



**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ
CREDITMETRICS KAI CREDITGRADES:
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ENRON CORP.**

ΑΓΓΕΛΟΣ Δ. ΣΤΟΥΡΑΪΤΗΣ

**Διατριβή υποβλειθήσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

**Αθήνα
Ιανουάριος 2004**





KATALOGΟΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
εισ. 74582
Αρ.
ταξ.

**ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ
CREDITMETRICS ΚΑΙ CREDITGRADES:
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ENRON CORP.**

ΑΓΓΕΛΟΣ Δ. ΣΤΟΥΡΑΪΤΗΣ

**Διατριβή υποβλειθήσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

**Αθήνα
Ιανουάριος 2004**



Εγκρίνουμε τη διατριβή του Άγγελου Στουραΐτη

Αθανάσιος Επίσκοπος
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

A. S.
[Υπογραφή]

Ευθύμιος Τσιώνας
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

E.T.
[Υπογραφή]

Ιανουάριος 2004



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ | 1 |
| ΕΙΣΑΓΩΓΗ | 2 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CREDITMETRICS | |
| 1.1. Εισαγωγή | 4 |
| 1.2. Η περίπτωση του ενός δανείου | 8 |
| 1.3. Εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού δύο εταιρειών: το Asset Value model | 15 |
| 1.4. Η περίπτωση χαρτοφυλακίου δύο δανείων | 23 |
| 1.5. Γενίκευση του μοντέλου σε χαρτοφυλάκια μεγάλου αριθμού δανείων | 28 |
| 1.6. Κριτική στο μοντέλο CreditMetrics | 37 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CREDITGRADES | |
| 2.1. Εισαγωγή | 48 |
| 2.2. Περιγραφή του μοντέλου | 53 |
| 2.3. Εκτίμηση της μεταβλητότητας του ενεργητικού | 63 |
| 2.4. Κριτική στο μοντέλο CreditGrades | 72 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ENRON CORPORATION | |
| 3.1. Εισαγωγή | 75 |
| 3.2. Εφαρμογή του μοντέλου CreditGrades | 77 |
| 3.3. Σύγκριση των μοντέλων CreditMetrics και CreditGrades | 85 |
| ΕΠΠΛΟΓΟΣ | 88 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α | 89 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β | 91 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 93 |



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε παγκόσμιο επίπεδο οι τράπεζες βρίσκονται εκτεθειμένες στον πιστωτικό κίνδυνο, καθώς χορηγούν ιλιγγιώδη ποσά υπό τη μορφή εταιρικών δανείων. Ως εκ τούτου χρειάζονται μοντέλα που να ποσοτικοποιούν και να δίνουν εκτιμήσεις του κινδύνου αυτού. Κορυφαία μοντέλα που διαδραματίζουν αυτό το ρόλο είναι το *CreditMetrics* και το *CreditGrades*. Το μοντέλο CreditMetrics αναπτύχθηκε και δημοσιεύτηκε από την J.P. Morgan, σε συνεργασία με άλλους φορείς, τον Απρίλιο του 1997. Το μοντέλο αυτό αποτελεί εφαρμογή του VaR model σε χαρτοφυλάκια δανείων. Σκοπός του είναι να εκτιμήσει τη μέγιστη ζημία που αναμένουμε να έχουμε από τη χορήγηση ενός δανείου σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Μόλις πριν από ενάμιση χρόνο, το Μάιο του 2002, η RiskMetrics Group Inc. δημοσίευσε το μοντέλο CreditGrades. Η φιλοσοφία του μοντέλου αυτού είναι διαφορετική από αυτή του CreditMetrics. Έχοντας ως βάση τα άρθρα των Black, Scholes και Merton, το CreditGrades επιχειρεί να εκτιμήσει την πιθανότητα να χρεοκοπήσει η εταιρεία που έχουμε δανειοδοτήσει σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας διεξάγεται μια θεωρητική ανάλυση των δύο μοντέλων κατά την οποία, καταρχήν, περιγράφουμε τη μεθοδολογία τους. Επιπλέον, ασκούμε κριτική σε αυτά αναφορικά με τις εκτιμήσεις τους. Κατόπιν εφαρμόζουμε το μοντέλο CreditGrades στην περίπτωση της *Enron Corp.*, η οποία χρεοκόπησε στα τέλη του 2001 έχοντας δημοσιευμένο ενεργητικό ύψους USD 65,503 δις. Η εταιρεία αυτή αποτελεί κορυφαία περίπτωση εταιρείας τεράστιου μεγέθους που κήρυξε πτώχευση. Διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο CreditGrades δίνει αρκετά υψηλές πιθανότητες χρεοκοπίας ένα περίπου έτος πριν την πτώχευση της εταιρείας. Μάλιστα παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις αυτές είναι πολύ περισσότερο ακριβείς από εκείνες της Standard and Poor's. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση, διαπιστώνουμε ότι το CreditGrades πλεονεκτεί έναντι του CreditMetrics, καθώς το δεύτερο μοντέλο νιοθετεί άκριτα τις εκτιμήσεις της S&P στη μεθοδολογία του.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

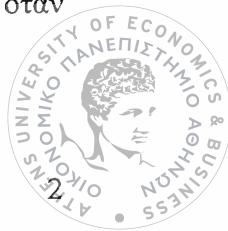


Τα τελευταία έτη παρατηρείται μια ιδιαίτερη αύξηση των εταιρικών δανείων που χορηγούν οι τράπεζες παγκοσμίως. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι οι τράπεζες βρίσκονται ολοένα και περισσότερο εκτεθειμένες στο λεγόμενο «πιστωτικό κίνδυνο» (credit risk). Ο κίνδυνος αυτός προκύπτει καθώς υπάρχει το ενδεχόμενο να χρεοκοπήσουν οι εταιρίες που δανειοδοτούνται ή γενικότερα να χειροτερεύσει η πιστοληπτική τους ικανότητα. Είναι χαρακτηριστικό ότι τα τελευταία έτη έχουν αυξηθεί οι χρεοκοπίες εταιρειών στην παγκόσμια αγορά. Προκαλούν μάλιστα εντύπωση οι πτωχεύσεις εταιρειών μεγάλου μεγέθους. Κορυφαία περίπτωση αποτελεί η *Enron Corp.* που χρεοκόπησε στα τέλη του 2001 έχοντας δημοσιευμένο ενεργητικό ύψους USD 65,503 δις¹.

Θέλοντας να εκτιμήσει τον πιστωτικό κίνδυνο που ενέχει η χορήγηση δανείων, η J.P. Morgan σε συνεργασία με άλλους φορείς ανέπτυξε και δημοσίευσε το μοντέλο *CreditMetrics* τον Απρίλιο του 1997. Το μοντέλο αυτό αποτελεί την πιο σημαντική εφαρμογή του VaR model που έχει γίνει μέχρι σήμερα στα πλαίσια της εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο κάνει μια εκτίμηση της μέγιστης ζημίας που αναμένουμε να έχουμε από τη χορήγηση ενός δανείου σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Βασικό ρόλο στην εκτίμηση διαδραματίζουν οι πίνακες μεταπήδησης από μια βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας σε άλλη. Οι πίνακες αυτοί δημοσιεύονται και αναπροσαρμόζονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα από χρηματοοικονομικούς οίκους, όπως η Moody's και η Standard and Poor's.

Πέντε χρόνια αργότερα, το Μάιο του 2002, η RiskMetrics Group Inc. δημοσίευσε το μοντέλο *CreditGrades*. Η φιλοσοφία του μοντέλου είναι διαφορετική από αυτή του CreditMetrics. Το CreditGrades εντάσσεται στην κατηγορία των structural models καθώς αποτελεί ουσιαστικά μια εφαρμογή της θεωρίας των Black, Scholes (1973) και Merton (1974). Πιο συγκεκριμένα, δίνει εκτιμήσεις της πιθανότητας να χρεοκοπήσει η εταιρεία που δανειοδοτείται σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα. Οι εκτιμήσεις αυτές δεν έχουν ως βάση τους πίνακες των Moody's, S&P, αλλά στηρίζονται στην πορεία που ακολούθησε η μετοχή της εταιρείας κατά το παρελθόν. Το CreditGrades θεωρεί ότι η εταιρεία που δανειοδοτείται χρεοκοπεί όταν

¹ Enron annual report (2000).



η αξία του ενεργητικού της μειωθεί κάτω από ένα όριο. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του μοντέλου, το οποίο το διαφοροποιεί από άλλα structural models, είναι ότι θεωρεί μεταβαλλόμενο το όριο χρεοκοπίας. Κι αυτό γιατί σε πραγματικές συνθήκες δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις πραγματικές αξίες του ενεργητικού και του χρέους της εταιρείας που εξετάζουμε. Με την υπόθεση αυτή το μοντέλο επιχειρεί να προσδώσει ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις του.

Η εργασία αυτή έχει ως σκοπό τη θεωρητική και εμπειρική ανάλυση των μοντέλων CreditMetrics και CreditGrades. Τα μοντέλα αυτά επεκτείνουν την εφαρμογή τους στον πιστωτικό κίνδυνο που ενέχει η θέση σε άλλους τίτλους, εκτός των δανείων, όπως είναι τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα (derivatives). Εμείς, όμως, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα περιοριστούμε αυστηρά στον πιστωτικό κίνδυνο που ενέχει η χορήγηση δανείων. Στο *Κεφάλαιο I* περιγράφουμε αρχικά το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται το CreditMetrics. Κατόπιν αναλύουμε το ίδιο το μοντέλο σε θεωρητικό, πάντα, επίπεδο. Στο *Κεφάλαιο II* ακολουθείται η αντίστοιχη διαδικασία για το μοντέλο CreditGrades.

Το *Κεφάλαιο III* αποτελεί μια εφαρμογή του CreditGrades στην περίπτωση της Enron Corp. Περιγράφοντας αναλυτικά βήμα προς βήμα όλη τη διαδικασία, καταλήγουμε τελικά στην εκτίμηση του μοντέλου για την πιθανότητα χρεοκοπίας της εταιρείας. Μάλιστα συγκρίνουμε την εκτίμηση αυτή με την αντίστοιχη εκτίμηση που κάνει η S&P (1996) και στην οποία στηρίζεται το CreditMetrics. Με τον τρόπο αυτό εντοπίζουμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στα δύο μοντέλα στην περίπτωση της Enron Corp.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Α. Επίσκοπο για όλες τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσε κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων του προγράμματος. Χωρίς αυτές δεν θα ήταν δυνατή η σύνταξη αυτής της εργασίας και η ενασχόλησή μου με το ιδιαίτερα ενδιαφέρον αντικείμενο της αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου.

Άγγελος Δ. Στουραΐτης
Αθήνα, Ιανουάριος 2004



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CREDITMETRICS

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο πιστωτικός κίνδυνος που προκύπτει για μια τράπεζα από τη χορήγηση ενός εταιρικού δανείου εμφανίζεται εξαιτίας των διακυμάνσεων που ενδεχομένως να παρουσιάζει η αξία του δανείου κατά το πέρασμα του χρόνου. Οι διακυμάνσεις οφείλονται στην αλλαγή που μπορεί να υπάρξει στην πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας στο μέλλον. Το μοντέλο *CreditMetrics* (1997), όπως ίσως αναμέναμε, χρησιμοποιεί μέτρα αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου που να εκφράζουν ποσοτικά αυτές τις διακυμάνσεις. Όπως γίνεται και διαισθητικά φανερό, όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά στις πιθανές τιμές που μπορεί να λάβει η αξία του δανείου τόσο μεγαλύτερος θα είναι και ο πιστωτικός κίνδυνος.

Ουσιαστικά το CreditMetrics αποτελεί εφαρμογή του μοντέλου *Value at Risk* (*VaR*) σε χαρτοφυλάκια δανείων. Εξ' ορισμού το *VaR* προσδιορίζει τη μεγαλύτερη αναμενόμενη ζημία, σε νομισματικές μονάδες, από τη θέση μας σε ένα τίτλο μέσα σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα και για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Αν υποθέσουμε, δηλαδή, ότι P είναι η αξία ενός χαρτοφυλακίου μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, $E(P)$ η αναμενόμενη τιμή της και P_1 είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να αποκτήσει με δεδομένη πιθανότητα α %, τότε η μαθηματική έκφραση του *VaR* για επίπεδο εμπιστοσύνης $(1-\alpha)$ % είναι η ακόλουθη: $\alpha\% \text{ VaR} = E(P) - P_1$.²

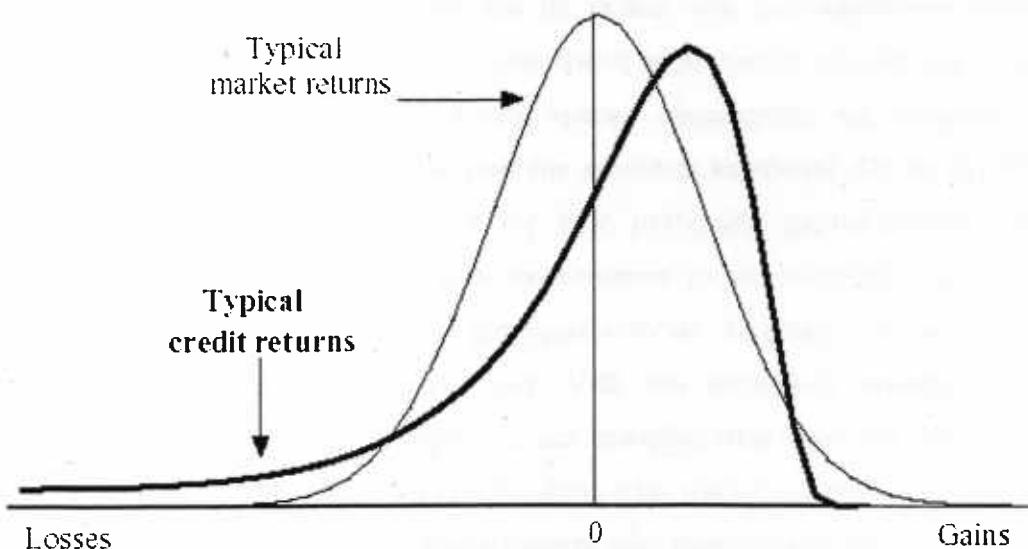
Θέλοντας να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του *VaR* και τον τρόπο υπολογισμού του, θα εξετάσουμε μια συγκεκριμένη εφαρμογή. Έστω, λοιπόν, ότι είμαστε κάτοχοι μιας μετοχής της οποίας η σημερινή τιμή είναι $P = \$80$ και η τυπική απόκλιση των ημερήσιων τιμών της είναι

² Πιο συγκεκριμένα, P_1 είναι η μεγαλύτερη από τις μικρότερες τιμές με πιθανότητα α %.



$\sigma = \$10$.³ Τότε το μοντέλο VaR απαντάει στο ακόλουθο ερώτημα: «Αν αύριο είναι μια άσχημη μέρα, ποια είναι η μεγαλύτερη αναμενόμενη ζημία από την κατοχή της μετοχής για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης;». Οι αποδόσεις των μετοχών και κατ' επέκταση των μετοχικών χαρτοφυλακίων ακολουθούν με ικανοποιητική προσέγγιση την κανονική κατανομή. Μια συνήθης, δηλαδή, κατανομή είναι αυτή που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.1: Τυπικές κατανομές της αξίας ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου και της αξίας ενός χαρτοφυλακίου εκτεθειμένου στον πιστωτικό κίνδυνο



Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Επομένως, στα πλαίσια της εφαρμογής χωρίς μεγάλο σφάλμα μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής ακολουθούν την κανονική κατανομή. Θεωρούμε μάλιστα ότι αυτή έχει μέσο τη σημερινή τιμή της μετοχής (\$80). Ως εκ τούτου υπάρχει 1% πιθανότητα η τιμή της μετοχής να μειωθεί αύριο σε τιμή μικρότερη ή ίση του $(\$80 - 2,33 \cdot \sigma) = \$56,70$. Εναλλακτικά υπάρχει 99% πιθανότητα η ζημία μας να είναι μικρότερη από $\$80 - \$56,70 = \$23,30$. Επομένως, το ποσό \$23,30 μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή VaR για τη μετοχή με επίπεδο εμπιστοσύνης 99% ή ισοδύναμα συμβολίζουμε 1% VaR = \$23,30. Χρησιμοποιώντας

³ Τα ποσά είναι σε US \$ σε όλα τα κεφάλαια.

τους στατιστικούς πίνακες της κανονικής κατανομής μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας ότι $1\% \text{ VaR} = 2,33 \cdot \sigma = \$23,30$. Επιπλέον, μπορούμε να προσδιορίσουμε και άλλες τιμές VaR για τη μετοχή όπως, ενδεικτικά, είναι η: $5\% \text{ VaR} = 1,65 \cdot \sigma = \$16,50$.

Το θέμα της αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου, το οποίο διαπραγματευόμαστε, είναι ιδιαίτερα δύσκολο λόγω των ιδιαιτεροτήτων που έχει αυτή η μορφή κινδύνου. Ενδεχομένως κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι είναι εφικτή η άμεση εφαρμογή της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου, η οποία έχει αναπτυχθεί αλματωδώς τις τελευταίες δεκαετίες, στην περίπτωση χαρτοφυλακίων που είναι εκτεθειμένα στον πιστωτικό κίνδυνο. Υπάρχουν, όμως, θεμελιώδεις διαφορές ανάμεσα στα χαρτοφυλάκια μετοχών και σε εκείνα που περιλαμβάνουν δάνεια, ομόλογα ή άλλους πιστωτικούς τίτλους. Μια πρώτη παρατήρηση που ήδη έγινε είναι ότι οι μετοχικές αποδόσεις είναι γενικά αρκετά συμμετρικές και μπορούν να περιγραφούν σε ικανοποιητικό βαθμό από την κανονική κατανομή. Ως εκ τούτου ο μέσος και η τυπική απόκλιση της αξίας ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου είναι στατιστικά μέτρα που μπορούν να ποσοτικοποιήσουν με ικανοποιητικό τρόπο τον κίνδυνο αγοράς (market risk) και χρησιμοποιούνται δίνοντας αρκετά ακριβή αποτελέσματα στον υπολογισμό της τιμής VaR του μετοχικού χαρτοφυλακίου. Αντιθέτως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, μια συνήθης κατανομή των αποδόσεων (credit returns) ενός χαρτοφυλακίου εκτεθειμένου στον πιστωτικό κίνδυνο έχει κλίση προς τα δεξιά (“skewed”) και άρα χρειαζόμαστε κάτι περισσότερο από το μέσο και την τυπική απόκλιση για να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση της τιμής VaR ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου. Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι υπάρχει συνήθως μεγάλη πιθανότητα να μας αποφέρει το χαρτοφυλάκιο μικρά καθαρά κέρδη. Επίσης, στο αριστερό τμήμα της γραφικής απεικόνισης βλέπουμε ότι κατανέμεται μια σειρά τιμών για τις ζημίες που μπορεί να έχουμε κατέχοντας το χαρτοφυλάκιο και στις οποίες αντιστοιχούν μικρότερες πιθανότητες. Το αριστερό αυτό τμήμα, με σχεδόν ορθογώνιο σχήμα, οφείλεται στις ενδεχόμενες χρεοκοπίες εταιρειών που συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο.

Επιπλέον, υπάρχει και μια δεύτερη ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στα χαρτοφυλάκια μετοχών και σε εκείνα που περιλαμβάνουν τίτλους εκτεθειμένους στον πιστωτικό κίνδυνο. Για τις μετοχές μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες αναφορικά με τη συσχέτιση που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ τους παρατηρώντας εύκολα τις τιμές τους σε καθημερινή βάση. Ωστόσο η έλλειψη ιστορικών στοιχείων



καθιστά δύσκολη την εκτίμηση της συσχέτισης που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα στους πιστωτικούς τίτλους. Εν κατακλείδι, το μοντέλο CreditMetrics έχει ως απότερο σκοπό να αναδείξει όλες τις παραπάνω δυσκολίες αλλά και να προτείνει εναλλακτικές λύσεις για την αντιμετώπισή τους.

Βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στα πλαίσια του CreditMetrics είναι οι πίνακες διαβάθμισης της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών (transition matrices). Οι πίνακες αυτοί παρέχονται από χρηματοοικονομικούς οίκους υψηλής φερεγγυότητας, όπως η Moody's και η Standard & Poor's και περιλαμβάνουν τις κατηγορίες στις οποίες κατατάσσονται οι εταιρείες, καθώς και τις πιθανότητες μεταπήδησης μιας εταιρείας από μια βαθμολογία σε άλλη. Ένα παράδειγμα αποτελεί ο Πίνακας 1.1 που ακολουθεί.

| Πίνακας 1.1: Πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας ενός BBB ομολόγου μετά από ένα έτος | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Βαθμολογία μετά από ένα έτος | Πιθανότητα (%) |
| AAA | 0,02 |
| AA | 0,33 |
| A | 5,95 |
| BBB | 86,93 |
| BB | 5,30 |
| B | 1,17 |
| CCC | 0,12 |
| Χρεοκοπία (Default) | 0,18 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο που εκδίδεται από εταιρεία που ανήκει στην κατηγορία BBB (BBB ομόλογο) και για το οποίο ισχύουν τα δεδομένα του Πίνακα 1.1. Ενδεικτικά, από τον πίνακα έπεται ότι η πιθανότητα παραμονής της εταιρείας, άρα και του ομολόγου που αυτή εκδίδει, στην κατηγορία BBB μετά από ένα έτος είναι 86,93%, καθώς και η πιθανότητα αναβάθμισής του στην κατηγορία A μετά από ένα έτος είναι 5,95%. Η βαθμολογική κλίμακα του Πίνακα 1.1 είναι αυτή που χρησιμοποιείται από την S&P και μια αναλυτική περιγραφή της περιλαμβάνεται στο Παράρτημα A. Βέβαια στην αγορά χρησιμοποιούνται από τις τράπεζες και άλλα εσωτερικά συστήματα βαθμολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών που είναι διαφορετικά από αυτά των Moody's, S&P.



1.2. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

Στα πλαίσια αυτής της παραγράφου ξεκινάμε να περιγράφουμε το μηχανισμό του μοντέλου CreditMetrics. Ως αφετηρία έχουμε την περίπτωση της δανειοδότησης μιας μόνο εταιρείας. Ως εκ τούτου εφαρμόζοντας το CreditMetrics για χρονικό ορίζοντα ενός έτους καλούμαστε να απαντήσουμε στο ερώτημα: «Αν η επόμενη χρονιά είναι μια άσχημη χρονιά, ποια είναι η μεγαλύτερη αναμενόμενη ζημία από την κατοχή του δανείου για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης;». Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε ότι η τράπεζα βρίσκεται στην ισοδύναμη θέση αγοράς ενός ομολόγου της εταιρείας που δανειοδοτεί, οπότε το CreditMetrics περιλαμβάνει διαδοχικά τα ακόλουθα στάδια:

I. Προμηθευόμαστε τις πιθανότητες παραμονής ή μεταπήδησης του ομολόγου σε άλλη βαθμολογία στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Οι πιθανότητες αυτές μας δίνονται από πίνακες όπως εκείνοι των Moody's, S&P. Ήδη επισημάνωμε ότι ο πιστωτικός κίνδυνος προκύπτει όχι μόνο επειδή η εταιρεία που έχουμε δανειοδοτήσει ίσως χρεοκοπήσει στο χρονικό ορίζοντα που μας ενδιαφέρει. Η ύπαρξη του κινδύνου οφείλεται και στην πιθανότητα να αλλάξει γενικά η πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας στο ίδιο διάστημα. Επομένως, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε όχι μόνο την πιθανότητα πτώχευσης αλλά και τις πιθανότητες παραμονής ή μεταπήδησης της εταιρείας σε άλλη βαθμολογία. Γίνεται αντιληπτό ότι αντιμετωπίζουμε τη χρεοκοπία σαν μια μόνο από τις καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί η εταιρεία στο τέλος του χρονικού ορίζοντα χωρίς να δίνουμε κάποια ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατάσταση αυτή.

II. Στο δεύτερο στάδιο υπολογίζουμε την αξία του ομολόγου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα για κάθε βαθμολογία που μπορεί να έχει το ομόλογο σε αυτό το χρονικό σημείο. Οι αξίες αυτές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάσσουμε την αξία που έχει το ομόλογο όταν η εταιρεία που το εκδίδει θα έχει κηρύξει πτώχευση μέχρι και το τέλος του ορίζοντα. Στην περίπτωση αυτή εκτιμάμε το ποσοστό ανάκτησης⁴ (recovery rate).
- Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται οι αξίες του ομολόγου όταν αυτό βρεθεί

⁴ Το ποσοστό ανάκτησης μιας εταιρείας ορίζεται ως το ποσοστό του χρέους που είναι σε θέση να εξοφλήσει η εταιρεία αυτή σε περίπτωση χρεοκοπίας.



σε οποιαδήποτε άλλη κατηγορία, εκτός της πτώχευσης, στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Τότε βρίσκουμε πρώτα τα προθεσμιακά επιτόκια για τις περιόδους που ξεκινούν αμέσως μετά το χρονικό ορίζοντα και κατόπιν τα χρησιμοποιούμε για να βρούμε την αξία που έχουν στο τέλος του ορίζοντα οι ταμειακές ροές που υπολείπονται στο ομόλογο.

III. Σε αυτό το σημείο έχουμε όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που απαιτούνται για να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα (volatility) της αξίας του ομολόγου. Έχουμε, δηλαδή, τις πιθανότητες να βρεθεί η εταιρεία που δανειοδοτείται σε οποιαδήποτε βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας και την αξία του ομολόγου σε καθεμιά από αυτές τις περιπτώσεις. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα στατιστικά μέτρα για την εκτίμηση της τιμής VaR του ομολόγου.

Ας θεωρήσουμε το BBB ομόλογο της προηγούμενης παραγράφου. Έστω, επίσης, ότι το συγκεκριμένο ομόλογο έχει χρονική διάρκεια (maturity) 5 έτη, ονομαστική αξία \$100 και αποφέρει ετήσια τοκομερίδια 6%. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το κάθε τοκομερίδιο είναι \$6 και στη λήξη του ομολόγου ο κάτοχος αποκομίζει τα \$6 και την ονομαστική αξία (\$100). Θέλουμε να βρούμε την αξία του ομολόγου μετά από ένα έτος έχοντας σαν υπόθεση ότι θα έχει αναβαθμιστεί στην κατηγορία A σε ένα έτος από σήμερα. Για να το καταφέρουμε αυτό θα πρέπει να προεξοφλήσουμε τις τέσσερις τελευταίες ταμειακές ροές του ομολόγου σε ένα έτος από σήμερα. Για κάθε βαθμολογία i ως προεξοφλητικά επιτόκια για την περίοδο j ετών χρησιμοποιούμε τα προθεσμιακά επιτόκια R_{ij} που υπολογίζονται από το άθροισμα: $R_{ij} = r_{ij} + c_{ij}$, όπου r_{ij} είναι τα επιτόκια που παρατηρούμε από την καμπύλη αποδόσεων των κρατικών ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου και c_{ij} είναι τα αντίστοιχα credit spreads. Στον Πίνακα 1.2 παρουσιάζονται, ενδεικτικά, προθεσμιακά επιτόκια που ισχύουν μετά από ένα έτος για κάθε κατηγορία ομολόγων. Αν υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το BBB ομόλογο θα αναβαθμιστεί στην κατηγορία A μετά από ένα έτος τότε, χρησιμοποιώντας τα προθεσμιακά επιτόκια που αντιστοιχούν στην κατηγορία A και δίνονται από τον Πίνακα 1.2, συμπεραίνουμε ότι η αξία του ομολόγου μετά από ένα έτος είναι:



| Πίνακας 1.2: Προθεσμιακά επιτόκια για κάθε κατηγορία ομολόγων μετά από ένα έτος (%) | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Κατηγορία | Έτος 1 | Έτος 2 | Έτος 3 | Έτος 4 |
| AAA | 3,60 | 4,17 | 4,73 | 5,12 |
| AA | 3,65 | 4,22 | 4,78 | 5,17 |
| A | 3,72 | 4,32 | 4,93 | 5,32 |
| BBB | 4,10 | 4,67 | 5,25 | 5,63 |
| BB | 5,55 | 6,02 | 6,78 | 7,27 |
| B | 6,05 | 7,02 | 8,03 | 8,52 |
| CCC | 15,05 | 15,02 | 14,03 | 13,52 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

$$V = 6 + \frac{6}{(1+3,72\%)} + \frac{6}{(1+4,32\%)^2} + \frac{6}{(1+4,93\%)^3} + \frac{6}{(1+5,32\%)^4} + \frac{100}{(1+5,32\%)^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \$108,66.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις περιπτώσεις στις οποίες το ομόλογο θα έχει άλλη βαθμολογία, εκτός της A, μετά από ένα έτος, προκύπτουν τα δεδομένα του Πίνακα 1.3.

| Πίνακας 1.3: Πιθανές τιμές του BBB ομολόγου μετά από ένα έτος | |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Βαθμολογία μετά από ένα έτος | Αξία (\$) |
| AAA | 109,37 |
| AA | 109,19 |
| A | 108,66 |
| BBB | 107,55 |
| BB | 102,02 |
| B | 98,10 |
| CCC | 83,64 |
| Χρεοκοπία (Default) | 51,13 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Για την περίπτωση της χρεοκοπίας παρατηρούμε ότι η αξία του ομολόγου μετά από ένα έτος λαμβάνει την τιμή \$51,13. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε πως εκτιμάμε γενικά την αξία ενός ομολόγου όταν η εταιρεία κηρύσσει πτώχευση. Τα ομόλογα κατατάσσονται σε κάποιες κατηγορίες (seniority classes) ανάλογα με το βαθμό προτεραιότητας με τον οποίο ικανοποιούνται οι κάτοχοί τους στην περίπτωσή

χρεοκοπίας της εταιρείας που τα εκδίδει. Όπως διαισθητικά καταλαβαίνουμε, η αξία ενός εταιρικού ομολόγου στην περίπτωση της πτώχευσης είναι άμεσα εξαρτημένη από την προτεραιότητα που αντιστοιχεί στο ομόλογο αυτό. Η αξία προσδιορίζεται από το ποσοστό ανάκτησης (recovery rate) το οποίο είναι διαφορετικό για κάθε seniority class και το εκτιμάμε βασιζόμενοι σε εμπειρικές μελέτες. Μια σημαντική μελέτη που έχει διεξαχθεί είναι αυτή της Moody's [Carty and Lieberman (1996)]. Στα πλαίσια αυτής της μελέτης έχει ληφθεί ένα μεγάλο δείγμα ομολόγων των οποίων οι εκδότριες εταιρείες χρεοκόπησαν. Η Moody's παρατηρεί για την κάθε εταιρεία το ποσοστό ανάκτησης και καταλήγει σε μια εκτίμηση για το ποσοστό αυτό ανά seniority class. Τα δεδομένα αυτής της μελέτης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.



| Πίνακας 1.4: Ποσοστά ανάκτησης ανά seniority class (% της ονομαστικής αξίας των ομολόγων) | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------|---------------------|
| Seniority class | Αριθμός ομολόγων του δείγματος | Μέσος (%) | Τυπική απόκλιση (%) |
| Senior Secured | 115 | 53,80 | 26,86 |
| Senior Unsecured | 278 | 51,13 | 25,45 |
| Senior Subordinated | 196 | 38,52 | 23,81 |
| Subordinated | 226 | 32,74 | 20,18 |
| Junior Subordinated | 9 | 17,09 | 10,90 |

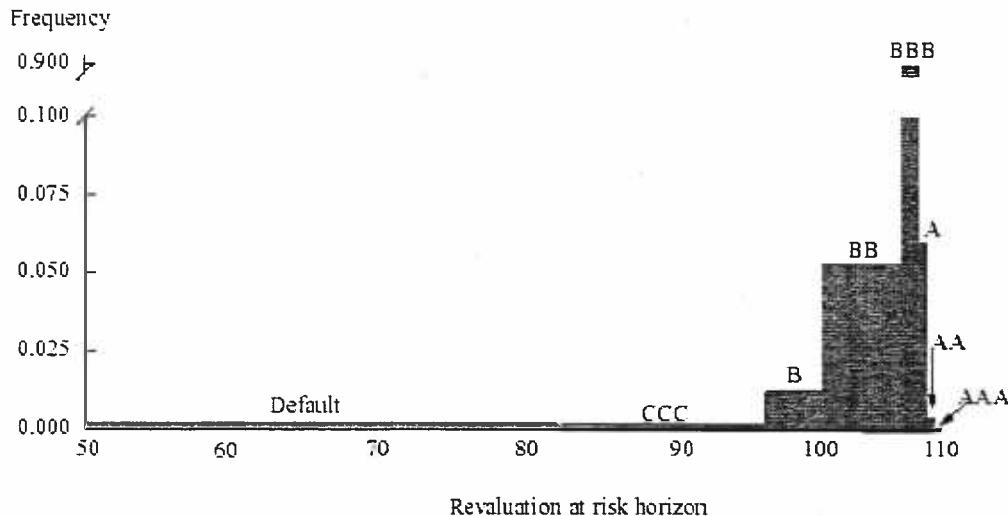
Πηγή: Carty & Lieberman (1996) - Moody's Investors Service

Υποθέτουμε ότι το BBB ομόλογο της εφαρμογής κατατάσσεται στην κατηγορία senior unsecured. Επομένως, από τον παραπάνω πίνακα έπεται ότι αν κηρύξει πτώχευση η εταιρεία που εκδίδει το ομόλογο τότε το ποσοστό ανάκτησης είναι 51,13%. Άρα, επειδή η ονομαστική του αξία είναι \$100, συμπεραίνουμε ότι η εκτιμώμενη αξία του ομολόγου μετά από ένα έτος σε περίπτωση πτώχευσης είναι \$51,13. Με αυτό τον τρόπο προέκυψε η τιμή που αναγράφεται στον Πίνακα 1.3 για την κατάσταση χρεοκοπίας.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των Πινάκων 1.1 και 1.3 μπορούμε να έχουμε τη στατιστική κατανομή της αξίας του ομολόγου στη λήξη του έτους 1, δηλαδή τη συχνότητα (frequency) εμφάνισης των τιμών του ομολόγου σε συνάρτηση με αυτές. Η κατανομή αυτή παριστάνεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.2: Στατιστική κατανομή της αξίας του πενταετούς BBB ομολόγου στη λήξη του έτους 1



Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Ένα πρώτο μέτρο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο που προκύπτει από την κατοχή του BBB ομολόγου είναι η τυπική απόκλιση (*standard deviation*). Υπενθυμίζουμε ότι αυτή μετράει τη διασπορά γύρω από το μέσο των πιθανών τιμών του ομολόγου μετά από ένα έτος. Θέλοντας να την υπολογίσουμε βρίσκουμε πρώτα το σταθμικό αυτό μέσο (μ_{BBB}) ο οποίος ισούται με το άθροισμα των γινομένων των πιθανοτήτων επί των αντίστοιχων τιμών. Ο σταθμικός μέσος εκφράζει την αναμενόμενη τιμή του BBB ομολόγου μετά από ένα έτος και η διαδικασία υπολογισμού του παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.5. Στη συνέχεια η τυπική απόκλιση των πιθανών τιμών του BBB ομολόγου μετά από ένα έτος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\sigma_{BBB} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 p_i \mu_i^2 - \mu_{BBB}^2}. \quad (1.1)$$

Στην εφαρμογή που πραγματοποιούμε βρίσκουμε ότι $\sigma_{BBB} = \$2,99$. Ωστόσο, ο τύπος (1.1) απλοποιεί ιδιαίτερα την κατάσταση καθώς κάνει την υπόθεση ότι η αξία του ομολόγου λαμβάνει μια μόνο τιμή μ , μετά από ένα έτος για κάθε κατηγορία i στην

Πίνακας 1.5: Υπολογισμός του σταθμικού μέσου των πιθανών τιμών που λαμβάνει το BBB ομόλογο μετά από ένα έτος

| Κατηγορία (<i>i</i>) | Αξία [μ_i , (\$)] | Πιθανότητα [p_i , (%)] | Αξία x Πιθανότητα ($\mu_i \times p_i$) |
|----------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------------------------|
| AAA | 109,37 | 0,02 | 0,02 |
| AA | 109,19 | 0,33 | 0,36 |
| A | 108,66 | 5,95 | 6,47 |
| BBB | 107,55 | 86,93 | 93,49 |
| BB | 102,02 | 5,30 | 5,41 |
| B | 98,10 | 1,17 | 1,15 |
| CCC | 83,64 | 0,12 | 0,10 |
| Χρεοκοπία (Default) | 51,13 | 0,18 | 0,09 |
| | | | $\mu_{BBB} = \$107,09$ |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

οποία μπορεί να βρεθεί η εταιρεία που το εκδίδει. Στην πραγματικότητα, όμως, υπάρχει μια κατανομή τιμών που μπορεί να πάρει το ομόλογο μετά από ένα έτος σε καθεμιά από τις κατηγορίες. Κι αυτό γιατί υπάρχει αβεβαιότητα αναφορικά με τα πραγματικά προθεσμιακά επιτόκια που τελικά θα υπάρξουν. Ακόμα μάλιστα κι αν η εταιρεία που εκδίδει το ομόλογο χρεοκοπήσει μετά από ένα έτος, υπάρχει αβεβαιότητα η οποία αυτή τη φορά σχετίζεται με το ποσοστό ανάκτησης. Επιθυμώντας να ενσωματώσουμε στους υπολογισμούς μας την αβεβαιότητα για το ποσοστό ανάκτησης, βρίσκουμε το σταθμικό μέσο μ_{BBB} όπως προηγουμένως και για την τυπική απόκλιση εφαρμόζουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$\sigma_{BBB} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) - \mu_{BBB}^2}. \quad (1.2)$$

Θέτοντας στον τύπο (1.2) όπου $\sigma_i = 0$ για κάθε κατάσταση *i* εκτός της χρεοκοπίας και $\sigma_8 = \$0,2545$ για την όγδοη κατάσταση (δηλαδή τη χρεοκοπία) έπειται ότι $\sigma_{BBB} = \$3,18$. Ως εκ τούτου παρατηρούμε ότι αν συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας την αβεβαιότητα για το ποσοστό ανάκτησης, η τυπική απόκλιση αυξάνεται από $\$2,99$ σε $\$3,18$ σημειώνοντας, έτσι, αύξηση κατά 6,32%.

Ωστόσο, έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι οι αποδόσεις ενός τίτλου εκτεθειμένου στον πιστωτικό κίνδυνο δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται στη συγκεκριμένη εφαρμογή για το BBB ομόλογο από το Σχήμα 1.2.

Για το λόγο αυτό η τυπική απόκλιση δεν αποτελεί κατάλληλο μέτρο για να υπολογίσουμε την τιμή VaR του ομολόγου. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα που ανακύπτει, χρησιμοποιούμε το μαθηματικό ορισμό του VaR: $VaR = E(P) - P_1$. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεύτερο μέτρο, για τον υπολογισμό του VaR, που είναι το εκατοστημόριο (*percentile level*) P_1 . Ενδεικτικά, θα θελήσουμε να προσδιορίσουμε το πρώτο εκατοστημόριο (*first percentile level*) για το BBB ομόλογο, δηλαδή, το επίπεδο κάτω από το οποίο η αξία του ομολόγου αναμένεται να πέσει μετά από ένα έτος με πιθανότητα 1%. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 1.5, ξεκινάμε από τη χειρότερη κατάσταση που είναι αυτή της χρεοκοπίας και κινούμαστε με φορά προς τα πάνω. Παράλληλα προσθέτουμε τις πιθανότητες και η αξία στην οποία αυτό το άθροισμα γίνεται για πρώτη φορά ίσο ή μεγαλύτερο του 1% αποτελεί το *1st percentile level*. Άρα, στην περίπτωσή μας το *1st percentile level* είναι ίσο με \$98,10. Έχουμε, επίσης, υπολογίσει ότι η αναμενόμενη τιμή του BBB ομολόγου μετά από ένα έτος είναι $P = \$107,09$ και άρα το 1% VaR είναι:

$$1\% \text{ VaR} = E(P) - P_1 = \$107,09 - \$98,10 = \$8,99.$$

Στην εφαρμογή που εξετάσαμε θεωρήσαμε ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι το ένα έτος. Εύλογα, όμως, γεννιούνται απορίες αναφορικά με τις πιθανότητες που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όταν ο χρονικός ορίζοντας που μας ενδιαφέρει είναι διαφορετικός. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες παραμονής ή μεταπήδησης ενός ομολόγου σε μια κατηγορία μετά από δύο έτη. Ενδεικτικά, η πιθανότητα να χρεοκοπήσει το ομόλογο μετά από δύο έτη (P) ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων A και B_i , όπου:

A : η πιθανότητα να χρεοκοπήσει το ομόλογο μετά από ένα έτος και

B_i : οι πιθανότητες να έχει το ομόλογο τη βαθμολογία i μετά από ένα έτος και να χρεοκοπεί μέχρι το τέλος του δεύτερου έτους ($i = CCC, BBB, \dots, AAA$).

Κατόπιν υποθέτουμε ότι η βαθμολογία που έχει το ομόλογο στο τέλος του δεύτερου έτους είναι στατιστικά ανεξάρτητη από τη βαθμολογία που είχε στο τέλος του πρώτου

έτους. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την υπόθεση προκύπτει ότι οι πιθανότητες B_i είναι διαβλιθεκές

ίσες με τα αθροίσματα: $B_i = \sum_l C_l \cdot D_l, \forall i = CCC, BBB, \dots, AAA$, όπου:

C_i : η πιθανότητα να έχει το ομόλογο τη βαθμολογία i μετά από ένα έτος και

D_i : η πιθανότητα να χρεοκοπήσει το ομόλογο μέχρι το τέλος του δεύτερου έτους
έχοντας τη βαθμολογία i στο τέλος του πρώτου έτους.

Οι πιθανότητες C_i, D_i έχουν ορίζοντα ένα έτος και δίνονται από τους γνωστούς
πίνακες (transition matrices). Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα
να χρεοκοπήσει το ομόλογο μετά από δύο έτη (P) καθώς αυτή εκφράζεται
συναρτήσει γνωστών πιθανοτήτων.

1.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΤΟΥ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΥ ΔΥΟ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ: ΤΟ ASSET VALUE MODEL

Μέχρι τώρα έχουμε δώσει μια ακριβή περιγραφή του μοντέλου CreditMetrics για την απλή περίπτωση του ενός δανείου. Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε την εφαρμογή του σε χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από δύο δάνεια. Σε αντιστοιχία με τη μέθοδο που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, υποψιαζόμαστε διαισθητικά ότι στην περίπτωση των δύο δανείων θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να βρεθούν οι δύο εκδότριες εταιρείες σε οποιεσδήποτε βαθμολογίες πιστοληπτικής ικανότητας στο τέλος του χρονικού ορίζοντα που έχουμε ορίσει (joint rating change probabilities). Ωστόσο δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε απευθείας τις πιθανότητες αυτές εξαιτίας της έλλειψης ιστορικών στοιχείων. Για το λόγο αυτό επιχειρούμε να τις εκτιμήσουμε και αυτό επιτυγχάνεται με χρήση του Asset Value model. Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει δύο στάδια:

I. Αρχικά προτείνουμε μια διαδικασία που καθορίζει πότε αλλάζει η πιστοληπτική ικανότητα μιας εταιρείας. Η διαδικασία αυτή βασίζεται στο μοντέλο των Black, Scholes (1973) και Merton (1974) [option theoretic model]. Πιο συγκεκριμένα, δεχόμαστε ότι η αξία του ενεργητικού μιας εταιρείας είναι εκείνη που προσδιορίζει το βαθμό στον οποίο είναι ικανή να ικανοποιήσει τους δανειστές της. Μπορούμε,



επομένως, να υποθέσουμε ότι αν η αξία του ενεργητικού πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο το επόμενο έτος τότε η εταιρεία δεν θα είναι σε θέση να εξοφλήσει τα χρέη της και θα χρεοκοπήσει. Εάν ενδιαφερόμασταν μόνο για την πιθανότητα χρεοκοπίας τότε τα παραπάνω θα ήταν αρκετά. Επειδή, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε και τις πιθανότητες να μεταβεί η εταιρεία σε οποιαδήποτε άλλη βαθμολογία, επεκτείνουμε το option theoretic model θεωρώντας ότι υπάρχουν και άλλα επίπεδα για την αξία του ενεργητικού που καθορίζουν τη βαθμολογία της εταιρείας στο τέλος του χρονικού ορίζοντα που έχουμε επιλέξει.

II. Σε ένα δεύτερο στάδιο επεκτείνουμε την ανωτέρω διαδικασία στην περίπτωση των δύο εταιρειών και κατόπιν εκτιμάμε τις παραμέτρους που προκύπτουν. Εκείνο που απομένει είναι να βρούμε τις πιθανότητες να έχουν οι δύο εταιρείες οποιεσδήποτε βαθμολογίες στο τέλος του χρονικού ορίζοντα.

Όπως στη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έτσι και στο Asset Value model κάνουμε τη βασική υπόθεση ότι η τράπεζα που δανειοδοτεί τις δύο εταιρείες βρίσκεται στην ισοδύναμη θέση αγοράς ομολόγων τους. Θεωρούμε μια εταιρεία που κατατάσσεται στην κατηγορία BB ενώ οι ποσοστιαίες αλλαγές στην αξία του ενεργητικού της (asset returns), που θα συμβολίζονται με R , ακολουθούν την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mu = 0$. Επιπλέον, έστω ότι η εταιρεία εκδίδει ένα ομόλογο του οποίου οι πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας μετά από ένα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.6.

Κατόπιν δεχόμαστε ότι η αξία του ενεργητικού της BB εταιρείας επηρεάζει τη δυνατότητά της να εξοφλήσει το χρέος της. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν η αξία του ενεργητικού μειωθεί κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή το επόμενο έτος τότε η εταιρεία δεν θα είναι σε θέση να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις της και θα χρεοκοπήσει. Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχουν κάποιες τιμές (όρια) για το ενεργητικό οι οποίες καθορίζουν την πιστοληπτική της ικανότητα για το τέλος της εξεταζόμενης περιόδου. Ενδεικτικά, για το όριο (threshold) Z_{Def} , αν $R < Z_{Def}$ συμπεραίνουμε ότι η εταιρεία χρεοκοπεί. Αντίστοιχα, αν $Z_{Def} < R < Z_{CCC}$ τότε η πιστοληπτική ικανότητα της BB εταιρείας υποβαθμίζεται σε CCC και ανάλογα προκύπτουν τα υπόλοιπα συμπεράσματα. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η απόδοση R ακολουθεί την κανονική κατανομή, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί καθένα από αυτά τα γεγονότα. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τα ακόλουθα:

$$Pr(Default) = Pr(R < Z_{Def}) = \Phi(Z_{Def}/\sigma),$$

$$Pr(CCC) = Pr(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC}/\sigma) - \Phi(Z_{Def}/\sigma),$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Όλες οι πιθανότητες παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.6: Πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας του BB ομολόγου μετά από ένα έτος

| Κατηγορία | Transition matrix (%) | Asset Value model |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------------------------------|
| AAA | 0,03 | $1 - \Phi(Z_{AA}/\sigma)$ |
| AA | 0,14 | $\Phi(Z_{AA}/\sigma) - \Phi(Z_A/\sigma)$ |
| A | 0,67 | $\Phi(Z_A/\sigma) - \Phi(Z_{BBB}/\sigma)$ |
| BBB | 7,73 | $\Phi(Z_{BBB}/\sigma) - \Phi(Z_{BB}/\sigma)$ |
| BB | 80,53 | $\Phi(Z_{BB}/\sigma) - \Phi(Z_B/\sigma)$ |
| B | 8,84 | $\Phi(Z_B/\sigma) - \Phi(Z_{CCC}/\sigma)$ |
| CCC | 1,00 | $\Phi(Z_{CCC}/\sigma) - \Phi(Z_{Def}/\sigma)$ |
| Χρεοκοπία (Default) | 1,06 | $\Phi(Z_{Def}/\sigma)$ |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

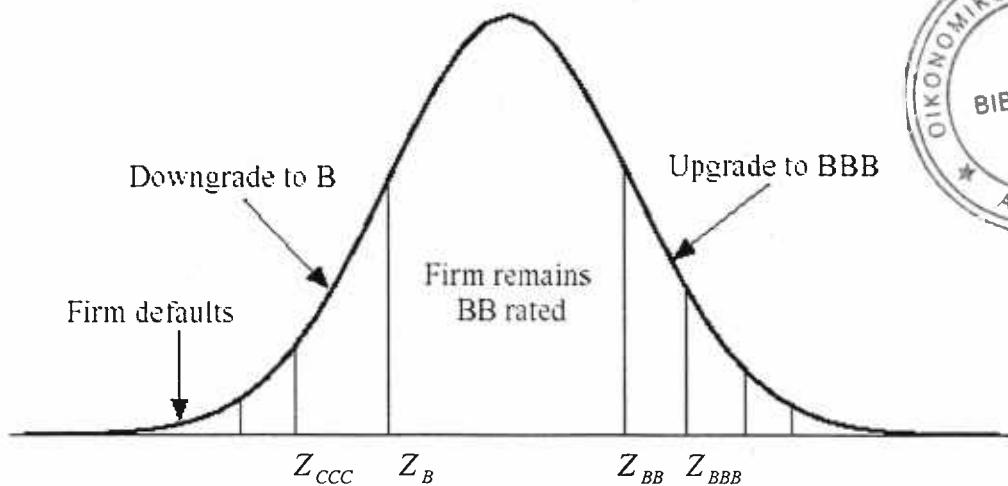
Η σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις του ενεργητικού και την πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 1.3. Ενδεικτικά, το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται ανάμεσα στα διαδοχικά όρια Z_B και Z_{BB} εκφράζει την πιθανότητα να παραμείνει η εταιρεία στη βαθμολογία BB μετά από ένα έτος. Για να ολοκληρωθεί, όμως, η σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις του ενεργητικού και την πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας, θα πρέπει οι αντίστοιχες πιθανότητες στις δύο στήλες του Πίνακα 1.6 να είναι ίσες. Ενδεικτικά, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Phi(Z_{Def}/\sigma) = 1,06 \text{ από όπου μπορούμε να βρούμε την τιμή του ορίου } Z_{Def} :$$

$Z_{Def} = \Phi^{-1}(1,06\%) \cdot \sigma = -2,30 \cdot \sigma$. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, προκύπτουν οι τιμές των υπολοίπων ορίων και αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.7.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι είμαστε κάτοχοι ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από το BB ομόλογο και από ένα A ομόλογο. Συμβολίζουμε με R' την απόδοση του ενεργητικού της A εταιρείας και υποθέτουμε ότι αυτή ακολουθεί την κανονική κατανομή

Σχήμα 1.3: Στατιστική κατανομή των αποδόσεων του ενεργητικού σε σχέση με τα όρια αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας της BB εταιρείας για χρονικό ορίζοντα ενός έτους



Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Πίνακας 1.7: Τιμές των ορίων αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας της BB εταιρείας για χρονικό ορίζοντα ενός έτους

| Όριο (threshold) | Τιμή |
|------------------|----------------------|
| Z_{AA} | $3,43 \cdot \sigma$ |
| Z_A | $2,93 \cdot \sigma$ |
| Z_{BBB} | $2,39 \cdot \sigma$ |
| Z_{BB} | $1,37 \cdot \sigma$ |
| Z_B | $-1,23 \cdot \sigma$ |
| Z_{CCC} | $-2,04 \cdot \sigma$ |
| Z_{Def} | $-2,30 \cdot \sigma$ |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

$N(0, \sigma'^2)$. Τότε ακολουθώντας, αντίστοιχα, για το A ομόλογο τη διαδικασία που αναφέραμε, προκύπτουν οι τιμές $Z'_{Def}, Z'_{CCC}, \dots, Z'_{AA}$ για τα όρια αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας της A εταιρείας μετά από ένα έτος.

Κατόπιν αυτό που επιθυμούμε να υπολογίσουμε είναι ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων R, R' του ενεργητικού των δύο εταιρειών. Μια βασική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι μια ικανοποιητική προσέγγιση αυτού του συντελεστή

ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης ρ_1 των μετοχικών αποδόσεων των δύο εταιρειών.

Αν και αυτή η υπόθεση μας κάνει να παραβλέπουμε τη διαφορά που, ενδεχομένως, υπάρχει ανάμεσα στους συντελεστές συσχέτισης ρ , ρ_1 , μας οδηγεί συνήθως σε μια περισσότερο ακριβή εκτίμηση από εκείνη που θα είχαμε αν αποδίδαμε εξαρχής στο συντελεστή συσχέτισης ρ μια προκαθορισμένη τιμή. Επίσης, η υπόθεση που κάνουμε απλοποιεί τη διαδικασία εκτίμησης του συντελεστή ρ , καθώς απαιτεί την εύρεση στοιχείων που εύκολα μπορούν να αναζητηθούν. Από τα παραπάνω έπεται ότι το πρόβλημά μας ανάγεται τελικά στον υπολογισμό του συντελεστή ρ_1 και αυτό θα επιλυθεί εφαρμόζοντας για κάθε εταιρεία τα βήματα που περιγράφουμε ακολούθως:

i) Προσδιορίζουμε τους δείκτες στους οποίους συμμετέχει η εταιρεία και τα ποσοστά (weights) της εταιρείας που αντιστοιχούν σε αυτούς. Κατόπιν υπολογίζουμε τους συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων των δεικτών και βρίσκουμε σε ποσοστό οι αποδόσεις της μετοχής δεν επηρεάζονται από τους δείκτες.

ii) Εκφράζουμε τις μετοχικές αποδόσεις της εταιρείας ως γραμμικό συνδυασμό των αποδόσεων των δεικτών και των αποδόσεων που οφείλονται στην πολιτική της εταιρείας. Με αυτό τον τρόπο δεχόμαστε ότι οι μετοχικές αποδόσεις δεν ερμηνεύονται πλήρως από τις αποδόσεις των δεικτών καθώς υπάρχει και ο εταιρικός κίνδυνος (firm-specific ή idiosyncratic risk) που σχετίζεται αποκλειστικά με τις κινήσεις της εταιρείας. Συνήθως οι μετοχές εταιρειών με υψηλή χρηματιστηριακή αξία επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τους δείκτες στους οποίους συμμετέχουν οι εταιρείες αυτές και ο εταιρικός κίνδυνος δεν διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην περίπτωση αυτή. Αντιθέτως οι μετοχές εταιρειών με χαμηλή χρηματιστηριακή αξία κινούνται περισσότερο ανεξάρτητα από τους δείκτες και ο εταιρικός κίνδυνος είναι μεγαλύτερος.

iii) Χρησιμοποιούμε τους γραμμικούς συνδυασμούς που έχουν προκύψει για τις δύο εταιρείες, καθώς και τους συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων των δεικτών, για να υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων των δύο εταιρειών.

Έστω ότι η εταιρεία A συμμετέχει μόνο στην αμερικανική βιομηχανία χημικών και οι αποδόσεις της μετοχής της επηρεάζονται σε ποσοστό 90% από τον αντίστοιχο δείκτη (United States Chemicals index) και σε ποσοστό 10% από την εταιρική πολιτική. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η BB εταιρεία συμμετέχει κατά 75% στο γερμανικό ασφαλιστικό κλάδο και κατά το υπόλοιπο 25% στο γερμανικό

τραπεζικό κλάδο. Οι αντίστοιχοι κλαδικοί δείκτες είναι οι Germany Insurance index, Germany Banking index. Έστω, επίσης, ότι οι αποδόσεις της μετοχής της BB εταιρείας επηρεάζονται σε ποσοστό 20% από την πολιτική της.

Στη συνέχεια για κάθε δείκτη θεωρούμε τις τελευταίες 190 εβδομαδιαίες αποδόσεις και υπολογίζουμε το μέσο και την τυπική απόκλιση αυτών. Αν συμβολίσουμε την t^{th} εβδομαδιαία απόδοση στον k^{th} δείκτη ως $R_t^{(k)}$ τότε ο μέσος δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{R}_t^{(k)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^{(k)}$$



και η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (R_t^{(k)} - \bar{R}^{(k)})^2}{T-1}},$$

όπου $T = 190$ στην περίπτωσή μας. Κατόπιν για κάθε ζεύγος δεικτών (k,l) βρίσκουμε τη συνδιακύμανση των εβδομαδιαίων αποδόσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$COV(k,l) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t^{(k)} - \bar{R}^{(k)})(R_t^{(l)} - \bar{R}^{(l)})$$

και το συντελεστή συσχέτισης των εβδομαδιαίων αποδόσεων από τον τύπο:

$$\rho_{k,l} = \frac{COV(k,l)}{\sigma_k \sigma_l}.$$

Στον Πίνακα 1.8 παραθέτουμε τη μεταβλητότητα των τελευταίων 190 εβδομαδιαίων αποδόσεων των συγκεκριμένων δεικτών της εφαρμογής και τις τιμές για τους συντελεστές συσχέτισής τους.

Κατόπιν υποθέτουμε ότι οι μετοχικές αποδόσεις $r^{(A)}$ της εταιρείας A ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή και ότι το ίδιο συμβαίνει για τις



Πίνακας 1.8: Μεταβλητότητα των αποδόσεων των δεικτών και συντελεστές συσχέτισής τους

| Δείκτης | Μεταβλητότητα | Συντελεστές συσχέτισης | | |
|--------------------|---------------|------------------------|--------------------|------------------|
| | | U.S.: Chemicals | Germany: Insurance | Germany: Banking |
| U.S.: Chemicals | 2,03% | 1,00 | 0,16 | 0,08 |
| Germany: Insurance | 2,09% | 0,16 | 1,00 | 0,34 |
| Germany: Banking | 1,25% | 0,08 | 0,34 | 1,00 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

μεταβλητές $r^{(USCI)}$ και $r'^{(A)}$ που συμβολίζουν τις αποδόσεις του United States Chemicals index και των εταιρικών κινήσεων της A εταιρείας αντίστοιχα. Μια επιπλέον βασική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι οι αποδόσεις που οφείλονται στην πολιτική της μιας εταιρείας είναι ανεξάρτητη των αποδόσεων όλων των δεικτών και των αποδόσεων που οφείλονται στις κινήσεις των άλλων εταιρειών. Τότε έστω ότι ισχύει:

$$r^{(A)} = w_1 \cdot r^{(USCI)} + w_2 \cdot r'^{(A)}$$

όπου w_1 , w_2 είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές (weights) που αναλογούν στην κάθε απόδοση. Επειδή ένα ποσοστό 90% των διακυμάνσεων που έχουν οι αποδόσεις της A οφείλονται στις διακυμάνσεις του δείκτη έπεται ότι $w_1 = 0,90$. Επίσης, οι μετοχικές αποδόσεις $r'^{(A)}$ της εταιρείας A ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή και, επομένως, έχουν μεταβλητότητα ίση με τη μονάδα. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε:

$$w_2 = \sqrt{1 - w_1^2} = 0,44. \text{ Άρα ισχύει:}$$

$$r^{(A)} = 0,90 \cdot r^{(USCI)} + 0,44 \cdot r'^{(A)}. \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα για την BB εταιρεία θεωρούμε πρώτα ένα δείκτη (I) του οποίου η τιμή συγκροτείται κατά 75% από το Germany Insurance index και κατά 25% από το Germany Banking index. Τότε η μεταβλητότητα αυτού του δείκτη είναι:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0,75^2 \cdot \sigma_{GBI}^2 + 0,25^2 \cdot \sigma_{GII}^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot \rho'(GBI, GII) \cdot \sigma_{GBI} \cdot \sigma_{GII}} = 0,017,$$



όπου σ_{GBI} , σ_{GII} είναι οι μεταβλητές των Germany Banking index, Germany Insurance index αντίστοιχα και $\rho'(GBI, GII)$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης αυτών. Κατόπιν αν συμβολίσουμε με w'_1 , w'_2 , w'_3 τα ποσοστά συμμετοχής των Germany Banking index, Germany Insurance index και των εταιρικών κινήσεων της BB εταιρείας, αντίστοιχα, στις μετοχικές αποδόσεις της, τότε προκύπτει ότι:

$$r^{(BB)} = w'_1 \cdot r^{(GBI)} + w'_2 \cdot r^{(GII)} + w'_3 \cdot r'^{(BB)},$$



όπου $r^{(BB)}$, $r^{(GBI)}$, $r^{(GII)}$, $r'^{(BB)}$ είναι οι αποδόσεις της μετοχής της BB εταιρείας, του Germany Banking index, του Germany Insurance index και των εταιρικών κινήσεων αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές $r^{(BB)}$, $r^{(GBI)}$, $r^{(GII)}$, $r'^{(BB)}$ ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Επειδή, όμως, οι μετοχικές αποδόσεις της εταιρείας επηρεάζονται σε ποσοστό 20% από την εταιρική πολιτική, έπειται ότι επηρεάζονται σε ποσοστό 80% από το δείκτη I . Ως εκ τούτου έπειται ότι:

$$w'_1 = 0,80 \cdot \frac{0,75 \cdot \sigma_{GBI}}{\hat{\sigma}} = 0,74 \text{ και } w'_2 = 0,80 \cdot \frac{0,25 \cdot \sigma_{GII}}{\hat{\sigma}} = 0,15. \text{ Για να είναι,}$$

όμως, η μεταβλητότητα των αποδόσεων $r^{(BB)}$ ίση με τη μονάδα θα πρέπει να ισχύει:

$$w'_3 = \sqrt{1 - 0,80^2} = 0,60. \text{ Επομένως, έπειται ότι:}$$

$$r^{(BB)} = 0,74 \cdot r^{(GBI)} + 0,15 \cdot r^{(GII)} + 0,60 \cdot r'^{(BB)}. \quad (1.4)$$

Τότε από τις σχέσεις (1.3), (1.4), έχοντας σαν δεδομένη την υπόθεση της ανεξαρτησίας που ήδη αναφέραμε, μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο συντελεστή συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων των δύο εταιρειών:

$$\rho_1 = \rho_1(A, BB) = 0,90 \cdot 0,74 \cdot \rho_1(USCI, GII) + 0,90 \cdot 0,15 \cdot \rho_1(USCI, GBI) = 0,11.$$

Κατόπιν μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα να έχουν τα δύο ομόλογα του χαρτοφυλακίου μας οποιαδήποτε βαθμολογία μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ωστόσο αυτή την εφαρμογή θα την εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

1.4. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΔΥΟ ΔΑΝΕΙΩΝ

Ο βασικός στόχος που έχουμε θέσει είναι να εφαρμόσουμε το μοντέλο CreditMetrics σε χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από δύο δάνεια. Για το λόγο αυτό περιγράψαμε το Asset Value model το οποίο θα διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην επίτευξη του στόχου μας. Ήδη λοντας να περιγράψουμε την εφαρμογή του CreditMetrics στην περίπτωση των δύο δανείων, θα αναφερθούμε σε μια εφαρμογή υποθέτοντας, όπως προηγουμένως, ότι η τράπεζα βρίσκεται στην ισοδύναμη θέση αγοράς ομολόγων των δύο εταιρειών που δανειοδοτεί.

Ας θεωρήσουμε ότι είμαστε κάτοχοι ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο ομόλογα, το BBB ομόλογο στο οποίο αναφερθήκαμε στις Παραγράφους 1.2, 1.3 και ένα A ομόλογο. Έστω ότι το A ομόλογο έχει χρονική διάρκεια (maturity) 3 έτη, είναι senior unsecured, έχει ονομαστική αξία \$100 και αποφέρει ετήσια τοκομερίδια 5%. Οι πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας του ομολόγου A μετά από ένα έτος αναγράφονται στον Πίνακα 1.9. Στη συνέχεια ακολουθώντας για το ομόλογο αυτό την τακτική που εφαρμόσαμε για το BBB ομόλογο, προκύπτουν οι πιθανές τιμές του A ομολόγου μετά από ένα έτος. Οι τιμές περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1.9.

Πίνακας 1.9: Πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας ενός A ομολόγου και πιθανές τιμές του μετά από ένα έτος

| Βαθμολογία μετά από ένα έτος | Πιθανότητα (%) | Αξία (\$) |
|------------------------------|----------------|-----------|
| AAA | 0,09 | 106,59 |
| AA | 2,27 | 106,49 |
| A | 91,05 | 106,30 |
| BBB | 5,52 | 105,64 |
| BB | 0,74 | 103,15 |
| B | 0,26 | 101,39 |
| CCC | 0,01 | 88,71 |
| Χρεοκοπία (Default) | 0,06 | 51,13 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Κατόπιν υπολογίζουμε τις πιθανές τιμές του χαρτοφυλακίου μετά από ένα έτος, για καθεμιά από τις συνολικά 64 καταστάσεις, ως το άθροισμα των πιθανών

τιμών που λαμβάνουν τα δύο ομόλογα μετά από ένα έτος στις αντίστοιχες περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.10.

Πίνακας 1.10: Πιθανές τιμές του χαρτοφυλακίου μετά από ένα έτος

| Ομόλογο BBB | Ομόλογο A | | | | | | | Χρεοκοπία (Default) |
|--------------------------------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------------------------|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | |
| AAA | 215,96 | 215,86 | 215,67 | 215,01 | 212,52 | 210,76 | 198,08 | 160,50 |
| AA | 215,78 | 215,68 | 215,49 | 214,83 | 212,34 | 210,58 | 197,90 | 160,52 |
| A | 215,25 | 215,15 | 214,96 | 214,30 | 211,81 | 210,05 | 197,37 | 159,79 |
| BBB | 214,14 | 214,04 | 213,85 | 213,19 | 210,70 | 208,94 | 196,26 | 158,68 |
| BB | 208,61 | 208,51 | 208,33 | 207,66 | 205,17 | 203,41 | 190,73 | 153,15 |
| B | 204,69 | 204,59 | 204,40 | 203,74 | 201,25 | 199,49 | 186,81 | 149,23 |
| CCC | 190,23 | 190,13 | 189,94 | 189,28 | 186,79 | 185,03 | 172,35 | 134,77 |
| Χρεοκοπία (Default) | 157,72 | 157,62 | 157,43 | 156,77 | 154,28 | 152,52 | 139,84 | 102,26 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο CreditMetrics στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου, θα πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής των τιμών, του ίδιου του χαρτοφυλακίου, μετά από ένα έτος. Θεωρώντας ως μεταβλητές X και Y την πιστοληπτική ικανότητα, μετά από ένα έτος, των εταιρειών που εκδίδουν τα ομόλογα BBB και A αντίστοιχα, υπολογίζουμε πρώτα την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας για τις μεταβλητές αυτές. Αυτό θα μπορούσε να γίνει έχοντας σαν υπόθεση ότι η πορεία που ακολουθεί η πιστοληπτική ικανότητα της μιας εταιρείας μέχρι και το τέλος του πρώτου έτους είναι στατιστικά ανεξάρτητη από την αντίστοιχη πορεία της άλλης εταιρείας. Τότε η πιθανότητα τα δύο ομόλογα να βρεθούν σε οποιεσδήποτε καταστάσεις σε ένα έτος θα ήταν ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων να μεταβούν τα δύο ομόλογα στις αντίστοιχες καταστάσεις. Ενδεικτικά, η πιθανότητα το ομόλογο BBB να παραμείνει σε BBB και το ομόλογο A να αναβαθμιστεί σε AA μετά από ένα έτος θα ήταν ίση με την πιθανότητα το ομόλογο BBB να παραμείνει σε BBB μετά από ένα έτος επί την πιθανότητα το ομόλογο A να αναβαθμιστεί σε AA μετά από ένα έτος, δηλαδή: $86,93\% \cdot 2,27\% = 1,97\%$. Ωστόσο στην πραγματικότητα η υπόθεση της στατιστικής ανεξαρτησίας δεν υφίσταται. Κι αυτό γιατί η βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας που θα έχει η μια εταιρεία μετά από ένα έτος δεν είναι ανεξάρτητη από την αντίστοιχη βαθμολογία της άλλης εταιρείας, καθώς η οικονομική

κατάσταση και των δύο επηρεάζεται, τουλάχιστον εν μέρει, από τους ίδιους μακροοικονομικούς παράγοντες. Επομένως, είναι γενικότερα εξαιρετικά σημαντικό να λάβουμε υπόψη μας τη συσχέτιση που υπάρχει ανάμεσα στις αλλαγές της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών, όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε το σκοπό μας. Αυτό που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι η συνάρτηση κατανομής των τιμών του χαρτοφυλακίου των δύο ομολόγων, BBB και A, μετά από ένα έτος. Έχοντας ήδη προσδιορίσει τις πιθανές αξίες του χαρτοφυλακίου για καθεμιά από τις 64 περιπτώσεις, εκείνο που μας απομένει είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να εμφανιστούν οι τιμές αυτές. Για να γίνει αυτό, εφαρμόζουμε πρώτα για τις εταιρείες BBB και A τις μεθόδους που αναλύσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έστω στη συνέχεια ότι θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα το BBB ομόλογο και το A ομόλογο να παραμείνουν στις κατηγορίες BBB και A, αντίστοιχα, μετά από ένα έτος. Τότε, χρησιμοποιώντας το Asset Value model, αν R, R' είναι οι αποδόσεις του ενεργητικού μετά από ένα έτος για τις εταιρείες BBB, A αντίστοιχα, τότε οι δύο εταιρείες διατηρούνται στις κατηγορίες τους μετά από ένα έτος αν ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$Z_{BB} < R < Z_{BBB}, \quad (1.5)$$

$$Z'_{BBB} < R' < Z'_A, \quad (1.6)$$

όπου (Z_{BB}, Z_{BBB}) είναι όρια που αντιστοιχούν στο ομόλογο BBB και (Z'_{BBB}, Z'_A) είναι όρια του ομολόγου A. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $R \sim N(0, \sigma^2)$, $R' \sim N(0, \sigma'^2)$ και συμβολίζουμε με ρ το συντελεστή συσχέτισης των R, R' . Τότε η πιθανότητα να ισχύουν ταυτόχρονα οι παραπάνω σχέσεις (1.5), (1.6) δίνεται από τον τύπο:

$$\Pr(Z_{BB} < R < Z_{BBB}, Z'_{BBB} < R' < Z'_A) = \int_{Z_{BB}}^{Z_{BBB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} f(r, r'; \Sigma) dr' dr,$$

όπου $f(r, r'; \Sigma)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διμεταβλητής κανονικής κατανομής με παραμέτρους ρ, σ, σ' και πίνακα συνδιακύμανσης

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & \sigma'^2 \end{bmatrix}$. Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται συνολικά οι πιθανότητες να

έχουν τα ομόλογα οποιεσδήποτε βαθμολογίες μετά από ένα έτος.

Υποθέτουμε ότι, στα πλαίσια της εφαρμογής, ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων R, R' του ενεργητικού των δύο εταιρειών εκτιμάται ότι είναι $\rho = 0,30$. Τότε στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι πιθανότητες να εμφανιστούν οι τιμές χαρτοφυλακίου του Πίνακα 1.10.



Πίνακας 1.11: Πιθανότητες να εμφανιστούν οι τιμές του χαρτοφυλακίου για χρονικό ορίζοντα ενός έτους (%)

| Ομόλογο BBB | Ομόλογο A | | | | | | | |
|------------------------|-----------|------|-------|------|------|------|------|------------------------|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Χρεοκοπία (Default) |
| AAA | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| AA | 0,00 | 0,04 | 0,29 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| A | 0,02 | 0,39 | 5,44 | 0,08 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| BBB | 0,07 | 1,81 | 79,69 | 4,55 | 0,57 | 0,19 | 0,01 | 0,04 |
| BB | 0,00 | 0,02 | 4,47 | 0,64 | 0,11 | 0,04 | 0,00 | 0,01 |
| B | 0,00 | 0,00 | 0,92 | 0,18 | 0,04 | 0,02 | 0,00 | 0,00 |
| CCC | 0,00 | 0,00 | 0,09 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| Χρεοκοπία (Default) | 0,00 | 0,00 | 0,13 | 0,04 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Στη συνέχεια εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση της κατανομής των πιθανών αξιών του χαρτοφυλακίου, τότε βρίσκουμε πρώτα το σταθμικό μέσο τους από τον τύπο:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{64} p_i \mu_i ,$$

όπου p_i είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί η αξία μ_i και $i = 1, \dots, 64$. Κατόπιν η τυπική απόκλιση δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{64} p_i \mu_i^2 - \mu_p^2} .$$



Εφαρμόζοντας τους τύπους αυτούς λαμβάνουμε $\mu_p = \$213,63$ και $\sigma_p = \$3,35$. Για λόγους απλότητας στον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης δεν λάβαμε υπόψη μας την αβεβαιότητα που σχετίζεται με τα προθεσμιακά επιτόκια και τα ποσοστά ανάκτησης των δύο εταιρειών.

Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι ο σταθμικός μέσος των πιθανών τιμών του BBB ομολόγου μετά από ένα έτος είναι $\$107,09$ και η τυπική απόκλιση ίση με $\$2,99$. Οι αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν για το A ομόλογο είναι $\$106,54$ και $\$1,49$. Ως εκ τούτου, παρατηρούμε ότι ο σταθμικός μέσος για το χαρτοφυλάκιο των δύο ομολόγων ισούται με το άθροισμα των δύο επιμέρους σταθμικών μέσων που αντιστοιχούν στα ομόλογα. Βλέπουμε, όμως, ότι η τυπική απόκλιση για το χαρτοφυλάκιο, άρα και ο πιστωτικός κίνδυνος, είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο επιμέρους τυπικών αποκλίσεων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη διαφοροποίηση που προκαλείται επειδή οι αποδόσεις R , R' του ενεργητικού των δύο εταιρειών δεν είναι τέλεια συσχετιζόμενες ($\rho = 0,30 \neq 1$).

Ωστόσο έχουμε αναφέρει ότι η τυπική απόκλιση δεν είναι το κατάλληλο στατιστικό μέτρο για τον υπολογισμό της τιμής VaR, καθώς οι αποδόσεις ενός ομολόγου δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό βρίσκουμε το percentile level. Ενδεικτικά, θέλοντας να προσδιορίσουμε το $1\% VaR$ βρίσκουμε πρώτα το $1\% \text{ percentile level} = \$204,40$ και κατόπιν, εφαρμόζοντας τον ορισμό του VaR, έχουμε:

$$1\% VaR = \$213,63 - \$204,40 = \$9,23.$$

Σε αυτό το σημείο είναι εξίσου σημαντικό να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο που προσθέτει η αγορά του ομολόγου A στον ήδη υπάρχοντα πιστωτικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Αυτός ο επιπλέον κίνδυνος είναι γνωστός ως οριακός κίνδυνος (marginal risk). Θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τον οριακό κίνδυνο χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση ως στατιστικό μέτρο. Στην Παράγραφο 1.2 υπολογίσαμε ότι η τυπική απόκλιση του BBB ομολόγου είναι $\sigma_{BBB} = \$2,99$. Όταν προσθέσαμε στο χαρτοφυλάκιο μας το A ομόλογο τότε η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου των δύο ομολόγων αυξήθηκε σε $\sigma_p = \$3,35$. Επομένως, ο οριακός κίνδυνος του A ομολόγου είναι $\$3,35 - \$2,99 = \$0,36$. Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή είναι πολύ μικρότερη από την τυπική απόκλιση του A ομολόγου που είναι $\$1,49$. Η

διαφορά οφείλεται στη διαφοροποίηση που προκαλείται επειδή οι αξίες που θα έχουν τα δύο ομόλογα μετά από ένα έτος δεν είναι τέλεια συσχετιζόμενες. Στην περίπτωση που ήταν τέλεια συσχετιζόμενες, η «οριακή επιρροή» (marginal impact) που θα ασκούσε η είσοδος του A ομολόγου στην τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου θα ήταν όλο το ποσό των \$1,49. Με αυτή την απλή εφαρμογή διαπιστώνουμε το όφελος που έχουμε αν προσθέσουμε στο χαρτοφυλάκιο μας ένα ομόλογο που δεν είναι τέλεια συσχετιζόμενο με αυτό που το αποτελεί.

Στην Παράγραφο 1.2 εκτιμήσαμε ότι το *1% percentile level* του BBB ομολόγου είναι ίσο με \$98,10 και ότι η αντίστοιχη τιμή VaR για το ομόλογο αυτό είναι $1\% \text{ VaR} = \$8,99$. Με την προσθήκη του A ομολόγου οι τιμές για το χαρτοφυλάκιο αυξάνονται σε \$204,40 και \$9,23 αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, μπορούμε να υπολογίσουμε τον οριακό κίνδυνο του A ομολόγου ως τη διαφορά των δύο τιμών VaR, δηλαδή $\$9,23 - \$8,99 = \$0,24$. Επίσης, με τις μεθόδους που έχουμε περιγράψει μπορούμε να προσδιορίσουμε το *1% percentile level* και το *1% VaR* για το ομόλογο A. Οι τιμές αυτές είναι \$103,15 και \$3,39 αντίστοιχα. Η διαφορά που εντοπίζουμε ανάμεσα στον οριακό κίνδυνο του ομολόγου A (\$0,24) και την τιμή *1% VaR* του ομόλογου A (\$3,39) οφείλεται και αυτή στη διαφοροποίηση.

1.5. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΕ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΜΕΓΑΛΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΑΝΕΙΩΝ

Εκείνο το οποίο τώρα επιθυμούμε να πετύχουμε είναι να επεκτείνουμε την εφαρμογή του μοντέλου CreditMetrics σε χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό δανείων. Πριν περιγράψουμε το μηχανισμό του μοντέλου για αυτά τα χαρτοφυλάκια, θα αναφερθούμε πρώτα στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου τριών δανείων ή ισοδύναμα τριών ομολόγων.

Ας θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τα BBB, A ομόλογα της προηγούμενης παραγράφου και από ένα τρίτο CCC ομόλογο που έχει χρονική διάρκεια (maturity) 2 έτη και αποφέρει ετήσια τοκομερίδια 10%. Υποθέτουμε, όμως, ότι η ονομαστική αξία των BBB, A, CCC ομολόγων είναι \$4εκ., \$2εκ., \$1εκ. αντίστοιχα προσαρμόζοντας, έτσι, την εφαρμογή που ακολουθεί σε συνθήκες πάραπλήσιες με τις πραγματικές συνθήκες της αγοράς. Θέλοντας να εκτιμήσουμε τον

πιστωτικό κίνδυνο που αντιμετωπίζουμε από τη θέση μας στο χαρτοφυλάκιο, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε με μια αναλυτική προσέγγιση την τυπική απόκλιση της αξίας του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο:

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(V_1) + \sigma^2(V_2) + \sigma^2(V_3) + 2 \cdot COV(V_1, V_2) + 2 \cdot COV(V_1, V_3) + 2 \cdot COV(V_2, V_3), \quad (1.7)$$

όπου V_1, V_2, V_3 είναι οι αξίες των ομολόγων BBB, A, CCC, αντίστοιχα, σε ένα έτος.

Ξέρουμε, όμως, ότι:

$$\sigma^2(V_1 + V_2) = \sigma^2(V_1) + 2 \cdot COV(V_1, V_2) + \sigma^2(V_2)$$



οπότε έπειται ότι η σχέση (1.7) μετασχηματίζεται σε:

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(V_1 + V_2) + \sigma^2(V_1 + V_3) + \sigma^2(V_2 + V_3) - \sigma^2(V_1) - \sigma^2(V_2) - \sigma^2(V_3),$$

όπου οι τυπικές αποκλίσεις του δεύτερου μέλους αφορούν ένα ομόλογο ή χαρτοφυλάκια δύο ομολόγων και άρα μπορούν να υπολογιστούν με τις μεθόδους που έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα. Ωστόσο αυτή η αναλυτική προσέγγιση δεν έχει τα επιθυμητά αποτελέσματα για τους κάτωθι λόγους:

i) Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η τυπική απόκλιση δεν αποτελεί κατάλληλο μέτρο αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου. Περιορίζοντας την αναζήτησή μας μόνο στα πλαίσια της αναλυτικής προσέγγισης του θέματος, υποβαθμίζουμε τη σημασία στατιστικών μέτρων όπως το percentile level, που μπορεί να οδηγήσει σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις των τιμών VaR του χαρτοφυλακίου.

ii) Στις πραγματικές συνθήκες της αγοράς, οι τράπεζες προχωρούν σε εκτεταμένη δανειοδότηση επιχειρήσεων οπότε ισοδύναμα έχουν θέσεις αγοράς σε μεγάλο αριθμό ομολόγων. Ως εκ τούτου οι αριθμητικές πράξεις που θα χρειάζονταν για να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει μια τράπεζα, ακολουθώντας την αναλυτική μέθοδο, θα ήταν πολυάριθμες και η όλη διαδικασία ιδιαίτερα χρονοβόρα.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι θα πρέπει να αναζητήσουμε μια άλλη μέθοδο για την αποτίμηση του πιστωτικού κινδύνου, ιδιαίτερα μάλιστα όταν το εξεταζόμενο χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό δανείων. Θέλοντας, λοιπόν,

να έχουμε αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια και σε λιγότερο χρόνο, ακολουθούμε την προσομοίωση Monte Carlo. Τα βασικά βήματα αυτής της μεθόδου είναι τα ακόλουθα:

- I. Σε πρώτο στάδιο δημιουργούμε εναλλακτικά σενάρια για τη βαθμολογία που μπορεί να έχει το κάθε ομόλογο του χαρτοφυλακίου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα που έχουμε επιλέξει.
- II. Για κάθε σενάριο βρίσκουμε την αξία που έχει το χαρτοφυλάκιο στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Έτσι έχουμε ένα πλήθος πιθανών τιμών που αντιστοιχούν στο χαρτοφυλάκιο που εξετάζουμε.
- III. Εφαρμόζοντας τα πρώτα δύο βήματα έχουμε μια κατανομή των τιμών του χαρτοφυλακίου και, ως εκ τούτου, είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε τα γνωστά στατιστικά μέτρα για την εκτίμηση της τιμής VaR του χαρτοφυλακίου.

Ας θεωρήσουμε το γνωστό χαρτοφυλάκιο των ομολόγων BBB, A και CCC. Οι Πίνακες 1.1 και 1.8 μας δίνουν τις πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας των ομολόγων BBB και A μετά από ένα έτος. Ο αντίστοιχος πίνακας για το CCC ομόλογο είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας 1.12: Πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας ενός CCC ομολόγου μετά από ένα έτος

| Βαθμολογία μετά από ένα έτος | Πιθανότητα (%) |
|------------------------------|----------------|
| AAA | 0,21 |
| AA | 0,00 |
| A | 0,22 |
| BBB | 1,31 |
| BB | 2,35 |
| B | 11,30 |
| CCC | 64,84 |
| Χρεοκοπία (Default) | 19,77 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι ποσοστιαίες αλλαγές στην αξία του ενεργητικού των εταιρειών BBB, A και CCC που εκδίδουν τα τρία ομόλογα ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, όπου $i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα. Γενικά, όμως, αν θεωρήσουμε ως μεταβλητές X και Y την πιστοληπτική ικανότητα, μετά από ένα έτος, των εταιρειών που εκδίδουν δύο ομόλογα, τότε η από κοινού συνάρτηση

πιθανότητας για τις μεταβλητές αυτές δεν επηρεάζεται τελικά από τις παραμέτρους της κανονικής κατανομής. Ως εκ τούτου, στην εφαρμογή που περιγράφουμε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις του ενεργητικού και για τις τρεις εταιρείες ακολουθούν την ίδια κατανομή και θεωρούμε ότι αυτή είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή. Τότε ακολουθώντας τη διαδικασία που αναλύεται στα πλαίσια του Asset Value model, μπορούμε να βρούμε τις τιμές των ορίων αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας των τριών εταιρειών μετά από ένα έτος. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.13: Όρια αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας των τριών εταιρειών μετά από ένα έτος

| Όριο (threshold) | Εταιρεία BBB | Εταιρεία A | Εταιρεία CCC |
|------------------|--------------|------------|--------------|
| Z_{AA} | 3,54 | 3,12 | 2,86 |
| Z_A | 2,78 | 1,98 | 2,86 |
| Z_{BBB} | 1,53 | -1,51 | 2,63 |
| Z_{BB} | -1,49 | -2,30 | 2,11 |
| Z_B | -2,18 | -2,72 | 1,74 |
| Z_{CCC} | -2,75 | -3,19 | 1,02 |
| Z_{Def} | -2,91 | -3,24 | -0,85 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να υπενθυμίσουμε με μια εφαρμογή την έννοια των ορίων. Αν συμβολίσουμε με R την απόδοση του ενεργητικού της CCC εταιρείας μετά από ένα έτος και η τιμή της είναι $R = -1$ τότε επειδή $R < -0,85 = Z_{Def}$ εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η CCC εταιρεία χρεοκοπεί.

Συνεχίζοντας να εφαρμόζουμε το Asset Value model, αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι οι συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού όλων των εταιρειών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια βασική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι μια ικανοποιητική προσέγγιση αυτού του συντελεστή είναι ο συντελεστής συσχέτισης ρ_1 των μετοχικών αποδόσεων των δύο δεδομένων εταιρειών. Επομένως, το πρόβλημά μας ανάγεται στον υπολογισμό του συντελεστή ρ_1 οπότε ακολουθώντας τα βήματα του Asset Value model, για κάθε ζεύγος διαφορετικών εταιρειών, προκύπτουν τα δεδομένα του πίνακα που ακολουθεί.

| Πίνακας 1.14: Συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού των εταιρειών | | | |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------|--------------|
| | Εταιρεία BBB | Εταιρεία A | Εταιρεία CCC |
| Εταιρεία BBB | 1,0 | 0,30 | 0,10 |
| Εταιρεία A | 0,30 | 1,0 | 0,20 |
| Εταιρεία CCC | 0,10 | 0,20 | 1,0 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Κατόπιν εφαρμόζουμε την προσομοίωση Monte Carlo. Έχουμε λάβει υπόψη μας δέκα εναλλακτικά σενάρια για τις αποδόσεις του ενεργητικού των τριών εταιρειών μετά από ένα έτος. Οι τιμές αυτών των αποδόσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.15. Παράλληλα για κάθε τιμή και για κάθε εταιρεία, χρησιμοποιούμε τα όρια αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών που δίνονται στον Πίνακα 1.13 για να συμπεράνουμε τη βαθμολογία που θα έχει η κάθε εταιρεία μετά από ένα έτος. Οι βαθμολογίες που προκύπτουν από τα δέκα σενάρια αναγράφονται, επίσης, στον Πίνακα 1.15. Παρατηρώντας τα δεδομένα του πίνακα αυτού, βλέπουμε ότι για το μικρό αριθμό των σεναρίων (10) υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις από τους πίνακες με τις πιθανότητες διατήρησης ή μεταβολής της βαθμολογίας των εταιρειών μετά από ένα έτος (transition matrices). Ενδεικτικά, για την CCC εταιρεία σε τέσσερα από τα δέκα σενάρια η εταιρεία αυτή χρεοκοπεί, ενώ, όμως, βλέπουμε ότι σύμφωνα με τον Πίνακα 1.12 η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο είναι κατά πολύ μικρότερη (19,77%). Αυτές οι αποκλίσεις μπορούν να περιοριστούν αν λάβουμε υπόψη μας μεγάλο αριθμό σεναρίων. Δεν πάνουν, όμως, να συμβάλλουν ώστε οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από την προσομοίωση Monte Carlo να είναι λιγότερο ακριβείς.

Στη συνέχεια για κάθε σενάριο κάνουμε μια εκτίμηση για την αξία του χαρτοφυλακίου των τριών ομολόγων μετά από ένα έτος. Αυτό επιτυγχάνεται με το γνωστό τρόπο: σε καθένα από τα δέκα σενάρια εκτιμάμε τις αξίες των τριών ομολόγων μετά από ένα έτος οπότε η αντίστοιχη εκτίμηση για την αξία του χαρτοφυλακίου προκύπτει από το άθροισμα των τριών εκτιμήσεων. Οι τιμές που πηγάζουν από τα δεδομένα της εφαρμογής περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1.16.

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 1.16 ότι για ένα οποιοδήποτε ομόλογο η αξία που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η ίδια σε όλα τα σενάρια που το τοποθετούν στην ίδια βαθμολογία. Αυτό συμβαίνει για όλες τις βαθμολογίες, εξαιρουμένης, όμως, της περίπτωσης πτώχευσης. Κι αυτό γιατί σε αυτή την περίπτωση εκτιμάμε την αξία του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τα ποσοστά ανάκτησης. Όμως, έχουμε δεχθεί ότι

Πίνακας 1.15: Αποδόσεις του ενεργητικού και πιστοληπτική ικανότητα των εταιρειών στα πλαίσια των δέκα σεναρίων

| Σενάριο | Αποδόσεις του ενεργητικού | | | Πιστοληπτική ικανότητα των εταιρειών μετά από ένα έτος | | |
|---------|---------------------------|---------------|-----------------|--------------------------------------------------------|---------------|-----------------|
| | Εταιρεία BBB | Εταιρεία A | Εταιρεία CCC | Εταιρεία BBB | Εταιρεία A | Εταιρεία CCC |
| 1 | -0,7769 | -0,8750 | -0,6874 | BBB | A | CCC |
| 2 | -2,1060 | -2,0646 | 0,2996 | BB | BBB | CCC |
| 3 | -0,9276 | 0,0606 | 2,7068 | BBB | A | A |
| 4 | 0,6454 | -0,1532 | -1,1510 | BBB | A | Χρεοκοπία |
| 5 | 0,4690 | -0,5639 | 0,2832 | BBB | A | CCC |
| 6 | -0,1252 | -0,5570 | -1,9479 | BBB | A | Χρεοκοπία |
| 7 | 0,6994 | 1,5191 | -1,6503 | BBB | A | Χρεοκοπία |
| 8 | 1,1778 | -0,6342 | -1,7759 | BBB | A | Χρεοκοπία |
| 9 | 1,8480 | 2,1202 | 1,1631 | A | AA | B |
| 10 | 0,0249 | -0,4642 | 0,3533 | BBB | A | CCC |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Πίνακας 1.16: Αξίες των τριών ομολόγων και του συνολικού χαρτοφυλακίου που συνθέτουν στα πλαίσια των δέκα σεναρίων

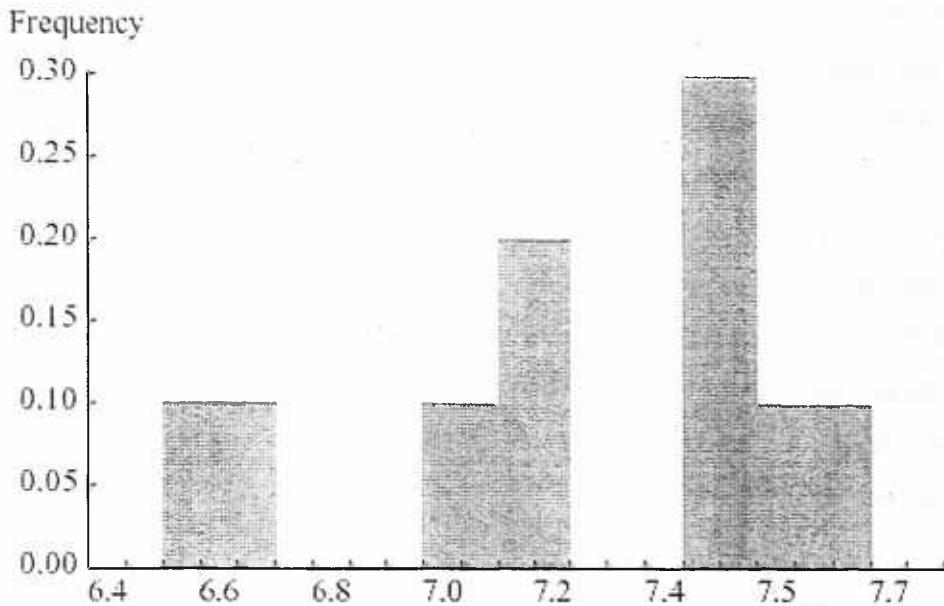
| Σενάριο | Πιστοληπτική ικανότητα των εταιρειών μετά από ένα έτος | | | Αξία (σε εκατομμύρια \$) | | | Χαρτοφυλάκιο |
|---------|--------------------------------------------------------|---------------|-----------------|-----------------------------|--------------|----------------|--------------|
| | Εταιρεία BBB | Εταιρεία A | Εταιρεία CCC | Ομόλογο BBB | Ομόλογο A | Ομόλογο CCC | |
| 1 | BBB | A | CCC | 4,302 | 2,126 | 1,056 | 7,484 |
| 2 | BB | BBB | CCC | 4,081 | 2,055 | 1,056 | 7,182 |
| 3 | BBB | A | A | 4,302 | 2,126 | 1,161 | 7,589 |
| 4 | BBB | A | Χρεοκοπία | 4,302 | 2,126 | 0,657 | 7,085 |
| 5 | BBB | A | CCC | 4,302 | 2,126 | 1,056 | 7,484 |
| 6 | BBB | A | Χρεοκοπία | 4,302 | 2,126 | 0,754 | 7,182 |
| 7 | BBB | A | Χρεοκοπία | 4,302 | 2,126 | 0,269 | 6,697 |
| 8 | BBB | A | Χρεοκοπία | 4,302 | 2,126 | 0,151 | 6,579 |
| 9 | A | AA | B | 4,346 | 2,130 | 1,137 | 7,613 |
| 10 | BBB | A | CCC | 4,302 | 2,126 | 1,056 | 7,484 |

Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

αυτά είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομές με μέσους και τυπικές αποκλίσεις που αναγράφονται στον Πίνακα 1.4. Επομένως, η επιλογή του ποσοστού ανάκτησης σε ένα σενάριο ίσως είναι διαφορετική από την αντίστοιχη επιλογή σε οποιοδήποτε άλλο σενάριο.

Εκείνο που διαθέτουμε είναι μια κατανομή των πιθανών τιμών του χαρτοφυλακίου που προκύπτει από τα δέκα σενάρια. Η γραφική απεικόνιση της κατανομής παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.

Σχήμα 1.4: Η κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου στα πλαίσια των δέκα σεναρίων



Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε τα γνωστά στατιστικά μέτρα για να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο. Τα πρώτα μέτρα, τα οποία υπολογίζονται αναλυτικά, είναι ο μέσος και η τυπική απόκλιση. Ο μέσος δίνεται από τον τύπο:

$$\mu_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V^{(i)},$$

όπου $V^{(i)}$ είναι η αξία του χαρτοφυλακίου που προκύπτει από το i σενάριο και $i = 1, \dots, N$. Στην περίπτωσή μας έχουμε $N = 10$ και προκύπτει ότι $\mu_p = \$7,24$ εκ. Για την τυπική απόκλιση εφαρμόζεται ο ακόλουθος τύπος:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (V^{(i)} - \mu_p)^2}$$

οπότε έπειται ότι $\sigma_p = \$0,37$ εκ.

Όμως, όπως έχουμε τονίσει, ο μέσος και η τυπική απόκλιση δεν είναι τα κατάλληλα στατιστικά μέτρα για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου καθώς η κατανομή των αξιών που λαμβάνει το χαρτοφυλάκιο, στα πλαίσια των δέκα σεναρίων, δεν είναι η κανονική. Για το λόγο αυτό επιχειρούμε να υπολογίσουμε το percentile level στην προσπάθειά μας να εκτιμήσουμε την τιμή VaR. Έχοντας διεξάγει την προσομοίωση Monte Carlo αν θέλουμε, ενδεικτικά, να βρούμε το 10% percentile level τότε ουσιαστικά αναζητούμε μια τιμή (x) για το χαρτοφυλάκιο τέτοια ώστε μια από τις δέκα τιμές των σεναρίων να είναι μικρότερη από x και οι υπόλοιπες εννέα τιμές να είναι μεγαλύτερες από x . Ωστόσο αυτή τη συνθήκη ικανοποιούν όλες οι τιμές που είναι μεγαλύτερες από \\$6,579 εκ. και μικρότερες από \\$6,697 εκ. Δεν είμαστε, δηλαδή, σε θέση να προσδιορίσουμε με ακρίβεια ποια είναι η συγκεκριμένη τιμή του 10% percentile level. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο σφάλμα που εσωκλείει η προσομοίωση. Όμως, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όσο αυξάνουμε τον αριθμό των σεναρίων τόσο το σφάλμα αυτό περιορίζεται και οι εκτιμήσεις των percentile levels γίνονται περισσότερο ακριβείς.

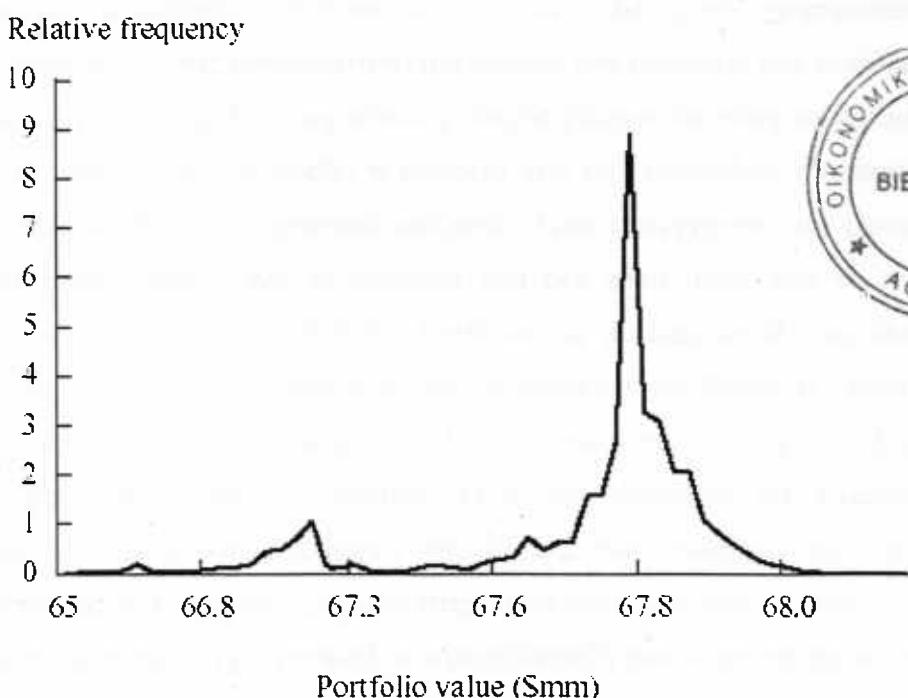
Η εφαρμογή του μοντέλου CreditMetrics επεκτείνεται και σε μεγαλύτερα χαρτοφυλάκια με ανάλογο τρόπο. Θέλοντας να προσαρμόσουμε τα δεδομένα σε συνθήκες παραπλήσιες με τις πραγματικές συνθήκες της αγοράς, υποθέτουμε ότι είμαστε κάτοχοι ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από είκοσι ομόλογα χορηγούμενα από διαφορετικές εταιρείες και έχει τρέχουσα αξία (market value) \\$68 εκ. Τα βασικά χαρακτηριστικά των ομολόγων ποικίλουν και στις εταιρείες αντιστοιχούν διάφορες βαθμολογίες πιστοληπτικής ικανότητας. Επιπλέον, επιλέγουμε ως χρονικό ορίζοντα το ένα έτος.

Εφαρμόζοντας το CreditMetrics, εκτιμάμε τους συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού όλων των εταιρειών από τους συντελεστές συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων των εταιρειών αυτών. Μελετώντας τα αποτελέσματα ίσως παρατηρήσουμε ότι κάποιες εταιρείες συσχετίζονται περισσότερο από κάποιες άλλες. Πρόκειται συνήθως για εταιρείες που ανήκουν στον ίδιο κλάδο.

Το επόμενο στάδιο της μεθόδου είναι η διεξαγωγή της προσομοίωσης Monte Carlo. Πρόθεσή μας είναι να λάβουμε υπόψη μας ένα μεγάλο αριθμό σεναρίων για τις βαθμολογίες που μπορούν να έχουν οι είκοσι εταιρείες μετά από ένα έτος. Με αυτό τον τρόπο οι τελικές εκτιμήσεις μας θα είναι περισσότερο ακριβείς. Έστω, λοιπόν, ότι

έχουμε δημιουργήσει 20.000 σενάρια από τα οποία προκύπτουν 20.000 πιθανές τιμές για το χαρτοφυλάκιο μετά από ένα έτος. Βέβαια οι τιμές αυτές δεν είναι απαραίτητα όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Μια ενδεικτική κατανομή που μπορεί να προκύψει για τις τιμές είναι αυτή που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 1.5: Στατιστική κατανομή των τιμών του χαρτοφυλακίου που προκύπτει από την προσομοίωση Monte Carlo (20.000 σενάρια)



Πηγή: CreditMetrics technical document (1997)

Το τελευταίο στάδιο είναι η εφαρμογή των γνωστών στατιστικών μεθόδων για την εκτίμηση της τιμής VaR του χαρτοφυλακίου. Παρατηρώντας ότι η κατανομή του παραπάνω σχήματος δεν είναι η κανονική, εξάγουμε το γνωστό συμπέρασμα ότι η τυπική απόκλιση δεν είναι το μέτρο εκείνο που θα μας δώσει ικανοποιητικές εκτιμήσεις. Για το λόγο αυτό προτιμάμε την εύρεση των percentile levels. Έχοντας μάλιστα λάβει υπόψη μας ένα μεγάλο αριθμό σεναρίων, η εκτίμηση των percentile levels θα είναι περισσότερο ακριβής. Έστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το 5% percentile level, δηλαδή εκείνο το επίπεδο κάτω από το οποίο πέφτει το 5% των τιμών του χαρτοφυλακίου που έχουν προκύψει από την προσομοίωση Monte Carlo.

Τότε τοποθετούμε τις 20.000 τιμές σε αύξουσα σειρά και επιλέγουμε προσεγγιστικά την 1.000^{th} ως το *5% percentile level* γιατί $5\% \cdot 20.000 = 1.000$.

1.6. ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΤΟ MONTELO CREDITMETRICS

To CreditMetrics είναι ένα μοντέλο που μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο με τρόπο απλό. Καταρχήν, χρησιμοποιεί τους πίνακες διαβάθμισης της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών που εύκολα μπορεί να προμηθευτεί κανείς. Με τους πίνακες αυτούς είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε εύκολα τις πιθανότητες να βρεθεί η εταιρεία που μας ενδιαφέρει σε οποιαδήποτε βαθμολογία στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Αυτό επιτυγχάνεται αν ξέρουμε την τρέχουσα «τιμή» μιας μόνο παραμέτρου που δεν είναι άλλη από τη σημερινή βαθμολογία του εν λόγω ομολόγου. Επιπλέον, οι πίνακες αυτοί μας δίνουν τη δυνατότητα να έχουμε μια εκτίμηση των πιθανοτήτων να βρεθεί η εταιρεία που έχουμε δανειοδοτήσει σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση εκτός της χρεοκοπίας. Ως εκ τούτου χρησιμοποιώντας τους πίνακες, κατά την εφαρμογή του CreditMetrics, μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της ζημίας που, ενδεχομένως, υποστούμε δανειοδοτώντας μια εταιρεία, όχι μόνο στην περίπτωση που αυτή κηρύξει πτώχευση αλλά και γενικότερα στην περίπτωση που μεταβληθεί η πιστοληπτική της ικανότητα.

Υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που καθιστούν εύχρηστο το μοντέλο CreditMetrics. Στα πλαίσια του Asset Value model η εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης των εταιρειών ανάγεται στην εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης των μετοχικών τους αποδόσεων. Η υπόθεση αυτή απλοποιεί ιδιαίτερα τη διαδικασία εκτίμησης της τιμής VaR. Κι αυτό γιατί οι τιμές των μετοχών διατίθενται ελεύθερα και η πρόσβαση σε αυτές είναι εύκολη. Επιπλέον, η προσομοίωση Monte Carlo κάνει περισσότερο εύχρηστο το CreditMetrics. Με την προσομοίωση μπορούμε να έχουμε συνήθως ικανοποιητικές εκτιμήσεις σε λίγο σχετικά χρόνο, ακόμα και όταν το μοντέλο εφαρμόζεται σε μεγάλα χαρτοφυλάκια.

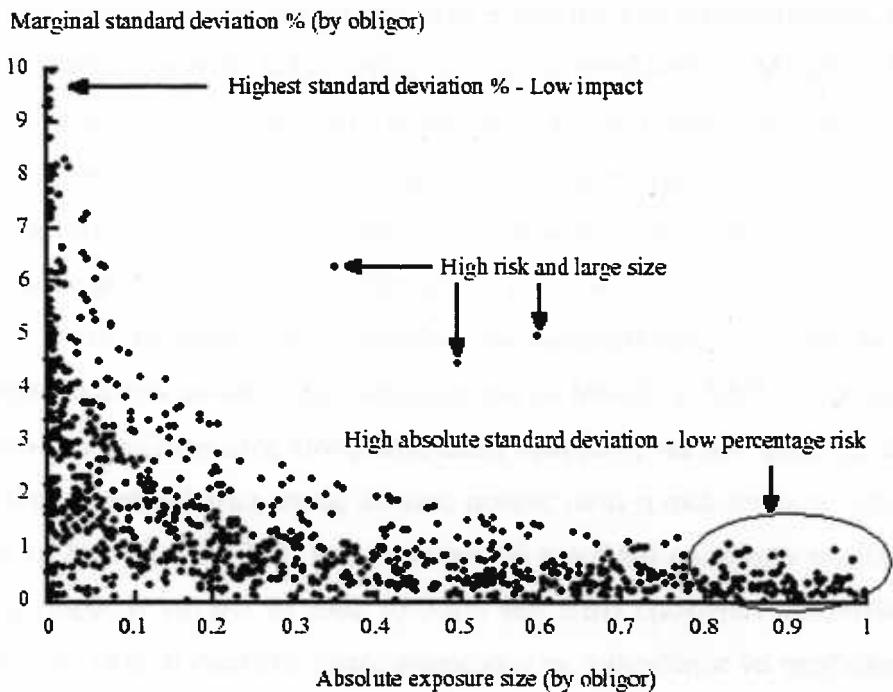
Εκείνο το χαρακτηριστικό που κάνει το μοντέλο CreditMetrics να πλεονεκτεί έναντι άλλων είναι η δυνατότητα εφαρμογής του σε χαρτοφυλάκια δύο ή περισσότερων δανείων. Η δυνατότητα αυτή είναι μεγάλης σημασίας. Κι αυτό γιατί σε πραγματικές συνθήκες οι τράπεζες καλούνται να επιλέξουν αν θα χορηγήσουν ένα

εταιρικό δάνειο, ενώ ήδη στο χαρτοφυλάκιό τους έχουν εντάξει ένα μεγάλο αριθμό δανείων που οι ίδιες έχουν δώσει ή έχουν αγοράσει από άλλες τράπεζες. Ισοδύναμα οι τράπεζες καλούνται να επιλέξουν αν θα προβούν στην αγορά ενός ομολόγου, ενώ οι ίδιες έχουν προηγουμένως αγοράσει ένα μεγάλο αριθμό ομολόγων. Ως εκ τούτου, εκτός από τον κίνδυνο που ενέχει η αγορά ενός εταιρικού ομολόγου, είναι εξίσου σημαντικό να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο που προσθέτει η αγορά του στον ήδη υπάρχοντα πιστωτικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Είναι χρήσιμο, δηλαδή, να εκτιμήσουμε τον οριακό κίνδυνο του ομολόγου. Η εκτίμηση αυτή είναι εφικτή χρησιμοποιώντας το CreditMetrics.

Η έννοια του οριακού κινδύνου είναι καθοριστικής σημασίας για τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου δανείων ή ισοδύναμα ομολόγων. Το πρώτο βήμα στην προσπάθεια αντιστάθμισης του πιστωτικού κινδύνου είναι να διακρίνουμε εκείνα τα ομόλογα που μεταβάλλουν περισσότερο την αξία του χαρτοφυλακίου στο οποίο συμμετέχουν. Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζεται ο οριακός κίνδυνος των ομολόγων ως συνάρτηση της τρέχουνσας αξίας τους για την περίπτωση ενός συνήθους χαρτοφυλακίου ομολόγων. Παρατηρώντας το σχήμα αυτό, διακρίνουμε τρεις βασικές κατηγορίες ομολόγων: i) Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται τα ομόλογα εκείνα με τα οποία εκθέτουμε τα μεγαλύτερα ποσά στον πιστωτικό κίνδυνο. Είναι τα ομόλογα που ενδεχόμενη πτώχευση των εταιρειών που τα εκδίδουν θα προκαλούσε τις μεγαλύτερες απώλειες στα κεφάλαιά μας. Τα ομόλογα αυτής της κατηγορίας βρίσκονται στο κάτω δεξιό τμήμα του σχήματος. ii) Στη δεύτερη κατηγορία συναντάμε εκείνα τα ομόλογα που έχουν το μεγαλύτερο οριακό κίνδυνο. Είναι τα ομόλογα που συμβάλλουν περισσότερο από τα άλλα στις ενδεχόμενες ζημίες του χαρτοφυλακίου και τοποθετούνται στο άνω αριστερό τμήμα του σχήματος. iii) Στην τρίτη κατηγορία βρίσκονται εκείνα τα ομόλογα με τα οποία εκθέτουμε τα σχετικά μεγαλύτερα ποσά και που έχουν ταυτόχρονα το σχετικά μεγαλύτερο οριακό κίνδυνο. Αυτά τα ομόλογα τοποθετούνται στο άνω δεξιό τμήμα του Σχήματος 1.6.

Τα ομόλογα που συμβάλλουν περισσότερο στις διακυμάνσεις της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι εκείνα της τρίτης κατηγορίας. Κι αυτό γιατί συνηθίζουμε να επενδύουμε σε ομόλογα της πρώτης κατηγορίας μόνο όταν εκτιμάμε ότι ο οριακός τους κίνδυνος είναι μικρός. Επίσης, αν αθετηθεί η πληρωμή ενός ομολόγου της δεύτερης κατηγορίας τότε οι συνέπειες του γεγονότος αυτού δεν θα είναι σημαντικές αν έχουμε επενδύσει ένα μικρό ποσό στο ομόλογο. Αν, όμως, μειωθεί η βαθμολογία

Σχήμα 1.6: Γραφική απεικόνιση του οριακού κινδύνου των ομολόγων συναρτήσει της τρέχουσας αξίας τους για ένα σύνθετες χαρτοφυλάκιο ομολόγων



Πηγή: *CreditMetrics technical document (1997)*

ενός ομολόγου της τρίτης κατηγορίας, τότε στο χαρτοφυλάκιο μας θα έχουμε έναν τίτλο που θα έχει δύο χαρακτηριστικά: α) θα εκθέτουμε ένα σχετικά υψηλό ποσό με αυτόν και β) θα αυξηθεί ο ήδη σχετικά υψηλός οριακός του κίνδυνος. Ως εκ τούτου οι επιπτώσεις από τη μείωση της βαθμολογίας του ομολόγου αυτού θα είναι μεγαλύτερες από οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Επομένως, τα ομόλογα της τρίτης κατηγορίας είναι τα πρώτα με τα οποία θα πρέπει να ασχοληθούμε στην προσπάθεια διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου που ενέχει το χαρτοφυλάκιο. Άρα είναι σημαντικό, για την επιτυχία αυτής της προσπάθειας, να γνωρίζουμε τον οριακό κίνδυνο των ομολόγων που το απαρτίζουν ώστε να διακρίνουμε ποια από αυτά ανήκουν στην τρίτη κατηγορία. Καταλαβαίνουμε, επομένως, πόσο χρήσιμο είναι το CreditMetrics καθώς επιτρέπει την εκτίμηση του οριακού κινδύνου.

Ωστόσο υπάρχουν ορισμένα σημεία στη μεθοδολογία του μοντέλου CreditMetrics τα οποία δημιουργούν αμφιβολίες για τη φερεγγυότητα των εκτιμήσεών του. Από την περιγραφή του μοντέλου καθίσταται φανερό ότι οι πίνακες διαβάθμισης της πιστοληπτικής ικανότητας των εταιρειών (transition matrices)

διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην εφαρμογή του. Μια πρώτη βασική υπόθεση που κάνουμε, χρησιμοποιώντας τους πίνακες αυτούς, είναι ότι έχει αποδοθεί η σωστή βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας στις εταιρείες που δανειοδοτούμε. Συχνά οι τράπεζες βασίζονται στις βαθμολογίες που έχουν αποδώσει οι Moody's, S&P. Οι εταιρείες αυτές είναι διεθνώς αναγνωρισμένες για την αξιοπιστία των εκτιμήσεών τους, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι οι βαθμολογίες που δημοσιεύουν είναι πάντα οι σωστές⁵. Επιπλέον αν θέλουμε να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην ελληνική αγορά, παρατηρούμε ότι λείπουν βαθμολογίες για εταιρείες που ανήκουν σε αυτή.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε ορισμένα τεχνικά χαρακτηριστικά των πινάκων που δημοσιεύουν οι Moody's, S&P. Οι πίνακες αυτοί έχουν χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Μια απλή εφαρμογή για τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι πιθανότητες στους πίνακες αυτούς είναι η ακόλουθη: ας υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια του 2001 ένα ποσοστό 5% των BBB ομολόγων υποβαθμίστηκε στην κατηγορία B και ότι το 2002 το 5,6% των BBB ομολόγων μεταπήδησε στην κατηγορία B. Τότε οι εταιρείες αυτές αναφέρουν ως πιθανότητα να υποβαθμιστεί ένα BBB ομόλογο στη βαθμολογία B στο τέλος του 2003 το μέσο όρο των δύο πιθανοτήτων δηλαδή το 5,3%. Οι πιθανότητες που αναγράφονται στον ετήσιο πίνακα της Moody's είναι οι μέσοι όροι των αντίστοιχων πιθανοτήτων που είχαν παρατηρηθεί τα τελευταία έτη. Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι πιθανότητες στους πίνακες της S&P. Ουσιαστικά υπολογίζονται με την παραπάνω μέθοδο τις πιθανότητες παραμονής ή μεταπήδησης ενός ομολόγου σε μια οποιαδήποτε βαθμολογία μετά από ένα έτος, κάνουμε την υπόθεση ότι οι πιθανότητες αυτές αποτελούν μια σειρά Markov. Θεωρούμε, δηλαδή, ότι η πιθανότητα να έχει το ομόλογο μια συγκεκριμένη βαθμολογία την επόμενη περίοδο είναι ανεξάρτητη από τη βαθμολογία που είχε το ομόλογο κατά την προηγούμενη περίοδο. Ωστόσο έχει διαπιστωθεί ότι οι αλλαγές στη βαθμολογία ενός ομολόγου αυτοσυσχετίζονται. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα ομόλογο του οποίου η σημερινή βαθμολογία είναι χαμηλότερη από αυτή που είχε πριν από ένα έτος. Επίσης, θεωρούμε και ένα ομόλογο για το οποίο δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τότε έχει παρατηρηθεί ότι το πρώτο ομόλογο έχει συνήθως μεγαλύτερη πιθανότητα να μεταπήδησει σε χειρότερη βαθμολογία σε ένα έτος από σήμερα σε σχέση με το δεύτερο ομόλογο.

⁵ Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η Enron Corp. στην οποία αναφερόμαστε αναλυτικά Κεφάλαιο III.

Επιπλέον, αμφιβολίες εκφράζονται σχετικά με τη σταθερότητα των πινάκων που δημοσιεύονται οι Moody's, S&P. Η χρήση ενός μόνο τέτοιου πίνακα, στα πλαίσια του CreditMetrics, μας υποχρεώνει να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν διαφορές στον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η πιστοληπτική ικανότητα εταιρειών που ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους [Altman (1998)]. Αν θεωρήσουμε ότι μια τράπεζα και μια εταιρεία του βιομηχανικού κλάδου, τότε η πιθανότητα να μεταπηδήσουν σε οποιαδήποτε κατηγορία μετά από ένα έτος είναι η ίδια απλά και μόνο επειδή έχουν την ίδια βαθμολογία στην παρούσα περίοδο. Όμως αυτό δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Είναι χαρακτηριστική η εμπειρική μελέτη των Nickell, Perraudin, Varotto (2000) οι οποίοι ερεύνησαν τις μεταβολές της βαθμολογίας για τράπεζες και βιομηχανίες της αμερικανικής αγοράς κατά την περίοδο 1970 - 1997. Διαπίστωσαν ότι υπήρχε μεγαλύτερη τάση αλλαγής της βαθμολογίας των τραπεζών, καθώς παρατήρησαν ότι ανεξάρτητα από την αρχική βαθμολογία τους η πιθανότητα να παραμείνουν σε αυτή ήταν μικρότερη.

Επίσης, αμφισβητείται η δυνατότητα να εφαρμοστούν οι πίνακες των Moody's, S&P σε εταιρείες που δραστηριοποιούνται σε διαφορετικές χώρες. Οι Moody's, S&P αποδίδουν σε μια αμερικανική και σε μια ιαπωνική εταιρεία τις ίδιες πιθανότητες αλλαγής της βαθμολογίας τους παραβλέποντας τις σημαντικές μακροοικονομικές - και όχι μόνο - διαφορές που έχουν οι αγορές στις οποίες ανήκουν. Οι Ammer, Packer (2000) έλαβαν υπόψη τους ένα μεγάλο δείγμα εταιρειών που δραστηριοποιούνταν στην αμερικανική αγορά, καθώς και ένα δείγμα εταιρειών που συμμετείχαν στις αγορές άλλων χωρών. Διαπίστωσαν ότι τα πραγματικά ποσοστά χρεοκοπίας του πρώτου δείγματος ήταν μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του δεύτερου δείγματος. Το φαινόμενο αυτό μάλιστα γινόταν εντονότερο όταν οι εταιρείες που εξέταζαν είχαν χαμηλή βαθμολογία στην αρχή του χρονικού ορίζοντα.

Σε μια μελέτη της Moody's⁶ παρέχονται στατιστικά στοιχεία αναφορικά με τις πιθανότητες χρεοκοπίας που η ίδια είχε δημοσιεύσει ανά κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας. Στο δείγμα συμπεριλήφθησαν όλες οι πιθανότητες της περιόδου 1970 - 1996. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.17.

Η KMV Corporation, εταιρεία που ερευνά το αντικείμενο της αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου, έχει διεξάγει μια δική της

⁶ Carty, Lieberman (1996).

| Πίνακας 1.17: Πιθανότητες χρεοκοπίας για χρονικό ορίζοντα ενός έτους | | |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------|
| Βαθμολογία | Μέσος (%) | Τυπική απόκλιση (%) |
| Aaa | 0,00 | 0,0 |
| Aa | 0,03 | 0,1 |
| A | 0,01 | 0,0 |
| Baa | 0,13 | 0,3 |
| Ba | 1,42 | 1,3 |
| B | 7,62 | 5,1 |

Πηγή: Carty & Lieberman (1996) - Moody's Investors Service

μελέτη⁷ με την οποία έχει δείξει ότι μπορεί να υπάρξουν σημαντικές διαφορές στις πιθανότητες χρεοκοπίας εταιρειών που έχουν την ίδια βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας. Μάλιστα οι διαφορές αυτές μπορεί να είναι τόσο μεγάλες ώστε εταιρείες που κατατάσσονται στην κατηγορία BBB να έχουν την ίδια πιθανότητα πτώχευσης με AA εταιρείες.

Στα πλαίσια της μελέτης της, η KMV έχει κάνει καταρχήν ορισμένες υποθέσεις. Για κάθε κατηγορία και για κάθε έτος έχει χρησιμοποιήσει ένα σταθερό αριθμό ομολόγων ο οποίος προσεγγίζει το μέσο αριθμό που χρησιμοποιεί για την εκάστοτε κατηγορία η Moody's στη δική της μελέτη. Επιπλέον, η KMV χρησιμοποιεί δεδομένα 25 ετών όπως και η Moody's. Επίσης, για κάθε κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας και για κάθε έτος, έχει υποθέσει ότι η πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέση πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει από τη μελέτη της Moody's και αναγράφεται στον Πίνακα 1.17. Ενδεικτικά, για τα BBB ομόλογα θα θεωρήσουμε παρακάτω ότι η πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέση πιθανότητα χρεοκοπίας που αντιστοιχεί στα Baa ομόλογα. Κι αυτό γιατί τα ομόλογα που ανήκουν στις κατηγορίες BBB, Baa έχουν περίπου τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Μια υπόθεση που απομένει να αναφέρουμε σχετίζεται με τους συντελεστές συσχέτισης των ομολόγων που έχουν την ίδια βαθμολογία. Η KMV θεωρεί, λοιπόν, ότι οι συντελεστές αυτοί είναι ίσοι μεταξύ τους και τους δίνει εναλλακτικές τιμές.

Χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες υποθέσεις, η KMV επαναλαμβάνει τη μελέτη της Moody's πολλές φορές. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσομοίωση Monte Carlo στα πλαίσια της οποίας έχουν ληφθεί υπόψη 50.000 σενάρια. Τα αποτελέσματα για τα BBB ομόλογα αναγράφονται στον ακόλουθο πίνακα.

⁷ Kealhofer, Kwok, Weng (1998).

Πίνακας 1.18: Στατιστικά αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo για την κατηγορία των BBB ομολόγων

| Συντελεστής συσχέτισης των ομολόγων | Αριθμός ομολόγων | Μέσος (%) | Τυπική απόκλιση (%) | Διάμεσος [median,(%)] | 95% Επίπεδο εμπιστοσύνης | |
|-------------------------------------|------------------|-----------|---------------------|-----------------------|--------------------------|------------------|
| | | | | | Κατώτερη τιμή (%) | Ανώτερη τιμή (%) |
| 0,15 | 370 | 0,13 | 0,06 | 0,12 | 0,04 | 0,27 |
| 0,25 | 370 | 0,13 | 0,08 | 0,11 | 0,02 | 0,35 |
| 0,35 | 370 | 0,13 | 0,12 | 0,10 | 0,01 | 0,43 |
| 0,45 | 370 | 0,13 | 0,16 | 0,09 | 0,00 | 0,55 |

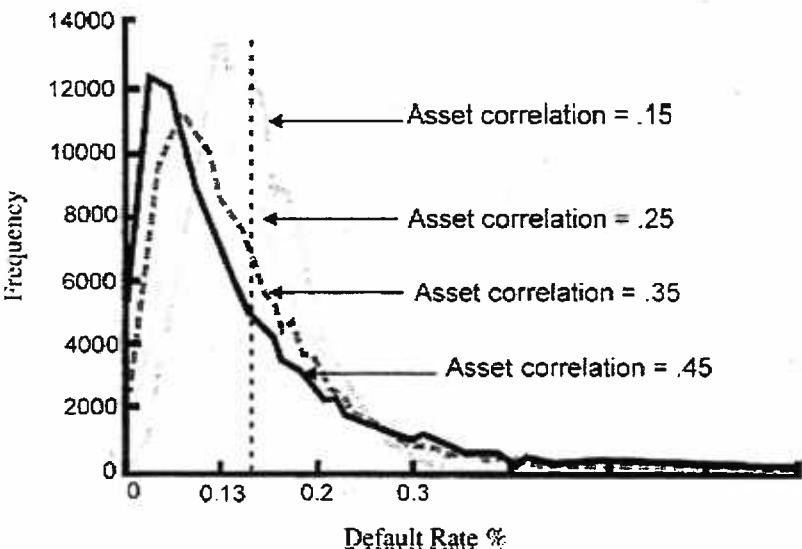
Πηγή: Kealhofer, Kwok, Weng [KMV, (1998)]

Με το Σχήμα 1.7 παραθέτουμε τη γραφική απεικόνιση των στοιχείων απόδοσης παραπάνω πίνακα. Ένα πρώτο χαρακτηριστικό του σχήματος αυτού είναι το μεγάλο άνοιγμα τιμών που παρατηρείται γύρω από την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας (0,13%). Για την περίπτωση που ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με 0,15%, βλέπουμε ότι οι μέσες πιθανότητες χρεοκοπίας κατανέμονται ανάμεσα στις τιμές 0,04% και 0,27% με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Διαπιστώνουμε, δηλαδή, ότι το άνοιγμα είναι σχεδόν διπλάσιο από την πραγματική τιμή που θέλουμε να εκτιμήσουμε και, ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να κάνουμε εύκολα την εκτίμηση αυτή.

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό είναι ότι οι γραφικές απεικονίσεις του Σχήματος 1.7 έχουν κλίση προς τα αριστερά (“skewed”) και μάλιστα τόσο έντονη ώστε ο μέσος να είναι μεγαλύτερος από τη διάμεσο. Επομένως, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας που ανακοινώνει η Moody’s υπερεκτιμά την πραγματική τιμή που αντιστοιχεί σε μια «τυπική» εταιρεία. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι είναι περισσότερο πιθανό να έχουμε μια εκτίμηση κάτω από το μέσο παρά πάνω από αυτόν. Επίσης, υπάρχουν μεγαλύτερες - αν και μικρές - πιθανότητες να έχουμε μια εκτίμηση πολύ πάνω από το μέσο, παρά να έχουμε μια εκτίμηση πολύ κάτω από αυτόν.

Στα πλαίσια του μοντέλου CreditMetrics κάνουμε κάποιες επιπλέον υποθέσεις οι οποίες περιορίζουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του. Καταρχήν, το μοντέλο λαμβάνει υπόψη του τον πιστωτικό κίνδυνο αλλά υποβαθμίζει τη σημασία του

Σχήμα 1.7: Στατιστική κατανομή των μέσων πιθανοτήτων χρεοκοπίας που προκύπτουν από την προσομοίωση Monte Carlo για την κατηγορία των BBB ομολόγων (η πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας είναι 0,13%)



Πηγή: M. Crouhy et al. (2000)

κινδύνου αγοράς⁸. Το CreditMetrics χρησιμοποιεί προθεσμιακά επιτόκια τα οποία σχετίζονται με την περίοδο που ακολουθεί αμέσως μετά το χρονικό ορίζοντα που έχουμε θέσει. Οι αποδόσεις αυτές θεωρούμε ότι είναι σταθερές εκμηδενίζοντας έτσι ουσιαστικά τον κίνδυνο αγοράς για αυτή την περίοδο. Η υπόθεση αυτή θα μπορούσε να γίνει αποδεκτή αν η περίοδος ήταν λίγων ημερών. Όμως, στην περίπτωση των δανείων τις περισσότερες φορές μας ενδιαφέρει μια περίοδος αρκετών ετών.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε μια εμπειρική μελέτη των Anderson, Sundaresan (2000) οι οποίοι έλαβαν υπόψη τους ένα μεγάλο δείγμα ομολόγων που εκδόθηκαν από αμερικανικές εταιρείες του βιομηχανικού κλάδου. Τα ομόλογα είναι χρονικής διάρκειας 30 ετών και οι αποδόσεις των ομολόγων αφορούν το χρονικό διάστημα 1970 - 1996. Από αυτή τη μελέτη προέκυψαν τα στατιστικά στοιχεία του Πίνακα 1.19, από τον οποίο καθίσταται φανερό ότι ο μέσος και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δείγματος αυξάνονται όσο γίνεται χαμηλότερη η βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας. Επιπλέον, παρατηρούμε τις μεγάλες διακυμάνσεις που παρουσιάζουν οι αποδόσεις των ομολόγων οποιαδήποτε βαθμολογία κι αν έχουν αυτά.

⁸ Jarrow, Turnbull (2000).

Πίνακας 1.19: Στατιστικά στοιχεία για τις αποδόσεις που είχαν τα ομόλογα του δείγματος κατά το διάστημα 1970 - 1996

| Βαθμολογία | Μέσος | Τυπική απόκλιση | Ελάχιστη τιμή (min) | Μέγιστη τιμή (max) |
|------------|--------|-----------------|---------------------|--------------------|
| AAA | 0,0938 | 0,0213 | 0,0665 | 0,1650 |
| A | 0,0991 | 0,0232 | 0,0700 | 0,1763 |
| BBB | 0,1051 | 0,0246 | 0,0725 | 0,1850 |

Πηγή: Anderson and Sundaresan (2000)

To Asset Value model διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη μεθοδολογία του CreditMetrics. Μια βασική υπόθεσή του είναι ότι ο συντελεστής συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων δύο εταιρειών αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού τους. Ωστόσο η υπόθεση αυτή δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πραγματικότητα. Μια μελέτη της KMV⁹ έρχεται να υποστηρίζει αυτό τον ισχυρισμό. Στα πλαίσια της μελέτης της, η KMV επιλέγει καταρχήν 200 εταιρείες που ανήκουν στον κλάδο της ενέργειας και συμμετέχουν στις αγορές 45 διαφορετικών χωρών. Κατόπιν λαμβάνει υπόψη της τους ισολογισμούς και τις εβδομαδιαίες μετοχικές αποδόσεις των εταιρειών αυτών για το χρονικό διάστημα Μάιος 1988 – Ιούνιος 1999. Χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία, η KMV υπολογίζει τους συντελεστές συσχέτισης ρ_{ij} των αποδόσεων του ενεργητικού και τους συντελεστές συσχέτισης ρ'_{ij} των μετοχικών αποδόσεων των εταιρειών i, j , όπου $i, j = 1, \dots, 200$. Στη συνέχεια βρίσκει ότι οι διάμεσοι των δειγμάτων των συντελεστών ρ_{ij} και ρ'_{ij} είναι 19,9% και 12,0% αντίστοιχα και διαπιστώνει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο συντελεστής ρ_{ij} είναι μεγαλύτερος από τον ρ'_{ij} .

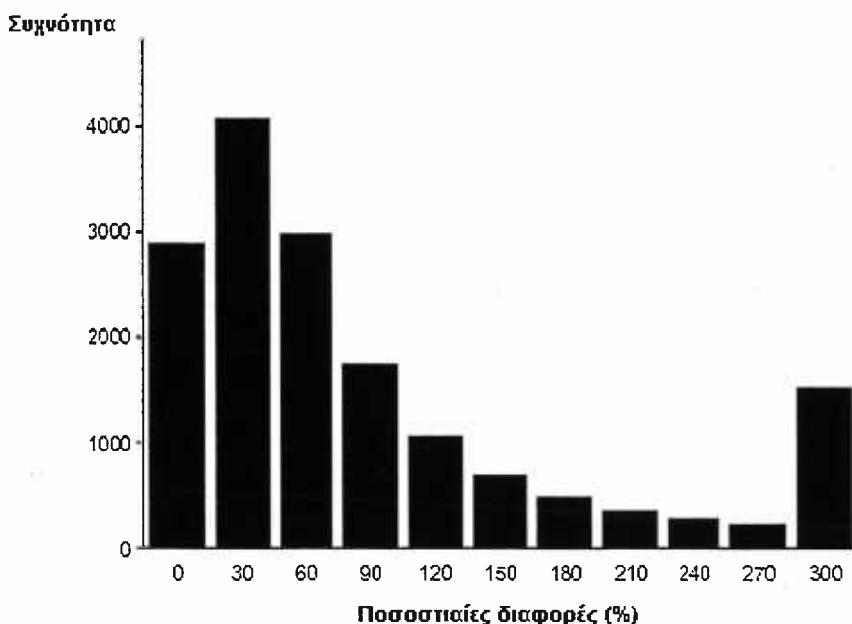
Θέλοντας να έχει μια γραφική απεικόνιση αυτής της διαπίστωσης, η KMV θεωρεί τις ποσοστιαίες διαφορές (percentage differences) των συντελεστών ρ_{ij} , ρ'_{ij} οι οποίες υπολογίζονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\text{percentage differences } (\rho_{ij}, \rho'_{ij}) = \frac{\rho_{ij} - \rho'_{ij}}{\rho'_{ij}},$$

⁹ Zeng, Zhang (2001).

όπου $i, j = 1, \dots, 200$. Η κατανομή αυτών των διαφορών παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.8.

Σχήμα 1.8: Στατιστική κατανομή των ποσοστιαίων διαφορών των συντελεστών ρ_{ij} , ρ'_{ij} για τις εταιρείες του δείγματος



Πηγή: Zeng and Zhang, [KMV, (2001)]

Η KMV έχει προσδιορίσει τη διάμεσο της κατανομής των ποσοστιαίων διαφορών του εικονιζόμενου σχήματος και έχει βρει ότι είναι 55,371%. Αυτό σημαίνει ότι κατά μέσο όρο (όταν ο μέσος όρος εκτιμάται από τη διάμεσο) οι συντελεστές συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού των εταιρειών είναι μεγαλύτεροι κατά περίπου 55% από τους αντίστοιχους συντελεστές συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων.

Εκτός των άλλων, ενδέχεται να μην είναι καν εφικτή η εφαρμογή του Asset Value model. Είδαμε ότι στο μοντέλο αυτό ο υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού ανάγεται στην εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης των μετοχικών αποδόσεων. Ωστόσο μπορεί κάποια από τις εταιρείες που θέλουμε να δανειοδοτήσουμε να μην είναι εισηγμένη σε χρηματιστήριο και, επομένως, να μην είμαστε σε θέση να κάνουμε την εκτίμηση αυτή.

Επίσης, στα πλαίσια του CreditMetrics, κάνουμε και μια σειρά από εκτιμήσεις οι οποίες καθιστούν συχνά τα αποτελέσματά του λιγότερο ακριβή. Τέτοιες εκτιμήσεις είναι των ποσοστών ανάκτησης του χρέους και η αβεβαιότητα που υπάρχει για αυτές είναι συχνά στατιστικά σημαντική. Οι Altman και Kishore (1996) ερεύνησαν περιπτώσεις πτώχευσης αμερικάνικων εταιρειών και διαπίστωσαν ότι τα ποσοστά ανάκτησης των χρηματοοικονομικών οργανισμών ήταν μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των εταιρειών του βιομηχανικού κλάδου. Επιπλέον εκτιμήσεις που λαμβάνουμε υπόψη είναι αυτές που προκύπτουν από την προσομοίωση Monte Carlo. Όπως είδαμε στην εφαρμογή της προηγούμενης παραγράφου, δεν ήμασταν σε θέση να προσδιορίσουμε ακριβώς το 10% *percentile level* μετά τη διεξαγωγή των δέκα σεναρίων. Ακόμα όμως κι αν ο αριθμός των σεναρίων ήταν πολύ μεγαλύτερος, τότε η αβεβαιότητα αυτή θα εξακολουθούσε να υφίσταται και να επηρεάζει τις εκτιμήσεις VaR που κάνουμε.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CREDITGRADES

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια τράπεζα εκτίθεται στον πιστωτικό κίνδυνο κατά τη χορήγηση ενός εταιρικού δανείου, καθώς υπάρχει το ενδεχόμενο να χρεοκοπήσει η εταιρεία που δανειοδοτεί. Επομένως, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο για την τράπεζα να γνωρίζει την πιθανότητα να χρεοκοπήσει η εταιρεία αυτή στο χρονικό ορίζοντα του δανείου. Βασικός σκοπός του μοντέλου *CreditGrades* (2002) είναι να εκτιμήσει με ικανοποιητική ακρίβεια την πιθανότητα να είναι βιώσιμη μια εταιρεία, άρα και την πιθανότητα να χρεοκοπήσει, σε δεδομένο χρονικό διάστημα. Η φιλοσοφία του *CreditGrades* στηρίζεται στην παρατήρηση των Black, Scholes (1973) και Merton (1974) ότι οι πιστωτές μιας εταιρείας ουσιαστικά βρίσκονται σε θέση short ενός put option που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό της εταιρείας.

Θεωρούμε ένα τυχαίο ευρωπαϊκό put option που έχει υποκείμενο τίτλο S , τιμή άσκησης X , χρονική διάρκεια (maturity) T και premium p . Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στην αρχική στιγμή $t_0 = 0^{10}$ του χρονικού ορίζοντα $[0, T]$. Αν S_T είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T , τότε οι αποδόσεις που έχει ο πωλητής του put option περιλαμβάνονται στον Πίνακα 2.1¹¹. Στη συνέχεια (Σχήμα 2.1) παρουσιάζονται γραφικά οι αποδόσεις που αποφέρει το put option στον πωλητή του κατά τη χρονική στιγμή T .

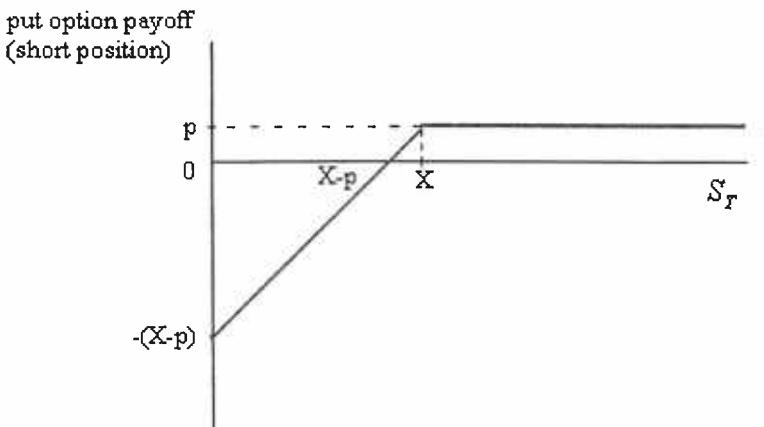
¹⁰ Κατά την εφαρμογή του μοντέλου *CreditGrades* δεν είναι απαραίτητο η χρονική στιγμή $t_0 = 0$ να αντιστοιχεί στη σημερινή ημέρα. Ως αρχική στιγμή $t_0 = 0$ μπορούμε να λάβουμε την οποιαδήποτε ημέρα του παρελθόντος ή τη σημερινή. Η ημέρα αυτή θα αποτελεί το αρχικό σημείο του χρονικού ορίζοντα που έχουμε επιλέξει για την εφαρμογή του μοντέλου.

¹¹ Υποθέτουμε ότι το premium p του put option και οι τόκοι D_{int} , οι οποίοι αναφέρονται παρακάτω, είναι σταθερά για όλο το χρονικό διάστημα $[0, T]$, δηλαδή αγνοούμε τη χρονική αξία του χρήματος (time value of money).

| Πίνακας 2.1: Απόδοση της short θέσης του put option | | |
|-----------------------------------------------------|--------------------------|--------------|
| Περίπτωση | $S_T < X$ | $S_T \geq X$ |
| Απόδοση στη λήξη | $(S_T - X) + p$ | p |
| Συνολική απόδοση στη λήξη | $\min[(S_T - X) + p, p]$ | |



Σχήμα 2.1: Γραφική απεικόνιση της απόδοσης που έχει η short θέση του put option στη λήξη του



Κατόπιν θεωρούμε μια τυχαία εταιρεία και συμβολίζουμε V_0 την αξία που έχει το ενεργητικό της κατά την παρούσα στιγμή $t_0 = 0$. Ο χρονικός ορίζοντας $[0, T]$ είναι ο ίδιος με αυτόν του put option. Έστω επιπλέον ότι το χρέος της εταιρείας έχει σημερινή αξία D_0 και αναμένεται να αποφέρει στους πιστωτές τόκους παρούσας αξίας D_{int} . Στη συνέχεια κάνουμε τη βασική υπόθεση ότι η εταιρεία έχει την υποχρέωση να εξοφλήσει το συνολικό χρέος (κεφάλαιο και τόκους) με εφάπαξ πληρωμή τη χρονική στιγμή T . Τότε η αξία του συνολικού χρέους τη χρονική στιγμή $T(D)$ είναι:

$$D = D_0 \cdot \exp(r \cdot T) + D_{int}, \quad (2.1)$$

όπου r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk free interest rate). Αν V_T είναι η αξία του ενεργητικού τη χρονική στιγμή T , τότε έπεται ότι η εταιρεία θα είναι σε θέση να εξοφλήσει το χρέος της μόνο εφόσον $V_T \geq D$. Αν η αξία του ενεργητικού είναι



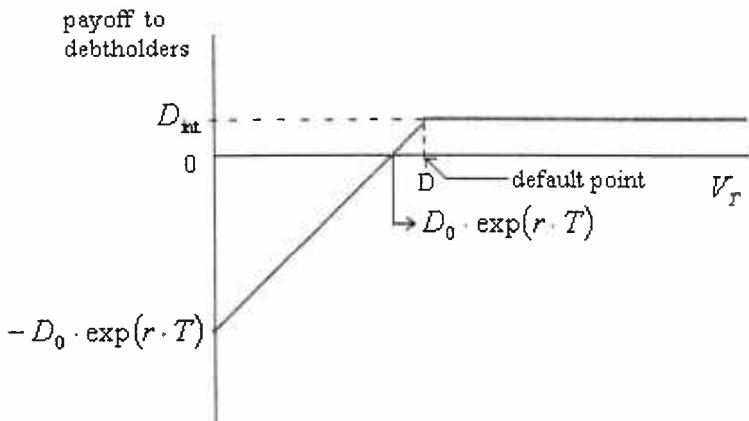
μικρότερη από το χρέος τη στιγμή T ($V_T < D$), τότε εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η εταιρεία χρεοκοπεί και τα περιουσιακά της στοιχεία περνούν στην κατοχή των πιστωτών. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1), μπορούμε να συμπεράνουμε τις αποδόσεις που έχει το χρέος για τους πιστωτές τη χρονική στιγμή T . Πράγματι, αν $V_T \geq D$ τότε οι πιστωτές λαμβάνουν το ποσό $D - D_{int} \cdot \exp(r \cdot T) = D_{int}$, ενώ αν $V_T < D$ έπεται ότι λαμβάνουν το ποσό $V_T - D_{int} \cdot \exp(r \cdot T) = V_T - D_0 \cdot \exp(r \cdot T) + D_{int} - D_{int} = (V_T - D) + D_{int}$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η απόδοση του χρέους για τους πιστωτές είναι $\min[(V_T - D) + D_{int}, D_{int}]$. Συνοπτικά οι αποδόσεις αυτές περιλαμβάνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Πίνακας 2.2: Απόδοση του χρέους για τους πιστωτές της εταιρείας | | |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------|
| Περίπτωση | $V_T < D$ | $V_T \geq D$ |
| Απόδοση σε χρόνο T | $(V_T - D) + D_{int}$ | D_{int} |
| Συνολική απόδοση σε χρόνο T | $\min[(V_T - D) + D_{int}, D_{int}]$ | |

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να παραστήσουμε γραφικά τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.2. Το σκοπό αυτό εξυπηρετεί το Σχήμα 2.2.

Οι Black, Scholes (1973) και Merton (1974) [BSM] παρατήρησαν ότι οι αποδόσεις του put option και του χρέους της εταιρείας έχουν την ίδια μορφή. Η διαπίστωση αυτή καθίσταται φανερή από τους πίνακες και τις γραφικές απεικονίσεις που προτιγήθηκαν. Χρησιμοποιώντας την ομοιομορφία των αποδόσεων του put option και του χρέους, οι BSM συμπέραναν ότι ουσιαστικά οι πιστωτές μιας εταιρείας πωλούν σε αυτή ένα put option που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό V της εταιρείας. Το ευρωπαϊκό αυτό put option έχει τιμή άσκησης το συνολικό χρέος D , χρονική διάρκεια T και premium $p = D_{int}$. Τότε αν $V_T \geq D$ έπεται ότι η εταιρεία εξοφλεί το χρέος και οι πιστωτές έχουν καθαρό κέρδος το συμφωνημένο τόκο D_{int} που είναι το premium p του put option. Στην περίπτωση που ισχύει $V_T < D$ έπεται ότι η απόδοση του χρέους για τους πιστωτές είναι η ίδια με την απόδοση που αποφέρει η short θέση στο put option.

Σχήμα 2.2: Γραφική απεικόνιση της απόδοσης που έχει το χρέος για τους πιστωτές σε χρόνο T



Το μοντέλο CreditGrades έχει ως αφετηρία την παρατήρηση των BSM. Κι αυτό γιατί θεωρεί ότι οι πιστωτές μιας εταιρείας είναι σε θέση short ενός put option που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό της εταιρείας. Ωστόσο το μοντέλο διαφοροποιείται από τους BSM ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι σε πραγματικές συνθήκες η εταιρεία μπορεί να κηρύξει πτώχευση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Ισοδύναμα το put option, που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό της εταιρείας, μπορεί να ασκηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Ως εκ τούτου το CreditGrades θεωρεί ότι το put option είναι αμερικανικού και όχι ευρωπαϊκού τύπου.

Σε πραγματικές συνθήκες, το συνολικό χρέος της εταιρείας μεταβάλλεται δυναμικά και όχι στατικά. Με άλλα λόγια μπορεί να αυξομειώνεται κατά τη διάρκεια του ορίζοντα $[0, T]$ που έχουμε θεωρήσει. Ως εκ τούτου το πραγματικό χρέος της εταιρείας τη χρονική στιγμή T ίσως να είναι διαφορετικό από την τιμή $D = D_0 \cdot \exp(r \cdot T) + D_{int}$ των BSM. Μπορεί να είναι μεγαλύτερο από D γιατί υπάρχει το ενδεχόμενο σκόπιμης απόκρυψης του πραγματικού χρέους από την ίδια την εταιρεία. Επιπλέον, είναι πιθανή η συμμετοχή της εταιρείας που εξετάζουμε σε δραστηριότητες εκτός ισολογισμού (off-balance sheet activities), όπως είναι τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα. Οι συναλλαγές σε παράγωγα μπορεί να επιβαρύνουν το χρέος της εταιρείας. Από την άλλη πλευρά, όμως, μπορεί το χρέος τη στιγμή T να είναι μικρότερο από D γιατί η εταιρεία, σε πραγματικές συνθήκες, έχει τη

δυνατότητα να εξοφλήσει τουλάχιστον μέρος του χρέους της πριν τη στιγμή T . Ως εκ τούτου υπάρχει αβεβαιότητα για το πραγματικό χρέος της εταιρείας. Το πραγματικό χρέος μάς είναι γνωστό μόνο στην περίπτωση που χρεοκοπήσει η εταιρεία.

Θέλοντας να λάβει υπόψη στις εκτιμήσεις του την άγνοια που έχουμε για το πραγματικό χρέος, το CreditGrades εισάγει την έννοια του ποσοστού ανάκτησης (recovery rate) L στη μεθοδολογία του. Είναι προφανές ότι η αβεβαιότητα για το πραγματικό χρέος συνεπάγεται αβεβαιότητα για το ποσοστό ανάκτησης της εταιρείας. Συμβολίζουμε με D το χρέος που έχει η εταιρεία την αρχική στιγμή $t_0 = 0$ του χρονικού ορίζοντα $[0, T]$ σύμφωνα με τον τελευταίο ισολογισμό της. To CreditGrades κάνει τις ακόλουθες θεμελιώδεις υποθέσεις:

- Το χρέος D διατηρείται σταθερό σε όλο το διάστημα $[0, T]$.
- Το ποσοστό ανάκτησης L είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- Το όριο χρεοκοπίας της εταιρείας (default barrier) στο διάστημα $[0, T]$ είναι $L \cdot D$.

Εξετάζοντας τις υποθέσεις αυτές μπορούμε να κάνουμε κάποιες αξιοσημείωτες παρατηρήσεις. Δεδομένου ότι το ποσοστό L είναι μια τυχαία μεταβλητή και το όριο χρεοκοπίας είναι $L \cdot D$, το CreditGrades ουσιαστικά υποθέτει ότι το όριο χρεοκοπίας μάς είναι άγνωστο. Το L , όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, μπορεί να λάβει τέτοιες τιμές ($L > 1$) ώστε το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$ να είναι μεγαλύτερο από D . Όταν $L > 1$ το CreditGrades απαιτεί για την αξία V_t του ενεργητικού, όπου $t \in [0, T]$, να ισχύει $D < L \cdot D < V_t$, ώστε να μην χρεοκοπήσει η εταιρεία. Με άλλα λόγια δεν απαιτεί η αξία του ενεργητικού να είναι μεγαλύτερη μόνο από το χρέος που έχουμε υποθέσει ότι έχει η εταιρεία, αλλά επιπλέον να υπερκαλύπτει ένα ποσό μεγαλύτερο από το χρέος αυτό. Με αυτό τον τρόπο το CreditGrades δέχεται ουσιαστικά ότι το πραγματικό χρέος της εταιρείας μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ποσό D που αναγράφεται στον τελευταίο ισολογισμό. Συνοπτικά, καθιστώντας αβέβαιο το όριο χρεοκοπίας, το μοντέλο όχι μόνο αποδέχεται ότι δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε το πραγματικό χρέος, εκτός κι αν η εταιρεία χρεοκοπήσει, αλλά επιπλέον ενσωματώνει στις εκτιμήσεις του την αβεβαιότητα για το χρέος αυτό.

Ωστόσο το CreditGrades λαμβάνει υπόψη του τις διακυμάνσεις του πραγματικού χρέους έχοντας κόστος, καθώς υποπίπτει σε μια αντίφαση. Εστω ότι για τη χρονική στιγμή $t = T$ η αξία V_T του ενεργητικού είναι τέτοια ώστε $L \cdot D < V_T < D$, όπου $0 < L < 1$. Τότε το μοντέλο δέχεται ότι η εταιρεία δεν χρεοκοπεί εφόσον η αξία

του ενεργητικού της είναι μεγαλύτερη από το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$. Όμως ταυτόχρονα η αξία αυτή είναι μικρότερη από το χρέος D το οποίο έχουμε υποθέσει ότι είναι zero-coupon και λήγει τη στιγμή T . Επομένως, η εταιρεία αδυνατεί να εξοφλήσει το χρέος της και άρα χρεοκοπεί. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η προαναφερθείσα αντίφαση του CreditGrades.

Όπως θα διαπιστώσουμε στην επόμενη παράγραφο, το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$ μπορεί να λάβει οποιεσδήποτε μη αρνητικές τιμές. Το μοντέλο CreditGrades υποθέτει ότι οι πιστωτές επιθυμούν να εξασφαλίσουν μια ελάχιστη απόδοση R_{\min} . Για το λόγο αυτό κάνουν πρώτα μια εκτίμηση $\bar{L} \cdot D$ για το όριο χρεοκοπίας της εταιρείας. Κατόπιν πιστώνουν την εταιρεία ή, ισοδύναμα, προχωρούν στην πώληση του αμερικανικού put option που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό της εταιρείας. Σύμφωνα με το CreditGrades η σύμβαση που υπογράφουν οι πιστωτές με την εταιρεία προβλέπει ότι αν το ενεργητικό της αποκτήσει αξία μικρότερη από $\bar{L} \cdot D$, σε οποιαδήποτε στιγμή $t \in (0, T]$, τότε το put option ακυρώνεται και δίνεται σε αυτούς η ελάχιστη απόδοση R_{\min} . Ως εκ τούτου καθίσταται φανερή η ακόλουθη πολύ σημαντική διαπίστωση: το μοντέλο CreditGrades θεωρεί ότι οι πιστωτές έχουν λάβει θέση σε ένα *barrier option* που έχει υποκείμενο τίτλο το ενεργητικό της εταιρείας. Πιο συγκεκριμένα, το option αυτό είναι ένα *down-and-out put option*. Κι αυτό γιατί όταν η αξία του ενεργητικού είναι μεγαλύτερη από $\bar{L} \cdot D$ τότε οι πιστωτές έχουν θέση¹² σε ένα κανονικό put option, ενώ όταν μειωθεί κάτω από $\bar{L} \cdot D$ τότε το put option ακυρώνεται.

2.2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στα πλαίσια αυτής της παραγράφου θα αναφερθούμε λεπτομερώς στο μηχανισμό που διέπει το μοντέλο CreditGrades. Υποθέτουμε ότι η αξία του ενεργητικού ανά μετοχή (V) είναι μια τυχαία μεταβλητή και θεωρούμε ότι η εταιρεία χρεοκοπεί όταν η αξία V διασχίσει το όριο χρεοκοπίας (default barrier) για πρώτη φορά σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα $[0, T]$. Το όριο χρεοκοπίας θεωρούμε ότι είναι ίσο με την αξία $L \cdot D$ που λαμβάνουν οι πιστωτές στην περίπτωση πτώχευσης, όπου L

¹² Προφανώς η θέση είναι short.

είναι το ποσοστό ανάκτησης (recovery rate, % του χρέους) και D είναι το χρέος της εταιρείας ανά μετοχή.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η αξία του ενεργητικού (V) μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο ακολουθώντας την geometric Brownian motion¹³ που περιγράφεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \sigma \cdot dW_t + \mu_V \cdot dt, \quad (2.1)$$

όπου W είναι μια standard Brownian motion¹⁴, σ είναι η μεταβλητότητα του ενεργητικού και μ_V είναι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του ενεργητικού. Υποθέτουμε ότι $\mu_V = 0$ και θα δικαιολογήσουμε τον ισχυρισμό αυτό σε επόμενο σημείο της παραγράφου.

Σε πραγματικές συνθήκες, η δυσκολία να προσδιορίσουμε με ακρίβεια το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$ προκύπτει καθώς τόσο το ποσοστό ανάκτησης L όσο και το χρέος D της εταιρείας ανά μετοχή δεν είναι σταθερά. Η αβεβαιότητα για το πραγματικό ποσοστό ανάκτησης καθίσταται φανερή, όπως είδαμε στα πλαίσια του CreditMetrics, σε μια σειρά εμπειρικών μελετών. Οι μελέτες αυτές δείχνουν ότι γενικά υπάρχει εξάρτηση του ποσοστού ανάκτησης μιας εταιρείας από τον κλάδο στον οποίο ανήκει, καθώς και από άλλους παράγοντες. Ανάμεσα σε αυτούς συγκαταλέγεται και η απόφαση για το αν θα γίνει εκκαθάριση ή αναδόμηση της εταιρείας μετά τη χρεοκοπία της. Στα πλαίσια του CreditGrades λαμβάνονται υπόψη οι διακυμάνσεις του ποσοστού ανάκτησης L της εταιρείας που εξετάζουμε. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι το ποσοστό αυτό είναι μια τυχαία μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το ποσοστό ανάκτησης L ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο \bar{L} και τυπική απόκλιση λ . Η κατανομή αυτή έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I. $E(L) = \bar{L}$.

II. $Var[\ln(L)] = \lambda^2$.

¹³ Παράρτημα B.1.1, B.1.2.

¹⁴ Παράρτημα B.1.3.

III. $L = \bar{L} \cdot \exp\left(\lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}\right)$ οπότε έπειται ότι:

$$L \cdot D = \bar{L} \cdot D \cdot \exp\left(\lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad (2.2)$$

όπου Z θεωρούμε ότι είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή W .

Οι πραγματικές τιμές των L, D είναι άγνωστες τόσο στην αρχική χρονική στιγμή $t_0 = 0$ του χρονικού ορίζοντα που έχουμε επιλέξει όσο και σε οποιαδήποτε άλλη στιγμή εκτός της χρεοκοπίας. Κι αυτό γιατί μόνο αν κηρύξει πτώχευση η εταιρεία θα μπορούμε να γνωρίζουμε ποιο είναι το αληθινό ποσοστό ανάκτησης και επιπλέον θα αποκαλυφθεί το πραγματικό χρέος της εταιρείας. Θέλοντας να εκφράσει την παραπάνω πραγματικότητα, το CreditGrades υποθέτει ότι η τιμή της μεταβλητής Z είναι άγνωστη κατά την αρχική στιγμή $t_0 = 0$ και ότι φανερώνεται μόνο αφότου η εταιρεία χρεοκοπήσει.

Επιπλέον από την υπόθεση III έπειται ότι:

$$L \cdot D = \bar{L} \cdot D \cdot \exp\left(\lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}\right) > D \Leftrightarrow Z > \frac{\lambda}{2} - \frac{\ln \bar{L}}{\lambda} \text{ για } \lambda \neq 0. \text{ Επομένως, όταν η τυχαία}$$

μεταβλητή Z λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\ln \bar{L}}{\lambda}, +\infty\right)$ έπειται ότι το όριο

χρεοκοπίας $L \cdot D$ είναι μεγαλύτερο από το χρέος D . Με αυτό τον τρόπο, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, το CreditGrades δέχεται ουσιαστικά ότι το πραγματικό χρέος της εταιρείας μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ποσό D που έχουμε υποθέσει¹⁵.

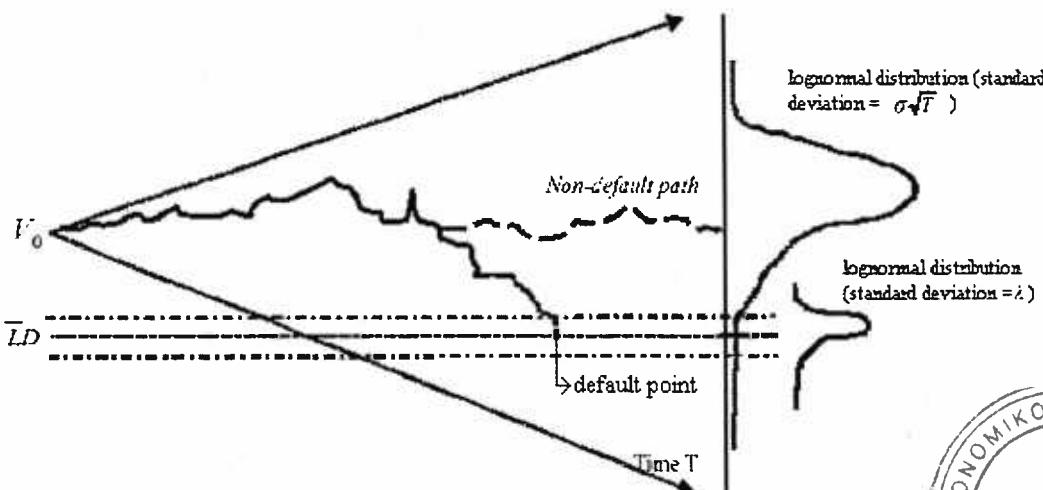
Αν V_0 είναι η αξία του ενεργητικού κατά την αρχική στιγμή $t_0 = 0$, τότε η εταιρεία που εξετάζουμε είναι βιώσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή T αν η αξία V_t του

¹⁵ Μένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό της προηγούμενης παραγράφου ότι το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$ μπορεί να λάβει οποιεσδήποτε μη αρνητικές τιμές. Πράγματι, χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση

$$L \cdot D = \bar{L} \cdot D \cdot \exp\left(\lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}\right) \text{ έπειται ότι για } Z \rightarrow +\infty \text{ το } L \cdot D \rightarrow +\infty. \text{ Επίσης, για } Z \rightarrow -\infty \text{ το}$$

$L \cdot D \rightarrow 0$ οπότε εκμεταλλευόμενοι και τη συνέχεια της συνάρτησης $L \cdot D$ προκύπτει το συμπέρασμα

Σχήμα 2.3: Γραφική απεικόνιση του μοντέλου CreditGrades



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

τύπου (2.1) δεν αποκτήσει τιμή ίση με το όριο χρεοκοπίας του τύπου (2.2) πριν από τη χρονική στιγμή T . Ισοδύναμα η εταιρεία είναι βιώσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή T αν ισχύει η ακόλουθη σχέση¹⁶:

$$V_0 \cdot \exp\left(\sigma \cdot W_t - \frac{\sigma^2 \cdot t}{2}\right) > L \cdot D \cdot \exp\left(\lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \forall t : 0 \leq t < T.$$

(2.3) Εξέλοντας να προσδιορίσουμε το γενικό τύπο που δίνει την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία μέχρι τη στιγμή t , εισάγουμε την τυχαία μεταβλητή $\{X_t, t \geq 0\}$ που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$X_t = \sigma \cdot W_t - \lambda \cdot Z - \frac{\sigma^2 \cdot t}{2} - \frac{\lambda^2}{2}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η αρχή του χρονικού ορίζοντα ($t_0 = 0$) είναι η σημερινή ημέρα. Η σχέση (2.3) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

¹⁶ Αποδεικνύεται ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης (2.1) είναι η ακόλουθη:

$$V_t = V_0 \cdot \exp\left(\sigma \cdot W_t - \frac{\sigma^2 \cdot t}{2}\right) [\text{Musiela, Rutkowski (1998)}].$$

$$X_t > \ln\left(\frac{\bar{L} \cdot D}{V_0}\right) - \lambda^2.$$

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση: η τυχαία μεταβλητή $\{X_t, t \geq 0\}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με τα εξής χαρακτηριστικά¹⁷:

$$E(X_t) = -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \left(t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right), \quad Var(X_t) = \sigma^2 \cdot \left(t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right).$$

Τότε διαπιστώνουμε ότι αν $\lambda \neq 0$ έπειτα $Var(X_0) = \lambda^2 > 0$, δηλαδή εξάγουμε το παράδοξο συμπέρασμα ότι η σημερινή τιμή X_0 της X έχει θετική διακύμανση. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην τυχαία μεταβλητή Z που βρίσκεται στον τύπο της X . Κι αυτό γιατί, όπως ήδη έχουμε εξηγήσει, η σημερινή τιμή της μεταβλητής Z δεν μας είναι γνωστή.

Κατόπιν παρατηρούμε ότι:

$$X_t = \sigma \cdot W_t - \lambda \cdot Z - \frac{\sigma^2 \cdot t}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \Leftrightarrow X_t = \left(\sigma \cdot W_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t\right) - \lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}. \quad \text{Τότε θεωρού-}$$

με την Brownian motion \hat{X} που δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{X}_t = \sigma \cdot W_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t, \quad t \geq 0.$$

Η \hat{X} έχει μεταβλητότητα σ και αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης $-\frac{\sigma^2}{2}$. Από τις

παραπάνω σχέσεις έπειτα ότι $X_t = \hat{X}_t - \lambda \cdot Z - \frac{\lambda^2}{2}$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η

\hat{X} ξεκινά να λαμβάνει τιμές στο παρελθόν και συγκεκριμένα σε χρονικό σημείο που απέχει $\Delta t = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$ από την παρούσα χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Επιπλέον, δεχόμαστε ότι η

¹⁷ Το συμπέρασμα έπειτα καθώς οι Z, W είναι ανεξάρτητες, $Z \sim N(0, I)$ και η Brownian motion W είναι standard οπότε $W \sim N(0, t)$.

πρώτη της τιμή είναι η $\hat{X}_{-\Delta} = 0$. Τότε αποδεικνύεται ότι η X , προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την $\hat{X}_t, \forall t \geq 0$. Κάνοντας αυτή την προσέγγιση παύουμε να ασχολούμαστε με την τυχαία μεταβλητή Z και τη διακύμανση λ^2 και ενδιαφερόμαστε μόνο για την Brownian motion W και τη μεταβλητότητα σ του ενεργητικού. Ως εκ τούτου αντιλαμβανόμαστε ότι αντικαθιστούμε την αβεβαιότητα για το όριο χρεοκοπίας με την αβεβαιότητα για την αξία του ενεργητικού της εταιρείας.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι για τη στοχαστική διαδικασία $Y_t = a \cdot t + b \cdot W_t, t \geq 0$, όπου a, b είναι σταθερές, ισχύει ο ακόλουθος τύπος¹⁸:

$$P(Y_s > y, \forall s < t) = \Phi\left(\frac{a \cdot t - y}{b \cdot \sqrt{t}}\right) - \left[\exp\left(\frac{2 \cdot a \cdot y}{b^2}\right)\right] \cdot \Phi\left(\frac{a \cdot t + y}{b \cdot \sqrt{t}}\right), \quad (2.4)$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Εκείνο που επιθυμούμε να κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε τον τύπο αυτό για την \hat{X} ώστε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να είναι βιώσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή t η εταιρεία που εξετάζουμε. Θέτουμε, λοιπόν, καταρχήν $a = -\frac{\sigma^2}{2}, b = \sigma$ και την τιμή y ίση με το όριο χρεοκοπίας $\ln\left(\frac{\bar{L} \cdot D}{V_0}\right) - \lambda^2$. Κατόπιν παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ξεκινάει να λαμβάνει τιμές από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Εμείς, όμως, έχουμε υποθέσει ότι η μεταβλητή \hat{X} λαμβάνει την πρώτη της τιμή σε χρονική στιγμή που απέχει $\Delta t = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$ από την παρούσα στιγμή $t_0 = 0$. Συνεπώς προκειμένου να εφαρμόσουμε τον τύπο (2.4) για την \hat{X} θα πρέπει να θέσουμε σε αυτόν όπου t το $t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$. Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις παραπάνω αντικαταστάσεις, έπεται ότι η πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία μέχρι τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον ακόλουθο τύπο¹⁹:

¹⁸ Musiela, Rutkowski (1998).

¹⁹ Παρατηρούμε ότι το μοντέλο δίνει το παράδοξο αποτέλεσμα ότι η πιθανότητα επιβίωσης $P(t)$ την παρούσα στιγμή $t=0$ μπορεί να είναι μη μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στη λογαριθμοκανονική κατανομή που έχουμε υποθέσει ότι ακολουθεί το όριο χρεοκοπίας.

$$P(t) = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\ln(d)}{A_t}\right) - d \cdot \Phi\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\ln(d)}{A_t}\right), \quad (2.5i)$$



όπου $d = \frac{V_0}{L \cdot D} \cdot \exp(\lambda^2)$ (2.5ii) και $A_t^2 = \sigma^2 \cdot t + \lambda^2$, $A_t \geq 0$ (2.5iii).

Παρατηρώντας τους τύπους (2.5i, ii, iii), διαπιστώνουμε ότι υπεισέρχονται σε αυτούς η αξία του ενεργητικού (V_0) και η μεταβλητότητά του σ . Ωστόσο οι τιμές αυτών των παραγόντων δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμες στην αγορά. Προκειμένου να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η δεδομένη εταιρεία, κρίνεται αναγκαία η εισαγωγή άλλων όρων των οποίων οι τιμές να μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν. Συμβολίζουμε με S την τιμή της μετοχής που διαθέτει η συγκεκριμένη εταιρεία και με σ_s τη μεταβλητότητά της. Τότε το μοντέλο CreditGrades κάνει τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Η σχέση που συνδέει τη μεταβλητότητα του ενεργητικού (σ) με τη μεταβλητότητα της μετοχής (σ_s) είναι: $\sigma_s = \sigma \cdot \frac{V}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial V}$.
- Για την αξία του ενεργητικού (V) και την τιμή της μετοχής (S) ισχύει ο τύπος: $V = S + L \cdot D$.

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση της δεύτερης υπόθεσης για την παρούσα στιγμή $t_0 = 0$ έπεται ότι: $V_0 = S_0 + \bar{L} \cdot D$, όπου S_0 είναι η τιμή της μετοχής στην αρχή του χρονικού ορίζοντα και \bar{L} είναι μια εκτίμηση για το ποσοστό ανάκτησης L της εξεταζόμενης εταιρείας. Κατόπιν χρησιμοποιώντας την τελευταία αυτή σχέση και την πρώτη υπόθεση έπεται ο ακόλουθος τύπος:

$$\sigma^{(0)} = \sigma_s^{(0)} \cdot \frac{S_0}{S_0 + \bar{L} \cdot D},$$

όπου $\sigma^{(0)}$, $\sigma_s^{(0)}$ είναι αντίστοιχα οι μεταβλητότητες του ενεργητικού και της μετοχής υπολογισμένες κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Εάν λάβουμε υπόψη μας όλα τα παραπάνω έπεται ότι η πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία μέχρι τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:



$$P(t) = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\ln(d)}{A_t}\right) - d \cdot \Phi\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\ln(d)}{A_t}\right), \quad (2.6i)$$

όπου $d = \frac{S_0 + \bar{L} \cdot D}{\bar{L} \cdot D} \cdot \exp(\lambda^2)$ (2.6ii)

και $A_t^2 = (\sigma^{(0)})^2 \cdot t + \lambda^2 = \left(\sigma_S^{(0)} \cdot \frac{S_0}{S_0 + \bar{L} \cdot D}\right)^2 \cdot t + \lambda^2, A_t \geq 0$ (2.6iii).

Μια υπόθεση που λάβαμε υπόψη μας είναι ότι για την αναμενόμενη απόδοση του ενεργητικού (V) ισχύει $\mu_V = 0$. Όταν επιθυμούμε να εκτιμήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο τότε δεν μας ενδιαφέρει τόσο η απόδοση που θα έχει το ενεργητικό στο χρονικό ορίζοντα που έχουμε επιλέξει όσο η διαφορά της απόδοσης αυτής από την απόδοση του ορίου χρεοκοπίας. Μια βασική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι, για όλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα, η μέση απόδοση, έστω μ , της μετοχής S είναι ίση με τη μέση απόδοση μ που έχει το όριο χρεοκοπίας $L \cdot D$. Αυτό επιτυγχάνεται αν η εταιρεία αυξάνει το χρέος της ή εναλλακτικά αν αυξάνει το μέρισμα της μετοχής. Τότε επειδή $V = S + L \cdot D$ έπεται ότι για να μην υπάρχει δυνατότητα για arbitrage θα πρέπει η μέση απόδοση του ενεργητικού V να είναι επίσης μ και, επομένως, η διαφορά των αποδόσεων των V και $L \cdot D$ είναι ίση με το μηδέν ($\mu - \mu = 0$)²⁰.

Υποθέτουμε ότι $p(t) = -\frac{\ln P(t)}{t}$ είναι η ετήσια πιθανότητα χρεοκοπίας. Ως

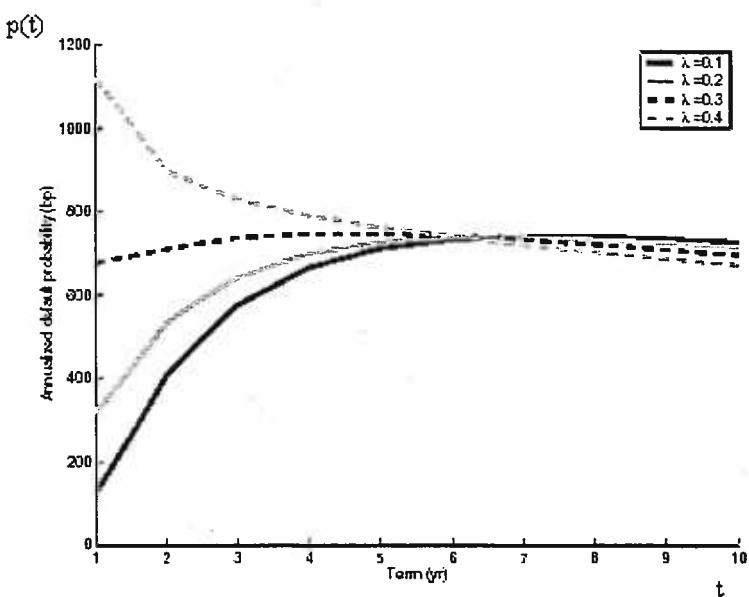
$P(t)$ θεωρούμε την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εξεταζόμενη εταιρεία έως τη χρονική στιγμή t , όπου ο χρόνος t μετριέται σε έτη. Στην περίπτωση που ο χρονικός ορίζοντας $[0, t]$ είναι μικρής διάρκειας, δηλαδή όταν $t \rightarrow 0$, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι παράγοντες, εκτός του t , που επηρεάζουν σε μεγαλύτερο βαθμό την πιθανότητα χρεοκοπίας $p(t)$ είναι οι λ , d . Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\lambda \neq 0$. Τότε γνωρίζουμε ότι $A_t^2 = \sigma^2 \cdot t + \lambda^2, A_t \geq 0$. Επειδή $t \rightarrow 0$ από την τελευταία σχέση έχουμε διαδοχικά: $A_t^2 = \sigma^2 \cdot t + \lambda^2 \Rightarrow A_t^2 \rightarrow \lambda^2 \Rightarrow A_t \rightarrow |\lambda|$. Εκμεταλλευόμενοι την τελευταία σχέση και τη συνέχεια της συνάρτησης πυκνότητας Φ της κατανομής $N(0, 1)$, έπεται από τον τύπο (2.5i) ότι $P(t) \rightarrow \Phi\left(-\frac{|\lambda|}{2} + \frac{\ln(d)}{|\lambda|}\right) - d \cdot \Phi\left(-\frac{|\lambda|}{2} - \frac{\ln(d)}{|\lambda|}\right)$, καθώς $t \rightarrow 0$. Ως εκ τούτου η $P(t)$ και κατ' επέκταση η ετήσια πιθανότητα χρεοκοπίας

²⁰ Finkelstein (2001).

$p(t)$, καθώς $p(t) = -\frac{\ln P(t)}{t}$, επηρεάζονται κατά κύριο λόγο από τις παραμέτρους λ , d όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι μικρής διάρκειας.

Θέλοντας να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της $p(t)$ σε σχέση με το χρόνο t για διαφορετικές τιμές του συντελεστή λ , υποθέτουμε ότι $\frac{V_0}{L \cdot D} = 2$ και $\sigma = 0,25$. Τότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 2.4 για εναλλακτικές τιμές του λ .

Σχήμα 2.4: Γραφική απεικόνιση της επιρροής του συντελεστή λ στην ετήσια πιθανότητα χρεοκοπίας $\left(\frac{V_0}{L \cdot D} = 2, \sigma = 0,25 \right)$



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι σύντομος τότε η αβεβαιότητα για το όριο χρεοκοπίας επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την ετήσια πιθανότητα χρεοκοπίας $p(t)$. Κι αυτό γιατί διαπιστώνουμε ότι για διαφορετικές τιμές του λ η πιθανότητα $p(t)$ λαμβάνει σημαντικά διαφοροποιημένες τιμές. Συνήθως, όπως δείχνει η γραφική απεικόνιση, όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι μικρής διάρκειας τότε όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής λ εταιρειών με αρκετά υψηλό χρέος τόσο πιο πιθανή είναι η χρεοκοπία τους. Εάν, όμως, θεωρήσουμε μεγαλύτερους χρονικούς

ορίζοντες, τότε παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του Σχήματος 2.4 από αύξουσες γίνονται φθίνουσες καθώς αυξάνεται η τιμή του συντελεστή λ .

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, όταν μια τράπεζα χορηγεί ένα εταιρικό δάνειο τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρίσκεται στην ισοδύναμη θέση αγοράς ενός ομολόγου της εταιρείας αυτής. Υποθέτουμε ότι η τράπεζα επιθυμεί να αντισταθμίσει τον πιστωτικό κίνδυνο που ενέχει η χορήγηση του εταιρικού δανείου, ή ισοδύναμα η αγορά του ομολόγου, αναλαμβάνοντας το ρόλο του αγοραστή ενός credit default swap (CDS)²¹. Θεωρούμε ότι η υποχρέωση αναφοράς του CDS (reference obligation) είναι ένα ομόλογο της εταιρείας που δανειοδοτείται (εταιρεία αναφοράς ή reference entity). Έστω ότι r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk free interest rate) και R είναι το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης του χρέους για την εταιρεία αναφοράς του CDS²². Υποθέτουμε, επίσης, ότι το επιτόκιο r είναι σταθερό, η συνολική χρονική διάρκεια του CDS είναι t και η πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία αναφοράς στο χρονικό ορίζοντα $[0, t]$ είναι αυτή που δίνεται από το μοντέλο CreditGrades. Τότε το CreditGrades εκτιμάει τη θεωρητική τιμή w του συνεχώς ανατοκιζόμενου CDS spread χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο²³:

$$w = r \cdot (1 - R) \cdot \frac{1 - P(0) + (G(t + \xi) - G(\xi)) \cdot \exp(r \cdot \xi)}{P(0) - P(t) \cdot \exp(-r \cdot t) - (G(t + \xi) - G(\xi)) \cdot \exp(r \cdot \xi)}, \quad (2.7)$$

όπου $\xi = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$ και η συνάρτηση G δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$G(u) = d^{z+\frac{1}{2}} \cdot \Phi\left(-\frac{\ln(d)}{\sigma \cdot \sqrt{u}} - z \cdot \sigma \cdot \sqrt{u}\right) + d^{-z+\frac{1}{2}} \cdot \Phi\left(-\frac{\ln(d)}{\sigma \cdot \sqrt{u}} + z \cdot \sigma \cdot \sqrt{u}\right)$$

$$\text{με } z = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot r}{\sigma^2}}.$$

²¹ Παράρτημα B.2.

²² Ωα πρέπει να τονίσουμε ότι το ποσοστό R είναι διαφορετικό από το L . Κι αυτό γιατί το R αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη κατηγορία χρέους (seniority class) στην οποία ανήκει το εν λόγω ομόλογο. Αντιθέτως, όμως, το L αποτελεί το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης που έχει προκύψει ως ο μέσος των ποσοστών που αντιστοιχούν σε όλες τις κατηγορίες χρέους της εταιρείας αναφοράς του CDS.

²³ CreditGrades technical document (2002).

Έστω ότι μας είναι γνωστή η τρέχουσα αξία (market value) του CDS spread. Τότε ορίζουμε ως τεκμαρτή μεταβλητότητα του ενεργητικού (implied asset volatility) την τιμή του $\sigma^{(0)}$ για την οποία η εφαρμογή των τύπων (2.6i,ii,iii) και (2.7) θα μας δώσει ως CDS spread την τρέχουσα αξία του. Αντίστοιχα ορίζεται η τεκμαρτή μεταβλητότητα της μετοχής (implied equity volatility) ως η τιμή του $\sigma_S^{(0)}$ για την οποία η χρήση των τύπων (2.6) και (2.7) δίνει στο CDS spread (w) την τρέχουσα αξία του. Οι τεκμαρτές μεταβλητότητες είναι οι τιμές που δίνει η αγορά στα $\sigma^{(0)}$, $\sigma_S^{(0)}$, δηλαδή οι λεγόμενες «πραγματικές τιμές» των $\sigma^{(0)}$, $\sigma_S^{(0)}$.

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο CreditGrades εκείνο που επιδιώκουμε είναι να εκτιμήσουμε με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια την πιθανότητα να είναι βιώσιμη μια εταιρεία. Για να είναι περισσότερο ακριβείς οι εκτιμήσεις μας θα πρέπει να δίνουμε στις παραμέτρους που εμφανίζονται στους τύπους (2.6i,ii,iii) τιμές ταυτόσημες ή, τουλάχιστον, κατά προσέγγιση ίσες με τις πραγματικές τιμές. Όπως είδαμε, εφαρμόζοντας το CreditGrades μπορούμε να συμπεράνουμε τις πραγματικές τιμές των $\sigma^{(0)}$, $\sigma_S^{(0)}$ χρησιμοποιώντας την τρέχουσα αξία του CDS spread. Ωστόσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την αξία αυτή μόνο για ένα περιορισμένο αριθμό εταιρειών, καθώς σε πολλές αγορές, όπως η ελληνική, δεν έχουν εισαχθεί ακόμη τα CDS. Παράλληλα η RiskMetrics Group επιθυμεί προφανώς να καταστήσει το CreditGrades εφαρμόσιμο για μεγάλο αριθμό εταιρειών. Για το λόγο αυτό αναζητεί εκτιμητές που να μας βοηθούν να προσεγγίσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τις πραγματικές τιμές των $\sigma^{(0)}$, $\sigma_S^{(0)}$.

2.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΥ

Στην προσπάθειά της να εκτιμήσει τις πραγματικές τιμές που έχουν οι μεταβλητότητες του ενεργητικού και της μετοχής την αρχική στιγμή $t_0 = 0$, η RiskMetrics Group διεξήγαγε μια εμπειρική μελέτη. Σε αυτή την έρευνα έλαβε υπόψη της ένα δείγμα από 122 εταιρείες της αμερικανικής αγοράς που συμμετείχαν σε διαφορετικούς κλάδους. Επιπλέον, το επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας διέφερε από

εταιρεία σε εταιρεία. Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται λεπτομέρειες σχετικές με το δείγμα.

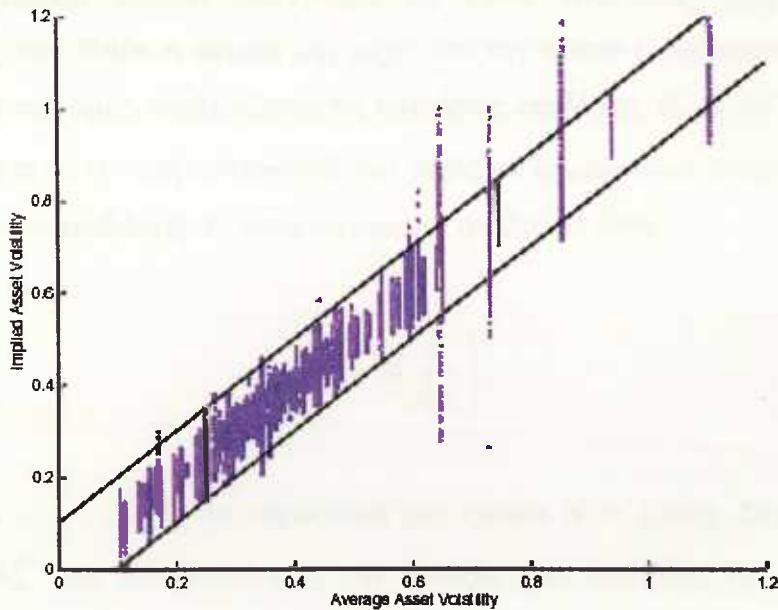
| Πίνακας 2.3: Περιγραφή του δείγματος της RiskMetrics Group | | | |
|------------------------------------------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|
| Βαθμολογία της S&P | Αριθμός εταιρειών | Εταιρικός κλάδος | Αριθμός εταιρειών |
| AAA | 1 | Basic materials | 12 |
| AA | 9 | Communications | 19 |
| A | 38 | Consumer, cyclical | 24 |
| BBB | 53 | Consumer, non-cycl. | 22 |
| BB | 17 | Energy | 12 |
| B | 3 | Financial | 1 |
| CCC | 1 | Industrial | 19 |
| | | Technology | 7 |
| | | Utilities | 6 |

Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

Η RiskMetrics Group μελέτησε CDSs που είχαν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: i) χρονική διάρκεια (maturity) 5 έτη και ii) εταιρείες αναφοράς τις εταιρείες του δείγματος. Κατέγραψε ορισμένες τρέχουσες τιμές (market values) που έλαβαν τα CDS spreads κατά το χρονικό διάστημα Μάιος 2000 - Αύγουστος 2001. Συνολικά κατέγραψε 6.194 τέτοιες τιμές. Επιπλέον, στα πλαίσια της μελέτης, έγινε η υπόθεση ότι η κατανομή του ποσοστού ανάκτησης L για όλες τις εταιρείες έχει μέσο $\bar{L} = 0,50$ και τυπική απόκλιση $\lambda = 0,30$.

Στο επόμενο στάδιο της έρευνας που διεξήγαγε, η RiskMetrics Group χρησιμοποίησε τον τύπο (2.7) λαμβάνοντας διαδοχικά για τιμή w καθεμιά από τις 6.194 τρέχουσες τιμές (market values) των CDS spreads που είχε ήδη παρατηρήσει. Με αυτό τον τρόπο προέκυψαν 6.194 πραγματικές τιμές της μεταβλητότητας του ενεργητικού όλων των εταιρειών. Οι πραγματικές τιμές που αντιστοιχούν σε μια εταιρεία είναι υπολογισμένες σε διαφορετικές στιγμές της περιόδου Μάιος 2000 - Αύγουστος 2001 και δεν είναι απαραίτητα όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Κατόπιν η RiskMetrics Group υπολόγισε τους μέσους των πραγματικών τιμών για κάθε εταιρεία ξεχωριστά και διαπίστωσε ότι οι πραγματικές αυτές τιμές παρουσίαζαν μια αξιοσημείωτη σταθερότητα γύρω από το μέσο τους. Η παρατήρηση αυτή καθίσταται φανερή από το Σχήμα 2.5 στο οποίο παρουσιάζονται οι πραγματικές τιμές συναρτήσει των μέσων τους.

Σχήμα 2.5: Οι πραγματικές τιμές της μεταβλητότητας του ενεργητικού ως συνάρτηση των μέσων τους (γραφική απεικόνιση για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές τιμές)



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

Στη συνέχεια η RiskMetrics Group έκανε εκτιμήσεις για τη μεταβλητότητα του ενεργητικού όλων των εταιρειών. Για τις εκτιμήσεις αυτές ακολούθησε τις δύο μεθόδους που περιγράφονται παρακάτω.

A) Πρώτη μέθοδος: Εφαρμογή του exponentially weighted moving average model (EWMA model)²⁴.

Έχοντας τις πραγματικές τιμές της μεταβλητότητας του ενεργητικού όλων των εταιρειών, η RiskMetrics Group θέλησε να δώσει μεγαλύτερη βαρύτητα στις περισσότερο πρόσφατες τιμές. Για το λόγο αυτό σε κάθε εταιρεία εφάρμοσε το EWMA model για τη χρονολογική σειρά $(\sigma_t)_{t=1, \dots, T_i}$ των πραγματικών τιμών, όπου T_i είναι ο αριθμός των πραγματικών αυτών τιμών για την εταιρεία i . Ος decay factor ορίστηκε το 0,94.

B) Δεύτερη μέθοδος: Εκτιμήσεις με βάση τις ιστορικές τιμές των μετοχών.

²⁴ Παράρτημα B.3.



Για κάθε εταιρεία χρησιμοποιούμε τις ιστορικές τιμές των μετοχών. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε ημέρα παρατήρησης t των CDS spreads της εκάστοτε εταιρείας (market values) επιλέγουμε τις 1.000 τελευταίες ημερήσιες τιμές κλεισίματος που έλαβε η μετοχή της μέχρι και την ημέρα t . Χρησιμοποιώντας τις ημερήσιες αυτές τιμές, υπολογίζουμε τις ημερήσιες αποδόσεις R_i , με την υπόθεση ότι αναφερόμαστε σε συνεχή ανατοκισμό και χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη το μέρισμα της μετοχής. Οι αποδόσεις R_i δίνονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$R_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right),$$

όπου $i = 2, \dots, N$ (στην περίπτωσή μας έχουμε $N = 1.000$). Στη συνέχεια η εκτίμηση $\hat{\sigma}_s^{(t)}$ της μεταβλητότητας της μετοχής μιας εταιρείας για την ημέρα t υπολογίζεται ως η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων R_i , δηλαδή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\sigma}_s^{(t)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2},$$

όπου $N = 1.000$. Τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.6iii) έπεται ότι η εκτίμηση $\hat{\sigma}^{(t)}$ που γίνεται την ημέρα t για τη μεταβλητότητα του ενεργητικού της εταιρείας είναι:

$$\hat{\sigma}^{(t)} = \hat{\sigma}_s^{(t)} \cdot \frac{S_t}{S_t + L \cdot D},$$

όπου S_t είναι η τιμή κλεισίματος της μετοχής την ημέρα t .

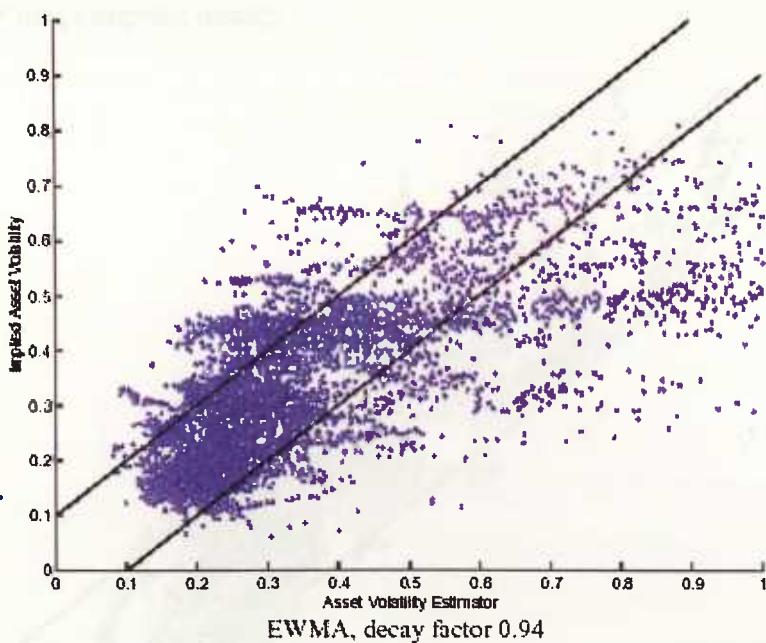
Στα Σχήματα 2.6 και 2.7 παρουσιάζονται οι γραφικές απεικονίσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή των δύο μεθόδων. Κάθε σημείο των απεικονίσεων αυτών αντιστοιχεί σε μια πραγματική τιμή της μεταβλητότητας του ενεργητικού μιας εταιρείας και κάθε τέτοια τιμή δίνεται ως συνάρτηση της εκτίμησής της που υπολογίζεται βάσει των μεθόδων. Οι γραφικές απεικονίσεις είναι για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές αυτές τιμές. Καθίσταται φανερό ότι οι εκτιμήσεις

που γίνονται με τη χρήση των 1.000 ιστορικών τιμών των μετοχών είναι πολύ περισσότερο ακριβείς από αυτές που προκύπτουν εφαρμόζοντας το EWMA model. Οι εκτιμήσεις που βασίζονται κατά κύριο λόγο στις πρόσφατες τιμές δεν είναι ικανοποιητικά ακριβείς στις περισσότερες περιπτώσεις. Μια τέτοια περίπτωση απεικονίζεται στη γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων του EWMA model. Αντίθετα, όταν λαμβάνουμε υπόψη μας τιμές από μια μεγάλη περίοδο του παρελθόντος τότε συνήθως είμαστε σε θέση να κάνουμε αρκετά ακριβείς εκτιμήσεις. Τα αποτελέσματα που δίνει η δεύτερη μέθοδος, κάνοντας χρήση των 1.000 ιστορικών τιμών των μετοχών, επιβεβαιώνουν την παρατήρηση αυτή. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι οι εκτιμήσεις της μεταβλητότητας του ενεργητικού μιας εταιρείας θα χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία αυτή στο χρονικό ορίζοντα που έχουμε επιλέξει. Όμως, οι χρονικοί ορίζοντες που επιλέγουν οι τράπεζες είναι συνήθως αρκετών ετών. Κι αυτό γιατί οι δανειακές συμβάσεις προβλέπουν, στις περισσότερες περιπτώσεις, μια περίοδο εξόφλησης πολλών ετών. Ως εκ τούτου, η εκτίμηση της μεταβλητότητας του ενεργητικού δεν θα μπορούσε παρά να βασίζεται σε πολλές ιστορικές τιμές από μια μεγάλη χρονική περίοδο.

Στα πλαίσια της εμπειρικής της μελέτης, η RiskMetrics Group εξέτασε στη συνέχεια τη συμπεριφορά των εκτιμήσεων της δεύτερης μεθόδου σε σχέση με τη βαθμολογία που έδινε η S&P στις εταιρείες του δείγματος. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.8. Το σχήμα αυτό είναι το ίδιο με το Σχήμα 2.7 με τη διαφορά όμως ότι κάθε σημείο μάς πληροφορεί και για τη βαθμολογία που έδωσε η S&P στην εταιρεία στην οποία αυτό αντιστοιχεί. Παρατηρώντας το Σχήμα 2.8 διαπιστώνουμε ότι οι εκτιμήσεις της μεθόδου είναι ικανοποιητικά ακριβείς για όλες τις βαθμολογίες. Ωστόσο βλέπουμε ότι υπάρχει μια τάση οι εκτιμήσεις που αντιστοιχούν σε εταιρείες με υψηλή βαθμολογία να είναι μικρότερες από τις πραγματικές τιμές. Επιπλέον, η μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα για εταιρείες που έχουν χαμηλό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας.

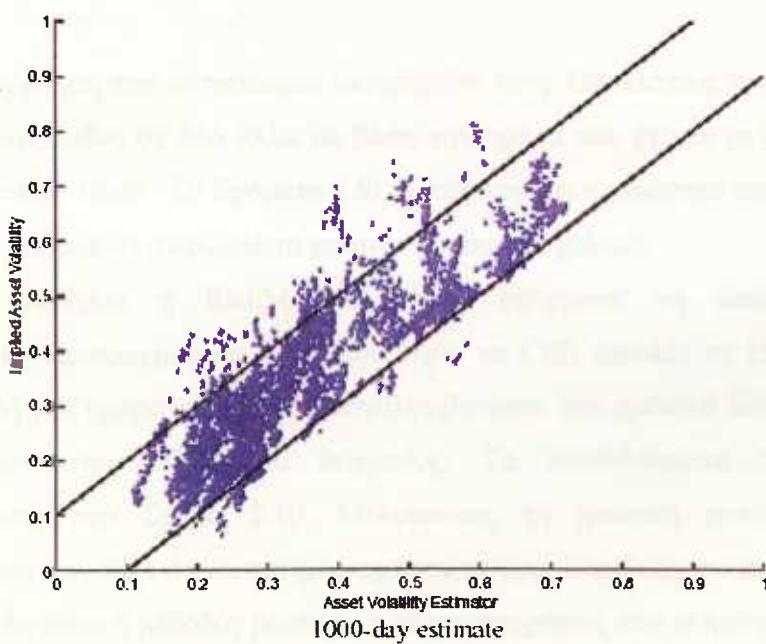
Προκειμένου να δείξει εμπειρικά την αξιοπιστία της δεύτερης μεθόδου, η RiskMetrics Group διαίρεσε τα αποτελέσματα της μελέτης σε δύο χρονικές περιόδους. Οι πραγματικές τιμές της μεταβλητότητας του ενεργητικού όλων των εταιρειών, καθώς και οι εκτιμήσεις τους, έχουν χωριστεί σε εκείνες που καταγράφηκαν πριν από την 1^η Ιανουαρίου 2001 και σε εκείνες που καταγράφηκαν μετά από την ημέρα αυτή. Στα Σχήματα 2.9i,ii παρουσιάζονται οι πραγματικές αυτές

Σχήμα 2.6: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της πρώτης μεθόδου (για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές τιμές)



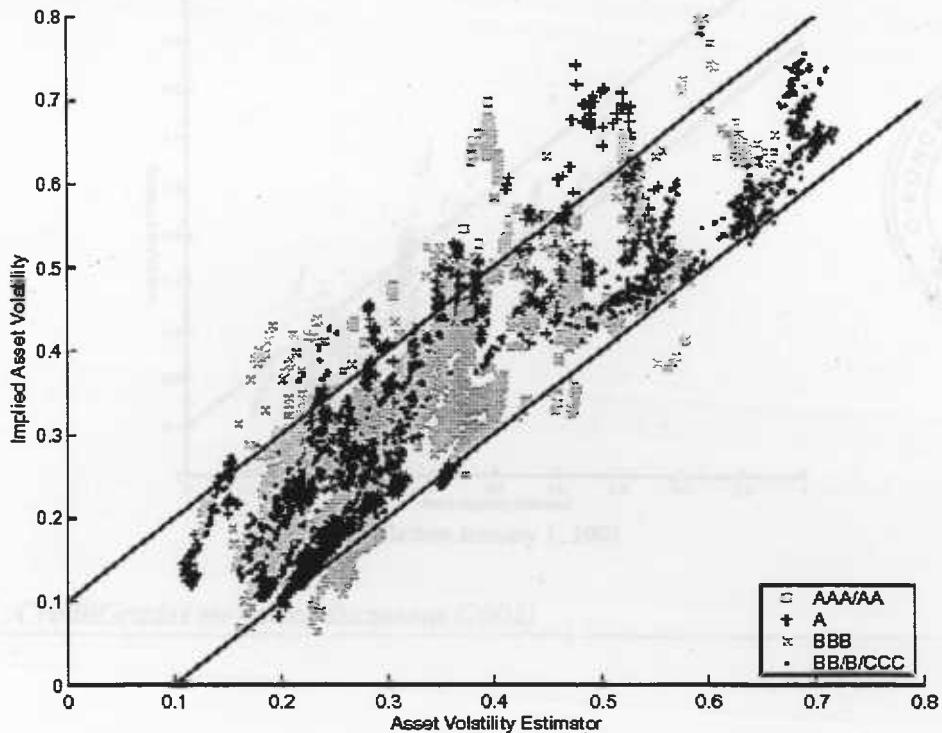
Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

Σχήμα 2.7: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της δεύτερης μεθόδου (για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές τιμές)



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

Σχήμα 2.8: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της δεύτερης μεθόδου (για όλες τις εταιρείες, όλες τις πραγματικές τιμές και με αναγραφή της βαθμολογίας που έδωσε η S&P στις εταιρείες αυτές)



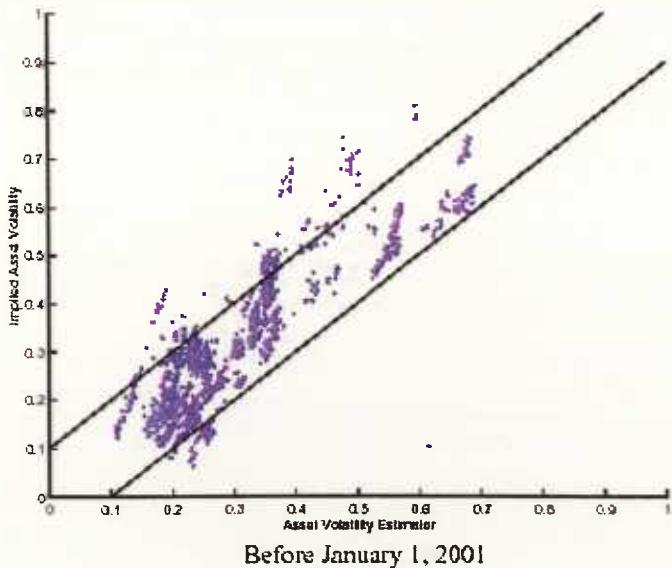
Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

τιμές ως συνάρτηση των αντίστοιχων εκτιμήσεών τους. Ουσιαστικά πρόκειται για το Σχήμα 2.7 διαιρεμένο σε δύο άλλα με βάση την ημέρα που έγιναν οι παρατηρήσεις των πραγματικών τιμών. Τα Σχήματα 2.9i, ii δείχνουν ότι η ποιότητα των εκτιμήσεων της μεθόδου παραμένει αναλλοίωτη με την πάροδο του χρόνου.

Στη συνέχεια η RiskMetrics Group εφάρμοσε τη δεύτερη μέθοδο παρατηρώντας τις πραγματικές τιμές που είχαν τα CDS spreads τη 15^η Νοεμβρίου 2001, δηλαδή μια ημέρα που δεν συμπεριλαμβανόταν στο χρονικό διάστημα Μάιος 2000 - Αύγουστος 2001 του δείγματος. Τα αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.10. Μελετώντας τη γραφική αυτή απεικόνιση, διαπιστώνουμε και πάλι ότι οι εκτιμήσεις ήταν αρκετά ακριβείς, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση όπου η μέθοδος βασίστηκε σε παρατηρήσεις που ελήφθησαν σε ημέρα εκτός της περιόδου που είχαμε ορίσει.

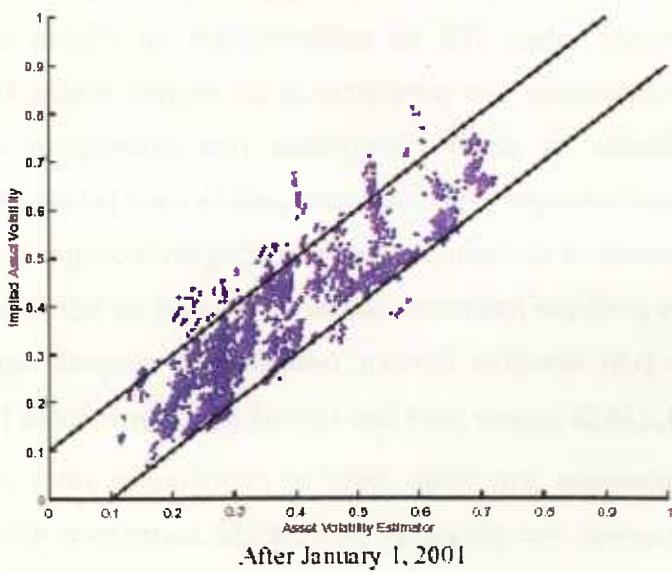
Συμπερασματικά, από την εμπειρική μελέτη της RiskMetrics Group διαπιστώνουμε ότι η πραγματική τιμή της μεταβλητότητας του ενεργητικού την

Σχήμα 2.9i: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της δεύτερης μεθόδου (για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές τιμές που καταγράφηκαν πριν την 1^η Ιανουαρίου 2001)



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

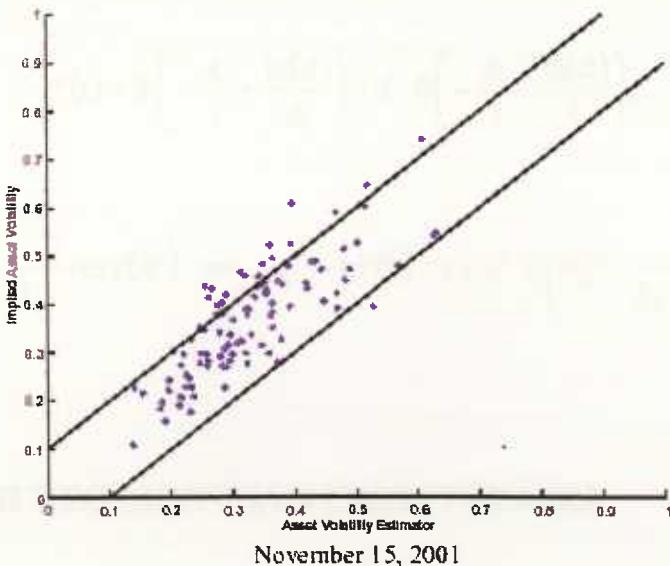
Σχήμα 2.9ii: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της δεύτερης μεθόδου (για όλες τις εταιρείες και όλες τις πραγματικές τιμές που καταγράφηκαν μετά την 1^η Ιανουαρίου 2001)



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)



Σχήμα 2.10: Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της δεύτερης μεθόδου (για όλες τις εταιρίες και όλες τις πραγματικές τιμές που καταγράφηκαν τη 15^η Νοεμβρίου 2001)



Πηγή: CreditGrades technical document (2002)

ημέρα t (implied asset volatility) μπορεί να εκτιμηθεί με ικανοποιητική ακρίβεια με τη δεύτερη μέθοδο. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τις 1.000 τελευταίες ημερήσιες τιμές κλεισίματος που έλαβε η μετοχή μέχρι και την ημέρα t . Τα αποτελέσματα είναι περίπου το ίδιο ακριβή αν περιοριστούμε σε 252 τιμές, δηλαδή ενός έτους, ή περισσότερες. Η μελέτη δείχνει ότι οι εκτιμήσεις που προκύπτουν είναι σχεδόν το ίδιο αξιόπιστες ανεξάρτητα από παράγοντες, όπως το επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας της εταιρείας και ο κλάδος στον οποίο δραστηριοποιείται.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε το σκοπό μας. Το μοντέλο CreditGrades φιλοδοξεί να υπολογίσει με ικανοποιητική ακρίβεια την πιθανότητα να είναι βιώσιμη μια εταιρεία σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα $[0, t]$ που ξεκινάει την ημέρα $t_0 = 0$. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τους τύπους (2.6i,ii,iii). Προκειμένου, όπως είδαμε, να είναι εφαρμόσιμοι οι τύποι αυτοί στις περισσότερες εταιρίες, η RiskMetrics Group αναζήτησε αξιόπιστους εκτιμητές των πραγματικών τιμών που έχουν οι $\sigma^{(0)}$, $\sigma_s^{(0)}$ την ημέρα $t_0 = 0$. Η εμπειρική μελέτη έδειξε ότι μια ικανοποιητικά ακριβής εκτίμηση $\hat{\sigma}_s^{(0)}$ προκύπτει χρησιμοποιώντας τις 1.000 τελευταίες ημερήσιες τιμές κλεισίματος που έλαβε η μετοχή μέχρι και την ημέρα

$t_0 = 0$. Ως εκ τούτου, το μοντέλο CreditGrades εκτιμάει την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία μέχρι τη χρονική στιγμή t από τον παρακάτω τύπο:

$$P(t) = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\ln(d)}{A_t}\right) - d \cdot \Phi\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\ln(d)}{A_t}\right),$$

όπου $d = \frac{S_0 + \bar{L} \cdot D}{L \cdot D} \cdot \exp(\lambda^2)$ και $A_t^2 = (\hat{\sigma}^{(0)})^2 \cdot t + \lambda^2 = \left(\hat{\sigma}_S^{(0)} \cdot \frac{S_0}{S_0 + L \cdot D}\right)^2 \cdot t + \lambda^2$,

$$A_t \geq 0.$$

2.4. KRITIKΗ ΣΤΟ MONTEΛΟ CREDITGRADES

Το μοντέλο CreditGrades δίνει τη δυνατότητα στις τράπεζες να εκτιμήσουν την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας εταιρείας που έχουν ήδη δανειοδοτήσει ή σκέφτονται να το κάνουν στο μέλλον. Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις μπορούν να διακρίνουν τα περισσότερο ζημιογόνα δάνεια και να τα πουλήσουν ή να κάνουν αντιστάθμιση κινδύνου σε αυτά. Επιπλέον, μελετώντας το CreditGrades, διαπιστώνουμε ότι είναι ιδιαίτερα απλή η εκτίμηση της πιθανότητας να είναι βιώσιμη η εταιρεία που εξετάζουμε. Κι αυτό γιατί τα inputs, τα οποία εμφανίζονται στο σχετικό τύπο, μπορούν να προσδιοριστούν χωρίς μεγάλες δυσκολίες. Ενδεικτικά, στις παραμέτρους αυτές συγκαταλέγονται οι μετοχικές αποδόσεις που διατίθενται ελεύθερα και εύκολα μπορεί να προμηθευτεί κανείς.

Η μεθοδολογία του CreditGrades έχει ως αφετηρία τα άρθρα των Black, Scholes (1973) και Merton (1974), τα οποία είναι ιδιαίτερα καινοτόμα και συγκαταλέγονται ανάμεσα στα πιο σημαντικά των τελευταίων δεκαετιών²⁵. Το γεγονός αυτό καθιστά το μοντέλο περισσότερο αξιόπιστο. Μάλιστα εκείνο το σημείο στο οποίο πλεονεκτεί το CreditGrades έναντι άλλων structural models είναι η προσπάθειά του να προσαρμόσει τα άρθρα αυτά σε πραγματικές συνθήκες. Στα πλαίσια αυτής της προσπάθειας, το μοντέλο λαμβάνει υπόψη του το ενδεχόμενο να

²⁵ Για το λόγο αυτό άλλωστε απονεμήθηκε στους M. Scholes και R. Merton το βραβείο Nobel Οικονομικής Επιστήμης το 1997.

χρεοκοπήσει η εταιρεία σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του ορίζοντα που έχουμε επιλέξει. Επίσης, ενσωματώνει στις εκτιμήσεις του την αβεβαιότητα που έχουμε για το πραγματικό όριο χρεοκοπίας. Με αυτό τον τρόπο, όπως είδαμε, ουσιαστικά λαμβάνει υπόψη του τις διακυμάνσεις του χρέους της εταιρείας.

Από την άλλη πλευρά, όμως, στα πλαίσια του CreditGrades κάνουμε και μια σειρά από υποθέσεις οι οποίες ίσως μας οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Όπως είδαμε, υποθέτοντας ότι το όριο χρεοκοπίας ακολουθεί τη συγκεκριμένη λογαριθμοκανονική κατανομή, το CreditGrades μπορεί να θεωρήσει πως μια εταιρεία εξακολουθεί να είναι βιώσιμη ενώ στην πραγματικότητα έχει χρεοκοπήσει. Επιπλέον, η εφαρμογή του μοντέλου δεν συνιστάται για τράπεζες ή άλλους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Κι αυτό γιατί οι εταιρείες αυτές έχουν συνήθως ιδιαίτερα υψηλό χρέος που οδηγεί το CreditGrades σε πιθανότητες χρεοκοπίας μεγαλύτερες από τις πραγματικές [Deutsche Bank, (2002)]. Υπάρχουν παράγοντες που καθιστούν στις περισσότερες περιπτώσεις τις πραγματικές πιθανότητες χρεοκοπίας των τραπεζών εμφανώς μικρότερες από τις εκτιμήσεις του CreditGrades. Ενδεικτικά, στις Η.Π.Α. μεγάλα ποσοστά των τραπεζικών καταθέσεων είναι ασφαλισμένα από την F.D.I.C. (insured deposits). Επίσης, στις περισσότερες χώρες οι τράπεζες βρίσκονται υπό κυβερνητική επιτήρηση και επωφελούνται από ειδικές νομικές διατάξεις που αποσκοπούν στη διάσωση των προβληματικών τραπεζών.

Επιπλέον, στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρησιμοποιούμε εκτιμήσεις οι οποίες καθιστούν συνήθως τα αποτελέσματα του CreditGrades λιγότερο ακριβή. Ενδεικτικά, εκτιμάμε τη μεταβλητότητα της μετοχής αλλά θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι η ακρίβεια της εκτίμησής μας εξαρτάται από τον αριθμό των ιστορικών τιμών που διαθέτουμε. Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι το CreditGrades εφαρμόζεται μόνο σε εταιρείες που διαθέτουν μετοχές διαπραγματεύσιμες σε κάποιο χρηματιστήριο. Ως εκ τούτου, περιορίζεται η δυνατότητα εφαρμογής του αποκλείοντας ένα μεγάλο αριθμό εταιρειών που δεν είναι εισηγμένες σε χρηματιστηριακή αγορά.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για το CreditGrades συγκρίνοντάς το με το CreditMetrics. Εξετάζοντας τα δύο μοντέλα, διαπιστώνουμε ότι το CreditMetrics βασίζεται, κατά κύριο λόγο, στις εκτιμήσεις εταιρειών, όπως οι Moody's, S&P. Αντίθετα, το μοντέλο CreditGrades δίνει τη μεγαλύτερη βαρύτητα στην πορεία που ακολουθεί η μετοχή της εξεταζόμενης εταιρείας. Μελετώντας τα ιστορικά στοιχεία παρατηρεί κανείς ότι μια ισχυρή ένδειξη

για την πιστοληπτική ικανότητα μιας εταιρείας είναι η πορεία της μετοχής της, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μια εταιρεία θα χρεοκοπήσει σίγουρα αν η μετοχή της σημειώσει μεγάλη πτώση. Ιδιαίτερα τα τελευταία έτη, οι τιμές των μετοχών παρείχαν ανησυχητικές ενδείξεις για την οικονομική κατάσταση μεγάλου αριθμού εταιρειών αρκετά πριν τη χρεοκοπία τους. Όμως, οι βαθμολογίες που απέδιδαν στις εταιρείες αυτές οι Moody's, S&P γίνονταν χαμηλότερες αρκετό χρόνο μετά τη μείωση που εμφάνιζαν οι τιμές των μετοχών.

To CreditGrades ενδιαφέρεται μόνο για το ενδεχόμενο χρεοκοπίας της εξεταζόμενης εταιρείας. Δεν λαμβάνει, δηλαδή, υπόψη του τις τυχόν αλλαγές που μπορεί να υπάρξουν στην πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας. Αντίθετα το CreditMetrics εκτιμάει τη ζημία που ενδεχομένως έχουμε δανειοδοτώντας μια εταιρεία, όχι μόνο στην περίπτωση που αυτή χρεοκοπήσει, αλλά και γενικότερα στην περίπτωση που μεταβληθεί η πιστοληπτική της ικανότητα. Ένα επιπλέον σημείο στο οποίο πλεονεκτεί το CreditMetrics είναι η δυνατότητα εφαρμογής του σε χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από δύο ή περισσότερα δάνεια. Με το μοντέλο αυτό μπορούμε να εκτιμήσουμε τον οριακό κίνδυνο του κάθε δανείου, δηλαδή τη συμβολή του στο συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Επομένως, μπορούμε να εντοπίσουμε εκείνα τα δάνεια που επιφέρουν τη μεγαλύτερη ζημία στο χαρτοφυλάκιο που διαθέτουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ENRON CORPORATION

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

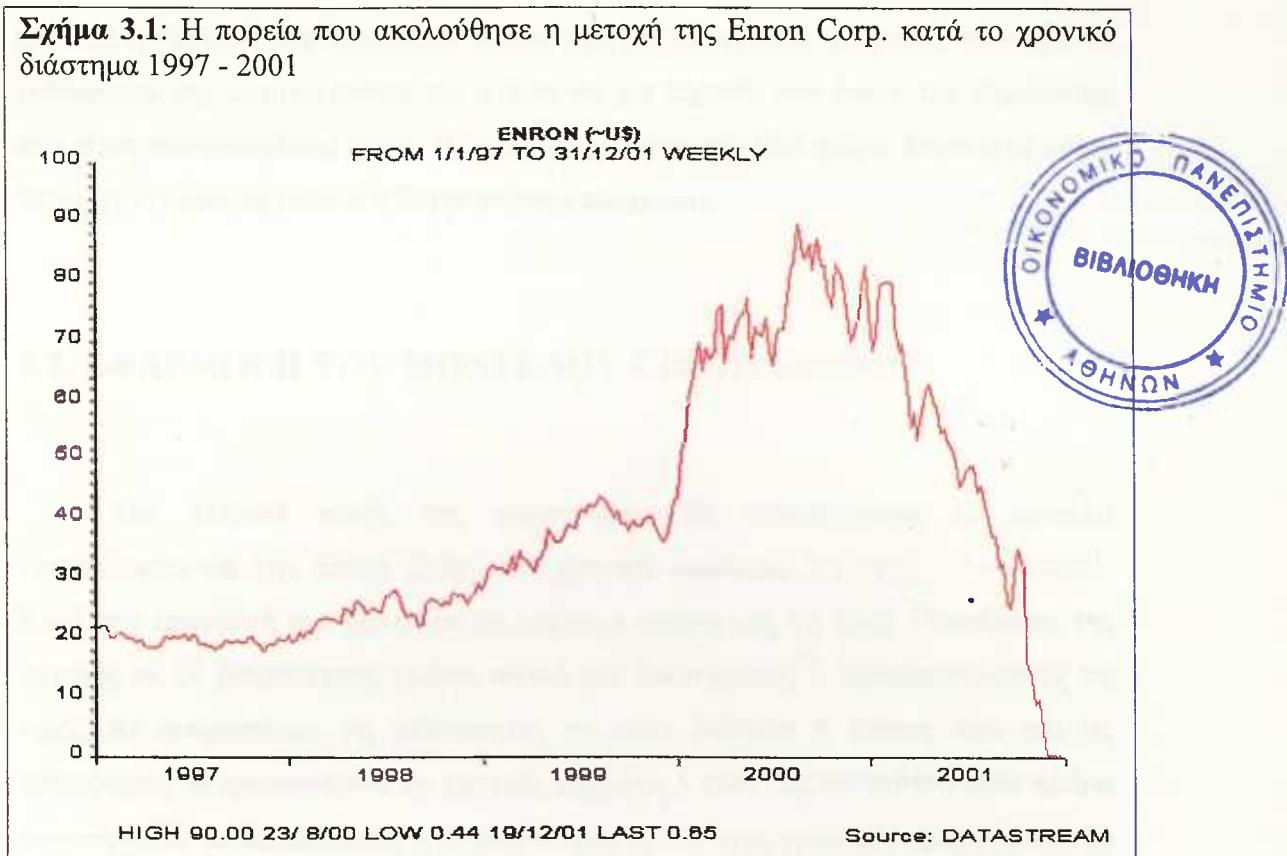
Η αμερικανική εταιρεία *Enron Corporation* δραστηριοποιείται στον κλάδο της ενέργειας με δηλωθέν ενεργητικό συνολικής αξίας \$65,503 δις στο τέλος του 2000. Η χρεοκοπία της έλαβε χώρα στις 2 Δεκεμβρίου 2001 και ήταν μία από τις μεγαλύτερες στην ιστορία των Η.Π.Α²⁶. Οι δύο βασικοί πιστωτές της εταιρείας είναι οι τράπεζες J.P. Morgan και Citigroup Inc. στις οποίες εξακολούθει να οφείλει τεράστια ποσά της τάξης των \$1,4 δις και \$2,4 δις αντίστοιχα [White, Behr (2003)]. Πριν εφαρμόσουμε τα μοντέλα CreditMetrics και CreditGrades, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε πρώτα την πορεία της εταιρείας την τελευταία περίοδο πριν τη χρεοκοπία της.

Κατά το χρονικό διάστημα 1997 - 2000, η Enron Corp. είχε μια σταθερά ανοδική πορεία κατά την οποία προχώρησε στην εξαγορά επιχειρήσεων και επιχείρησε να δραστηριοποιηθεί και σε άλλους τομείς, εκτός αυτού της ενέργειας, όπως οι νέες τεχνολογίες [The Washington Post (2003)]. Οι θετικές αυτές ενδείξεις για την προοπτική της Enron έκαναν τους επενδυτές να την εμπιστεύονται, κάτι που αντικατοπτρίζεται άλλωστε και στην πορεία της μετοχής της. Είναι χαρακτηριστικό ότι στις 23 Αυγούστου 2000 η τιμή της μετοχής έφθασε στα \$90 που είναι η μεγαλύτερη τιμή από το 1997 μέχρι και την πτώχευση της εταιρείας. Η συνολική πορεία της μετοχής, για το χρονικό ορίζοντα 1/1/1997 - 31/12/2001, παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.

Το έτος 2001 ήταν καθοριστικό για τη μετέπειτα εξέλιξη της Enron. Την περίοδο Μαρτίου - Απριλίου μια σειρά από συνεργασίες της εταιρείας δεν είχε θετική

²⁶ Πιο συγκεκριμένα, για την Enron Corp. εφαρμόζονται μέχρι και σήμερα οι διαδικασίες που προβλέπει το Chapter Eleven. Πρόκειται για ένα Κεφάλαιο της πτωχευτικής διαδικασίας στο οποίο καταφεύγουν οι χρεοκοπημένες εταιρείες προκειμένου να ανασυγκροτηθούν, χωρίς να διακοπεί η λειτουργία τους. Ισχύει για ορισμένο διάστημα και εφόσον καλύπτονται οι τρέχουσες υποχρεώσεις.

Σχήμα 3.1: Η πορεία που ακολούθησε η μετοχή της Enron Corp. κατά το χρονικό διάστημα 1997 - 2001



έκβαση. Συνέπεια αυτού ήταν να μειωθεί η τιμή της μετοχής από τα \$83,13 την 1^η Ιανουαρίου 2001 στα \$52,2 στις 17 Μαΐου του ίδιου έτους. Κατόπιν η ενεργειακή κρίση που έπληξε την Καλιφόρνια τον Ιούνιο κατέστησε περισσότερο δύσπιστους τους επενδυτές απέναντι στην Enron εξαναγκάζοντας σε παραίτηση τον Πρόεδρο της εταιρείας. Όμως η παραίτηση αυτή δεν έμελλε να καλυτερεύσει την κατάσταση. Στις 16 Οκτωβρίου 2001, η Enron ανακοίνωσε ότι για το τρίτο τετράμηνο του έτους είχε ζημίες ύψους \$638 εκ. Έξι μέρες αργότερα, η Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς των Η.Π.Α. (SEC) γνωστοποίησε ότι θα ξεκινούσε έλεγχο των εκτός ισολογισμού δραστηριοτήτων της Enron. Στις 29 Οκτωβρίου, η διοίκηση της εταιρείας ανακοίνωσε ότι «παγώνουν» όλες οι συνταξιοδοτικές διαδικασίες για τους υπαλλήλους και τρεις μέρες αργότερα, οι J. P. Morgan και Salomon Smith Barney συμφώνησαν να χορηγήσουν στην Enron secured δάνεια συνολικού ύψους \$1 δις. Τα γεγονότα αυτά ενίσχυσαν τη δυσπιστία των επενδυτών απέναντι στην Enron με αποτέλεσμα η μετοχή της να φθάσει στα \$11,99 την 1^η Νοεμβρίου. Η Dynegy Inc., ανταγωνίστρια της Enron πολύ μικρότερου μεγέθους, με ανακοίνωση που εξέδωσε στις 9 Νοεμβρίου 2001 γνωστοποίησε ότι προχωράει στην εξαγορά της Enron.

Ωστόσο η εξαγορά δεν έγινε ποτέ καθώς στις 28 Νοεμβρίου η Dynegy απέσυρε το ενδιαφέρον της κατηγορώντας την Enron για μη τήρηση των όρων της συμφωνίας που είχαν προηγουμένως κάνει. Η μετοχή της Enron την ίδια ημέρα έπεσε στα μόλις \$0,61. Δύο μέρες αργότερα η Enron κήρυξε πτώχευση.

3.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CREDITGRADES

Στα πλαίσια αυτής της παραγράφου θα εφαρμόσουμε το μοντέλο CreditGrades για την Enron Corp. στο χρονικό διάστημα 1/1/1997 - 31/12/2001. Κατά την εφαρμογή του μοντέλου θα λάβουμε υπόψη μας τις τιμές κλεισίματος της μετοχής σε 20 διαφορετικές ημέρες αυτού του διαστήματος²⁷. Χρησιμοποιώντας τις τιμές, θα εκτιμήσουμε τις πιθανότητες να είναι βιώσιμη η Enron, άρα και τις πιθανότητες να χρεοκοπήσει, σε χρονικό ορίζοντα 5 ετών. Ως εκ τούτου κάθε ημέρα παρατήρησης θα θεωρείται ως η αρχική στιγμή $t_0 = 0$ ενός χρονικού ορίζοντα που θα έχει διάρκεια 5 έτη.

Η επιλογή καθεμιάς από τις 20 ημέρες δεν είναι τυχαία. Πρόκειται για κομβικά σημεία στην πορεία που ακολούθησε η Enron το διάστημα που εξετάζουμε. Μπορούμε να πούμε ότι το διάστημα 1997 - 2001 χωρίζεται σε δύο περιόδους. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.1, η πορεία που ακολουθεί η μετοχή την πρώτη περίοδο 1997 - 1999 χαρακτηρίζεται από μια σχετική ηρεμία. Αντιθέτως, στη δεύτερη περίοδο 2000 - 2001 είναι εμφανής η υψηλή μεταβλητότητα που διακρίνει την τιμή της μετοχής.

Ξεκινώντας από το έτος 1997, λαμβάνουμε υπόψη την τιμή της μετοχής στην αρχή του έτους (1/1/1997), τη μέγιστη (13/1/1997) και την ελάχιστη τιμή της μετοχής (15/8/1997). Επιπλέον, στο δείγμα μας εντάσσουμε και την παρατήρηση της 13^η Νοεμβρίου, όπου η μετοχή έκλεισε σε τιμή που προσεγγίζει πολύ την ελάχιστη τιμή του έτους. Αναφορικά με το έτος 1998, το δείγμα μας περιλαμβάνει τρεις τιμές. Σε αυτές συγκαταλέγονται η ελάχιστη (8/1/1998) και η μέγιστη τιμή του έτους (23/12/1998). Η τρίτη τιμή είναι η μέγιστη τιμή που έλαβε η μετοχή στο μεσοδιάστημα του έτους (\$44,31) και παρατηρείται τη 17^η Ιουλίου. Προχωρώντας

²⁷ Οι τιμές είναι διαθέσιμες χρησιμοποιώντας το Datastream.

στο έτος 1999 ολοκληρώνουμε τη δειγματοληψία που αφορά την πρώτη περίοδο. Για το έτος αυτό μας ενδιαφέρει, καταρχήν, η ημέρα στην οποία η μετοχή της Enron είχε την ελάχιστη τιμή του έτους (1/1/1999), καθώς και η ημέρα στην οποία είχε τη μέγιστη τιμή του έτους (31/12/1999). Παρατηρώντας το Σχήμα 3.1 είναι φανερή η ανοδική πορεία που ακολούθησε η τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια του 1999. Στο σχήμα διακρίνεται και μια τιμή που είναι η μεγαλύτερη για το μεσοδιάστημα του έτους. Η τιμή αυτή είναι η τιμή κλεισίματος της 17^{ης} Αυγούστου και συγκαταλέγεται στο δείγμα μας.

Κατόπιν θα αναφερθούμε στα κριτήρια με τα οποία επιλέξαμε τις παρατηρήσεις της δεύτερης περιόδου 2000 - 2001. Αν και αυτή η περίοδος αφορά δύο και όχι τρία έτη, όπως η πρώτη περίοδος, εν τούτοις έχουμε επιλέξει και για αυτή δέκα συνολικά παρατηρήσεις. Με τον τρόπο αυτό δίνουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στα έτη της δεύτερης περιόδου, όπου η τιμή της μετοχής παρουσίασε εξαιρετικά μεγάλες διακυμάνσεις. Εκτός αυτού, βέβαια, η δεύτερη είναι η περίοδος στην οποία λαμβάνει χώρα η πτώχευση της Enron και επομένως χρίζει ιδιαίτερης μνείας.

Ξεκινώντας από το έτος 2000, έχουμε συμπεριλάβει στο δείγμα τις ημέρες όπου παρατηρούνται η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του. Οι ημέρες αυτές είναι η 4^η Ιανουαρίου και η 23^η Αυγούστου αντίστοιχα. Μάλιστα η μέγιστη τιμή του έτους (\$90) είναι η μεγαλύτερη για όλο το χρονικό ορίζοντα 1997 - 2001. Παρατηρώντας το Σχήμα 3.1, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια περίοδος στα μέσα του 2000 όπου η τιμή της μετοχής παρουσιάζει μικρότερες διακυμάνσεις. Θέλοντας να έχουμε μια ικανοποιητικά ακριβή εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η πιθανότητα χρεοκοπίας της Enron, εντάσσουμε στο δείγμα και τις ημέρες όπου παρατηρούνται η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της περιόδου αυτής. Οι ημέρες αυτές είναι οι 25/2/2000 και 16/5/2000 αντίστοιχα.

Για το έτος 2001, στα τέλη του οποίου κήρυξε πτώχευση η Enron, έχουμε υπολογίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας σε έξι διαφορετικά χρονικά σημεία. Σε αυτά συγκαταλέγεται καταρχήν η 1/1/2001, όπου η μετοχή είχε τη μέγιστη τιμή του έτους (\$83,13). Κατόπιν εξετάζουμε τις τιμές του πρώτου εξαμήνου και περιλαμβάνουμε στο δείγμα μας τη 17^η Μαΐου 2001, όπου η μετοχή έλαβε την ελάχιστη τιμή για το εξάμηνο αυτό (\$52,2). Είναι εμφανής η ραγδαία πτώση που σημείωσε η τιμή της μετοχής σε λιγότερο από ένα εξάμηνο. Η αμέσως επόμενη παρατήρηση είναι η τιμή που είχε η μετοχή την ημέρα παραίτησης του Προέδρου της εταιρείας (14/8/2001). Στη συνέχεια εντάσσουμε στο δείγμα την 1^η Νοεμβρίου του ίδιου έτους, όπου η τιμή



της μετοχής βρέθηκε στα μόλις \$11,99. Οι δύο τελευταίες παρατηρήσεις αφορούν την 28^η Νοεμβρίου, δηλαδή την ημέρα όπου επισημοποιήθηκε η ακύρωση της συμφωνίας που είχε συνάψει η Enron με τη Dynegy Inc. και την 30^η Νοεμβρίου που είναι η τελευταία ημέρα πριν την πτώχευση της Enron. Μάλιστα την ημέρα αυτή η μετοχή βρέθηκε στα χαμηλότερα επίπεδα όλου του χρονικού ορίζοντα 1997 - 2001 (\$0,26).

Κατόπιν για κάθε ημέρα παρατήρησης ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία: αρχικά εκτιμάμε τη μεταβλητότητα της μετοχής, $\hat{\sigma}_s^{(0)}$, λαμβάνοντας υπόψη τις τελευταίες 750 τιμές που έλαβε, συμπεριλαμβανομένης και της τιμής με την οποία έκλεισε η μετοχή την ημέρα παρατήρησης. Έχοντας ένα τόσο μεγάλο δείγμα ιστορικών τιμών, μπορούμε να είμαστε αρκετά σίγουροι ότι οι εκτιμήσεις μας θα έχουν ικανοποιητική ακρίβεια. Για την εκτίμηση της μεταβλητότητας υπολογίζουμε τις ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής, R_i , εφαρμόζοντας τον ακόλουθο τύπο:

$$R_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right),$$

όπου $i = 2, \dots, 750$. Κατόπιν η εκτίμηση της μεταβλητότητας της μετοχής, $\hat{\sigma}_s^{(0)}$, υπολογίζεται ως η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων R_i , δηλαδή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\sigma}_s^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2},$$

όπου $N = 750$.²⁸ Οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε περιέχονται στον Πίνακα 3.1. Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζουμε γραφικά τις εκτιμήσεις που κάνουμε για τη μεταβλητότητα της μετοχής. Είναι εμφανές ότι το έτος 2000 η μεταβλητότητα της μετοχής είναι υπερδιπλάσια από τη μέση μεταβλητότητα των προηγούμενων ετών.

Θέλοντας να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας της Enron, αναζητούμε στη συνέχεια τις τιμές που έχουν ο μέσος \bar{L} και η τυπική απόκλιση λ του ποσοστού ανάκτησης L . Οι τιμές αυτές προκύπτουν από την εμπειρική μελέτη των Hu,

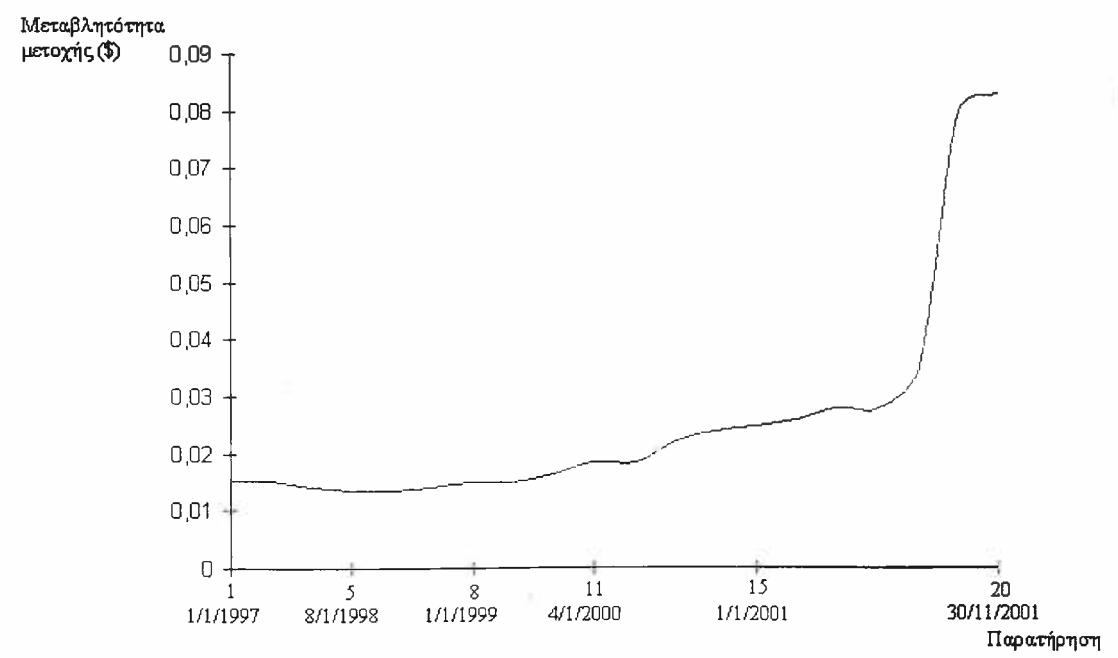
²⁸ Για τη γρήγορη εύρεση της τυπικής απόκλισης χρησιμοποιούμε το Excel.



Πίνακας 3.1: Εκτιμήσεις της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η μετοχή της Enron Corp. στα πλαίσια του δείγματος

| Παρατήρηση | Ημερομηνία | Μεταβλητότητα (\$) | Παρατήρηση | Ημερομηνία | Μεταβλητότητα (\$) |
|------------|------------|--------------------|------------|------------|--------------------|
| 1 | 1/1/1997 | 0,0152 | 11 | 4/1/2000 | 0,0186 |
| 2 | 13/1/1997 | 0,0153 | 12 | 25/2/2000 | 0,0222 |
| 3 | 15/8/1997 | 0,014 | 13 | 16/5/2000 | 0,024 |
| 4 | 13/11/1997 | 0,0137 | 14 | 23/8/2000 | 0,0249 |
| 5 | 8/1/1998 | 0,0136 | 15 | 1/1/2001 | 0,0261 |
| 6 | 17/7/1998 | 0,0141 | 16 | 17/5/2001 | 0,028 |
| 7 | 23/12/1998 | 0,0151 | 17 | 14/8/2001 | 0,0281 |
| 8 | 1/1/1999 | 0,015 | 18 | 1/11/2001 | 0,035 |
| 9 | 17/8/1999 | 0,0163 | 19 | 28/11/2001 | 0,0799 |
| 10 | 31/12/1999 | 0,0185 | 20 | 30/11/2001 | 0,083 |

Σχήμα 3.2: Γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η μετοχή της Enron Corp. στα πλαίσια του δείγματος



Lawrence (2000), οι οποίοι έλαβαν υπόψη τους τα Portfolio Management data και S&P database. Η δεύτερη βάση δεδομένων περιλαμβάνει τα πραγματικά ποσοστά ανάκτησης (actual recovery rates) για περίπου 300 μη χρηματοοικονομικούς οργανισμούς που δραστηριοποιούνταν στην αμερικανική αγορά και χρεοκόπησαν το διάστημα 1987 - 1997. Η μελέτη αποδίδει στα \bar{L} και λ τις τιμές 0,5 και 0,3 αντίστοιχα και τις τιμές αυτές θα χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση της Enron.

Στο επόμενο στάδιο ανατρέχουμε στους ετήσιους ισολογισμούς που δημοσίευσε η Enron κατά το χρονικό ορίζοντα 1996 - 2000. Εκείνο που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το χρέος ανά μετοχή της εταιρείας για κάθε έτος ξεχωριστά. Τα στοιχεία των ισολογισμών που μας αφορούν περιλαμβάνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Πίνακας 3.2: Στοιχεία ισολογισμών της Enron Corp. για το χρονικό ορίζοντα 1996 - 2000* | | | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Στοιχεία ισολογισμού | 31/12/1996 | 31/12/1997 | 31/12/1998 | 31/12/1999 | 31/12/2000 |
| Συνολικές πωλήσεις** | 13.289 | 20.272,992 | 30.632 | 39.356 | 100.684,992 |
| Πωλήσεις ανά μετοχή (\$)** | 27,01 | 36,59 | 44,01 | 51,18 | 123,69 |
| Συνολικός αριθμός μετοχών | 492.002.000 | 554.058.000 | 696.023.000 | 768.972.000 | 814.010.000 |
| Καθαρό χρέος** | 3.685 | 7.077 | 8.247 | 8.864 | 9.759 |

*Οι τιμές είναι σε εκατομμύρια \$. εκτός από τον αριθμό των μετοχών και τις πωλήσεις ανά μετοχή
**Πηγή: Datastream

Ξεκινώντας από το έτος 1996, θεωρούμε ότι n είναι ο αριθμός των μετοχών της Enron στο τέλος του έτους αυτού, TS είναι οι συνολικές πωλήσεις (total sales) όπως αυτές αναγράφονται στον ισολογισμό της 31/12/1996 και SPS είναι οι πωλήσεις ανά μετοχή (sales per share). Από τα παραπάνω έπεται ότι $SPS = \frac{TS}{n}$ και επειδή $TS =$

\$13.289 εκ., $SPS = \$27,01$, σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των μετοχών της Enron στο τέλος του 1996 είναι $n = 492.002.000$. Κατόπιν αν συμβολίσουμε ND το καθαρό χρέος της εταιρείας (net debt) και D το χρέος ανά μετοχή, τότε έπεται ότι $D = \frac{ND}{n}$.

Επειδή, όμως, από τον Πίνακα 3.2 λαμβάνουμε $ND = \$3.685$ εκ. και ήδη έχουμε υπολογίσει ότι $n = 492.002.000$, τότε συμπεραίνουμε ότι $D = \$7,49$. Όμοια προκύπτουν οι υπόλοιπες τιμές για το χρέος της εταιρείας ανά μετοχή που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3 και αφορούν τα επόμενα έτη.

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα που



Πίνακας 3.3: Χρέος ανά μετοχή της Enron Corp. για το χρονικό ορίζοντα 1996 - 2000

| | 31/12/1996 | 31/12/1997 | 31/12/1998 | 31/12/1999 | 31/12/2000 |
|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Χρέος ανά μετοχή (\$) | 7,49 | 12,77 | 11,85 | 11,53 | 11,99 |

παρουσιάζει το ενεργητικό της Enron στο χρονικό ορίζοντα 1997 - 2001. Για κάθε ημέρα παρατήρησης $t_0 = 0$, κάνουμε μια εκτίμηση της μεταβλητότητας αυτής χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις που ήδη έχουμε κάνει για τη μεταβλητότητα της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα, όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο II, εφαρμόζουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{\sigma}^{(0)} = \hat{\sigma}_S^{(0)} \cdot \frac{S_0}{S_0 + \bar{L} \cdot D}. \quad (3.1)$$

Χρησιμοποιούμε τις τιμές που ήδη έχουμε εκτιμήσει για τις παραμέτρους του δεύτερου μέλους του τύπου (3.1), οπότε προκύπτουν για τη μεταβλητότητα του ενεργητικού οι εκτιμήσεις του Πίνακα 3.4. Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζουμε γραφικά τις εκτιμήσεις αυτές. Διαπιστώνουμε ότι λίγο πριν τη χρεοκοπία της Enron, οι εκτιμήσεις αυτές διαγράφουν μεγάλη πτώση. Μαθηματικά αυτό εξηγείται καθώς την περίοδο αυτή η μετοχή S_0 λαμβάνει ολοένα και μικρότερες τιμές στο δείγμα μας. Μάλιστα οι τιμές αυτές τελικά γίνονται τόσο μικρές, ώστε να ισχύουν διαδοχικά τα ακόλουθα:

$S_0 \rightarrow 0 \Rightarrow S_0 \ll \bar{L} \cdot D \Rightarrow \frac{1}{S_0 + \bar{L} \cdot D} \rightarrow \frac{1}{\bar{L} \cdot D} \Rightarrow \frac{S_0}{S_0 + \bar{L} \cdot D} \rightarrow 0$ οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) έπειται ότι $\hat{\sigma}^{(0)} \rightarrow 0$.

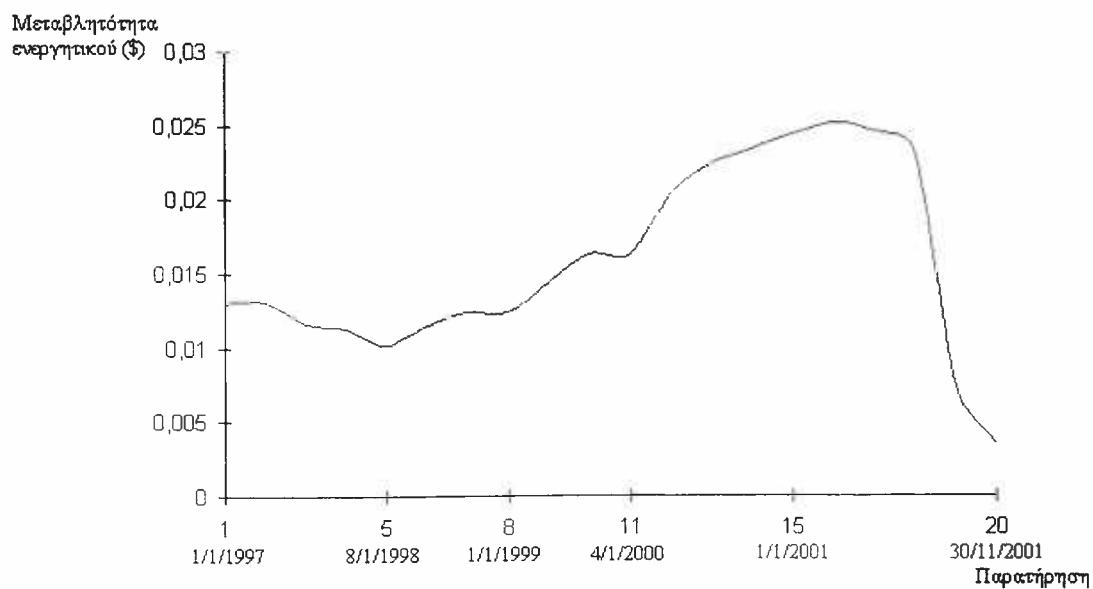
Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε την πιθανότητα να είναι βιώσιμη, άρα και την πιθανότητα να χρεοκοπήσει, η Enron Corp. σε χρονικό ορίζοντα 5 ετών. Το μοντέλο CreditGrades εκτιμάει την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η εταιρεία μέχρι τη χρονική στιγμή t από τον παρακάτω τύπο:

$$P(t) = \Phi\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\ln(d)}{A_t}\right) - d \cdot \Phi\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\ln(d)}{A_t}\right),$$

Πίνακας 3.4: Εκτιμήσεις της μεταβλητότητας που παρουσιάζει το ενεργητικό της Enron Corp. στα πλαίσια του δείγματος

| Παρατήρηση | Ημερομηνία | Μεταβλητότητα (\$) | Παρατήρηση | Ημερομηνία | Μεταβλητότητα (\$) |
|------------|------------|--------------------|------------|------------|--------------------|
| 1 | 1/1/1997 | 0,013 | 11 | 4/1/2000 | 0,0163 |
| 2 | 13/1/1997 | 0,0131 | 12 | 25/2/2000 | 0,0203 |
| 3 | 15/8/1997 | 0,0116 | 13 | 16/5/2000 | 0,0224 |
| 4 | 13/11/1997 | 0,0113 | 14 | 23/8/2000 | 0,0234 |
| 5 | 8/1/1998 | 0,0102 | 15 | 1/1/2001 | 0,0244 |
| 6 | 17/7/1998 | 0,0115 | 16 | 17/5/2001 | 0,0251 |
| 7 | 23/12/1998 | 0,0124 | 17 | 14/8/2001 | 0,0246 |
| 8 | 1/1/1999 | 0,0124 | 18 | 1/11/2001 | 0,0233 |
| 9 | 17/8/1999 | 0,0144 | 19 | 28/11/2001 | 0,0074 |
| 10 | 31/12/1999 | 0,0163 | 20 | 30/11/2001 | 0,0034 |

Σχήμα 3.3: Γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων της μεταβλητότητας που παρουσιάζει το ενεργητικό της Enron Corp. στα πλαίσια του δείγματος



$$\text{όπου } d = \frac{S_0 + \bar{L} \cdot D}{\bar{L} \cdot D} \cdot \exp(\lambda^2) \text{ και } A_t^2 = (\hat{\sigma}_S^{(0)})^2 \cdot t + \lambda^2 = \left(\hat{\sigma}_S^{(0)} \cdot \frac{S_0}{S_0 + \bar{L} \cdot D} \right)^2 \cdot t + \lambda^2,$$

$$A_t \geq 0.$$

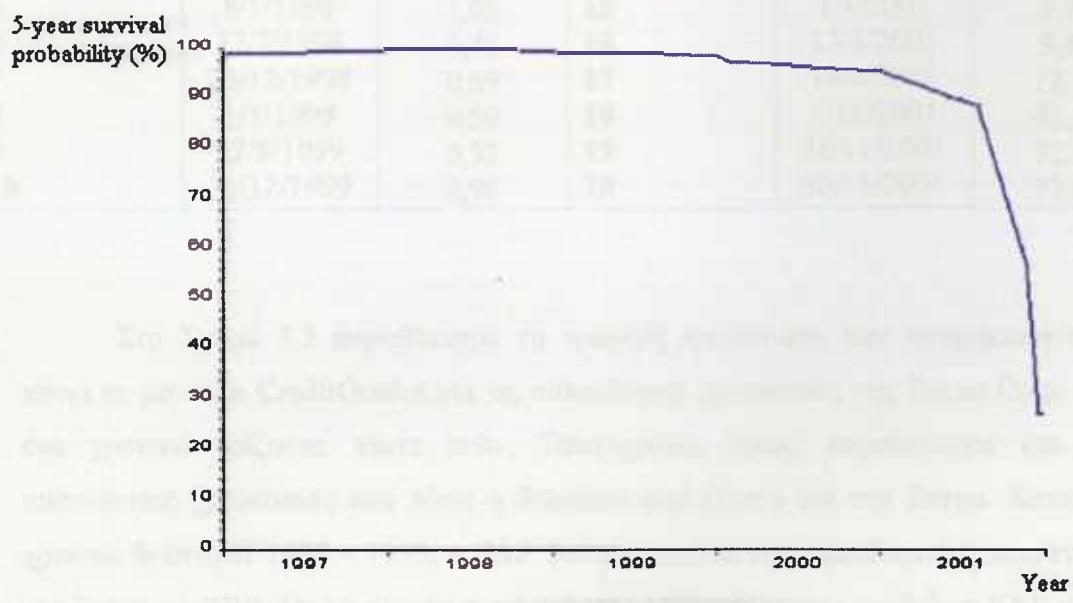
Οι μεταβλητότητες της μετοχής, άρα και του ενεργητικού, είναι ημερήσιες οπότε ο χρόνος που θα χρησιμοποιηθεί στον παραπάνω τύπο είναι $t = 5 \cdot 365 = 1.825$ ημέρες. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτουν τελικά οι εκτιμήσεις του Πίνακα 3.5.

Πίνακας 3.5: Εκτιμήσεις της πιθανότητας να είναι βιώσιμη η Enron Corp. σε χρονικό ορίζοντα πέντε ετών

| Παρατήρηση | Ημερομηνία | Πιθανότητα (%) | Παρατήρηση | Ημερομηνία | Πιθανότητα (%) |
|------------|------------|----------------|------------|------------|----------------|
| 1 | 1/1/1997 | 99,61 | 11 | 4/1/2000 | 98,99 |
| 2 | 13/1/1997 | 99,65 | 12 | 25/2/2000 | 98,29 |
| 3 | 15/8/1997 | 99,64 | 13 | 16/5/2000 | 97,91 |
| 4 | 13/11/1997 | 99,71 | 14 | 23/8/2000 | 97,9 |
| 5 | 8/1/1998 | 98,95 | 15 | 1/1/2001 | 96,39 |
| 6 | 17/7/1998 | 99,58 | 16 | 17/5/2001 | 90,13 |
| 7 | 23/12/1998 | 99,31 | 17 | 14/8/2001 | 87,88 |
| 8 | 1/1/1999 | 99,41 | 18 | 1/11/2001 | 57,54 |
| 9 | 17/8/1999 | 99,67 | 19 | 28/11/2001 | 27,18 |
| 10 | 31/12/1999 | 99,04 | 20 | 30/11/2001 | 26,35 |

Το Σχήμα 3.4 παρουσιάζει γραφικά τις εκτιμήσεις που αναγράφονται στον πίνακα αυτό. Παρατηρούμε ότι από τις αρχές του 2001, δηλαδή ένα περίπου έτος πριν τη χρεοκοπία της Enron, το μοντέλο CreditGrades δείχνει μια ραγδαία μείωση της πιθανότητας να είναι βιώσιμη η εταιρεία σε ορίζοντα πέντε ετών.

Σχήμα 3.4: Γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων του μοντέλου CreditGrades στην περίπτωση της Enron Corp.



3.3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ CREDITMETRICS ΚΑΙ CREDITGRADES

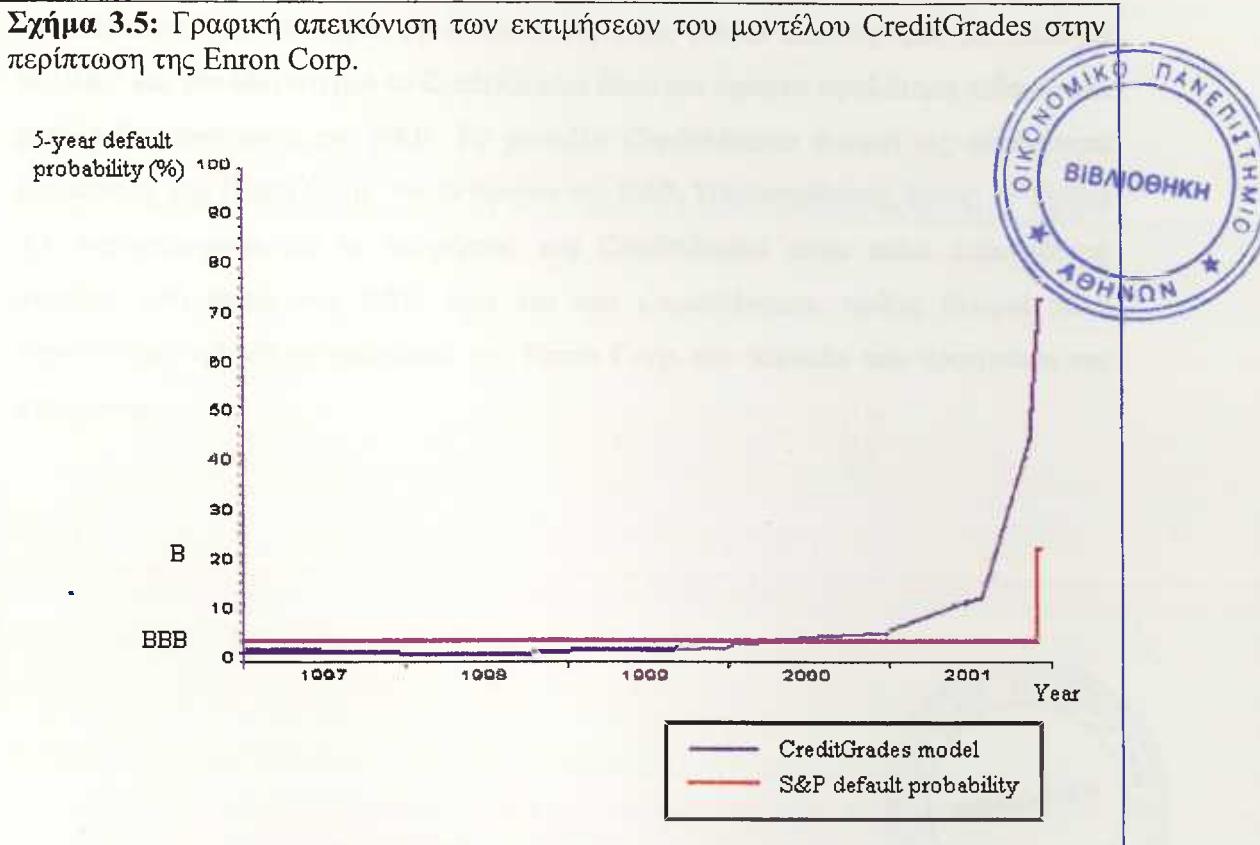
Στα πλαίσια της προηγούμενης παραγράφου υπολογίσαμε για είκοσι διαφορετικά σημεία του διαστήματος 1997 - 2001 την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η Enron Corp. σε χρονικό ορίζοντα πέντε ετών. Αν συμβολίσουμε $P(t)$ την πιθανότητα να είναι βιώσιμη η Enron Corp. μέχρι τη στιγμή t και $P'(t)$ την πιθανότητα να χρεοκοπήσει μέχρι τη στιγμή t , τότε έπεται ότι $P'(t) = 1 - P(t)$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 3.5, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας που αντιστοιχούν σε κάθε ημέρα παρατήρησης. Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν περιλαμβάνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 3.6: Εκτιμήσεις των πιθανοτήτων χρεοκοπίας της Enron Corp. για χρονικό ορίζοντα πέντε ετών

| Παρατήρηση | Ημερομηνία | Πιθανότητα (%) | Παρατήρηση | Ημερομηνία | Πιθανότητα (%) |
|------------|------------|----------------|------------|------------|----------------|
| 1 | 1/1/1997 | 0,39 | 11 | 4/1/2000 | 1,01 |
| 2 | 13/1/1997 | 0,35 | 12 | 25/2/2000 | 1,71 |
| 3 | 15/8/1997 | 0,36 | 13 | 16/5/2000 | 2,09 |
| 4 | 13/11/1997 | 0,29 | 14 | 23/8/2000 | 2,1 |
| 5 | 8/1/1998 | 1,05 | 15 | 1/1/2001 | 3,61 |
| 6 | 17/7/1998 | 0,42 | 16 | 17/5/2001 | 9,87 |
| 7 | 23/12/1998 | 0,69 | 17 | 14/8/2001 | 12,12 |
| 8 | 1/1/1999 | 0,59 | 18 | 1/11/2001 | 42,46 |
| 9 | 17/8/1999 | 0,33 | 19 | 28/11/2001 | 72,82 |
| 10 | 31/12/1999 | 0,96 | 20 | 30/11/2001 | 73,65 |

Στο Σχήμα 3.5 παραθέτουμε τη γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων που κάνει το μοντέλο CreditGrades για τις πιθανότητες χρεοκοπίας της Enron Corp. για ένα χρονικό ορίζοντα πέντε ετών. Ταυτόχρονα, όμως, παραθέτουμε και τις πιθανότητες χρεοκοπίας που έδινε η Standard and Poor's για την Enron. Κατά το χρονικό διάστημα 1997 - 1999, η S&P βαθμολογούσε την πιστοληπτική ικανότητα της Enron με BBB. Ως εκ τούτου η πιθανότητα χρεοκοπίας που απέδιδε η S&P στην εταιρεία ήταν 1,78% [Standard & Poor's, (1996)]. Όπως έχουμε παρατηρήσει, από το

Σχήμα 3.5: Γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων του μοντέλου CreditGrades στην περίπτωση της Enron Corp.



έτος 2000 ξεκίνησε μια περίοδος όπου η μετοχή της Enron είχε μεγάλες διαικυμάνσεις. Μάλιστα από τα τέλη του 2000 και σε όλη τη διάρκεια του 2001 έλαβε χώρα μια ραγδαία πτώση της μετοχής. Με άλλα λόγια υπήρχαν ανησυχητικές ενδείξεις για την πορεία της Enron αρκετό καιρό πριν κηρύξει πτώχευση. Ωστόσο η βαθμολογία της S&P παρέμεινε αμετάβλητη μέχρι την 29^η Νοεμβρίου 2001, δηλαδή τρεις μόλις ημέρες πριν τη χρεοκοπία. Την ημέρα αυτή η S&P μείωσε εσπευσμένα τη βαθμολογία της Enron σε B, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα χρεοκοπίας της σε 21,88% [Standard & Poor's, (1996)].

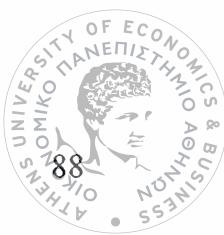
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του μοντέλου CreditGrades, διαπιστώνουμε ότι ήδη από τις 17/8/1999 ξεκινάει μια πορεία συνεχούς αύξησης των εκτιμήσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Μάλιστα τη 16^η Μαΐου 2000 η πιθανότητα που δίνει το μοντέλο γίνεται για πρώτη φορά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας που έδινε η S&P. Είναι χαρακτηριστικό ότι στις αρχές του 2001 η εκτίμηση του μοντέλου είναι διπλάσια από αυτή της S&P. Σε αυτό το σημείο γίνεται φανερή η διαφορά ανάμεσα στα μοντέλα CreditGrades και CreditMetrics για την περίπτωση της Enron Corp. Κι αυτό γιατί σχεδόν ένα έτος πριν την πτώχευση,

CreditMetrics έχει σαν input την εσφαλμένη, όπως τελικά αποδείχθηκε, βαθμολογία της S&P και την ίδια στιγμή το CreditGrades δίνει μια αρκετά υψηλότερη πιθανότητα χρεοκοπίας από αυτή της S&P. Το μοντέλο CreditMetrics θεωρεί ως πιθανότητα χρεοκοπίας της Enron Corp. την εκτίμηση της S&P. Παρατηρώντας, όμως, το Σχήμα 3.5 διαπιστώνουμε ότι οι εκτιμήσεις του CreditGrades είναι πολύ περισσότερο ακριβείς από αυτές της S&P, άρα και του CreditMetrics, καθώς θεωρεί πολύ περισσότερο πιθανή τη χρεοκοπία της Enron Corp. την περίοδο που προηγείται της πτώχευσης.



ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τα μοντέλα *CreditMetrics* (1997) και *CreditGrades* (2002) είναι σημαντικά εργαλεία στα χέρια των τραπεζών στην προσπάθειά τους να εκτιμήσουν τον πιστωτικό κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένες. Ωστόσο οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε, χρησιμοποιώντας τα δύο μοντέλα, δεν είναι πάντα το ίδιο ακριβείς. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το *CreditGrades* δίνει στις περισσότερες περιπτώσεις καλύτερα αποτελέσματα. Κι αυτό γιατί η πορεία που ακολουθεί η μετοχή μιας εταιρείας αποτελεί συνήθως ισχυρή ένδειξη για την πιστοληπτική της ικανότητα. Παράλληλα οι πιθανότητες που δημοσιεύονται από εταιρείες, όπως η Moody's και η Standard and Poor's, σε αρκετές περιπτώσεις αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό από τις πραγματικές. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η *Enron Corp.* για την οποία η S&P αύξησε την πιθανότητα χρεοκοπίας τρεις μόλις ημέρες πριν την πτώχευση. Ωστόσο δεν θα πρέπει να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το μοντέλο *CreditGrades* αποτελεί τη λύση στο πρόβλημα της αποτύμησης του πιστωτικού κινδύνου. Η έρευνα βρίσκεται ακόμη στα πρώτα της στάδια και υπάρχει χώρος για μοντέλα που θα δίνουν ακόμη πιο ακριβείς εκτιμήσεις.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΩΝ ΠΙΣΤΟΛΗΠΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ MOODY'S KAI STANDARD & POOR'S²⁹

| Moody's | Standard & Poor's | Επίπεδο κινδύνου | Περιγραφή |
|---------|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aaa | AAA | Ελάχιστο | Άριστο επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας, ενεργητικό με ανώτερο επίπεδο ποιότητας, άριστο management. |
| Aa | AA | Μικρό | Καλό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας, ενεργητικό με πολύ καλό επίπεδο ποιότητας, πολύ καλό μερίδιο αγοράς. |
| A | A | Μέσο | Μέσο επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας, καλό management, εταιρεία μέσου μεγέθους. |
| Baa | BBB | Αποδεκτό | Αποδεκτό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας αλλά με σχετικά υψηλό κίνδυνο, ίσως να είναι ήδη αρκετά χρεωμένη. |
| Ba | BB | Αποδεκτό με προσοχή | Αποδεκτό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας αλλά με υψηλό κίνδυνο, απαιτεί ιδιαίτερη παρακολούθηση από το δανειστή. |
| B | B | Απαιτεί πολύ προσοχή | Ενεργητικό με σχετικά αποδεκτό επίπεδο ποιότητας, πολύ χρεωμένη, διοικητικές αδυναμίες. |
| Caa | CCC | Απαιτεί ιδιαίτερα μεγάλη προσοχή | Οριακά αποδεκτό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας, αδύναμη οικονομική κατάσταση, ανεπαρκείς πηγές εσόδων. |
| Ca | CC | Υψηλό | Μη αποδεκτό επίπεδο πιστοληπτικής ικανότητας, φανερές αδυναμίες που θέτουν σε σοβαρό κίνδυνο την εξόφληση του χρέους. |
| C | C | Πολύ υψηλό | Αμφισβητείται έντονα η πλήρης εξόφληση του χρέους, οι αδυναμίες είναι τόσο μεγάλες ώστε υπό τις παρούσες συνθήκες η πλήρης εξόφληση του χρέους να θεωρείται σχεδόν απίθανη. |

²⁹ Saunders, Allen (2002).

| | | | |
|--------------------|--------------------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D (Default) | D (Default) | Χρεοκοπία | Η εταιρεία οδεύει προς την πτώχευση ή έχει ήδη χρεοκοπήσει. Στην πρώτη περίπτωση έχει τόσο μικρή αξία ενεργητικού ώστε να μην κατατάσσεται σε καμιά άλλη κατηγορία, είναι ακατάλληλη για δανειοδότηση και οποιασδήποτε άλλης μορφής επένδυση. |
|--------------------|--------------------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ: ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

B.1.³⁰

B.1.1. Μια μεταβλητή Z ακολουθεί την *Brownian motion* όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

I. Η μεταβολή δZ για μια μικρή μεταβολή δt του χρόνου είναι: $\delta Z = \varepsilon \cdot \sqrt{\delta t}$, όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

II. Οι μεταβολές δZ που αντιστοιχούν σε δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές μικρές μεταβολές δt είναι ανεξάρτητες.

B.1.2. Μια Brownian motion Y καλείται *geometric* όταν ακολουθεί μια σχέση της μορφής: $\frac{dY}{Y} = \sigma \cdot dZ + \mu \cdot dt$, όπου σ είναι η μεταβλητότητα της Y και μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της Y .

B.1.3. Μια Brownian motion Z καλείται *standard* όταν $Z_0 = 0$ και $Z \sim N(0,t)$.

B.2.

To *credit default swap (CDS)* είναι ένα συμβόλαιο με το οποίο ο αγοραστής του επιχειρεί να αντισταθμίσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας μιας συγκεκριμένης εταιρείας. Η εταιρεία αυτή ονομάζεται εταιρεία αναφοράς (reference entity). Ο αγοραστής του CDS αποκτάει το δικαίωμα να πουλήσει ένα συγκεκριμένο ομόλογο της εταιρείας αναφοράς όταν αυτή χρεοκοπήσει. Το ομόλογο καλείται υποχρέωση αναφοράς (reference obligation). Το αντίτιμο της πώλησης είναι προσυμφωνημένο και αναφέρεται στους όρους του CDS. Κατά την περίοδο που έχει στην κατοχή του το credit default swap, ο αγοραστής του είναι υποχρεωμένος να δίνει περιοδικά ένα προσυμφωνημένο ποσό στον πωλητή μέχρι να τελειώσει η χρονική διάρκεια του CDS ή μέχρι τη χρεοκοπία της εταιρείας αναφοράς. Το CDS spread είναι το ποσό αυτό εκφρασμένο ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας του ομολόγου αναφοράς.

³⁰ Hull (2002).

B.3.³¹

Έστω ότι έχουμε τη χρονολογική σειρά $y_t, t = 1, \dots, T$ και θέλουμε να κάνουμε μια εκτίμηση \hat{y}_{T+1} της τιμής που λαμβάνει η y_t κατά τη χρονική στιγμή $t = T+1$. Συχνά επιθυμούμε η εκτίμηση αυτή να δίνει μεγαλύτερο βάρος στις πιο πρόσφατες τιμές της $y(t)$. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι η εφαρμογή του *exponentially weighted moving average (EWMA) model*. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η εκτίμηση είναι:

$$\hat{y}_{T+1} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{T-1} (1-\alpha)^i \cdot y_{T-i},$$
 όπου α είναι ένας συντελεστής που δείχνει πόσο περισσότερο βάρος δίνουμε στις πιο πρόσφατες εκτιμήσεις σε σχέση με τις παλαιότερες και καλείται *decay factor* ($0 \leq \alpha \leq 1$).

³¹ Pindyck, Rubinfeld (1998).



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Altman E., "The importance and subtlety of credit rating migration", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 22, 1998, 1231 - 1247.
- Altman E., Kishore V., "Almost everything you want to know about recoveries on defaulted securities", *Financial Analysts Journal*, 1996, 57 - 63.
- Ammer J., Packer F., "How consistent are credit ratings? A geographic and sectoral analysis of default risk", Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers, Number 668, June 2000.
- Anderson R., Sundaresan S., "A comparative study of structural models of corporate bond yields: an exploratory investigation", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 24, 2000, 255 - 269.
- Black F., Scholes M., "The pricing of options and corporate liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, May - June 1973, 637 - 654.
- Carty L., Lieberman D., "Defaulted bank loan recoveries", Moody's Investors Service, Special report, 1996.
- Crouhy M., Galai D., Mark R., "A comparative analysis of current credit risk models", *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, 2000, 59 - 117.
- Deutsche Bank, "CreditGrades overview", www.creditgrades.com, Deutsche Bank June 26, 2002.
- Enron Corporation, Enron annual report, Enron Corporation, 2000.
- Finkelstein V., "Assessing default probabilities from equity markets", www.creditgrades.com, Presentation, Credit Risk Summit, New York, 2001.
- Hu H., Lawrence L., "Estimating recovery rates", J. P. Morgan, Internal document, 2000.
- Hull J., *Options, futures and other derivatives*, 5th edition, Prentice Hall International Inc., 2002.
- Jarrow R., Turnbull S., "The intersection of market and credit risk", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 24, 2000, 271 - 299.
- J. P. Morgan & Co., *CreditMetrics technical document*, J. P. Morgan & Co., New York, 1997.
- Kealhofer S., Weng W., Kwok S., "Uses and abuses of bond default rates", *KMV Corporation*, San Francisco, 1998.



- Merton R., "On the pricing of corporate debt", *The Journal of Finance*, Vol. 29, New York, 1974, 449 - 470.
- Musiela M., Rutkowski M., *Martingale methods in financial modelling*, 2nd edition, Springer - Verlag, Berlin, 1998.
- Nickell P., Perraudin W., Varotto S., "Stability of rating transitions", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 24, 2000, 203 - 227.
- Pindyck R., Rubinfeld D., *Econometric models and economic forecasts*, McGraw Hill International Editions, 4th edition, 1998.
- RiskMetrics Group Inc., *CreditGrades technical document*, RiskMetrics Group Inc., 2002.
- Saunders A., Allen L., *Credit risk measurement*, John Wiley & Sons Inc., 2nd edition, March 2002.
- Standard & Poor's, CreditWeek, April 15, 1996, 44 - 52.
- The Washington Post, "Timeline of Enron's collapse", www.washingtonpost.com, Thursday, May 1, 2003.
- White B., Behr P., "Citigroup, J. P. Morgan settle over Enron deals", *The Washington Post*, July 29, 2003.
- Zeng B., Zhang J., "Measuring credit correlations: equity correlations are not Enough!", *KMV Corporation*, San Francisco, 2001.

