 1987
12. **Lancu Aniella Karina,** Numerical Methods for Pricing Basket Options, Dissertation, Ohio State University, 2004
13. **Levy George,** Computational Finance using C and C#, Elsevier, 2008
14. **Margrabe William,** The value of an option to exchange one asset for another, Vol. 33, No 1

15. **Marshall Cara,** Monte Carlo Simulation in the pricing of derivatives, May 2008
16. **Martin Baxter – Andrew Rennie,** Financial Calculus, Cambridge University Press, 1st edition 1996
17. **Martinez L. Wendy – Martinez R. Angel,** Computational Statistics Handbook, Chapman & Hall / CRC, 1st edition 2002
18. **Ngai Hang Chan – Hoi Ying Wong,** Simulation Techniques in Financial Risk Management, Wiley
19. **Satyajit Das,** Swaps / Financial Derivatives, Wiley, 3rd edition, Vol. 3, 2004
20. **Stulz Rene,** Options on the minimum or the maximum of two risky assets, Analysis and applications, February 1982
21. **West Graeme,** Financial Modelling Agency, Exotic Equity Options, August 2008
22. **Wilmott Paul,** Paul Wilmott on Quantitative Finance, Wiley, 1st edition 2000, Vol.1, 2
23. **Zhang G. Peter,** Exotic Options, World Scientific, 2nd edition, 1998
24. **Αγγελόπουλος Παναγιώτης,** Εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, Σταμούλης, Αθήνα 2005
25. **Γεωργίου Γ. – Ξενοφώντος Χ. ,** Εισαγωγή στο MATLAB, Λευκωσία 2007
26. **Δελλαπόρτας Πέτρος,** Παράγωγα προϊόντα και διαχείριση κινδύνων, Αθήνα 2004
27. **Μυλωνάς Νικόλαος,** Αγορές και προϊόντα παραγώγων, Δαρδανός, Ελληνική Ένωση Τραπεζών, Αθήνα 2005
28. **Παπαγεωργίου Γ.Σ. – Τσίτουρας Χ.Γ.,** Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab & Mathematica, Συμεών, 2η έκδοση, Αθήνα 2004
29. **Συρράκος Ελευθέριος,** Χρηματιστηριακά παράγωγα, θεωρία και πράξη, Conceptum, 1η έκδοση, Αθήνα 2000

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε για την αποτίμηση των διαφόρων ειδών εξωτικών δικαιωμάτων (δικαιωμάτων συσχέτισης), και αφορούν δύο από τα assets του δείκτη S&P500, και είναι συγκεκριμένα τα 3M και Abercrombie & Fitch.

	3M	ABERCROMBIE & FITCH	RETURNS ABERCROMBIE & FITCH	RETURNS 3M	INTEREST RATE
Μαρ-99	35,37348721	46,12305267			4,8906
Απρ-99	44,50009522	47,40631414	0,027822561	0,25800702	4,8437
Μαϊ-99	42,87286076	42,06034186	-0,1127692	-0,036566988	4,875
Ιουν-99	43,47228381	48,00391894	0,141310717	0,01398141	5,25
Ιουλ-99	43,96716328	41,49852299	-0,13551802	0,011383793	5,1875
Αυγ-99	47,25023767	35,25013204	-0,150569	0,074671053	5,3438
Σεπ-99	48,02879751	34,06083261	-0,03373886	0,016477374	5,4063
Οκτ-99	47,5286426	27,2485232	-0,2000042	-0,010413646	5,3593
Νοε-99	47,78089916	32,37476716	0,18812924	0,005307464	6,4688
Δεκ-99	48,93355119	26,68527781	-0,17573839	0,024123699	5,75
Ιαν-00	46,80572949	21,37190827	-0,19911239	-0,043483901	5,8594
Φεβ-00	44,091408	14,68670569	-0,31280326	-0,057991223	5,9063
Μαρ-00	44,2757215	15,99804792	0,089287704	0,004180259	6,1406
Απρ-00	43,3107634	10,99951701	-0,3124463	-0,021794294	6,2969
Μαϊ-00	42,87225952	9,811922692	-0,10796786	-0,010124594	6,5938
Ιουν-00	41,24982026	12,18742511	0,242103662	-0,037843568	6,625
Ιουλ-00	45,03006829	16,06211951	0,317925597	0,091642776	6,5938

Αυγ-00	46,49738159	23,18618691	0,443532212	0,032585189	6,5625
Σεπ-00	45,56180172	19,0622518	-0,17786172	-0,02012113	6,5938
Οκτ-00	48,30479742	23,55873877	0,235884355	0,060203846	6,5781
Νοε-00	49,93488631	20,87389881	-0,11396365	0,033745901	6,5781
Δεκ-00	60,25275097	20,0009389	-0,04182065	0,206626377	6,5156
Ιαν-01	55,32545314	29,81028021	0,490444042	-0,081777143	5,5
Φεβ-01	56,3654672	28,35520447	-0,04881121	0,018798112	5,2813
Μαρ-01	51,94922296	32,6995633	0,153212044	-0,078350175	5,0313
Απρ-01	59,51032893	33,30295239	0,018452512	0,145548009	4,3906
Μαϊ-01	59,28496355	41,22647906	0,23792265	-0,003786996	4,0313
Ιουν-01	57,05570606	44,52438198	0,079994775	-0,03760241	3,8281
Ιουλ-01	55,93519766	38,81665296	-0,12819334	-0,019638849	3,7188
Αυγ-01	52,04707314	30,33828713	-0,21842084	-0,069511232	3,5156
Σεπ-01	49,19585451	17,58847422	-0,42025487	-0,054781536	2,5625
Οκτ-01	52,18437289	18,81801396	0,069905992	0,060747362	2,25
Νοε-01	57,28685016	23,99867481	0,275303274	0,097777879	2,0625
Δεκ-01	59,10407893	26,52957466	0,105459983	0,031721569	1,8438
Ιαν-02	55,49489054	26,54751758	0,000676337	-0,061064963	1,8281
Φεβ-02	58,96174107	26,63852535	0,003428108	0,062471527	1,8125
Μαρ-02	57,49952018	30,79702685	0,156108548	-0,024799486	1,8125
Απρ-02	62,89362469	29,99693625	-0,02597948	0,093811296	1,7969
Μαϊ-02	62,70825547	28,99684207	-0,03333988	-0,002947345	1,7969
Ιουν-02	61,49057834	24,11629928	-0,16831291	-0,019418131	1,7969
Ιουλ-02	62,91267561	22,59914313	-0,06290999	0,023127076	1,7813
Αυγ-02	62,47273654	22,79921152	0,008852919	-0,006992853	1,7656
Σεπ-02	54,98043169	19,66842584	-0,13731991	-0,119929193	1,7969
Οκτ-02	63,45844185	17,81677378	-0,09414338	0,154200502	1,6719
Νοε-02	64,92792694	24,87112402	0,395938699	0,023156653	1,3906
Δεκ-02	61,65363668	20,46120911	-0,17731064	-0,050429614	1,3281
Ιαν-03	62,27507434	27,84000515	0,360623656	0,010079497	1,2969

Φεβ-03	62,68230907	27,49876054	-0,01225735	0,006539289	1,2969
Μαρ-03	65,01494948	30,03000807	0,092049514	0,037213696	1,2656
Απρ-03	63,02100306	32,88049907	0,09492142	-0,030669045	1,2656
Μαϊ-03	63,23830022	28,55145078	-0,13166005	0,003448012	1,2813
Ιουν-03	64,48628289	28,40837841	-0,00501104	0,019734602	1,0781
Ιουλ-03	70,10118746	32,09049468	0,129613744	0,087071301	1,0781
Αυγ-03	71,23535676	30,440148	-0,0514279	0,016179031	1,0938
Σεπ-03	69,0695237	27,70979387	-0,08969582	-0,030403906	1,0781
Οκτ-03	78,869824	28,49991863	0,028514277	0,14189037	1,0781
Νοε-03	79,03732739	29,3489883	0,029792003	0,002123796	1,125
Δεκ-03	85,03077699	24,71026741	-0,15805386	0,075830621	1,0625
Ιαν-04	79,08852614	25,8995478	0,048128997	-0,06988353	1,0469
Φεβ-04	78,01659978	31,5286458	0,217343486	-0,0135535	1,0469
Μαρ-04	81,87099073	33,84041586	0,073322847	0,049404754	1,0156
Απρ-04	86,47770319	31,44917286	-0,07066234	0,056267946	1,0469
Μαϊ-04	84,55867627	36,42935645	0,158356584	-0,022191002	1,0781
Ιουν-04	90,01459978	38,75196185	0,063756421	0,064522338	1,3281
Ιουλ-04	82,35673007	36,87852155	-0,0483444	-0,085073641	1,4844
Αυγ-04	82,35537893	27,9983958	-0,24079397	-0,00002	1,6406
Σεπ-04	79,96547227	31,49823014	0,125001245	-0,029019436	1,7969
Οκτ-04	77,56872273	39,17939781	0,243860294	-0,029972305	1,9688
Νοε-04	79,59437548	45,55248399	0,16266422	0,026114298	2,2656
Δεκ-04	82,07339948	46,95188256	0,030720577	0,031145718	2,3594
Ιαν-05	84,35761399	50,11862242	0,067446494	0,027831362	2,5625
Φεβ-05	83,94395922	53,702514	0,071508182	-0,004903585	2,6875
Μαρ-05	85,69479102	57,24318985	0,065931287	0,020857151	2,8594
Απρ-05	76,46755829	53,9482585	-0,05756023	-0,107675538	3,0625
Μαϊ-05	76,64826888	57,32874006	0,062661551	0,002363232	3,1094
Ιουν-05	72,30193705	68,70181598	0,198383497	-0,056704892	3,3281
Ιουλ-05	75,00097172	72,05094257	0,048748735	0,037330047	3,5

Αυγ-05	71,14978293	55,60981909	-0,22818749	-0,051348519	3,6719
Σεπ-05	73,36025946	49,85013805	-0,10357309	0,031067931	3,8438
Οκτ-05	75,97975805	51,98981914	0,04292227	0,035707325	4,0781
Νοε-05	78,47632072	61,31712665	0,179406424	0,03285826	4,2813
Δεκ-05	77,4981717	65,17846611	0,062973262	-0,012464257	4,3906
Ιαν-06	72,7508743	66,39073732	0,01859926	-0,061256895	4,5469
Φεβ-06	73,5899851	67,31994039	0,013995974	0,01153403	4,625
Μαρ-06	75,68748941	58,29803713	-0,13401532	0,028502578	4,7969
Απρ-06	85,43136786	60,7309761	0,041732777	0,128738296	5
Μαϊ-06	83,66570761	57,85393172	-0,04737359	-0,020667587	5,0781
Ιουν-06	80,76821768	55,42867007	-0,04192043	-0,034631751	5,3281
Ιουλ-06	70,40083715	52,96065645	-0,04452594	-0,128359655	5,345
Αυγ-06	71,69990528	64,52983795	0,218448605	0,018452453	5,285
Σεπ-06	74,42008057	69,48012465	0,076713143	0,037938339	5,285
Οκτ-06	78,84145096	76,65147802	0,103214458	0,059410986	5,285
Νοε-06	81,46367975	67,44300106	-0,12013437	0,03325952	5,305
Δεκ-06	77,93129821	69,63117294	0,032444758	-0,043361429	5,285
Ιαν-07	74,30128905	79,54142627	0,142324952	-0,046579606	5,275
Φεβ-07	74,07896649	78,09888644	-0,0181357	-0,002992176	5,275
Μαρ-07	76,42892323	75,67895318	-0,0309855	0,031722321	5,275
Απρ-07	82,76759516	81,65763651	0,079000608	0,082935513	5,285
Μαϊ-07	87,96242969	82,6523939	0,01218205	0,062764111	5,285
Ιουν-07	86,78826103	72,97863433	-0,11704149	-0,013348525	5,295
Ιουλ-07	88,91737619	69,89788376	-0,04221442	0,024532294	5,295
Αυγ-07	90,99190228	78,70163863	0,125951665	0,023330941	5,665
Σεπ-07	93,57855965	80,69884521	0,025376938	0,028427336	5,105
Οκτ-07	86,35923032	79,19936343	-0,01858121	-0,077147258	4,685
Νοε-07	83,26361061	82,04353634	0,035911563	-0,035845847	5,325
Δεκ-07	84,32314283	79,97309824	-0,02523585	0,012725033	4,595
Ιαν-08	79,6522061	79,59224163	-0,00476231	-0,055393295	3,095

Φεβ-08	78,40190066	77,53188001	-0,02588646	-0,01569706	3,085
Μαρ-08	78,42064488	73,28049706	-0,054834	0,000239079	2,815
		ΑΘΡΟΙΣΜΑ	**1,754059607**	**0,995859636**	**3,676938**
		VAR	**0,024393276**	**0,003825234**	**3,677%**
		STDEV	**0,156183469**	**0,061848479**	
		CORRELATION	**0,12681588**		
		COVARIANCE	**0,001213662**		

Στη συνέχεια θα παρατεθούν τα προγράμματα σε κώδικα MATLAB που δημιουργήσαμε για την αποτίμηση του κάθε option ξεχωριστά, καθώς και οι αντίστοιχες εντολές του Excel, όπου αυτό χρησιμοποιήθηκε.

Απλό ευρωπαϊκό call option

Φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού του απλού ευρωπαϊκού call option με τη μέθοδο Black & Scholes, με τη χρήση του προγράμματος Excel:

I	J	K	L
Black & Scholes for one asset			
S1	78,42064488		
r	0,03676938		
T	0,0833		
K	75		
sigma1	0,156183469		
d1	1,353503413	=(LN(J2/J5)+J6+(J3*SQRT(J4)))/J6	
d2	1,197319944	=J8-J6	
N(d1)	0,91205257	=NORMSDIST(J8)	
N(d2)	0,884409063	=NORMSDIST(J9)	
C	5,395923669	=J2*J10-J5*EXP(-J3*J4)*J11	
P	1,745913527	=J5*EXP(-J3*J4)*NORMSDIST(-J9)-J2*NORMSDIST(-J8)	

Monte Carlo

Κώδικας MATLAB για απλό ευρωπαϊκό call option, με τη μέθοδο Monte Carlo:

```
function [p,ci]= MonteCarlo(S1,X,sigma1,T,r,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=normrnd(0,1);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
sum = sum+max(0,(cp*(S1T-X)));
end
Discpayoff = exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]= normfit(Discpayoff,0.95);
```

Κώδικας MATLAB για αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας:

```
function [p,ci]= MonteCarloAntithetic(S1,X,sigma1,T,r,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=(-normrnd(0,1));
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
sum=sum+exp(-r*T)*max(0,cp*(S1T-X));
end
Discpayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(Discpayoff);
```

Basket Option

Υπολογισμός «θεωρητικής» τιμής με τη βοήθεια τουExcel:

G	H	I
	Basket Options	
S1	78,42064488	
S2	73,28049706	
r	0,03676938	
T	0,0833	
corr	0,12681588	
K	75	
F1	78,66120686	=H2*EXP(H4*H5)
F2	73,50529120	=H3*EXP(H4*H5)
M1	152,16649806	=SUM(H8+H9)
M2	23189,11635	=(H8*H8*EXP(H12*H12*H5))+(H8*H9*EXP(H6*H12*H13*H5))+(H9*H8*EXP(H6*H12*H13*H5))+(H9*H9*EXP(H13*H13))
sigma1	0,156183469	
sigma2	0,061848479	
sigma	0,133613695	=SQRT(12*LN(H11/(H10*H10)))
d1	5,361826866	=(LN(H10/H7)+(H14*H14*0,5))/(H14)
d2	5,228213171	=H15-H14
C	76,93050735	=EXP(-H4*H5)*(H10*NORMSDIST(H15)-H7*NORMSDIST(H16))

Monte Carlo

Κώδικας MATLAB για αποτίμηση ενός basket option, με τη μέθοδο Monte Carlo:

```
function [p,ci]= BasketMC(S1,S2,X,sigma1,sigma2,rho,T,r,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=normrnd(0,1);
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*normrnd(0,1);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*eps2);
sum=sum+max((cp*(S1T+S2T-X)),0);
end
Discpayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(Discpayoff,0.95);
```

Κώδικας MATLAB για αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας:

```
Function[p,ci]=BasketMCAntithetic(S1,S2,X,sigma1,sigma2,rho,T,r,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=(-normrnd(0,1));
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*(-normrnd(0,1));
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*eps2);
sum=sum+max((cp*(S1T+S2T-X)),0);
end
Discpayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(Discpayoff);
```

Exchange Option

Κώδικας MATLAB για τον υπολογισμό του exchange option με τη μέθοδο Black & Scholes:

```
function p = Exchangebs(S1,S2,sigma1,sigma2,rho,T,r)
sigmahat = sqrt(sigma1^2 + sigma2^2 - 2*rho*sigma2*sigma1);
d1 = (log(S1/S2) + 0.5*sigmahat^2)/sigmahat;
d2 = d1 - sigmahat;
p = S1*normcdf(d1) - S2*exp(-r*T)*normcdf(d2);
```

Monte Carlo

Κώδικας MATLAB για αποτίμηση ενός exchange option, με τη μέθοδο Monte Carlo:

```
function[p,ci]=ExchangeMC(S1,S2,sigma1,sigma2,rho,T,r,NRepl,NSteps)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=normrnd(0,1);
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*normrnd(0,1);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*eps2);
sum=sum+max(0,S1T-S2T);
end
DiscPayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(DiscPayoff);
```

Κώδικας MATLAB για την αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας:

```
function[p,ci]=ExchangeMCAntithetic(S1,S2,sigma1,sigma2,rho,T,r,NRepl,NSteps)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=(-normrnd(0,1));
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*(-normrnd(0,1));
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*eps2);
sum=sum+max(0,S1T-S2T);
end
DiscPayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,ci]=normfit(DiscPayoff,0.95);
```

Spread Option

Υπολογισμός της τιμής ενός spread option με τη βοήθεια του Excel:

	A	B	C
1	Spread Option		
2	S1	78,42064488	
3	S2	73,28049706	
4	r	0,03676938	
5	T	0,0833	
6	sigma1	0,156183469	
7	sigma2	0,061848479	
8	corr	0,12681588	
9	K	75	
10	F1	78,66120686	=B2*EXP(B4*B5)
11	F2	73,5052912	=B3*EXP(B4*B5)
12			
13	sigma	0,15502482	=SQRT((B6*B6)-(2*B10/(B11+B9))*B8*B6*B7+(B11/(B11+B9))^2*(B7*B7))
14	d1	-4,021640742	=(LN(B10/(B11+B9))+0,5*B13*B13)/(B13)
15	d2	-4,176665562	=B14-B13
16	c	0,00	=EXP(-B4*B5)*(B10*NORMSDIST(B14)-(B11+B9)*NORMSDIST(B15))
17			

Monte Carlo

Κώδικας MATLAB για αποτίμηση ενός spread option, με τη μέθοδο Monte Carlo:

```
function MCSpreadOption(S1,S2,X,T,r,sigma1,sigma2,rho,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i = 1: NRepl,
Eps1 =normrnd(0,1);
Eps2=rho*Eps1+normrnd(0,1)*sqrt(1-rho^2);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*Eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*Eps2);
sum=sum+max(cp*(S1T-S2T-X),0);
end
exp(-r * T) * (sum / NRepl)
```

Κώδικας MATLAB για την αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας:

```
function
MCSpreadOptionAntithetic(S1,S2,X,T,r,sigma1,sigma2,rho,NRepl,NSteps,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i = 1: NRepl,
Eps1 =(-normrnd(0,1));
Eps2=rho*Eps1+(-normrnd(0,1))*sqrt(1-rho^2);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*Eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*Eps2);
sum=sum+max(cp*(S1T-S2T-X),0);
end
exp(-r * T)*(sum / NRepl)
```

Rainbow Option

Υπολογισμός τιμής ενός rainbow option (**call on max**) με τη χρήση του Excel:

D	E	F
Rainbow Option (Maximum of two Assets)		
S1	78,42064488	
S2	73,28049706	
r	0,03676938	
T	0,0833	
sigma1	0,156183469	
sigma2	0,061848479	
corr	0,12681588	
K	75	
sigma	0,160525702	=SQRT(E6*E6+E7*E7-2*E8*E6*E7)
d1	**0,502579751**	=(LN(E2/E3)+0,5*(E10*E10))/(E10)
d2	**0,342054048**	=E13-E10
d11	**0,383258449**	=(LN(E2/E9)+(E4*E5+0,5*(E6*E6)))/(E6)
d12	**0,22707498**	=E15-E6
d21	**-0,294560253**	=(LN(E3/E9)+(E4*E5+0,5*(E7*E7)))/(E7)
d22	**-0,356408732**	=E17-E7
rho2	**0,261901579**	=(E7-E8*E6)/E10
rho1	**0,924089399**	=(E6-E8*E7)/E10
C	**7,312585764**	=E2*bivar(E15;E13;E20)+E3*bivar(E17;(-E14);E19)+EXP((-E4)*E5)*E9*bivar((-E16);(-E18);E8)-EXP((-E4)*E5)*E9

Monte Carlo

Κώδικας MATLAB για αποτίμηση ενός rainbow option (max on call), με τη μέθοδο Monte Carlo:

```
function [p,ci]=MCRainbow(S1,S2,X,T,r,sigma1,sigma2,rho,NSteps,NRepl,cp)
dt=T/NSteps;
sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=normrnd(0,1);
eps2=rho*eps1+sqrt(1-rho^2)*normrnd(0,1);
S1T=S1*exp(r*dt-0.5*sigma1^2+sigma1*eps1);
S2T=S2*exp(r*dt-0.5*sigma2^2+sigma2*eps2);
sum=sum+max(0,cp*(max(S1T,S2T)-X));
end
Discpayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(Discpayoff);
```

Κώδικας για την αντιθετική τεχνική μεταβλητότητας:

```
function
[p,ci]=MCRainbowAntithetic(S1,S2,X,T,r,sigma1,sigma2,rho,NSteps,NRepl,cp)
dt=T/NSteps;
 sum=0;
for i=1:NRepl
eps1=(-normrnd(0,1));
eps2=rho*eps1+(-normrnd(0,1))*sqrt(1-rho^2);
ST1=S1*exp(r*dt-sigma1^2/2+sigma1*eps1);
ST2=S2*exp(r*dt-sigma2^2/2+sigma2*eps2);
sum=sum+max(0,cp*(max(ST1,ST2)-X));
end
Discpayoff=exp(-r*T)*(sum/NRepl);
[p,s,ci]=normfit(Discpayoff);
```