



ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Διπλωματική Εργασία
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

«ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΕΥΟΝΤΟΣ ΠΩΛΗΤΗ :
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ»

Τσολακίδης Στράτος
Επιβλέπων: Μήλης Ιωάννης

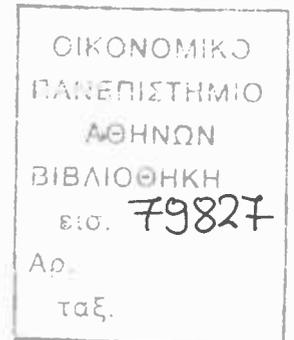
ΑΘΗΝΑ,
ΙΟΥΝΙΟΣ 2006





ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



Διπλωματική Εργασία
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

«ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΕΥΟΝΤΟΣ ΠΩΛΗΤΗ :
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ»

Τσολακίδης Στράτος
Επιβλέπων: Μήλης Ιωάννης



ΑΘΗΝΑ,
ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ



ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΑΘΗΝΩΝ



Περιεχόμενα



Πρόλογος v

- 1 Εισαγωγή 1
 - 1.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες 1
 - 1.2 Ορισμοί και αντίστοιχες κλάσεις 3

- 2 \mathcal{NP} -πληρότητα του $\text{P}^{\text{P}}\text{P}$ 9
 - 2.1 \mathcal{NP} -πληρότητα 9
 - 2.2 \mathcal{NP} -πληρότητα του $\Sigma\text{-P}^{\text{P}}\text{P}$ και των ευρύτερων κλάσεων του 11
 - 2.3 \mathcal{NP} -πληρότητα του $\text{E-P}^{\text{P}}\text{P}$ 12

- 3 Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για το $\text{P}^{\text{P}}\text{P}$ 17
 - 3.1 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι 17
 - 3.2 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το $\Sigma\text{-P}^{\text{P}}\text{P}$ 18
 - 3.3 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το $\Sigma\text{-P}^{\text{P}}\text{P}$ 23
 - 3.4 Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα για το $\text{E-P}^{\text{P}}\text{P}$ 26
 - 3.5 0.841logn-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το $\text{A-P}^{\text{P}}\text{P}$ 35

- 4 Μη Προσεγγισσιμότητα του $\text{P}^{\text{P}}\text{P}$ 41
 - 4.1 Μη προσεγγισσιμότητα του Συμμετρικού και Ασύμμετρου $\text{P}^{\text{P}}\text{P}$ 41
 - 4.2 Κάτω φράγματα μη προσεγγισσιμότητας 42
 - 4.3 $\frac{117}{116}$ κάτω φράγμα μη προσεγγισσιμότητας για το $\text{A-P}^{\text{P}}\text{P}$ 44
 - 4.4 $\frac{220}{219}$ κάτω φράγμα μη προσεγγισσιμότητας για το $\Sigma\text{-P}^{\text{P}}\text{P}$ 54
 - 4.5 Η πιθανοτική υποδομή των κάτω φραγμάτων $\frac{117}{116}$ και $\frac{220}{219}$ 57



5	Γραμμικός Προγραμματισμός και το ΠΠΠ	63
5.1	Γραμμικός Προγραμματισμός και Προσεγγισιμότητα	63
5.2	Το ΑΠ για το Σ-ΠΠΠ και το Α-ΠΠΠ και το αντίστοιχο Held-Karρ φράγμα	65
5.3	Ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ για το Σ-ΠΠΠ	68
5.4	Ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ για το Α-ΠΠΠ	73
5.5	Η χρησιμότητα του Held-Karρ φράγματος	81
6	Τοπική Αναζήτηση και το ΠΠΠ	83
6.1	Τοπική αναζήτηση	83
6.2	Οι σημαντικότερες γειτονιές για το ΠΠΠ	85
6.3	Πολυπλοκότητα των k-OPT και Lin-Kernighan γειτονιών	88
6.4	Προσεγγισιμότητα της 2-OPT γειτονιάς	91
	Συμπεράσματα	97
	Βιβλιογραφία	99

Πρόλογος

Το Πρόβλημα του Περιοδευόντος Πωλητή (ΠΠΠ) είναι από τα πιο διάσημα και πολυσπουδαγμένα προβλήματα που έχει απασχολήσει την Επιστήμη Υπολογιστών. Επειδή από την μία είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης και από την άλλη έχει πολύ σημαντικό πρακτικό περιεχόμενο. Το τελευταίο απορρέει από τις πολλές και σημαντικές πρακτικές εφαρμογές του ΠΠΠ όπως είναι η δρομολόγηση (π.χ. πλοίων ή αεροπλάνων), η κατασκευή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, τα οπτικά δίκτυα Sonet Rings, η αποκωδικοποίηση του DNA κ.α. .

Το ΠΠΠ, αν και έχει έναν απλό και σαφή ορισμό, έχει αντιστρόφως ανάλογη πολυπλοκότητα λύσης. Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση των NP -πλήρων προβλημάτων, δηλαδή πιστεύουμε ότι δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό βέλτιστα μέσα σε κάποιο εύλογο χρονικό διάστημα. Επίσης, για την γενική περίπτωση του προβλήματος, πιστεύουμε πως δεν μπορούμε ούτε και να προσεγγίσουμε την λύση. Έτσι μελετώνται ειδικές περιπτώσεις του ΠΠΠ, που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον και για τις οποίες υπάρχουν μέθοδοι να προσεγγίσουμε την λύση τους. Οι δυνατότητες, που έχουμε να προσεγγίσουμε τη λύση αυτών των ειδικών περιπτώσεων του ΠΠΠ, έχουν γίνει αντικείμενο έρευνας της Επιστήμης Υπολογιστών και έχουν αποδώσει ένα σημαντικό θεωρητικό έργο. Γενικά το θεωρητικό έργο που αφορά το πρόβλημα αυτό είναι πλούσιο και ακολουθεί πολλές κατευθύνσεις. Αλλά και η ανάπτυξη του είναι δύσκολη και απαιτεί την συνεπικουρία και άλλων πεδίων, όπως είναι η θεωρία πιθανοτήτων, η θεωρία γράφων και ο αερίαιος προγραμματισμός. Για τον λόγο αυτό η θεωρία που αφορά το ΠΠΠ είναι δύσβατη και πλούσια σε ιδέες. Υπάρχουν πτυχές του ΠΠΠ που έχουν φωτιστεί πλήρως και άλλες μερικώς. Σε αυτή την εργασία αναπτύσσεται το μεγαλύτερο μέρος από αυτό το θεωρητικό έργο που αφορά την προσεγγισιμότητα του ΠΠΠ.

Τα περιεχόμενα αυτής της εργασίας αναπτύσσονται ως εξής. Στο Πρώτο κεφάλαιο διατυπώνεται ο ορισμός του ΠΠΠ και οι διάφορες ειδικότερες περιπτώσεις του. Στο Δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται το ΠΠΠ και οι ειδικότερες περιπτώσεις του ως προς την NP -πληρότητα. Στο Τρίτο κεφάλαιο αρχικά αναπτύσσεται η έννοια των προσεγγιστικών αλγορίθμων και έπειτα τα αποτελέσματα προσεγγισιμότητας, για ειδικότερες περιπτώσεις του ΠΠΠ, μέσω των αλγορίθμων που μας παρέχουν αυτά τα αποτελέσματα. Στο Τέταρτο κεφάλαιο αναπ-



τύσσονται τα αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας για ειδικότερες περιπτώσεις του ΠΠΠ, δηλαδή αναπτύσσονται αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία πιστεύουμε πως είναι αδύνατον να προκύψουν προσεγγιστικοί αλγόριθμοι ως προς κάποια προσέγγιση για καθένα από αυτά τα ειδικά προβλήματα. Στο Πέμπτο κεφάλαιο εξετάζεται το ΠΠΠ ως προς τον Γραμμικό και Ακέραιο προγραμματισμό και αναπτύσσεται η έννοια του Held-Karp φράγματος και οι εικασίες που έχουν γίνει για αυτό. Στο Έκτο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα ως προς την τοπική αναζήτηση και αναπτύσσονται θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει σ' αυτή την κατεύθυνση.





Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες

Οι έννοιες που καλύπτονται στις ενότητες αυτού του κεφαλαίου ακολουθούν μια συγκεκριμένη δομή. Πρώτα αναφέρονται αποσπασματικά έννοιες από διάφορους χώρους οι οποίες θα κάνουν τα επόμενα να μην μοιάζουν αυθαίρετα και ακατανόητα. Στην συνέχεια αναφέρονται όλοι εκείνοι οι ορισμοί και έννοιες που θα επιτρέψουν να υπάρχει ένα αλφάβητο, δηλαδή μία κοινή γλώσσα για το πρόβλημα.

Αρχικά, να συμφωνήσουμε ότι ένας γράφος $G(V, E)$ είναι ένα σύνολο κόμβων και ένα σύνολο ακμών που συνδέει τους κόμβους αυτούς. Στον γράφο δεν επιτρέπεται η επανάληψη ακμών ενώ στον πολυγράφο επιτρέπεται. Το σύνολο των κόμβων αποτελείται από $|V| (= n)$ κόμβους οι οποίοι θεωρούνται σε μία τυχαία διάταξη και καθένας συμβολίζεται με έναν φυσικό αριθμό που βρίσκεται από το 1 ως το $|V|$ και αντιστοιχεί, ακριβώς, στην τυχαία αυτή διάταξη. Το σύνολο των ακμών αποτελείται από $|E|$ ακμές. Οι ακμές αυτές μπορεί να έχουν κατεύθυνση, οπότε ο γράφος λέμε ότι είναι κατευθυνόμενος και κάθε ακμή συμβολίζεται με ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (i, j) , όπου $i, j \in \{1, \dots, |V|\}$, όταν η ακμή ξεκινάει από τον κόμβο i και καταλήγει στον κόμβο j . Οι ακμές αυτές μπορεί, αντίστοιχα, να μην έχουν κατεύθυνση, οπότε ο γράφος λέμε ότι είναι μη κατευθυνόμενος και κάθε ακμή συμβολίζεται με ένα μη διατεταγμένο ζεύγος αριθμών $\{i, j\} (= \{j, i\})$, όπου $i, j \in \{1, \dots, |V|\}$ όταν η ακμή συνδέει τους κόμβους i και j . Τέλος πλήρης γράφος ονομάζεται ο γράφος που έχει το μέγιστο δυνατό σύνολο ακμών. Δηλαδή ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι πλήρης αν για κάθε διατεταγμένο ζεύγος κόμβων (u, v) υπάρχει μία ακμή στο σύνολο ακμών και ένας μη κατευθυνόμενος γράφος είναι πλήρης αν για κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος κόμβων $\{u, v\} (= \{v, u\})$ από το σύνολο κόμβων υπάρχει μία ακμή στο σύνολο ακμών.

Για έναν γράφο $G(V, E)$ μπορεί επίσης να υπάρχει μια συνάρτηση κόστους $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, που αντιστοιχίζει μία τιμή κόστους σε κάθε ακμή. Για την



συνάρτηση κόστους c μπορεί να ισχύει η τριγωνική ιδιότητα.

Ορισμός 1.1.1

Εστω A ένα οποιοδήποτε σύνολο και c μια συνάρτηση $c : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Λέμε ότι για την c ισχύει η τριγωνική ιδιότητα αν, για κάθε $x, y, z \in A$ ισχύει $c(x, y) \leq c(x, z) + c(z, y)$.

Υπάρχει περίπτωση επίσης να έχουμε έναν ευκλείδειο γράφο.

Ορισμός 1.1.2

Ορίζουμε σαν ευκλείδειο γράφο έναν μη κατευθυνόμενο πλήρη γράφο $G(V, E)$ για τον οποίον οι κόμβοι του είναι ή μπορούν να αναπαρασταθούν σαν σημεία ενός ευκλείδειου επιπέδου και η συνάρτηση κόστους αντιστοιχίζει σε κάθε ακμή την απόσταση μεταξύ των κόμβων που είναι άκρα της ακμής.

Για παράδειγμα αν $u = (u_1, u_2)$ και $v = (v_1, v_2)$, όπου $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ δύο κόμβοι ενός ευκλείδειου γράφου τότε $c(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

Προκειμένου να δώσουμε τον ορισμό της μετάθεσης κόμβων να σημειώσουμε δύο ορισμούς που προέρχονται από τον χώρο της μαθηματικής ανάλυσης [1].

Σημείωση 1.1.1

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέμε ότι είναι 'ένα προς ένα' αν, $x, y \in A$ και $x \neq y$ συνεπάγεται $f(x) \neq f(y)$.

Ενώ μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$, λέμε ότι είναι επί' αν, για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A : f(x) = y$.

Έτσι, μπορούμε τώρα να ορίσουμε την μετάθεση κόμβων.

Ορισμός 1.1.3

Μετάθεση κόμβων π ενός συνόλου κόμβων A , όταν $|A|$ είναι το πλήθος των κόμβων, είναι μία 'ένα προς ένα' και επί' συνάρτηση

$$\pi : \{1, \dots, |A|\} \rightarrow \{1, \dots, |A|\},$$

όπου το σύνολο $\{1, \dots, |A|\}$ αναπαριστά τους κόμβους του συνόλου A .

Αυτό που κάνει η συνάρτηση π είναι να αναδιατάσσει (ή αλλιώς μεταθέτει) με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο τους κόμβους του A .

Τέλος μέσα σε ένα (πολυ)γράφο ορίζουμε την έννοια της διαδρομής. Μία διαδρομή μέσα σε έναν (πολυ)γράφο αντιστοιχεί σε μία διάταξη, με πιθανή επανάληψη, των κόμβων τέτοια ώστε να διασχίζεται ένα υποσύνολο των ακμών του (πολυ)γράφου. Να σημειώσουμε πως όταν λέμε πως διασχίζεται ένα υποσύνολο των ακμών του (πολυ)γράφου εννοούμε πως κάθε ακμή μπορεί να διασχίζεται το πολύ μία φορά σε έναν γράφο και το πολύ τόσες φορές όσες είναι και η πολλαπλότητά της σε έναν πολυγράφο. Για παράδειγμα σε έναν

πλήρη μη κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$, με $|V| = 5$, μια διαδρομή είναι η $\langle 2, 1, 3, 2, 4, 1 \rangle$ στην οποία διασχίζονται οι ακμές $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$ και $(4, 1)$. Μια διαδρομή μπορεί να είναι ένας κύκλος ή ένα μονοπάτι. Κύκλος είναι μια διαδρομή η οποία ξεκινάει και καταλήγει στον ίδιο κόμβο, για έναν οποιονδήποτε κόμβο της. Μονοπάτι είναι μια διαδρομή η οποία ξεκινάει και καταλήγει σε δύο διαφορετικούς κόμβους. Τρεις σημαντικοί τύποι διαδρομών που έχουμε είναι το μονοπάτι Hamilton, ο κύκλος Hamilton και ο κύκλος Euler

Ορισμός 1.1.4

Για έναν (πολυ)γράφο $G(V, E)$, μονοπάτι Hamilton είναι ένα μονοπάτι που διασχίζει όλους τους κόμβους στο V ακριβώς μία φορά.

Ορισμός 1.1.5

Για έναν (πολυ)γράφο $G(V, E)$, κύκλος Hamilton είναι ένας κύκλος που διασχίζει όλους τους κόμβους στο V ακριβώς μία φορά.

Ορισμός 1.1.6

Για έναν (πολυ)γράφο $G(V, E)$, κύκλος Euler είναι ένας κύκλος που διασχίζει όλους τους κόμβους στο V τουλάχιστον μία φορά και όλες τις ακμές στο E ακριβώς μία φορά.

1.2 Ορισμοί και αντίστοιχες κλάσεις

Για να δώσουμε τον ορισμό του ΠΠΠ θα ξεκινήσουμε από μία διαισθητική εικόνα για να καταλήξουμε σε έναν αυστηρό ορισμό. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένας πωλητής που βρίσκεται στην πόλη Α(θήνα) και πρέπει να περάσει από κάποιες πόλεις, η το πλήθος, προκειμένου να πουλήσει το εμπόρευσμά του, έχοντας να επιστρέψει στην πόλη Α(θήνα). Το υπαρκτό και με ρεαλιστική βάση ερώτημα που προκύπτει είναι να βρούμε τη συντομότερη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής.

Αυτό όμως, δεν είναι η ακριβής διαισθητική εικόνα του ΠΠΠ. Για να φτάσουμε ως εκεί θα διατυπώσουμε το πρόβλημα λίγο διαφορετικά. Ο πωλητής, λοιπόν, πρέπει να περάσει από n πόλεις μεταξύ των οποίων είναι και η πόλη Α(θήνα). Και το ερώτημα είναι ποια διαδρομή είναι η συντομότερη αν ο πωλητής πρέπει να ξεκινήσει και να καταλήξει στην πόλη Α(θήνα). Το ερώτημα αυτό έχει σαν απάντηση την ίδια διαδρομή και το ίδιο κόστος διαδρομής ανεξάρτητα από το ποια από τις n πόλεις είναι η πόλη αφετηρία και προορισμός, η απόδειξη της πρότασης αυτής αφήνεται στον αναγνώστη αφού είναι προφανής. Μια τέτοια διαδρομή που περνάει από όλους τους κόμβους, έστω V , ακριβώς μία φορά σχηματίζοντας έναν κύκλο είναι ένας κύκλος Hamilton, δηλαδή στο ΠΠΠ αναζητούμε έναν ελάχιστο κύκλο Hamilton. Όμως, κάθε κύκλος Hamilton μπορεί να περιγραφεί από κάποια μετάθεση κόμβων $\langle \dots \rangle$ που αντιστοιχεί στην



διάταξη των κόμβων στην διαδρομή $\langle \langle(1), \langle(2), \dots, \langle(|V|), \langle(1) \rangle \rangle$. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να αναπτύξουμε τον ορισμό αυστηρά μαθηματικά.

Ορισμός 1.2.1 (ΠΠΠ)

Δεδομένου ενός πλήρη γράφου $G(V, E)$ και μιας συνάρτησης κόστους $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $c(e) > 0, \forall e \in E$
να υπολογιστεί εκείνη η μετάθεση των κόμβων \langle η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα $\sum_{k=1}^{|V|} c(\langle(k), \langle(k \bmod |V| + 1))$

Να σημειώσουμε πως αν και είθισται, στον ορισμό αυτό αλλά και στους υπόλοιπους που θα δούμε αργότερα, να λέμε ότι ο γράφος είναι πλήρης, στην πράξη θεωρούμε πως ο γράφος είναι πλήρης μη αυτοπαθής. Πλήρης μη αυτοπαθής είναι ένας πλήρης γράφος αφού του αφαιρεθούν οι ακμές που ξεκινούν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο. Προφανώς αυτές οι ακμές δεν είναι απαραίτητες, αφού δεν πρόκειται να συμπεριλαμβάνονται σε έναν κύκλο Hamilton.

Το ΠΠΠ, όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, ανήκει στην κλάση των \mathcal{NP} -πλήρων προβλημάτων. Αυτό σημαίνει για μας, με όσα γνωρίζουμε ως σήμερα, ότι το πρόβλημα αυτό έχει μια πολύ δαπανηρή ως προς τον χρόνο λύση. Συγκεκριμένα, στιγμιότυπα του προβλήματος αυτού με πολλούς κόμβους, είναι πρακτικά αδύνατο να λυθούν, αφού η λύση τους με τα υπολογιστικά μέσα που έχουμε αυτή την στιγμή στην διάθεση μας θα απαιτούσε αρκετές εκατοντάδες ημερολογιακών ετών. Έτσι, αυτό που μπορούμε να κάνουμε αρχικά, και κάνουμε, είναι να ορίσουμε ειδικότερα προβλήματα του ΠΠΠ και να εξετάσουμε και αυτά. Τα ειδικότερα προβλήματα έχουν προφανώς πιο αυστηρή δομή από το γενικό, κάνοντας τα από θεωρητική σκοπιά πιο στενά. Η πιο αυστηρή δομή από την μία μπορεί να μας δώσει μία καλύτερη μέθοδο λύσης για το ειδικότερο πρόβλημα και από την άλλη μας επιτρέπει καλύτερη και πιο μεθοδολογική ανάλυση του γενικού προβλήματος. Άλλωστε τα ειδικότερα προβλήματα είναι πολύ πιθανό να συναντηθούν σε πραγματικές συνθήκες όπου μια πιθανή μέθοδος λύσης με ρεαλιστικό κόστος χρόνου να προσφέρει μεγάλη επιχειρησιακή ή άλλη ωφέλεια, ανάλογα με την πραγματική κατάσταση για την οποία επιστρατεύεται.

Για να δούμε τις ειδικότερες κατηγορίες στις οποίες διακρίνεται το γενικό ΠΠΠ, ας θυμηθούμε τον πωλητή που πρέπει να περάσει από τις n πόλεις. Τότε αρχικά διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση όλες οι πόλεις συνδέονται με τον ίδιο δρόμο διπλής κατεύθυνσης, δηλαδή αν οι πόλεις A (θήνα) και B (όλος) είναι μεταξύ των n πόλεων, τότε οι αποστάσεις από την πόλη A (θήνα) προς την πόλη B (όλος) και αυτή από την πόλη B (όλος) προς την πόλη A (θήνα) είναι μεταξύ τους ίσες. Σ' αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε το Συμμετρικό ΠΠΠ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 1.2.2 (Συμμετρικό ΠΠΠ - Σ-ΠΠΠ)

Δεδομένου ενός πλήρη μη κατευθυνόμενου γράφου, $G(V, E)$, και μιας συνάρτησης $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $c(e) > 0, \forall e \in E$,
να υπολογιστεί εκείνη η μετάθεση κόμβων \langle η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα



$$\sum_{k=1}^{|V|} c(\pi(k), \pi(k \bmod |V| + 1)).$$

Στην δεύτερη περίπτωση ο πωλητής έχει να περάσει από n πόλεις οι οποίες ανά δύο συνδέονται όλες μεταξύ τους, σ' αυτή την περίπτωση όχι όμως με δρόμους διπλής κατεύθυνσης αλλά με δύο μονόδρομους που πιθανόν να είναι διαφορετικής απόστασης. Σ' αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε το Ασύμμετρο ΠΠΠ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 1.2.3 (Ασύμμετρο ΠΠΠ - Α-ΠΠΠ)

Δεδομένου ενός πλήρη κατευθυνόμενου γράφου, $G(V, E)$, και μιας συνάρτησης κόστους $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $c(e) > 0, \forall e \in E$, να υπολογιστεί εκείνη η μετάθεση κόμβων π η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα $\sum_{k=1}^{|V|} c(\pi(k), \pi(k \bmod |V| + 1))$.

Τέλος υπάρχουν άλλες δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη απ' αυτές για οποιοδήποτε δύο πόλεις η χρήση ενδιάμεσου προορισμού αυξάνει την απόσταση της αντίστοιχης διαδρομής. Δηλαδή για οποιοδήποτε τρεις πόλεις Α(θήνα), Β(όλος) και Γ(ιάννενα), που βρίσκονται μεταξύ των n πόλεων, η απόσταση της διαδρομής από την πόλη Α(θήνα) στην πόλη Β(όλος) είναι μικρότερη από αυτή της απόστασης από την πόλη Α(θήνα) στην πόλη Γ(ιάννενα) κι από την πόλη Γ(ιάννενα) στην πόλη Β(όλος). Αυτό όμως είναι το πρακτικό αντίστοιχο της τριγωνικής ιδιότητας και έτσι σ' αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε το Τριγωνικό ΠΠΠ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 1.2.4 (Τριγωνικό ΠΠΠ - Δ-ΠΠΠ)

Δεδομένου ενός πλήρη γράφου, $G(V, E)$, και μιας συνάρτησης κόστους, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, με $c(e) > 0 \forall e \in E$, για την οποία ισχύει η τριγωνική ιδιότητα, να υπολογιστεί εκείνη η μετάθεση κόμβων π για την οποία ελαχιστοποιείται το άθροισμα $\sum_{k=1}^{|V|} c(\pi(k), \pi(k \bmod |V| + 1))$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι δρόμοι που συνδέουν τις πόλεις είναι οι συντομότεροι δυνατοί, είναι δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις πόλεις. Έτσι η απόσταση των δρόμων που συνδέουν δύο πόλεις είναι ακριβώς η απόσταση μεταξύ των πόλεων, αν οι πόλεις θεωρηθούν διαφορετικά σημεία στο ευκλείδειο επίπεδο. Σ' αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε το Ευκλείδειο ΠΠΠ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 1.2.5 (Ευκλείδειο ΠΠΠ - Ε-ΠΠΠ)

Δεδομένου ενός ευκλείδειου γράφου, $G(V, E)$, και της συνάρτησης κόστους $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ αυτού, να υπολογιστεί εκείνη η μετάθεση κόμβων π για την οποία ελαχιστοποιείται το άθροισμα $\sum_{k=1}^{|V|} c(\pi(k), \pi(k \bmod |V| + 1))$.

Στον ορισμό αυτό δεν απαιτούμε $c(e) > 0, \forall e \in E$ γιατί προκύπτει άμεσα από



τον ορισμό του Ευκλείδειου γράφου, αφού οι αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων σε ένα ευκλείδειο επίπεδο είναι μη αρνητικές.

Στο σημείο αυτό προκύπτει ένα ερώτημα σχετικά με την σχέση ανάμεσα στις παραλλαγές του ΠΠΠ που ορίσαμε. Η ακόλουθη πρόταση μας βοηθάει να ξεδιαλύνουμε αυτό το ερώτημα.

Πρόταση 1.2.1

- i) Το Σ -ΠΠΠ είναι μια ειδική περίπτωση του A -ΠΠΠ.
- ii) Το Δ -ΠΠΠ είναι μια ειδική περίπτωση του A -ΠΠΠ αλλά και του Σ -ΠΠΠ.
- iii) Το E -ΠΠΠ είναι μια ειδική περίπτωση του Δ -ΠΠΠ αλλά και του Σ -ΠΠΠ.

Απόδειξη.

i) Το Σ -ΠΠΠ μπορεί να θεωρηθεί σαν το A -ΠΠΠ με τον περιορισμό, σε κάθε κατατεθυνόμενο μονοπάτι ανάμεσα σε δύο κόμβους, οι δύο ακμές να έχουν το ίδιο κόστος

ii) Για το Σ -ΠΠΠ ισχύει προφανώς. Για το A -ΠΠΠ ισχύει επίσης προφανώς αρκεί να σημειώσουμε πως η τριγωνική ιδιότητα μπορεί να ισχύει και για έναν κατατεθυνόμενο γράφο.

iii) Το E -ΠΠΠ μπορεί να θεωρηθεί σαν το Δ -ΠΠΠ με τον περιορισμό ότι οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων αντιστοιχούν σε κάποιο σύνολο σημείων στο επίπεδο, για τις αποστάσεις αυτές προφανώς ισχύει η τριγωνική ιδιότητα. Το E -ΠΠΠ μπορεί να θεωρηθεί σαν το Σ -ΠΠΠ με τον περιορισμό ότι οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων αντιστοιχούν σε κάποιο σύνολο σημείων στο επίπεδο, για τις αποστάσεις αυτές προφανώς ισχύει η συμμετρική ιδιότητα.

□

Συνεπώς το A -ΠΠΠ είναι η γενικότερη περίπτωση του ΠΠΠ. Επίσης, να επισημάνουμε ότι τόσο ένα A -ΠΠΠ όσο και ένα Σ -ΠΠΠ μπορούν να είναι Δ -ΠΠΠ. Τέλος, υπάρχει στιγμιότυπο του ΠΠΠ που μπορεί να ανήκει στις κλάσεις των Δ -ΠΠΠ και Σ -ΠΠΠ αλλά όχι στην κλάση των E -ΠΠΠ, ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ένα γεωμετρικό στερεό, για τις αποστάσεις του οποίου ισχύει η τριγωνική και η συμμετρική ιδιότητα χωρίς το στιγμιότυπο αυτό να μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο. Οι επισημάνσεις αυτές μαζί με την Πρόταση 1.2.1 περιγράφουν την σχέση μεταξύ των ειδικότερων κλάσεων του ΠΠΠ, που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1.

Καταλήγοντας να πούμε πως ακολουθώντας τους συμβολισμούς της υπάρχουσας βιβλιογραφίας που αναφέρονται στο ΠΠΠ, το Συμμετρικό Τριγωνικό



Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλήτη

Σχήμα 1.1: Ειδικότερες Κλάσεις του ΠΠΠ

ΠΠΠ συμβολίζεται σαν Σ -ΠΠΠ και το Ασύμμετρο Τριγωνικό ΠΠΠ συμβολίζεται σαν A -ΠΠΠ. Ο λόγος που έχουν προκύψει αυτοί οι συμβολισμοί είναι πως η προσπάθεια της προσεγγιστικής επίλυσης του ΠΠΠ έχει επικεντρωθεί σε κλάσεις για τις οποίες ισχύει η τριγωνική ιδιότητα, αφού σε περίπτωση που δεν ισχύει τότε πιστεύεται πως δεν μπορεί να προσεγγιστεί το αντίστοιχο πρόβλημα, με αποτέλεσμα να αναφερόμαστε στο Σ -ΠΠΠ ή στο A -ΠΠΠ και να εννοείται η τριγωνική ιδιότητα. Για να μην υπάρχει σύγχυση όταν δεν ισχύει η τριγωνική ιδιότητα τα αντίστοιχα προβλήματα θα αναφέρονται ως Συμμετρικό ΠΠΠ και Ασύμμετρο ΠΠΠ.





Κεφάλαιο 2

\mathcal{NP} -πληρότητα του ΠΠΠ

2.1 \mathcal{NP} -πληρότητα

Για να μελετήσουμε την \mathcal{NP} -πληρότητα του ΠΠΠ, ας διατυπώσουμε πρώτα αυστηρά τι είναι πρόβλημα. Ένα πρόβλημα ορίζεται από ένα σύνολο δεδομένων που αποτελούν το στιγμιότυπο του προβλήματος, και ένα ερώτημα για αυτά τα δεδομένα. Για ένα πρόβλημα μπορούν να υπάρχουν πολλά διαφορετικά στιγμιότυπα του, τόσα, όσες είναι και οι πιθανές διακριτές τιμές που μπορούν να πάρουν τα δεδομένα εισόδου. Από την στιγμή που θα μας δοθεί ένα πρόβλημα, αυτό που μας ζητείται είναι να βρούμε έναν αλγόριθμο που θα απαντάει στο ερώτημα του. Μία από τις κατευθύνσεις, ίσως η σημαντικότερη, της Επιστήμης Υπολογιστών είναι, από την στιγμή που θα της δοθεί ένα πρόβλημα, να βρεθεί ο ταχύτερος αλγόριθμος που θα απαντάει στο ερώτημα του, κάτι που δεν είναι πάντα εύκολο. Να αποσαφηνίσουμε κάποια σημεία που αφορούν στα προβλήματα και στις μεθόδους υπολογισμού τους, που είναι οι αλγόριθμοι.

Το ΠΠΠ είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Προβλήματα βελτιστοποίησης είναι αυτά στα οποία από ένα σύνολο εφικτών λύσεων μας ζητείται να βρούμε αυτό ή αυτά που είναι βέλτιστα ως προς κάποια ιδιότητα. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπώνεται σε τρεις διαφορετικές εκδοχές.

Εκδοχή Συναρτήσεως: Αναζητούμε την βέλτιστη εφικτή λύση (για το ΠΠΠ αναζητούμε τον ελάχιστο κύκλο Hamilton).

Εκδοχή Αποτίμησης: Αναζητούμε το κόστος της βέλτιστης λύσης (για το ΠΠΠ αναζητούμε το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton).

Εκδοχή Αποφάσεως: Δοθέντος ενός αριθμού B , εξετάζουμε εάν υπάρχει εφικτή λύση με κόστος μικρότερο από ή ίσο με το δοθέν όριο B (για το ΠΠΠ αναζητούμε αν υπάρχει κύκλος Hamilton με κόστος μικρότερο από ή ίσο με B).

Μέτρο της 'ποιότητας' ενός αλγόριθμου είναι ο χρόνος και ο χώρος που απαιτεί, αυτό αναφέρεται και ως πολυπλοκότητα του. Όμως αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι ο χρόνος. Οι αλγόριθμοι εκφράζονται ως στοιχειώδεις



εντολές. Το πλήθος των στοιχειωδών εντολών (μία επανάληψη στην μέθοδο πολλαπλασιάζει τις στοιχειώδεις εντολές), που απαιτούνται για την περαίωση ενός αλγορίθμου, ως προς το μέγεθος εισόδου, ορίζουν την πολυπλοκότητα σε χρόνο της μεθόδου. Για το ΠΠΠ ένας αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης θα απαιτούσε $n!$ υπολογισμούς κύκλων Hamilton (όσες είναι οι εφικτές λύσεις) και $n!$ συγκρίσεις, έτσι η πολυπλοκότητα του λέμε ότι είναι $n! + n! = O(n!)^1$, δεδομένου ότι n είναι το μέγεθος της εισόδου. Ένας αλγόριθμος, για ένα πρόβλημα, θεωρείται αποτελεσματικός όταν είναι το πολύ πολυωνυμικού χρόνου, όταν δηλαδή η πολυπλοκότητα του είναι το πολύ $O(n^k)$, όπου n είναι το μέγεθος εισόδου και k ένας φυσικός αριθμός. Επίσης να πούμε ότι για ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης, αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για μία εκδοχή του τότε υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος και για τις άλλες δύο, ο οποίος προκύπτει από την κατάλληλη χρήση, ανάλογα με την εκδοχή, του πολυωνυμικού αλγορίθμου για την εκδοχή που έχουμε. Για τον λόγο αυτό λέμε ότι οι τρεις διαφορετικές εκδοχές ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Υπάρχει μια μεγάλη κλάση προβλημάτων βελτιστοποίησης για την οποία και πιστεύεται ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για αυτά. Η κλάση των προβλημάτων αυτών ονομάζεται ΝΡ-πλήρης και είναι υποσύνολο μίας άλλης κλάσης, της κλάσης ΝΡ. Μία ακόμα σημαντική κλάση προβλημάτων είναι η Ρ. Για τα προβλήματα που ανήκουν στην κλάση Ρ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι, ενώ για την κλάση ΝΡ γνωρίζουμε ότι για ένα υποσύνολο προβλημάτων της (ΝΡ-πλήρη) δεν έχουμε βρει πολυωνυμικούς αλγόριθμους. Αυτό οδήγησε στην εικασία, που είναι βαθιά πεποίθηση των περισσότερων επιστημόνων αλλά δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα ούτε η θέση ούτε η άρνηση, ότι $P \subset NP$. Στην εικασία αυτή έχει στηριχθεί ένα πολύ πλούσιο θεωρητικό έργο. Πριν ορίσουμε πότε ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση των ΝΡ-πλήρων προβλημάτων ή αλλιώς είναι ΝΡ-πλήρες, να σημειώσουμε πως αν ένα πρόβλημα είναι ΝΡ-πλήρες τότε είναι ΝΡ-πλήρες και οποιαδήποτε γενίκευση του.

Ορισμός 2.1.1

Ένα πρόβλημα αποφάσεως A είναι ΝΡ-πλήρες αν,

- i) Υπάρχει αλγόριθμος που απαντά σε πολυωνυμικό χρόνο αν μια λύση του προβλήματος είναι έγκυρη (αν δηλαδή η λύση είναι εφικτή και έχει απάντηση να για το ερώτημα του προβλήματος)
- ii) Υπάρχει κάποιο πρόβλημα Π που ανήκει στην κλάση των ΝΡ-πλήρων προβλημάτων για το οποίο υπάρχει μια πολυωνυμική κατασκευή R από το Π στο A τέτοια ώστε αν x είναι ένα στιγμιότυπο του Π και $R(x)$ είναι το στιγμιότυπο του A που προκύπτει από την πολυωνυμική κατασκευή να ισχύει, (έχει έγκυρη λύση το $x \Leftrightarrow$ έχει έγκυρη λύση το $R(x)$)

¹ Λέμε ότι $f(n) = O(g(n))$, αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι c και n_0 τέτοιοι ώστε $f(n) \leq c \cdot g(n) \forall n \geq n_0$ [2]

2.2 \mathcal{NP} -πληρότητα του Σ -ΠΙΠΙ και των ευρύτερων κλάσεων του

Θα αποδείξουμε ότι το Σ -ΠΙΠΙ είναι \mathcal{NP} -πλήρες. Όλες οι υπόλοιπες παραλλαγές του ΠΙΠΙ, εκτός του Ε-ΠΙΠΙ, είναι γενικότερες περιπτώσεις του Σ -ΠΙΠΙ, και άρα είναι και αυτές με την σειρά τους \mathcal{NP} -πλήρη προβλήματα. Η απόδειξη της \mathcal{NP} -πληρότητας θα γίνει με αναγωγή από το Πρόβλημα του Μη Κατευθυνόμενου Κύκλου Hamilton που γνωρίζουμε ότι είναι \mathcal{NP} -πλήρες [2].

Ορισμός 2.2.1

Το Πρόβλημα του Μη Κατευθυνόμενου Κύκλου Hamilton ορίζεται ως εξής: Δίνεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$. Υπάρχει κύκλος Hamilton στον G ;

Θεώρημα 2.2.1

Το Σ -ΠΙΠΙ είναι \mathcal{NP} -πλήρες.

Απόδειξη. i) Προφανώς αν μας δώσουν μια διάταξη των κόμβων V μπορούμε να αποφανθούμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν είναι κύκλος Hamilton και αν έχει κόστος μικρότερο από ή ίσο με το B , και άρα αν η λύση αυτή είναι έγκυρη. ii) Θα αναγάγουμε το Πρόβλημα Μη Κατευθυνόμενος Κύκλος Hamilton στο Συμμετρικό Τριγωνικό Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή. Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$, κατασκευάζουμε το ακόλουθο στιγμιότυπο του Σ -ΠΙΠΙ στην εκδοχή αποφάσεως: έναν πλήρη μη κατευθυνόμενο γράφο $G'(V', E')$, όπου $V' = V$, μια συνάρτηση κόστους

$$c(\{i, j\}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{i, j\} \in E \\ 2 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και θέτουμε το όριο $B = |V|$. Η ερώτηση για το στιγμιότυπο του Σ -ΠΙΠΙ που κατασκευάσαμε είναι αν το άθροισμα $\sum_{k=1}^{|V|} c(\pi(k), \pi(k \bmod (|V|+1)+1))$ είναι μικρότερο από ή ίσο με $|V|$. Η κατασκευή αυτή είναι προφανώς πολυωνυμική. Αν το στιγμιότυπο του Μη Κατευθυνόμενου Κύκλου Hamilton έχει έγκυρη λύση, αν δηλαδή υπάρχει μη κατευθυνόμενος κύκλος Hamilton για τον γράφο G τότε αυτός ο κύκλος για τον G' με την c είναι κύκλος Hamilton με κόστος ίσο με $|V|$ και άρα το στιγμιότυπο του Σ -ΠΙΠΙ που κατασκευάσαμε έχει έγκυρη λύση. Για το αντίστροφο, αν το στιγμιότυπο του Σ -ΠΙΠΙ που κατασκευάσαμε έχει έγκυρη λύση, αν δηλαδή έχει κύκλο Hamilton με κόστος μικρότερο από ή ίσο με $|V|$, τότε αυτός ο κύκλος έχει κόστος ακριβώς $|V|$, αφού ο κύκλος περνάει ακριβώς από $|V|$ ακμές με κάθε ακμή να έχει κόστος μεγαλύτερο από ή ίσο με 1. Και από τον κύκλο Hamilton κόστους $|V|$, για τον G' με την c , έπεται ότι ο G έχει κύκλο Hamilton, αφού ο κύκλος, για τον G' με την c , περνάει μόνο από ακμές κόστους 1. Δηλαδή το στιγμιότυπο του Μη Κατευθυνόμενου κύκλου Hamilton έχει έγκυρη λύση. \square



Πόρισμα 2.2.1

Το Α-ΠΠΠ, το Δ-ΠΠΠ, το Συμμετρικό ΠΠΠ και το Ασύμμετρο ΠΠΠ είναι ΝΡ-πλήρη.

2.3 ΝΡ-πληρότητα του Ε-ΠΠΠ

Θα δείξουμε ότι το Ε-ΠΠΠ είναι ΝΡ-hard, αφού είναι ανοιχτό ακόμα το ερώτημα του αν ανήκει ή όχι στην κλάση των ΝΡ-πλήρων προβλημάτων. Η απόδειξη περιέχει πολλά τεχνικά σημεία που μπορούν να μεπιδέψουν τον αναγνώστη. Είναι προτιμότερο λοιπόν να περιγράψουμε την απόδειξη, χωρίς τα δύσκολα τεχνικά σημεία, αναδεικνύοντας τις ιδέες των οποίων γίνεται χρήση και αποφεύγοντας να δώσουμε μία αυστηρή απόδειξη. Η αυστηρή απόδειξη την οποία και περιγράφουμε αναπτύσσεται στην εργασία των Garey, Graham και Johnson στο [4]. Μία παρόμοια απόδειξη έχει κάνει και ο Papadimitriou στην εργασία του στο [5]. Για να αποδείξουμε ότι το Ε-ΠΠΠ είναι ΝΡ-hard, θα ανάγουμε το πρόβλημα Exact 3 Cover (X3C) στο Ε-ΠΠΠ. Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα X3C είναι ΝΡ-πλήρες [2].

Ορισμός 2.3.1 (X3C)

Δίνεται σύνολο U που περιέχει $3n$ στοιχεία (χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε $U = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$) και μία οικογένεια $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_t\}$, υποσυνόλων του U , που περιέχουν ακριβώς 3 στοιχεία. Υπάρχει μία υπο-οικογένεια $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, ανά δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων, τέτοια ώστε $\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F = U$; (υπάρχει δηλαδή μία ακριβής επικάλυψη;)

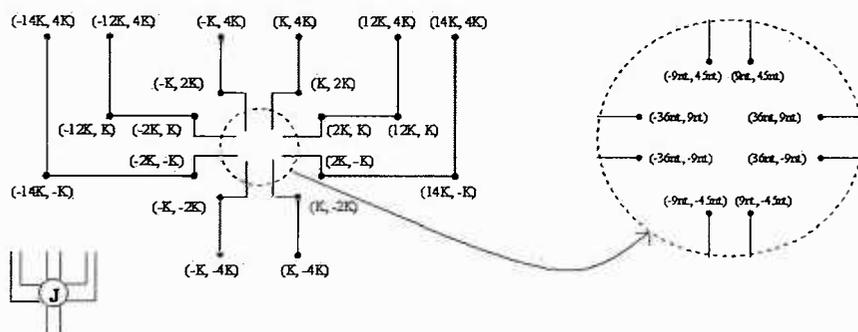
Θεώρημα 2.3.1

Το Ε-ΠΠΠ είναι ΝΡ-hard.

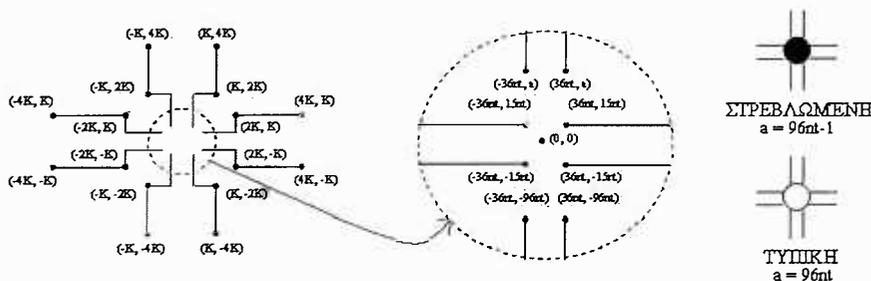
Απόδειξη. i) Για να ήταν το Ε-ΠΠΠ ΝΡ-πλήρες, θα έπρεπε να δείξουμε ότι, για έναν κύκλο Hamilton, για ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο του Ε-ΠΠΠ, μπορούμε να αποφανθούμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν αυτός ο κύκλος Hamilton έχει κόστος μικρότερο από ή ίσο με κάποια σταθερά B . Όταν, όμως, το στιγμιότυπο αναπαρίσταται από σημεία στο επίπεδο τότε αυτό δεν ξέρουμε αν μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο λόγω των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης που υπεισέρχονται από τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών για τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων. Αλλά, όπως θα δείξουμε στα αμέσως επόμενα, υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το X3C, κάτι που σημαίνει ότι το πρόβλημα είναι ΝΡ-hard

ii) Έστω ότι έχουμε κάποιο στιγμιότυπο του X3C, με $U = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ και $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_t\}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του U . Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το X3C στο Ε-ΠΠΠ. Για αυτή την πολυωνυμική αναγωγή χρειαζόμαστε αρχικά την ειδική κατασκευή, που ονομάζουμε διασταύρωση και φαίνεται στο Σχήμα 2.1, και την ειδική κατασκευή, που ονομά-

ζουμε ανισόπεδη διασταύρωση και φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Αυτές οι ειδικές κατασκευές αποτελούνται από τους κόμβους, που αναπαρίστανται σαν σημεία στα αντίστοιχα σχήματα, όπου $K = 108nt^2 + 1008n^2t^2 + 108n^2t$. Μία ανισόπεδη διασταύρωση μπορεί να είναι τυπική ή στρεβλωμένη, ανάλογα με την τιμή που παίρνει το a , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Δεδομένου του \mathcal{F} και των ειδικών

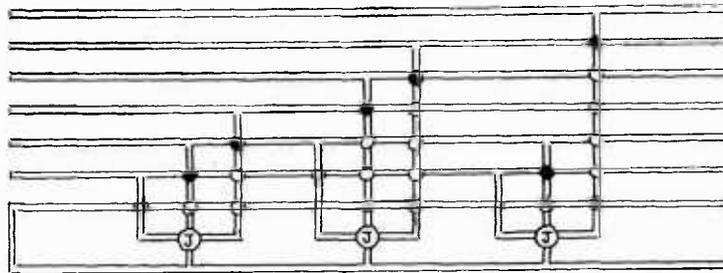


Σχήμα 2.1: Διασταυρώσεις



Σχήμα 2.2: Ανισόπεδες Διασταυρώσεις

κατασκευών, κατασκευάζουμε την τελική κατασκευή που για το παράδειγμα, όπου $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 6\}\}$, φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Σε αυτή την τελική κατασκευή, για κάθε σύνολο της οικογένειας \mathcal{F} , ξεκινάμε από μία διασταύρωση, την οποία έπειτα προεκτείνουμε προς τα πάνω ως προς κάθε ένα από τα τρία τμήματα της στα οποία μπορεί να προεκταθεί. Αυτά τα τρία τμήματα, τα προεκτείνουμε τοποθετώντας διαδοχικά τυπικές ανισόπεδες διασταυρώσεις και τοποθετώντας πάντα τελευταία μία τυπική ανισόπεδη διασταύρωση. Η προέκταση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε, σε κάθε ένα από τα προεκτεινόμενα τμήματα, να υπάρχουν τόσες τυπικές και μία στρεβλωμένη ανισόπεδες διασταυρώσεις όσο είναι και οι αντίστοιχοι αριθμοί που αποτελούν το σύνολο. Τόσο η προέκταση που περιγράψαμε όσο και οι υπόλοιπες που φαίνονται σχηματικά σαν σωληνώσεις αποτελούνται από διατεταγμένα σημεία, που έχουν τοποθετηθεί κατάλληλα



Σχήμα 2.3: Τελική κατασκευή για το παράδειγμα όπου $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 6\}\}$

και ωθούν τον ελάχιστο κύκλο Hamilton να περνάει από αυτά τα σημεία σχηματίζοντας αυτά που φαίνονται σαν σωληνώσεις. Οι υπόλοιπες προεκτάσεις, εκτός αυτής που περιγράψαμε, έπονται εύκολα στην γενική περίπτωση από το παράδειγμα του Σχήματος 2.3. Αυτό που είναι σημαντικό για την πολυωνυμική αναγωγή είναι το τι γίνεται στις ειδικές κατασκευές, και συγκεκριμένα πως συνδέονται οι κόμβοι που απεικονίζονται μέσα στον κύκλο στα αντίστοιχα σχήματα των ειδικών κατασκευών.

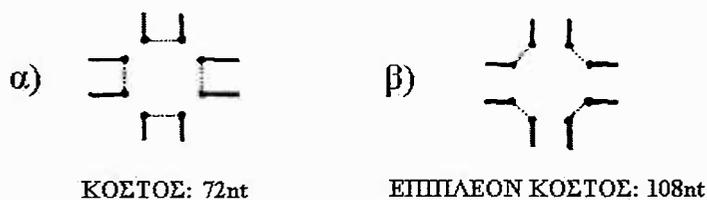
Θα δείξουμε ότι η \mathcal{F} έχει μια ακριβή επικάλυψη αν και μόνο αν υπάρχει κύκλος Hamilton για την κατασκευή μας, που να έχει συνολικό μήκος μικρότερο από ή ίσο με,

$$L = |T_0| + 72nt^2 + 312ntq + 108n^2t - 6n,$$

όπου q το πλήθος των διασταυρώσεων και $|T_0|$ το συνολικό μήκος των υπόλοιπων ακμών εκτός αυτών που φαίνονται να λείπουν στους κύκλους για τα σχήματα των ειδικών κατασκευών.

Ως προς το ευθύ, παρατηρούμε ότι ένας ελάχιστος κύκλος Hamilton δεν περιλαμβάνει τεμνόμενες ακμές εκτός από τις δύο ακμές που τέμνονται σε ένα κοινό κόμβο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ελάχιστος κύκλος Hamilton χωρίζει το επίπεδο σε δύο συνεκτικά μέρη. Αυτό που κάνουμε, λοιπόν, είναι να ξεκινήσουμε από κάποιο κομμάτι εκτός των ειδικών κατασκευών που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό συνεκτικό μέρος του κύκλου Hamilton χρωματίζοντας το μπλε. Και για κάθε κομμάτι εκτός των ειδικών κατασκευών που συνορεύει με το κομμάτι που χρωματίσαμε μπλε το χρωματίζουμε κόκκινο. Συνεχίζουμε εναλλάξ με την ίδια διαδικασία ώσπου να χρωματιστούν όλα τα κομμάτια εκτός από τις ειδικές κατασκευές. Ένας τέτοιος χρωματισμός θα οδηγούσε σε όλα αυτά που φαίνονται να έχουν σχήμα σωληνώσεως με μπλε χρώμα και σε όλα τα υπόλοιπα με κόκκινο χρώμα. Αυτό που κάνουν οι ειδικές κατασκευές είναι κατάλληλες συνδέσεις ώστε τελικά να έχουμε μόνο δύο συνεκτικά μέρη του επιπέδου. Όμως ο τρόπος που γίνονται οι συνδέσεις συνεπάγεται και κάποιο κόστος πέρα από το $|T_0|$. Οι τρόποι που γίνονται οι συνδέσεις και

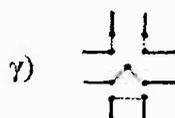
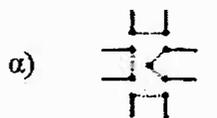
τα αντίστοιχα κόστη για τις διασταυρώσεις φαίνεται στο σχήμα 2.4 και για τις ανισόπεδες διασταυρώσεις φαίνεται στο σχήμα 2.5. Το επιπλέον κόστος, σε κάθε περίπτωση, αναφέρεται στο παραπάνω κόστος που έχουμε ως προς το να μην είχαμε καμία σύνδεση (που και για τα δύο σχήματα είναι η σύνδεση α)).



Σχήμα 2.4: Τύποι συνδέσεων για Διασταυρώσεις

ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΡΕΒΛΩΜΕΝΗ
ΑΝΙΣΟΠΕΔΗ ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ

ΤΥΠΙΚΗ
ΑΝΙΣΟΠΕΔΗ ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ



ΚΟΣΤΟΣ: 252nt

ΕΠΠΛΑΕΟΝ ΚΟΣΤΟΣ: 60nt

ΣΤΡΕΒΛΩΜΕΝΗ
ΑΝΙΣΟΠΕΔΗ ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ



ΕΠΠΛΑΕΟΝ ΚΟΣΤΟΣ: 60nt

ΕΠΠΛΑΕΟΝ ΚΟΣΤΟΣ: 60nt-2

Σχήμα 2.5: Τύποι συνδέσεων για Ανισόπεδες Διασταυρώσεις

Έστω μία οικογένεια $\mathcal{F}' = [F_1, F_2, \dots, F_t]$ υποσυνόλων του $U = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ για το πρόβλημα $X3C$, για την οποία φτιάχνουμε την αντίστοιχη κατασκευή όπως ορίστηκε ανωτέρω. Αν υπάρχει ακριβής επικάλυψη $\mathcal{F}' = \{F_i : i \in I\}$, όπου $I \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$ και $|I| = n$ τότε υπάρχει κύκλος Hamilton για την κατασκευή μας με κόστος μικρότερο από ή ίσο με $L = |T_0| + 72nt^2 + 312ntq + 108n^2t - 6n$. Ένας τέτοιος κύκλος Hamilton, με αυτό το κόστος, προκύπτει αν

- i) για κάθε στρεβλωμένη ανισόπεδη διασταύρωση που αντιστοιχεί σε κάποιο F_i , όπου $i \in I$ χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου δ) και για όλες τις υπόλοιπες στρεβλωμένες ανισόπεδες διασταυρώσεις χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου β)
- ii) για κάθε τυπική ανισόπεδη διασταύρωση που αντιστοιχεί σε κάποιο F_i , όπου $i \in I$ χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου γ) και για όλες τις υπόλοιπες τυπικές ανισόπεδες διασταυρώσεις χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου β)
- iii) για κάθε διασταύρωση που αντιστοιχεί σε κάποιο F_i , όπου $i \in I$ χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου β) και για όλες τις υπόλοιπες διασταυρώσεις χρησιμοποιούμε συνδέσεις τύπου α)

Μια τέτοια κατασκευή μας οδηγεί σε κύκλο Hamilton με κόστος T^* ίσο με

$$\begin{aligned} T^* &= |T_0| + t72nt + q252nt + n108nt + 3n(60nt - 2) + (q - 3n)60nt = \\ &= |T_0| + 72nt^2 + 252qnt + 108n^2t + 180n^2t - 6n + 60qnt - 180n^2t \\ &= |T_0| + 72nt^2 + 312qnt + 108n^2t - 6n \end{aligned}$$

Αν τώρα για την κατασκευή υπάρχει κύκλος Hamilton με κόστος μικρότερο από ή ίσο με $L = |T_0| + 72nt^2 + 312ntq + 108n^2t - 6n$, τότε αυτό θα σήμαινε ότι για αυτόν τον κύκλο Hamilton υπάρχουν το πολύ n διασταυρώσεις τύπου β). Από την κατασκευή, σε κάθε επίπεδο, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία στρεβλωμένη ανισόπεδη διασταύρωση τύπου δ). Επίσης οι στρεβλωμένες ανισόπεδες διασταυρώσεις τύπου δ) ωθούν όλες τις τυπικές ανισόπεδες διασταυρώσεις που βρίσκονται από κάτω της να είναι τύπου γ) και την διασταύρωση που βρίσκεται από κάτω της να είναι τύπου β). Αυτές οι συνθήκες αρχούν για να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι τότε υπάρχει ακριβής επικάλυψη που προκύπτει από την λύση για το Ε-ΠΙΠΙ που έχουμε κατασκευάσει.

□



Κεφάλαιο 3

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για το ΠΠΠ

3.1 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Όπως είδαμε, όλες οι εκδοχές του ΠΠΠ, εκτός του Ε-ΠΠΠ, είναι \mathcal{NP} -πλήρη προβλήματα, αλλά και το Ε-ΠΠΠ είναι \mathcal{NP} -hard. Αυτό θεωρητικά σημαίνει ότι πιστεύουμε πως δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που να λύνει βέλτιστα κάποια από αυτές τις εκδοχές του ΠΠΠ. Και πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να τις λύσουμε βέλτιστα με κόστος χρόνου όμως, τόσο μεγάλο, που να καθιστά την μέθοδο λύσης αναποτελεσματική για τις περισσότερες πιθανές εφαρμογές, που είναι πολλές και μεγάλης σπουδαιότητας. Θα ήταν δυνατό και επιθυμητό, λοιπόν, να χάσουμε κάτι από την ακρίβεια της λύσης προκειμένου να έχουμε κάποια λύση σε πολυωνυμικό χρόνο. Έτσι για τα \mathcal{NP} -πλήρη και \mathcal{NP} -hard προβλήματα προέκυψαν οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Αν, δηλαδή, C^* είναι η βέλτιστη λύση και C η λύση που υπολογίζει ένας αλγόριθμος για ένα στιγμιότυπο του προβλήματος έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 3.1.1

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, συναρτησιακά προσεγγιστικός αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος για κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια λύση κόστους C για την οποία ισχύει:

$$\frac{C}{C^*} \leq f(n),$$

όπου n κάποια παράμετρος του στιγμιότυπου.

Ορισμός 3.1.2

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ρ -προσεγγιστικός αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος για κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος υπολογίζει σε



πολυωνυμικό χρόνο μια λύση κόστους C για την οποία ισχύει:

$$\frac{C}{C^*} \leq \rho = 1 + \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon > 0$$

Ορισμός 3.1.3

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα (Polynomial Time Approximation Scheme - PTAS) είναι μια οικογένεια αλγορίθμων η οποία για κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπολογίζει, σε πολυωνυμικό χρόνο στο στιγμιότυπο συναρτήσει του ε , μία λύση C για την οποία ισχύει:

$$\frac{C}{C^*} \leq 1 + \varepsilon$$

Ορισμός 3.1.4

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, Πλήρως Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα (Fully Polynomial Time Approximation Scheme - FPTAS) είναι μια οικογένεια αλγορίθμων η οποία για κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπολογίζει, σε πολυωνυμικό χρόνο στο στιγμιότυπο και στο $\frac{1}{\varepsilon}$, μια λύση κόστους C για την οποία ισχύει:

$$\frac{C}{C^*} \leq 1 + \varepsilon$$

Να πούμε ότι ο λόγος $\frac{C}{C^*}$ αναφέρεται και σαν λόγος προσέγγισης. Οι ορισμοί, με την σειρά που αναφέρονται, αναφέρονται από την λιγότερο προς την περισσότερο ισχυρή προσέγγιση. Επίσης, είναι δυνατόν για έναν ρ -προσεγγιστικό αλγόριθμο να έχει αποδειχθεί ότι ο λόγος προσέγγισης είναι μικρότερος από ή ίσος με ρ , αλλά αυτό το άνω φράγμα να μην είναι το ελάχιστο άνω φράγμα και να μπορεί να βελτιωθεί. Έτσι, για τους ρ -προσεγγιστικούς αλγορίθμους αναζητούμε την στενότητά τους (tightness). Αναζητούμε δηλαδή κάποιο στιγμιότυπο ή κάποια οικογένεια στιγμιότυπων, του οποίου ο λόγος προσέγγισης είναι ρ ή των οποίων ο λόγος προσέγγισης συγκλίνει στο ρ αντίστοιχα.

3.2 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ-ΠΠΠ

Ο πρώτος ρ -προσεγγιστικός αλγόριθμος που προτάθηκε για το Σ-ΠΠΠ ήταν για $\rho = 2$. Αρχικά ο αλγόριθμος αυτός, για κάποιο στιγμιότυπο του προβλήματος, υπολογίζει ένα ελάχιστο δέντρο επικάλυψης και έπειτα από αυτό, με διπλασιασμό των ακμών του, κατασκευάζει έναν πολυγράφο Euler.

Ορισμός 3.2.1

Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ ελάχιστο δέντρο επικάλυψης είναι ο συνδεδεμένος¹ ακυκλικός² υπογράφος του G με το ελάχιστο άθροισμα

¹ συνδεδεμένος ονομάζεται ο γράφος για τον οποίο για κάθε διακριτό ζευγάρι κόμβων του υπάρχει διαδρομή που τους συνδέει

² ακυκλικός είναι ένας γράφος για τον οποίο δεν υπάρχει κάποιος κύκλος



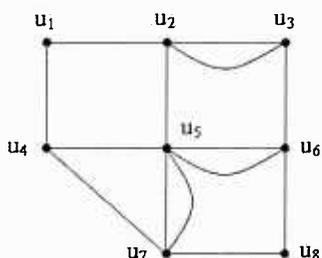
κόστους ακμών.

Αφού κατασκευαστεί ο πολυγράφος Euler, αναζητείται ένας κύκλος Euler σε αυτόν. Μετά από κατάλληλες συντομεύσεις επί του κύκλου αυτού, από τις οποίες δεν αυξάνεται το κόστος της διαδρομής, προκύπτει ένας κύκλος Hamilton για το Σ-ΠΠΠΠ. Για να δούμε τον αλγόριθμο αυτό, ας δούμε πρώτα τι είναι ένας πολυγράφος Euler.

Ορισμός 3.2.2

Ένας πολυγράφος $G(V,E)$ λέμε ότι είναι Euler αν υπάρχει κύκλος Euler σε αυτόν.

Για να γίνει καλύτερα κατανοητός ο ορισμός, ας δούμε το παράδειγμα του Σχήματος 3.1. Στον πολυγράφο αυτό ένας κύκλος Euler είναι ο $[u_1, u_2, u_5, u_4, u_7, u_5, u_7, u_8, u_6, u_5, u_6, u_3, u_2, u_3]$, στον οποίο κάθε ακμή διασχίζεται ακριβώς μία φορά και κάθε κόμβος τουλάχιστον μία φορά.



Σχήμα 3.1: Πολυγράφος Euler

Θεώρημα 3.2.1

Ένας πολυγράφος $G(V, E)$ είναι Euler αν και μόνο αν

- i) ο $G(V, E)$ είναι συνδεδεμένος, και
- ii) όλοι οι κόμβοι στο V έχουν άρτιο βαθμό³.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι άμεσο. Για να αποδείξουμε το αντίστροφο θα το δείξουμε με επαγωγή στον αριθμό των ακμών του γράφου. Βάση επαγωγής θεωρούμε έναν γράφο με έναν κόμβο και καμία ακμή και είναι προφανές ότι ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος. Τώρα υποθέτουμε ότι ο πολυγράφος G ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii), ενώ οποιοσδήποτε πολυγράφος με λιγότερες ακμές από αυτές του G που ικανοποιεί τις i) και ii) είναι πολυγράφος Euler. Διαλέγουμε έναν κόμβο v του G και ξεκινάμε να κατασκευάσουμε μια διαδρομή του G , η οποία δεν θα περνάει από την ίδια ακμή δύο φορές και θα ξεκινάει και θα καταλήγει στον κόμβο v . Από τις συνθήκες i) και ii) μια τέτοια διαδρομή

³βαθμός ενός κόμβου σε έναν γράφο είναι το πλήθος των ακμών που έχουν σαν ένα άκρο τον κόμβο αυτό

υπάρχει. Τώρα, αφαιρώντας τις ακμές της διαδρομής από τον πολυγράφο G , προκύπτουν μία ή περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες. Κάθε συνιστώσα ωστόσο ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii) και έτσι κάθε μια τους έχει κύκλο Euler από επαγωγή. Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι, αν για τη διαδρομή που κατασκευάσαμε, επισυνάψουμε για κάθε συνεκτική συνιστώσα τον αντίστοιχο κύκλο Euler σε κάποιον κοινό τους κόμβο τότε αυτό που προκύπτει είναι κύκλος Euler για τον γράφο G . \square

Από την απόδειξη αυτή προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος τον οποίο καλούμε Euler και δέχεται σαν είσοδο έναν πολυγράφο Euler $G(V, E)$ και έναν κόμβο $v_1 \in V$ και επιστρέφει έναν κύκλο Euler.

Euler($G(V, E), v_1$)

Αν ο v_1 δεν έχει ακμές επέστρεψε $[v_1]$;

Διαφορετικά

Ξεκινώντας από τον κόμβο v_1 δημιουργήσε μια διαδρομή του G , χωρίς να επισκεφτούμε την ίδια ακμή δεύτερη φορά, ώσπου να φτάσουμε ξανά στον v_1 , ας είναι η $[v_1, v_2, \dots, v_n, v_1]$ αυτή η διαδρομή;

διέγραψε τις ακμές $[v_1, v_2], \dots, [v_n, v_1]$ από τον G ;

για όλα τα i από 1 έως n

π_i ο κύκλος Euler που επιστρέφει η Euler($G(V, E), v_1$);

τέλος επανάληψης

επέστρεψε τη διαδρομή $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, v_1]$;

Ο αλγόριθμος αυτός έχει πολυπλοκότητα $O(|E|) = O(n^2)$.

Ένας κύκλος Euler ξεκινάει και καταλήγει στον ίδιο κόμβο και περνάει από όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά. Κατά συνέπεια αν π είναι ένα κύκλος Euler ενός τριγωνικού πολυγράφου (δηλαδή ενός πολυγράφου με μια συνάρτηση κόστους για την οποία ισχύει η τριγωνική ιδιότητα), από αυτόν προκύπτει ένας κύκλος Hamilton π' μετά από κατάλληλες συντομεύσεις, που λόγω της τριγωνικής ιδιότητας δεν αυξάνουν το κόστος της διαδρομής. Δηλαδή, για παράδειγμα, αν είναι $\pi = [u_1, u_2, u_3, u_2, u_4, u_1]$ ένας κύκλος Euler τότε από αυτόν μετά από κατάλληλες συντομεύσεις προκύπτει ο κύκλος Hamilton $\pi' = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_1]$, με κόστος όχι μεγαλύτερο από αυτό του π . Έτσι προκύπτει η εξής σημείωση.

Σημείωση 3.2.1

Για κάθε τριγωνικό πολυγράφο $G(V, E)$ αν υπάρχει κύκλος Euler π τότε για κάθε τέτοια διαδρομή π υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος Hamilton π' που προκύπτει μετά από κατάλληλες συντομεύσεις. Για κάθε τέτοιον κύκλο Hamilton ισχύει ότι $c(\pi') \leq c(\pi)$



Με βάση λοιπόν όλα αυτά προκύπτει ο επόμενος 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ-ΠΠΠ τον οποίο καλούμε Approx και δέχεται σαν είσοδο έναν μη κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$ και την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους c , για την οποία ισχύει η τριγωνική ιδιότητα.

$\text{Approx}(G(V, E), c)$

Υπολόγισε το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης T ;

Δημιούργησε έναν πολυγράφο G' διπλασιάζοντας κάθε ακμή του ελάχιστου δέντρου επικάλυψης T ;

Υπολόγισε έναν κύκλο Euler, π_e , για τον G' ;

Με κατάλληλες συντομεύσεις επί του π_e , υπολόγισε έναν κύκλο Hamilton π ;

επέστρεψε τον κύκλο Hamilton π ;

Να σημειώσουμε, για την ορθότητα του αλγορίθμου, πως προφανώς από τον διπλασιασμό των ακμών ενός δέντρου επικάλυψης προκύπτει ένας συνεκτικός γράφος που κάθε κόμβος του έχει άρτιο βαθμό, δηλαδή προκύπτει ένας πολυγράφος Euler.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολυωνυμικός αφού ο υπολογισμός ενός ελάχιστου δέντρου επικάλυψης απαιτεί $O(|E| \log |V|) = O(n^2 \log n)$ [3]. Ενώ ο διπλασιασμός των ακμών, ο υπολογισμός ενός κύκλου Euler και ο υπολογισμός του κύκλου Hamilton, που προκύπτει μετά από τις κατάλληλες συντομεύσεις επί του κύκλου Euler, απαιτούν $O(|E|) = O(n^2)$ χρόνο. Στο σημείο αυτό μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2

Υπάρχει 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ-ΠΠΠ

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ένας τέτοιος 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος είναι ο Approx . Έστω H^* ο ελάχιστος κύκλος Hamilton, για τον γράφο G , με κόστος $c(H^*)$ και H ο κύκλος Hamilton, που επιστρέφει ο αλγόριθμος, με κόστος $c(H)$. Έστω T το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης του G κόστους $c(T)$ και W ο κύκλος Euler, που προκύπτει μετά από τον διπλασιασμό των ακμών του T , κόστους $c(W)$. Από τον ορισμό του ελάχιστου δέντρου επικάλυψης γνωρίζουμε ότι $c(T) \leq c(S)$ για κάθε δέντρο επικάλυψης S . Αλλά, αν από το H^* αφαιρέσουμε μία ακμή, αυτό που προκύπτει είναι ένα δέντρο επικάλυψης S_{H^*} , για το οποίο ισχύει $c(S_{H^*}) \leq c(H^*)$. Έτσι προκύπτει ότι:

$$(3.1) \quad c(T) \leq c(H^*).$$

Επίσης, από την Σημείωση 3.2.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει κύκλος Hamilton, H , που προκύπτει μετά από κατάλληλες συντομεύσεις επί του W , για τον οποία ισχύει ότι,

$$(3.2) \quad c(H) \leq c(W)$$



Ενώ προφανώς ισχύει ότι,

$$(3.3) \quad c(W) = 2c(T)$$

Άρα από τις Σχέσεις 3.1, 3.2 και 3.3 έχουμε ότι,

$$c(H) \leq c(W) = 2c(T) \leq 2c(H^*) \Rightarrow$$

$$c(H) \leq 2c(H^*)$$

□

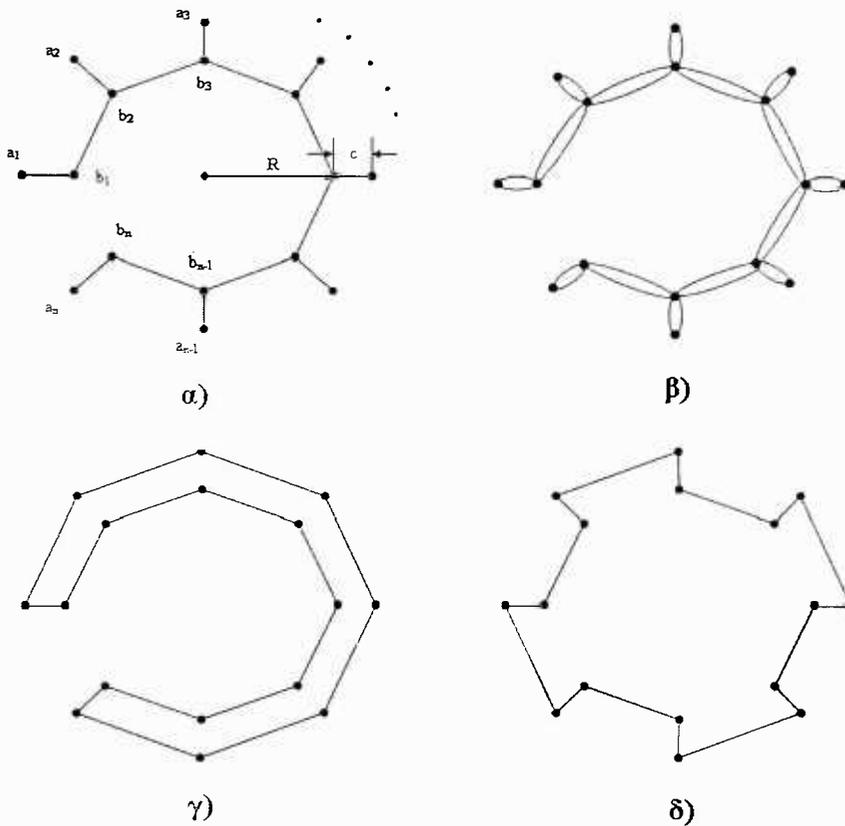
Αυτό που απομένει είναι να δείξουμε την στενότητα αυτού του ρ -προσεγγιστικού αλγορίθμου. Αρκεί να δείξουμε ότι, για τον αλγόριθμο αυτό, υπάρχει μια οικογένεια στιγμιότυπων που προσεγγίζει ασυμπτωτικά τον λόγο 2. Δηλαδή μπορούμε από την οικογένεια στιγμιότυπων να επιλέξουμε κατάλληλο στιγμιότυπο, που να φτάνει οσοδήποτε κοντά στον λόγο 2. Μια τέτοια οικογένεια φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Κάθε στιγμιότυπο είναι ένας ευκλείδειος γράφος και άρα μία περίπτωση του Σ-ΠΠΠ. Αποτελείται από n κόμβους που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R και ισαπέχουν μεταξύ τους. Τους κόμβους αυτούς τους ονομάζουμε b_i . Και αποτελείται και από άλλους n κόμβους που βρίσκονται στο άκρο της προέκτασης κατά c της ακτίνας, για κάθε έναν από τους b_i κόμβους. Τους κόμβους αυτούς τους ονομάζουμε a_i . Οι ακμές δεν υπάρχουν στο σχήμα για απλοποίηση αλλά θεωρούμε πως έχουμε έναν πλήρη γράφο. Για τον ευκλείδειο γράφο λοιπόν του Σχήματος 3.2 α), ο πολυγράφος που προκύπτει μετά από τον διπλασιασμό των ακμών του ελάχιστο δέντρου επικάλυψης φαίνεται στο Σχήμα 3.2 β). Ένας κύκλος Hamilton, που προκύπτει μετά από κατάλληλες συντομεύσεις επί κάποιου κύκλου Euler του γράφου, φαίνεται στο Σχήμα 3.2 γ), όμως ο ελάχιστος κύκλος Hamilton φαίνεται στο Σχήμα 3.2 δ). Επομένως, για το κόστος της λύσης που προκύπτει από τον προσεγγιστικό αλγόριθμο C και το κόστος ελάχιστου κύκλου Hamilton C^* έχουμε ότι:

$$C = 2(n-1)(2R+c)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2c \quad \text{και}$$

$$C^* = n(2R+c)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + nc$$

Για $R = 1$, $c = 1/n^2$ και n πολύ μεγάλο παρατηρούμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} C = 4\pi$, ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} C^* = 2\pi$. Άρα στην οικογένεια αυτή υπάρχει στιγμιότυπο που φτάνει οσοδήποτε κοντά στον λόγο προσέγγισης 2.





Σχήμα 3.2:

3.3 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ-ΠΠΠ

Για κάποια χρόνια και μέχρι ο Christofides να προτείνει τον αλγόριθμό του επικρατούσε η άποψη ότι ο 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος παρείχε ένα όριο που δεν μπορούσε να βελτιωθεί περαιτέρω. Ο Christofides λοιπόν το 1975 πρότεινε έναν 3/2-προσεγγιστικό αλγόριθμο με την εργασία του στο [6]. Ο αλγόριθμος αυτός περιγράφεται με τον εξής τρόπο. Τον καλούμε Christofides και δέχεται σαν είσοδο έναν μη κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$ και την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους c , για την οποία ισχύει η τριγωνική ιδιότητα. Πριν αναπ-

τύξουμε τον αλγόριθμο να αναφέρουμε τον ορισμό του πλήρες ταίριασματος, που είναι απαραίτητος για τον αλγόριθμο.

Ορισμός 3.3.1

Ελάχιστο πλήρες ταίριασμα για έναν γράφο $G(V, E)$ είναι το σύνολο ακμών, που ανά δύο δεν έχουν ένα κοινό άκρο, κάθε κόμβος είναι άκρο για κάποια ακμή και έχει το ελάχιστο άθροισμα κόστους ακμών.

Christofides($G(V, E), c$)

Υπολόγισε το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης T ;

Υπολόγισε τους κόμβους, V_T , του T , που έχουν μονό βαθμό;

Υπολόγισε το ελάχιστο πλήρες ταίριασμα, M , των κόμβων V_T στον πλήρη γράφο που περιορίζεται σε αυτούς τους κόμβους;

Δημιούργησε έναν πολυγράφο G' με κόμβους τους κόμβους V και ακμές αυτές στο T και αυτές στο M ;

Υπολόγισε έναν κύκλο Euler, π_e , για τον G' ;

Με κατάλληλες συντομεύσεις επί του π_e , υπολόγισε έναν κύκλο Hamilton π ;

επέστρεψε τον κύκλο Hamilton π ;

Για την ορθότητα του αλγορίθμου, να σημειώσουμε πως ο γράφος G' , που κατασκευάζεται στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου, είναι οπωσδήποτε συνδεδεμένος αφού περιέχει ένα δέντρο επικάλυψης το T . Επίσης, αν ένας κόμβος στο G έχει άρτιο βαθμό τότε ο κόμβος αυτός έχει άρτιο βαθμό και στον G' . Και αν ένας κόμβος στο G έχει περιττό βαθμό τότε ο κόμβος αυτός έχει άρτιο βαθμό στον G' , αφού στον κόμβο αυτόν προστίθεται μία ακμή. Άρα, κάθε κόμβος στον G' είναι άρτιου βαθμού. Κατά συνέπεια ο G' είναι συνδεδεμένος και όλοι οι κόμβοι του είναι άρτιου βαθμού. Δηλαδή ο γράφος G' είναι Euler.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολυωνυμικός, αφού ο υπολογισμός ενός ελάχιστου δέντρου επικάλυψης απαιτεί $O(|E| \log |V|) = O(n^2 \log n)$ χρόνο. Για να υπολογίσουμε ποιοι κόμβοι έχουν περιττό βαθμό (εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή πως στα δέντρα επικάλυψης υπάρχει άρτιο πλήθος κόμβων περιττού βαθμού) απαιτείται $O(|V|) = O(n)$ χρόνος, ενώ το ελάχιστο πλήρες ταίριασμα απαιτεί $O(n^4)$ χρόνο [3]. Ο υπολογισμός ενός κύκλου Euler και ο υπολογισμός ενός κύκλου Hamilton που προκύπτει μετά από κατάλληλες συντομεύσεις επί του κύκλου Euler απαιτεί $O(|E|) = O(n^2)$ χρόνο. Στο σημείο αυτό να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.1

Υπάρχει 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ-ΠΠΠ.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ένας τέτοιος 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος είναι ο Christofides. Έστω H^* ο ελάχιστος κύκλος Hamilton, για τον G , με κόστος



$c(H^*)$ και H ο κύκλος Hamilton, που επιστρέφει ο αλγόριθμος, με κόστος $c(H)$. Έστω T το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης, για τον G , με κόστος $c(T)$ και M το ελάχιστο πλήρες ταίριασμα των κόμβων περιττού βαθμού του T . Όπως δείξαμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 ισχύει ότι:

$$(3.4) \quad c(T) \leq c(H^*)$$

Για το κόστος του ελάχιστου πλήρους ταίριασματος, έστω ότι $[v_1, v_2, \dots, v_{2n}]$ είναι οι κόμβοι περιττού βαθμού με την σειρά που εμφανίζονται στον H^* . Θεωρούμε τα ταίριασματα $M_1 = \{[v_1, v_2], [v_3, v_4], \dots, [v_{2n-1}, v_{2n}]\}$ και $M_2 = \{[v_2, v_3], [v_4, v_5], \dots, [v_{2n}, v_1]\}$. Για τα ταίριασματα αυτά, και με βάση την τριγωνική ιδιότητα, προκύπτει ότι $c(M_1) + c(M_2) \leq c(H^*)$. Όμως, το M είναι το ελάχιστο πλήρες ταίριασμα και άρα $c(M) \leq c(M_1)$ και $c(M) \leq c(M_2)$. Από τις ανισότητες αυτές προκύπτει ότι,

$$(3.5) \quad c(M) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$$

Συνεπώς, από τις Σχέσεις 3.4 και 3.5, προκύπτει ότι,

$$c(H) \leq c(G) = c(T) + c(M) \leq c(H^*) + \frac{1}{2}c(H^*) \Rightarrow$$

$$c(H) \leq \frac{3}{2}c(H^*)$$

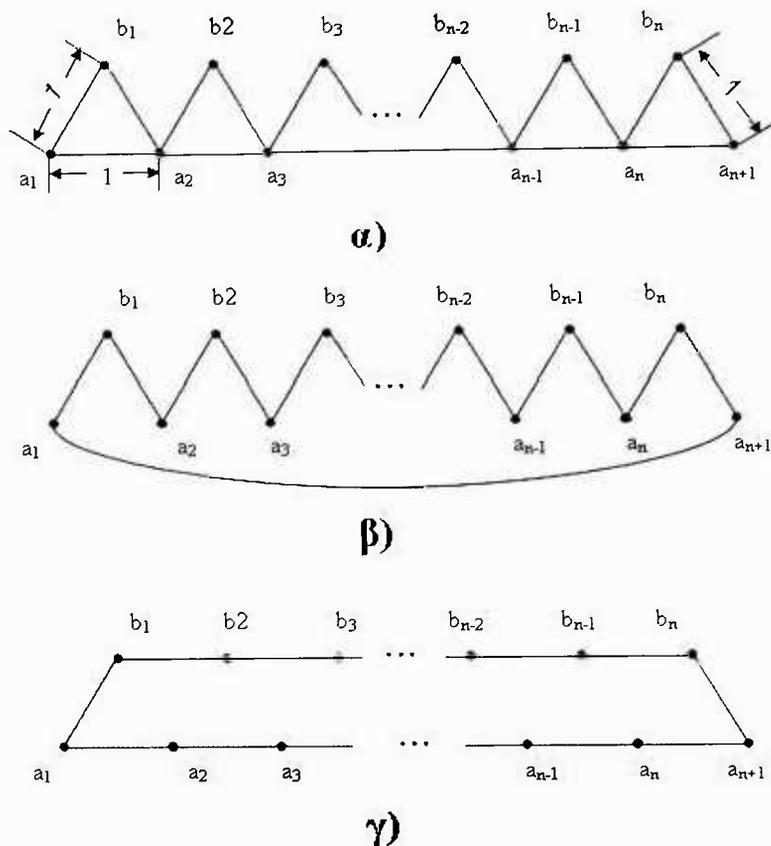
□

Για αυτόν τον αλγόριθμο, ο λόγος προσέγγισης 3/2 είναι στενός. Θα δείξουμε αυτή τη στενότητα του λόγου προσέγγισης με την κατασκευή μιας κατάλληλης οικογένειας στιγμιότυπων, των οποίων ο λόγος προσέγγισης συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 3/2. Αυτή η κατάλληλη οικογένεια απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3 α), όπου κάθε στιγμιότυπο της αντιστοιχεί σε έναν ευκλείδειο γράφο. Για κάθε στιγμιότυπο, ένα ελάχιστο δέντρο επικάλυψης είναι αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3 β) χωρίς την ακμή $\{a_1, a_{n+1}\}$. Η τελευταία ακμή αντιστοιχεί στο πλήρες ταίριασμα κόμβων περιττού βαθμού για το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης. Από το σχήμα φαίνεται πως αυτό το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης και το ελάχιστο πλήρες ταίριασμα σχηματίζουν έναν κύκλο Hamilton, κόστους $C = 3n$, χωρίς να απαιτούνται συντομεύσεις. Ο ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι αυτός που φαίνεται στο Σχήμα 3.3 γ) και είναι κόστους $C^* = 2n + 1$. Συνεπώς, ο λόγος προσέγγισης για την οικογένεια στιγμιότυπων που κατασκευάσαμε συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 3/2, αφού,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{C^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n + 1} = \frac{3}{2},$$

και άρα, για την οικογένεια που κατασκευάσαμε, υπάρχει στιγμιότυπο που ο λόγος προσέγγισης του φτάνει οσοδήποτε κοντά στο 3/2.





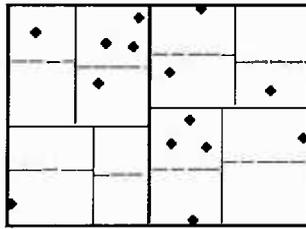
Σχήμα 3.3: Στιγμιότυπο Ε-ΠΠΠ

3.4 Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα για το Ε-ΠΠΠ

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε το πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα που προτάθηκε από τον Αγορα με την εργασία του στο [7]. Το σχήμα αυτό είναι σχετικά απλό από την στιγμή που κάποιος καταλάβει την ιδέα στην οποία στηρίζεται. Η ιδέα όμως και το θεώρημα στο οποίο στηρίζεται, που θα δούμε παρακάτω και θα ονομάσουμε δομικό θεώρημα, είναι εξαιρετικά πολύπλοκα. Η ενότητα, λοιπόν, αυτή καταναλώνεται στο μεγαλύτερο μέρος της προκειμένου να αποδειχθεί το δομικό θεώρημα με έναν τρόπο που να γίνεται κατά το δυνατόν ευκολότερα αντιληπτός.

Ξεκινώντας και για να έχουμε ένα σημείο αναφοράς, διαισθητικά και πολύ γενικά περιγράψουμε ποια μέθοδο ακολουθεί το σχήμα αυτό. Έστω ότι υπάρχει

ένα σύνολο κόμβων σε ένα ευκλείδειο επίπεδο για το οποίο προσπαθούμε να λύσουμε το Ε-ΠΙΠΠ, τότε σύμφωνα με το σχήμα αυτό καθορίζεται ένα ελάχιστο ορθογώνιο (παράλληλόγραμμο) που περικλείει όλους τους κόμβους. Έπειτα ορίζεται με κάποιον τρόπο, που θα αναπτύξουμε αργότερα, μία ορθογώνια διαμέριση για το αρχικό ορθογώνιο, όπως για παράδειγμα του Σχήματος 3.4. Η διαμέριση τερματίζει όταν εκπληρωθεί κάποιο κριτήριο, για παράδειγμα όταν υπάρχει έστω και ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 1. Για κάθε ορθογώνιο όλων των δυνατών διαμερίσεων, οι οποίες θεωρούνται διακριτές ως προς κάποια κριτήρια και οι οποίες έχουν τερματίσει, λύνουμε με δυναμικό προγραμματισμό ένα ειδικό υποπρόβλημα. Η λύση του υποπροβλήματος αυτού για όλα τα ορθογώνια οδηγεί σε μία ρ -προσέγγιση της βέλτιστης λύσης για κάποιο ρ . Επίσης, να σημειώσουμε κάποιες συμβάσεις που έχουμε κάνει για να περιγράψουμε κάποια στοιχεία του σχήματος αυτού.



Σχήμα 3.4: Μία 1/3:2/3 ορθογώνια διαμέριση

Σημείωση 3.4.1

- α) Μέγεθος ενός ορθογωνίου είναι το μέγεθος της μεγαλύτερης ακμής του.
- β) Κλειστή περιοχή ενός συνόλου κόμβων είναι το μικρότερο ορθογώνιο που τα περιλαμβάνει.
- γ) Χώρισμα ενός ορθογωνίου είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη στην μικρότερη ακμή που χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο νέα ορθογώνια, όπου η περιοχή που καλύπτει το καθένα είναι τουλάχιστον το $1/3$ της περιοχής που κάλυπτε το αρχικό ορθογώνιο.

Μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε την προετοιμασία για την θεμελίωση της απόδειξης του δομικού θεωρήματος. Έχοντας κατά νου την διαισθητική εικόνα, ορίζουμε την ορθογώνια διαμέριση την οποία και καλούμε 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση. Και σχεδόν άμεσα από τον ορισμό προκύπτει ένα άνω φράγμα για το βάθος μιας τέτοιας διαμέρισης συναρτήσει του πλάτους και του ύψους του αρχικού ορθογωνίου, το οποίο διατυπώνεται και αποδεικνύεται στην Πρόταση 3.4.1.

Ορισμός 3.4.1 (1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση)

Μία 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση ενός ορθογωνίου R είναι ένα δυαδικό δέντρο (δηλαδή μία ιεραρχία) από υπό-ορθογώνια του R . Το ορθογώνιο R βρίσκεται στην ρίζα. Αν το μέγεθος του R είναι μικρότερο ή ίσο από το 1, τότε η ιεραρχία δεν περιέχει τίποτα άλλο. Διαφορετικά η ρίζα περιέχει ένα χώρισμα του R και έχει δύο υποδέντρα τα οποία είναι 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση των δύο ορθογωνίων στα οποία το χώρισμα χωρίζει το R .

Πρόταση 3.4.1

Αν ένα ορθογώνιο έχει πλάτος W και ύψος H τότε κάθε 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση του έχει βάθος το πολύ $\log_{1.5} W + \log_{1.5} H + 2$

Απόδειξη. Έστω ένα ορθογώνιο R , πλάτους W και ύψους H , και μία 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση S αυτού. Οποιοδήποτε ορθογώνιο βρίσκεται σε βάθος d της S του R , καλύπτει το πολύ τα $(2/3)^d$ της αρχικής περιοχής. Έστω ότι η S έχει μέγιστο βάθος d . Έστω A ένα ορθογώνιο που είναι φύλλο για την S και επομένως βρίσκεται σε βάθος d , τότε για κάθε ορθογώνιο B που βρίσκεται σε βάθος $d - 2$, είναι πρόγονος του A και έχει πλάτος W_1 και ύψος H_1 ισχύει ότι $W_1 > 1$ και $H_1 > 1$ και κατά συνέπεια:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{d-2} WH > W_1 H_1 > 1 \Rightarrow \log_{1.5} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{d-2} WH \right] > \log_{1.5} 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -d + 2 + \log_{1.5} W + \log_{1.5} H > 0 \Rightarrow d < \log_{1.5} W + \log_{1.5} H + 2$$

□

Η διατύπωση και η απόδειξη του δομικού θεωρήματος περιέχει κάποιες έννοιες που είναι σχετικά πλατιές, χωρίς όμως κανένα ιδιαίτερο περιεχόμενο. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε αυτές τις έννοιες, που αφορούν σε μία 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση: τι είναι πύλη, πότε ένα σύνολο πυλών είναι m -κανονικό και πότε ένας κύκλος Hamilton λέμε ότι είναι m -χαλαρός. Μάλιστα, από τον ορισμό του m -χαλαρού κύκλου Hamilton, προκύπτει άμεσα το Πρόγραμμα 3.4.1.

Ορισμός 3.4.2 (πύλες)

Μία πύλη σε μία 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση είναι κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στην ακμή κάποιου ορθογωνίου στην ορθογώνια διαμέριση. Αν m είναι κάποιος θετικός ακέραιος τότε ένα σύνολο πυλών P ονομάζεται m -κανονικό για την ορθογώνια διαμέριση αν υπάρχουν ακριβώς m ισαπέχουσες πύλες στο χώρισμα κάθε ορθογωνίου στην ορθογώνια διαμέριση.

Ορισμός 3.4.3 (m -χαλαρό)

Έστω $m \in \mathbb{Z}^+$ και C ένας κύκλος Hamilton για κάποιο σύνολο κόμβων σε ένα ευκλείδειο επίπεδο. Έστω S μία 1/3:2/3 - ορθογώνια διαμέριση μίας κλειστής περιοχής και P ένα m -κανονικό σύνολο πυλών της ορθογωνίας διαμέρισης. Τότε C είναι m -χαλαρός ως προς το S αν ισχύουν τα ακόλουθα:



- i) σε κάθε ορθογώνιο της ορθογώνιας διαμέρισης S , ο κύκλος Hamilton περνάει το χάρισμα του ορθογωνίου το πολύ m φορές.
 ii) ο κύκλος Hamilton περνάει το χάρισμα μόνο στις πύλες του P .
 iii) ο κύκλος Hamilton δεν διασταυρώνεται πουνθενά (εκτός πιθανώς από κάποια πύλη).

Πόρισμα 3.4.1

Αν ένας κύκλος Hamilton είναι m -χαλαρός ως προς μία $1/3:2/3$ - ορθογώνια διαμέριση της κλειστής περιοχής, τότε η περίμετρος κάθε ορθογωνίου στην διαμέριση διασχίζεται από τον κύκλο Hamilton το πολύ $4m$ φορές.

Απόδειξη. Κάθε πλευρά του ορθογωνίου είναι ένα χάρισμα για κάποιο ορθογώνιο, που είναι πρόγονος του. Έτσι ο κύκλος Hamilton διασχίζει την κάθε πλευρά το πολύ m φορές. \square

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της πύλης καθώς και του m -χαλαρού κύκλου Hamilton, ας φανταστούμε τον ελάχιστο κύκλο Hamilton για ένα σύνολο κόμβων σε ένα ευκλείδειο επίπεδο και ότι οι κόμβοι συνδέονται με ένα ελαστικό νήμα ως προς τον κύκλο Hamilton. Έπειτα ορίζουμε μία ορθογώνια διαμέριση για την αρχική κλειστή περιοχή και παίρνουμε σε κάθε χάρισμα m ισαπέχοντα σημεία, τα οποία είναι οι πύλες, με τα δύο ακραία σημεία να βρίσκονται στα άκρα του χωρίσματος. Τέλος φροντίζουμε ώστε όταν το νήμα περνάει από κάποια ακμή ενός οποιοδήποτε ορθογωνίου να περνάει από κάποια πύλη κάνοντας το νήμα να είναι τεθλασμένο. Αν πληρούνται και οι άλλες δύο συνθήκες τότε ο κύκλος Hamilton λέμε ότι είναι m -χαλαρός.

Τέλος διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο αν έχουμε ένα ορθογώνιο με ένα χάρισμα και ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων εντός του ορθογωνίου τότε παρέχεται ένα άνω φράγμα για το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που τέμνουν το χάρισμα συναρτήσει του συνολικού μήκους όλων των ευθύγραμμων τμημάτων και του μεγέθους του ορθογωνίου. Επίσης, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ένα λήμμα το οποίο θα μας επιτρέψει αν έχουμε έναν κύκλο Hamilton που διασχίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα περισσότερες από τρεις φορές, προσθέτοντας κατάλληλα ευθύγραμμο τμήματα στον κύκλο, να τον κάνουμε να διασχίζει το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα το πολύ δύο φορές.

Θεώρημα 3.4.1

Έστω C μια συλλογή ευθύγραμμων τμημάτων συνολικού μήκους T , τα οποία βρίσκονται εντός ενός ορθογωνίου, μεγέθους W . Τότε το πλήθος των τμημάτων του C που είναι πιθανό να τέμνουν ένα οποιοδήποτε χάρισμα που έχουμε πάρει στο ορθογώνιο είναι το πολύ $3T/W$

Απόδειξη. Ας είναι e ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους l_e . Η πιθανότητα να τέμνει το χάρισμα είναι το πολύ $\min\{1, l_e/(W/3)\}$. Έτσι ο αναμενόμενος αριθμός των



τμημάτων που τέμνουν το χάρισμα είναι το πολύ

$$\sum_{e \in C} \frac{l_e}{W/3} = \frac{3T}{W}$$

□

Λήμμα 3.4.1 (Patching Λήμμα)

Υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε το ακόλουθο να είναι αληθές. Αν S είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους l και π είναι ένας κύκλος Hamilton ο οποίος διασχίζει το S τουλάχιστον τρεις φορές. Τότε υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα επί του S των οποίων το συνολικό μήκος είναι $b \cdot l$ και των οποίων η πρόσθεση στον π τον μεταβάλλει σε έναν κύκλο Hamilton ο οποίος διασχίζει το S το πολύ δύο φορές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο π διασχίζει το S συνολικά t φορές, και ας είναι $2k$ ο μεγαλύτερος άρτιος αριθμός μικρότερος από το t . Προσδιορίζουμε τα $2k$ σημεία M_1, \dots, M_{2k} όπου ο π διασχίζει το S . Σπάμε το π σε αυτά τα σημεία, χωρίζοντάς το έτσι σε $2k - 1$ διαδρομές $P_1, P_2, \dots, P_{2k-1}$.

Ορίζουμε δύο αντίγραφα M'_1 και M''_1 για κάθε M_1 , ένα για κάθε πλευρά του ευθύγραμμου τμήματος S . Επίσης, θεωρούμε το σύνολο J ευθυγράμμων τμημάτων που αποτελείται από τα ακόλουθα: (i) Ένας ελάχιστος κύκλος Hamilton για τους κόμβους M_1, \dots, M_{2k} , (ii) Ένα ελάχιστου κόστους πλήρες ταίριασμα για τους κόμβους M_1, \dots, M_{2k} . Παρατηρούμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα του J βρίσκονται πάνω στο S και είναι συνολικού μήκους $3l$.

Φτιάχνουμε δύο αντίγραφα J' και J'' του J και τα προσθέτουμε στο π . Σκεφτόμαστε το J' να βρίσκεται αριστερά του S και το J'' να βρίσκεται δεξιά του S . Μαζί με τις διαδρομές $P_1, P_2, \dots, P_{2k-1}$ αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν έναν συνδεδεμένο 4-κανονικό γράφο στα

$$\{M'_1, \dots, M'_{2k}\} \cup \{M_1, \dots, M_{2k}\}.$$

Ένας κύκλος Euler αυτού του γράφου είναι ένας κύκλος Hamilton που περιέχει τα $P_1, P_2, \dots, P_{2k-1}$ και διασχίζει το S το πολύ δύο φορές. Έτσι αποδείξαμε επιπλέον ότι για το θεώρημα $b = 6$

□

Τώρα πια έχουμε όλα εκείνα τα εφόδια που θα μας επιτρέψουν να παρουσιάσουμε το δομικό θεώρημα. Άλλωστε, το πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα που εξετάζουμε σε αυτή την ενότητα θεμελιωδώς στηρίζεται σε αυτό το θεώρημα, γεγονός που θα φανεί και κατά την περιγραφή του αλγορίθμου. Αυτό που αποδεικνύουμε εδώ είναι πως για ένα οποιοδήποτε $\rho > 1$ υπάρχει ρ -προσέγγιση του ελάχιστου κύκλου Hamilton η οποία είναι ένας κύκλος Hamilton που είναι m -χαλαρός, για κάποια $1/3:2/3$ -ορθογώνια διαμέριση της κλειστής περιοχής και για κατάλληλο m .



Θεώρημα 3.4.2 (Δομικό Θεώρημα)

Υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύουν τα ακόλουθα. Κάθε σύνολο κόμβων στο \mathbb{R}^2 έχει μία $(1 + \varepsilon)$ -προσέγγιση του ελάχιστου κύκλου Hamilton, τον οποίο καλούμε π , και μία αντίστοιχη $1/3:2/3$ - ορθογώνια διαμέριση της κλειστής περιοχής τέτοια ώστε ο κύκλος Hamilton, που είναι η $(1 + \varepsilon)$ -προσέγγιση, να είναι m -χαλαρός για την διαμέριση, όπου $m = c \log L/\varepsilon$ και L είναι το μέγεθος της κλειστής περιοχής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος ξεκινάμε με έναν ελάχιστο κύκλο Hamilton στο αρχικό σύνολο κόμβων και μία άδεια διαμέριση σε μία κλειστή περιοχή μεγέθους L . Έπειτα αυξάνουμε βήμα-βήμα την διαμέριση κατά ένα επίπεδο έτσι ώστε ο κύκλος Hamilton να είναι πάντα m -χαλαρός ως προς τα ορθογώνια που είναι ήδη στην ορθογώνια διαμέριση. Σε κάθε βήμα βάζουμε ένα χώρισμα σε κάθε ορθογώνιο του προηγούμενου βήματος που έχει μέγεθος μεγαλύτερο του ένα, προσδιορίζουμε τις πύλες στο χώρισμα αυτό και τις προσθέτουμε στο σύνολο κόμβων και τροποποιούμε κατάλληλα τον κύκλο Hamilton ώστε να περνάει από το χώρισμα μόνο μέσω των πυλών. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια τροποποίηση στον κύκλο Hamilton μεταβάλλει το κόστος της κατά ένα συντελεστή $(1 + 3b/m)$ ως προς το αρχικό κόστος, όπου b είναι η σταθερά που εμφανίζεται στο Λήμμα 3.4.1. Συνεπώς το κόστος του κύκλου Hamilton, που θα έχει διαμορφωθεί στο τελευταίο βήμα, θα διαφέρει από το αρχικό βέλτιστο κόστος κατά έναν συντελεστή $(1 + 3b/m)^{2 \log_{1.5} L}$, αφού η βήμα-βήμα αύξηση της διαμέρισης σταματά ύστερα από $2 \log_{1.5} L$ επίπεδα σύμφωνα με την Πρόταση 3.4.1. Όμως αυτός ο συντελεστής είναι μικρότερος από το $(1 + \varepsilon/2)$, όπου $m = 12b \log_{1.5} L/\varepsilon$.

Τώρα περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνουμε την ορθογώνια διαμέριση κατά ένα βήμα από το επίπεδο d στο επίπεδο $d + 1$. Θεωρούμε R ένα ορθογώνιο σε βάθος d της ορθογώνιας διαμέρισης μεγέθους W και T το μήκος των ακμών του τρέχοντα κύκλου Hamilton που βρίσκονται εντός του R . Θα δείξουμε πως να διαμερίσουμε το R σε δύο ορθογώνια διαλέγοντας το κατάλληλο χώρισμα.

Περίπτωση 1: $T \leq mW/3$. Θέτουμε $\mu = 3T/W \leq m$. Το Θεώρημα 3.4.1 εγγυάται την ύπαρξη ενός χωρίσματος S το οποίο διασχίζεται το πολύ από μ ακμές του τρέχοντα κύκλου Hamilton. Τοποθετούμε m πύλες στο S έτσι ώστε να το χωρίζει σε $W/(m - 1)$ ίσα μέρη. Έπειτα, για κάθε σημείο στο S το οποίο ο κύκλος Hamilton το διασχίζει, εντοπίζουμε την πλησιέστερη πύλη, κάνουμε την ακμή του κύκλου Hamilton τεθλασμένη έτσι ώστε να περνάει από την πύλη και προσθέτουμε την πύλη στο τρέχον σύνολο κόμβων. Στο τέλος έχουμε εξασφαλίσει ότι όλες οι, το πολύ μ , διασχίσεις συμβαίνουν πάνω στις m πύλες. Με τον τρόπο αυτό επειδή το μήκος κάθε ακμής που περνάει το χώρισμα αυξάνει το πολύ κατά $W/2(m - 1)$ προκύπτει ότι το κόστος του τρέχοντα κύκλου Hamilton μέσα στο ορθογώνιο αυξάνει από T σε $T + 2\mu \cdot W/2(m - 1) = T + \mu W/(m - 1) = T + 3T/(m - 1)$. Όμως για $b \geq 2$, αυτό είναι $\pi T + 3bT/m$

Περίπτωση 2: $T > mW/3$. Σε αυτήν την περίπτωση, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε χρώσιμα S του R . Ο τρέχοντας κύκλος Hamilton μπορεί να το διασχίζει πολλές φορές, αλλά χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.4.1 για να μετατρέψουμε τον κύκλο Hamilton με τέτοιον τρόπο που ο νέος κύκλος Hamilton να διασχίζει το S το πολύ 2 φορές. Το κόστος μίας τέτοιας μετατροπής για τον κύκλο Hamilton είναι το πολύ $bW \leq 3bT/m$, όπου b είναι η σταθερά που αναφέρεται στο Λήμμα 3.4.1. Έτσι το κόστος του τρέχοντα κύκλου Hamilton εντός του R έχει αυξηθεί από T σε $T(1+3b/m)$ (Να σημειώσουμε και ενθυμούμενοι την απόδειξη του Λήμματος 3.4.1 ότι υπάρχουν δύο διασχίσεις που πρέπει να μετακινηθούν στις πλησιέστερες πύλες με κόστος στον κύκλο Hamilton $2W/m < T/m^2$ το οποίο όμως θεωρείται αμελητέο).

Ως προς το αν στο τέλος ο κύκλος Hamilton θα είναι m -χαλαρός, παρατηρούμε ότι οι αλλαγές και στις δύο περιπτώσεις στον κύκλο αφορούν ακμές που βρίσκονται εντός του R , έτσι η ιδιότητα του m -χαλαρού δεν επηρεάζεται πουθενά αλλού στην διαμέριση. \square

Προτού περιγράψουμε τον αλγόριθμο μένει ακόμα μία πρόταση που πρέπει να αποδείξουμε. Η πρόταση αυτή μετριοποιεί σε πολυωνυμικό χρόνο ένα στιγμιότυπο του ΠΠΠ φέρνοντας το παράλληλα σε μία επιθυμητή μορφή, πληρώνοντάς το όμως σε κόστος κατά $\varepsilon/10$ προσέγγισης. Η επιθυμητή αυτή μορφή αφορά στις αποστάσεις των κόμβων που δεν διαφέρουν μεταξύ τους πολύ και στο μέγεθος της κλειστής περιοχής που γίνεται το πολύ $1.5n^2$.

Πρόταση 3.4.2

Έστω $n, \varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $n > 10/\varepsilon$. Τότε το πρόβλημα υπολογισμού μίας $(1 + \varepsilon)$ -προσέγγισης του ελάχιστου κύκλου Hamilton σε ένα στιγμιότυπο n κόμβων μπορεί να αναχθεί σε $\text{poly}(n)$ χρόνο σε πρόβλημα υπολογισμού μίας $(1 + 9\varepsilon/10)$ -προσέγγισης σε ένα στιγμιότυπο στο οποίο η μικρότερη απόσταση μεταξύ κόμβων είναι μία μονάδα και το μέγεθος της κλειστής περιοχής είναι το πολύ $1.5n^2$

Απόδειξη. Η αναγωγή περιλαμβάνει μία μικρή διατάραξη του στιγμιότυπου των n -κόμβων. Έστω T το κόστος του ελάχιστου δέντρου επικάλυψης. Τότε ο ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι κόστους τουλάχιστον T και το πολύ $1.5T$. Έτσι το μέγεθος της κλειστής περιοχής είναι το πολύ $0.75T$. Κατασκευάζουμε ένα νέο στιγμιότυπο τοποθετώντας ένα πλέγμα σημείων πυκνότητας $T/2n^2$ στο επίπεδο και μετακινώντας κάθε κόμβο στο πλησιέστερο σημείο πλέγματος (αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα κάποιοι κόμβοι να συγχωνευτούν). Επειδή, κάθε κόμβος έχει μετακινηθεί το πολύ κατά $T/2n^2$ και ένας κύκλος Hamilton έχει n ακμές το κόστος του κύκλου Hamilton έχει μεταβληθεί το πολύ κατά $2n \cdot T/2n^2 = T/n$. Τώρα επειδή $\varepsilon/10 > 1/n$, αυτό αρκεί για να υπολογίσουμε μία $(1 + 9\varepsilon/10)$ -προσέγγιση στο νέο στιγμιότυπο. Τέλος, διαιρούμε όλες τις αποστάσεις στο νέο στιγμιότυπο με το $T/2n^2$, έτσι ώστε η μικρότερη απόσταση μεταξύ κόμβων να είναι τουλάχιστον 1 και η κλειστή περιοχή να έχει μέγεθος

το πολύ $0.75T/(T/2n^2) = 1.5n^2$. \square

Με δεδομένα λοιπόν το δομικό θεώρημα και την πρόταση που μόλις αποδείχτηκε, μπορούμε να περιγράψουμε τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος και είναι ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα. Έστω ότι έχουμε έναν ευκλείδειο γράφο $G(V, E)$ και ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Αφού το ε είναι αυθαίρετο, χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.4.2 και υποθέτουμε χ.β.γ. ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ κόμβων είναι 1 και η ελάχιστη περιοχή έχει μέγεθος το πολύ $O(n^2)$. Το δομικό θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton π που είναι μία $(1 + \varepsilon)$ -προσέγγιση του ελάχιστου κύκλου Hamilton και μία ορθογώνια διαμέριση S ως προς την οποία ο π είναι m -χαλαρός, όπου $m = O(\log n/\varepsilon)$. Ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε βρίσκει τα S και π σε $poly(n)2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ χρόνο.

Ας δούμε λοιπόν το σκεπτικό που κρύβεται πίσω από αυτόν τον αλγόριθμο. Ο π είναι m -χαλαρός και άρα για την ελάχιστη περιοχή υπάρχει ένα χωρίσμα το οποίο ο π διασχίζει $2k$ φορές, όπου $2k \leq m$. Αυτό το χωρίσμα και τις πύλες όπου οι διασχίσεις συμβαίνουν υποθέτουμε ότι τα γνωρίζουμε. Στο βήμα αυτό έχουμε απομείνει σε κάθε πλευρά του χωρίσματος με ένα υποπρόβλημα που θα ονομάσουμε πρόβλημα υποδιαδρομής. Στο πρόβλημα της υποδιαδρομής έχουμε ένα ορθογώνιο, κάποιους κόμβους εντός του και κάποιες πύλες στην περιμέτρώ του και επιθυμούμε να βρούμε ξένες ως προς τους κόμβους διαδρομές που να συνδέουν όλα τα ζευγάρια πυλών, με τέτοιο τρόπο που κάθε κόμβος μέσα στο ορθογώνιο να τον έχει επισκεφθεί κάποια από τις διαδρομές και το συνολικό τους μήκος να είναι ελάχιστο. Αφού ο π είναι m -χαλαρός, συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για τα νέα ορθογώνια που κάθε φορά προκύπτουν υποθέτοντας ότι τα χωρίσματα και οι πύλες όπου οι διασχίσεις συμβαίνουν τα γνωρίζουμε και έχοντας κάθε φορά να λύσουμε τα νέα προβλήματα υποδιαδρομής.

Αρχικά υποθέσαμε ότι τα χωρίσματα τα γνωρίζουμε όμως το m είναι τόσο μικρό ώστε κάτι τέτοιο να μην είναι απαραίτητο. Αρκεί σε κάθε βήμα να δοκιμάσουμε όλα τα συνδυαστικά διακριτά χωρίσματα⁴ και όλες τις πιθανές διατάξεις με τις οποίες ο κύκλος Hamilton μπορεί να διασχίζει αυτό το χωρίσμα το πολύ m φορές. Ενώ με δυναμικό προγραμματισμό ξεκινώντας από τα ορθογώνια που μπορούν να είναι φύλλα στην διαμέριση λύνουμε το πρόβλημα υποδιαδρομής, το οποίο απαιτεί για αυτά πολυωνυμικό χρόνο, και βήμα-βήμα χτίζουμε τα ορθογώνια που βρίσκονται σε ανώτερο επίπεδο ώσπου να φτάσουμε στην ρίζα της διαμέρισης. Αυτή είναι η κεντρική ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού και αντικατοπτρίζεται στον πίνακα δυναμικού προγραμματισμού που θα περιγράψουμε.

Ο πίνακας δυναμικού προγραμματισμού έχει τρεις διαστάσεις. Σε κάθε μια από αυτές τις τρεις διαστάσεις υπάρχουν

i) Όλα τα ορθογώνια που βρίσκονται εντός της ελάχιστης περιοχής. Μόνο συνδυαστικά διακριτά ορθογώνια θεωρούνται.

⁴Δύο χωρίσματα είναι συνδυαστικά διακριτά αν τουλάχιστον ένας κόμβος βρίσκεται ανάμεσά τους.



ii) Κάθε σύνολο που αποτελείται από $2k$ πύλες στην περίμετρο ορθογώνιου, όπου $2k \leq 4m$

iii) μία διαμέριση των $2k$ πυλών σε x ζευγάρια.

Κάθε επιλογή από τα i), ii) και iii) είναι κάποιο στιγμιότυπο υποδιαδρομής. Σε κάθε είσοδο του πίνακα δυναμικού προγραμματισμού αποθηκεύουμε την υποδιαδρομή με το μικρότερο κόστος.

Το μέγεθος του πίνακα είναι το πολύ

$$(\text{επιλογές στο (i)}) \cdot (\text{επιλογές στο (ii)}) \cdot (\text{επιλογές στο (iii)})$$

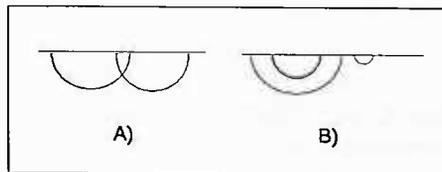
Για να βρούμε ένα άνω φράγμα σε αυτό, υποθέτουμε ότι κάθε χώρισμα περνά από έναν κόμβο. Έτσι το πλήθος των συνδυαστικά διακριτών ορθογωνίων στο (i) είναι το πολύ $\binom{n}{4}$.

Το πλήθος των επιλογών για το ii) είναι $O(n^8) \cdot 2^{4m+2k}$ και ο λόγος είναι ότι κάθε ορθογώνιο έχει 4 πλευρές και κάθε μία είναι τμήμα ενός χώρισματος για κάποιον προγονό του. Οι m πύλες σε αυτό το χώρισμα ισαπέχουν, έτσι οι πύλες καθορίζονται πλήρως αν ξέρουμε το χώρισμα. Όμως το πλήθος των επιλογών για ένα χώρισμα είναι το πολύ το πλήθος των ζευγών των κόμβων το οποίο είναι $\binom{n}{2}$. Επιπλέον αφού προσδιορίσουμε το σύνολο των πυλών στις τέσσερις πλευρές, οι οποίες είναι το πολύ $4m$, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε ένα σύνολο $2k$ πυλών είναι το πολύ 2^{4m+2k} .

Τέλος, το πλήθος των πιθανών ζευγών του iii) είναι το πολύ 2^{4m} . Ο λόγος είναι ότι σε έναν μη διασταυρούμενο κύκλο Hamilton, αποδεκτά ζεύγη πυλών αντιστοιχούν σε αποδεκτές διατάξεις $2k$ παρενθέσεων (δες Σχήμα 3.5). Το πλήθος όμως των διατάξεων αυτών είναι το πολύ $2^{2k} \leq 2^{4m} = n^{O(1/\epsilon)}$. Έτσι το πάνω όριο του μεγέθους του πίνακα δυναμικού προγραμματισμού είναι

$$\sum_{k=1}^{2m} n^4 \cdot n^8 \cdot 2^{4m+2k} \cdot 2^{4m},$$

το οποίο τελικά ισούται με $O(n^{12} 2^{12m}) = n^{O(1/\epsilon)}$.



Σχήμα 3.5: Το A) αντιστοιχεί σε μία διασταυρούμενη διαδρομή ενώ το B) αντιστοιχεί σε μία μη διασταυρούμενη διαδρομή.

Ο πίνακας χτίζεται δουλεύοντας από τα φύλλα της ορθογώνιας διαμέρισης. Οι είσοδοι του πίνακα που αντιστοιχούν στα ορθογώνια που περιέχουν το πολύ $4m$ κόμβους υπολογίζονται με έναν ευθύ (brute force) τρόπο σε $2^{O(m)}$

χρόνο. Οι είσοδοι για όλα τα υπόλοιπα ορθογώνια υπολογίζονται αναδρομικά απαριθμώντας όλες τις τριάδες της μορφής.

- i) όλα τα πιθανά το πολύ n συνδυαστικά διακριτά χωρίσματα για το ορθογώνιο
- ii) όλες τις $j \leq m$ πύλες στις οποίες η διαδρομή διασχίζει αυτό το χωρίσμα και
- iii) όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους αυτές οι πύλες τοποθετούνται στην υποδιαδρομή συνυπολογίζοντας τα ζευγάρια πυλών που ήδη υπάρχουν στην περίμετρο του ορθογωνίου.

Αφού απαριθμήσουμε όλες αυτές τις τριάδες βρίσκουμε αυτήν με το ελάχιστο κόστος αναλογιζόμενοι το ελάχιστο κόστος σε κάθε πλευρά του χωρίσματος όταν αυτό υπάρχει και την καταχωρούμε στην είσοδο. Στο τέλος έχουμε το μικρότερο κόστος και για την κλειστή περιοχή. Ενώ ο χρόνος αυτού του αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού είναι άνω φραγμένος από τον αριθμό:

$$2^{O(m)} \cdot poly(n) \cdot \text{Μέγεθος του πίνακα,}$$

ο οποίος ισούται με $n^{O(1/\varepsilon)}$.

3.5 0.841logn-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Α-ΠΙΠΠ

Για το Α-ΠΙΠΠ έχουν προταθεί διάφοροι συναρτησιακά προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Πρώτα οι Frizee, Galbiati και Maffioli πρότειναν έναν $\log n$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο με την εργασία τους στο [8] και αργότερα ο Blaser πρότεινε έναν $0.999 \log n$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο με την εργασία του στο [9]. Ο καλύτερος όμως συναρτησιακά προσεγγιστικός που έχουμε αυτή τη στιγμή, ως προς τον λόγο προσέγγισης του, είναι αυτός που πρότειναν οι Karlan, Lewenstein, Shafir και Sviridenko στην εργασία τους στο [10].

Στην εργασία τους οι τελευταίοι αποδεικνύουν το ακόλουθο λήμμα στο οποίο στηρίζεται ο αλγόριθμος τους.

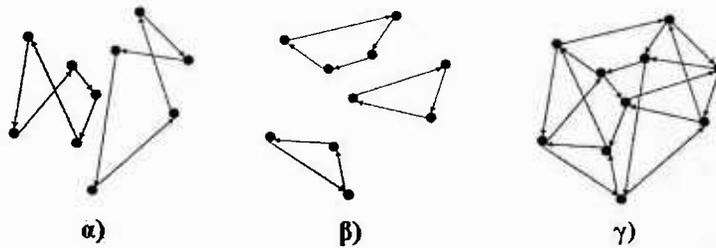
Λήμμα 3.5.1

- Για κάθε γράφο $G(V, E)$ με τουλάχιστον 5 κόμβους μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο δύο καλύμματα κύκλων C_1 και C_2 για τα οποία ισχύει,
- i) $c(C_1) + c(C_2) \leq 2 \cdot C^*$ και
 - ii) τα C_1 και C_2 δεν μοιράζονται κάποιον 2-κύκλο.

Να πούμε ότι κάλυμμα κύκλων, για ένα γράφο $G(V, E)$, είναι ένα σύνολο κύκλων του G , οι οποίοι ανά δύο δεν έχουν κοινούς κόμβους και των οποίων η ένωση των κόμβων, τους οποίους διασχίζουν, είναι ίση με το σύνολο V . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.6 βλέπουμε δύο καλύμματα κύκλων και την αντίστοιχη ένωση τους, που είναι χρήσιμη για τον αλγόριθμο που θα αναπτύξουμε. Επίσης, να πούμε ότι 2-κύκλος, σε έναν γράφο, είναι ένας κύκλος 2 ακμών. Όταν λέμε ότι δύο καλύμματα κύκλων δεν μοιράζονται έναν 2-κύκλο εννοούμε ότι αυτά τα καλύμματα κύκλων δεν έχουν κοινό κάποιον 2-κύκλο. Οι συγγραφείς ως προς το Λήμμα 3.5.1 κάνουν επιπλέον την παραδοχή, που θα χρησιμοποιηθεί



αργότερα, ότι ο 2-κανονικός γράφος C , που είναι η ένωση των καλυμμάτων κύκλων C_1 και C_2 , δεν περιέχει δύο κύκλους αντίθετης κατεύθυνσης. Αφού αν είναι αυτή η περίπτωση, τότε αντιστρέφουμε τον κύκλο μεγαλύτερου κόστους και ο γράφος C' που προκύπτει είναι πάλι 2-κανονικός και μπορούμε, και σ' αυτήν την περίπτωση, να βρούμε δύο καλύμματα κύκλων C'_1 και C'_2 που πληρούν τις συνθήκες του λήμματος. Ουσιαστικά αυτό που κάνουν οι συγγραφείς είναι να προσαρμόζουν τον αλγόριθμο του λήμματος, διατηρώντας τον αλγόριθμο πολυωνυμικό και προσθέτοντας την συνθήκη στο λήμμα πως το C , που είναι η ένωση των καλυμμάτων κύκλων C_1 και C_2 , δεν περιέχει δύο κύκλους αντίθετης κατεύθυνσης.



Σχήμα 3.6: Παράδειγμα καλυμμάτων κύκλων

Έχοντας, λοιπόν, αυτό το λήμμα με την επιπλέον συνθήκη ότι ο C δεν περιέχει δύο κύκλους αντίθετης κατεύθυνσης και δεδομένου ενός γράφου $G(V, E)$ και μιας συνάρτησης κόστους c , θεωρούμε τον ακόλουθο αναδρομικό αλγόριθμο που θα καλούμε Decompose. Στον αλγόριθμο που ακολουθεί θεωρούμε ότι $N(G)$ είναι το πλήθος των κόμβων ενός γράφου G και $con(G)$ είναι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του.

Decompose($G(V, E), c$)

$G' = G$; $Edges = \emptyset$;

Όσο ισχύει $N(G') \leq 27$ εκτέλεσε

Υπολόγισε δύο κυκλικά καλύμματα C_1 και C_2 και την ένωση τους $C = C_1 \cup C_2$ για τον γράφο G' ;

Ανάμεσα στα C , C_1 και C_2 επέλεξε αυτό με τον μικρότερο λόγο $\frac{c(C)}{\log_2(N(C)/con(C))} \cdot \frac{c(C_1)}{\log_2(N(C_1)/con(C_1))} \cdot \frac{c(C_2)}{\log_2(N(C_2)/con(C_2))}$;

Για τον γράφο που επιλέξαμε πρόσθεσε τις ακμές του στο σύνολο $Edges$;

Για τον γράφο που επιλέξαμε για κάθε συνεκτική συνιστώσα επιλέγουμε τυχαία ακριβώς έναν κόμβο παίρνοντας τον αντίστοιχο υπογράφο G' του G ;

Τέλος επανάληψης

Υπολόγισε με εξαντλητική αναζήτηση τον ελάχιστο κύκλο Hamilton, για τον G' ;

Πρόσθεσε τις ακμές του ελάχιστου κύκλου Hamilton στο σύνολο $Edges$;

Από το σύνολο $Edges$ αναζητούμε έναν κύκλο Euler π ;

Από το π με κατάλληλες συντομεύσεις επέστρεψε έναν κύκλο Hamilton;

Από τον αλγόριθμο και από το Λήμμα 3.5.1 προκύπτει ότι ο γράφος $G(V, Edges)$ είναι Euler, αφού οι συνεκτικές συνιστώσες που ενώνουμε είναι και αυτές Euler. Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολυωνυμικός αφού κατά την αναδρομή εκτελούνται το πολύ $|V|$ επαναλήψεις, στην χειρότερη δυνατή εκτίμηση, ενώ μέσα στην επανάληψη ο υπολογισμός των C^i , C_1^i και C_2^i απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο, και η εξαντλητική αναζήτηση για τον υπολογισμό του ελάχιστου κύκλου Hamilton απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου. Για να έχουμε έναν κατάλληλο συμβολισμό που θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε ότι αυτός είναι ένας συναρτησιακά προσεγγιστικός αλγόριθμος και να υπολογίσουμε το λόγο προσέγγισης του, θεωρούμε τα εξής. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας αναδρομικός αλγόριθμος. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι στο πρώτο βήμα $G^1 = G$ και C_1^1 , C_2^1 και C^1 είναι τα καλύμματα κύκλων και η ένωση τους αντίστοιχα που προκύπτουν από τον G^1 . Ο G^2 είναι ο υπογράφος του G^1 , μετά από την επιλογή του μικρότερου λόγου, και C_1^2 , C_2^2 και C^2 είναι τα καλύμματα κύκλων και η ένωση τους αντίστοιχα, που προκύπτουν από τον G^2 . Αντίστοιχα προκύπτουν τα G^i , C_1^i , C_2^i και C^i . Θεωρούμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει για G^p , όπου $N(G^p) \leq 27$ και λύνουμε τον G^p με εξαντλητική αναζήτηση. Τέλος, να σημειώσουμε πως, δεδομένου ότι $N(C^i) = N(C_1^i) = N(C_2^i)$, την τιμή αυτή την ορίζουμε σαν n_i .

Για την απόδειξη του λόγου προσέγγισης του συναρτησιακά προσεγγιστικού



αλγόριθμου που εξετάζουμε είναι απαραίτητο το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.5.2

$$\text{con}(C^i) + \text{con}(C_1^i) + \text{con}(C_2^i) \leq n_i \text{ για } i = 1, \dots, p-1.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα A του C^i , με πλήθος κόμβων k , σχηματίζει το πολύ $k-1$ κύκλους (συνιστώσες) συνολικά στα C_1^i και C_2^i . Οι κόμβοι του A δεν θα υπάρχουν σε άλλη συνεκτική συνιστώσα των C^i , C_1^i και C_2^i , ενώ για τους k κόμβους στο A οι συνεκτικές συνιστώσες των C_1^i και C_2^i μαζί με την συνεκτική συνιστώσα A του C^i σχηματίζουν το πολύ k συνιστώσες. Άμεσα τότε προκύπτει το λήμμα. Επίσης να σημειώσουμε ότι η A σχηματίζει τόσο περισσότερες συνιστώσες στο C_1^i ή στο C_2^i , όσο μικρότερο είναι το πλήθος των κόμβων σε κάθε συνεκτική συνιστώσα. Άρα, για να αποδείξουμε την εικασία που κάναμε στην αρχή, θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τους κόμβους για κάθε συνεκτική συνιστώσα των C_1^i και C_2^i . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Ο k είναι περιττός αριθμός.

Δεδομένου ότι ο k είναι περιττός αριθμός, υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος από κόμβους του A στο C_1^i με τουλάχιστον τρεις κόμβους. Το ίδιο ισχύει και για το κάλυμμα κύκλων C_2^i . Κατά συνέπεια τόσο το C_1^i όσο και το C_2^i έχουν καθένας το πολύ $\frac{k-3}{2} + 1 = \frac{k-1}{2}$ κύκλους. Άρα τα C_1^i και C_2^i , έχουν μαζί το πολύ $k-1$ κύκλους.

Ο k είναι άρτιος αριθμός.

Αν η A σπάει μόνο σε 2-κύκλους στα C_1^i και C_2^i , τότε η A αποτελείται από δύο κύκλους αντίθετης κατεύθυνσης, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση που κάναμε στην αρχή του αλγόριθμου. Έτσι, χ.β.γ., θεωρούμε το C_1^i . Το C_1^i περιέχει σίγουρα έναν κύκλο μήκους τουλάχιστον 3. Από την μία, μπορεί να περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο μήκους ακριβώς 3 και τότε, αφού το k είναι άρτιος, θα περιέχει άλλον έναν κύκλο μήκους τουλάχιστον 3. Από την άλλη, αν δεν περιέχει κύκλο μήκους ακριβώς 3, θα περιέχει σίγουρα έναν κύκλο μήκους τουλάχιστον 4. Έστω και στις δύο περιπτώσεις ότι όλοι οι υπόλοιποι κύκλοι είναι μήκους 2. Στην πρώτη περίπτωση η συνιστώσα A στο C_1^i περιέχει τουλάχιστον $\frac{k-6}{2} + 2 = \frac{k-2}{2}$ κύκλους, και στην δεύτερη περίπτωση τουλάχιστον $\frac{k-4}{2} + 1 = \frac{k-2}{2}$ κύκλους. Έτσι, ακόμα και στην περίπτωση που το C_2^i περιέχει μόνο 2-κύκλους, έχουμε $\frac{k}{2}$ συνιστώσες για το C_2^i , και άρα τα καλύμματα κύκλων C_1^i και C_2^i έχουν συνολικά το πολύ $k-1$ κύκλους. \square

Στο σημείο αυτό λοιπόν μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει συναρτησιακά προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Θεώρημα 3.5.1

Υπάρχει συναρτησιακά προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Α-ΠΠΠ με λόγο προσέγγισης το πολύ $\frac{4}{3} \log_3 n \simeq 0.841 \log_3 n$.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος είναι ο Decompose, ο οποίος είναι πολυωνυμικός.



Έστω ένας γράφος $G(V, E)$, η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους c και ο αλγόριθμος Decompose. Έστω p τα βήματα της επανάληψης και w_i το σύνολο ακμών που προσθέτουμε στο σύνολο Edges στο βήμα i . Έστω επίσης $Cost^*$ το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton, και $Cost$ το κόστος του κύκλου Hamilton που προκύπτει από τον αλγόριθμο (δεν χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί C και C^* για να μην υπάρχει σύγχυση με τα καλύμματα κύκλων). Παρατηρούμε ότι για κάθε G^i , $i = 1, \dots, p$ που αντιστοιχεί σε κάθε βήμα ισχύει, λόγω της τριγωνικής ιδιότητας, ότι το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton για τον G^i είναι μικρότερο από ή ίση με $Cost^*$. Έτσι σε κάθε βήμα ισχύει, $c(C_1^i) + c(C_2^i) = c(C^i) \leq 2Cost^*$.

Το συνολικό κόστος $Cost$, του κύκλου Hamilton που προκύπτει από τον αλγόριθμο είναι το πολύ $\sum_{i=1}^p w_i$, δηλαδή $Cost \leq \sum_{i=1}^p w_i$. Ισχύει ότι $w_p \leq Cost^*$ και $w_{p-1} \leq 2 \cdot Cost^*$. Για $p = 2$, ισχύει ότι $\sum_{i=1}^p w_i \leq 3 \cdot Cost^*$. Για $p \geq 3$ ισχύει ότι,

$$\frac{\sum_{i=1}^{p-2} w_i}{\log_2(n_1/n_{p-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{p-2} w_i}{\sum_{i=1}^{p-2} \log_2(n_i/n_{i+1})} \leq \max_{i=1, \dots, p-2} \frac{w_i}{\log_2 n_i/n_{i+1}}$$

Όμως βάση του αλγορίθμου ισχύει ότι,

$$\frac{w_i}{\log_2 n_i/n_{i+1}} \leq \min \left\{ \frac{c(C^i)}{\log_2(N(C^i)/con(C^i))}, \frac{c(C_1^i)}{\log_2(N(C_1^i)/con(C_1^i))}, \frac{c(C_2^i)}{\log_2(N(C_2^i)/con(C_2^i))} \right\} \leq \frac{c(C^i) + c(C_1^i) + c(C_2^i)}{\log_2(N^3(C^i)/(con(C^i) \cdot con(C_1^i) \cdot con(C_2^i)))} \leq \frac{4 \cdot Cost^*}{3 \log_2 3}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει αφού $c(C^i) = c(C_1^i) + c(C_2^i) \leq 2 \cdot Cost^*$. Καθώς επίσης και από το Λήμμα 3.5.2 γνωρίζουμε ότι $con(C^i) + con(C_1^i) + con(C_2^i) \leq N(C^i)$ και άρα το γινόμενο $con(C^i) \cdot con(C_1^i) \cdot con(C_2^i)$ ελαχιστοποιείται για $con(C^i) = con(C_1^i) = con(C_2^i) = \frac{N(C^i)}{3}$. Οπότε έχουμε ότι,

$$Cost \leq \sum_{i=1}^p w_i \leq \sum_{i=1}^{p-2} w_i + 3 \cdot Cost^* \leq \frac{4 \cdot \log_3(n_1/n_{p-1}) Cost^*}{3} + 3 \cdot Cost^* \leq \left(\frac{4 \cdot \log_3(n_1)}{3} - 1 \right) Cost^*$$

Έπεται λοιπόν ότι,

$$\frac{Cost}{Cost^*} \leq \frac{4}{3} \log_3(n).$$

Δηλαδή υπάρχει συναρτησιακά προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης το πολύ $\frac{4}{3} \log_3(n) \approx 0.841 \log_2(n)$. □



Κεφάλαιο 4

Μη Προσεγγισιμότητα του ΠΠΠΠ

4.1 Μη προσεγγισιμότητα του Συμμετρικού και Ασύμμετρου ΠΠΠΠ

Θεώρημα 4.1.1

Για το Συμμετρικό ΠΠΠΠ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος εκτός και αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος Q για το Συμμετρικό-ΠΠΠΠ (όπως έχουμε πει το Συμμετρικό ΠΠΠΠ είναι αυτό χωρίς τον περιορισμό της τριγωνικής ιδιότητας) με λόγο προσέγγισης ρ (σταθερό ή συναρτησιακό). Έστω, επίσης, ότι $G(V, E)$ είναι ένας μη κατευθυνόμενος γράφος που αντιστοιχεί σε κάποιο στιγμιότυπο του προβλήματος του Μη-Κατευθυνόμενου Κύκλου Hamilton. Από το τελευταίο κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του Συμμετρικού-ΠΠΠΠ. Κατασκευάζουμε δηλαδή έναν πλήρη μη κατευθυνόμενο γράφο $G'(V', E')$ με $V' = V$ και συνάρτηση κόστους c ,

$$c(\{i, j\}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{i, j\} \in E, \\ 1 + \rho|V'| & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος Q μας δίνει για το στιγμιότυπο που κατασκευάσαμε λύση με κόστος μικρότερο από ή ίσο με $\rho|V'|$ αν υπάρχει κύκλος Hamilton για το αρχικό στιγμιότυπο και λύση με κόστος μεγαλύτερο από ή ίσο με $(|V'| - k + k(1 + \rho|V'|)) = (|V'| - k + k\rho|V'|) = (|V'| + k\rho|V'|) > \rho|V'|$, όπου $k \in \{0, 1, 2, \dots, |V'|\}$, διαφορετικά. Το αποτέλεσμα λοιπόν του αλγορίθμου Q υπολογίζει αν και το αρχικό στιγμιότυπο του προβλήματος του Μη - Κατευθυνόμενου Κύκλου Hamilton έχει λύση. Όμως η κατασκευή αλλά και ο αλγόριθμος Q είναι πολυωνυμικού χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που υπολογίζει το πρόβλημα του Μη-Κατευθυνόμενου Κύκ-



λου Hamilton και άρα το τελευταίο ανήκει στην κλάση \mathcal{P} , ενώ ήδη γνωρίζουμε ότι ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} -πλήρη και άρα τότε θα ίσχυε ότι $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, που πιστεύουμε ότι δεν ισχύει. \square

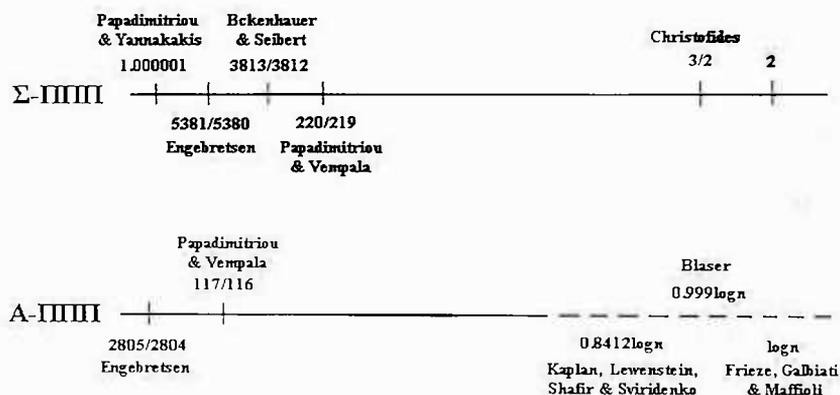
Δεδομένου ότι το Ασύμμετρο ΠΠΠ είναι μια γενίκευση του Συμμετρικού ΠΠΠ και δεδομένου ότι τα πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικά σχήματα είναι πιο ισχυρά από τα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικά σχήματα και αυτά με την σειρά τους είναι πιο ισχυρά από τους προσεγγιστικούς αλγόριθμους, άμεσα από το θεώρημα αυτό προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.1

Τα ακόλουθα ισχύουν εκτός και αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$,

- i) Για το Συμμετρικό ΠΠΠ δεν υπάρχει (πλήρως) πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα.
- ii) Για το Ασύμμετρο ΠΠΠ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος και (πλήρως) πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα.

4.2 Κάτω φράγματα μη προσεγγισιμότητας



Σχήμα 4.1: Σύνοψη αποτελεσμάτων

Για ένα οποιοδήποτε πρόβλημα, άρα και για το ΠΠΠ, είναι χρήσιμο από θεωρητική σκοπιά να γνωρίζουμε αν υπάρχει ένα κάτω φράγμα για την προσεγγισιμότητα. Με την έννοια κάτω φράγμα εννοούμε ότι δεν υπάρχει ρ -προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ -ΠΠΠ ή το Α-ΠΠΠ, για την περίπτωση που εξετάζουμε, με ρ μικρότερο από ή ίσο με το κάτω φράγμα. Τα τελευταία 15 χρόνια υπάρχει πλούσιο θεωρητικό έργο, που μας έχει δώσει όλο και καλύτερα κάτω φράγματα μη προσεγγισιμότητας για το Σ -ΠΠΠ και για το Α-ΠΠΠ. Οι Papadimitriou και Yannakakis δώσαν το φράγμα 1.000001 για το Σ -ΠΠΠ με

την εργασία τους στο [11], ο Engebretsen έδωσε τα φράγματα 5381/5380 για το Σ -ΠΠΠ και το 2805/2804 για το A -ΠΠΠ με την εργασία του στο [12], οι Bckenbauer και Seibert δώσαν το φράγματα 3813/3812 για το Σ -ΠΠΠ με την εργασία τους στο [13] και οι Papadimitriou και Vempala δώσαν τα φράγματα 220/219 για το Σ -ΠΠΠ και το 117/116 για το A -ΠΠΠ με την εργασία τους στο [14]. Για τα τελευταία φράγματα δεν υπάρχουν αποτελέσματα που να μας λένε ότι τα φράγματα αυτά είναι τα βέλτιστα δυνατά και άρα είναι δυνατόν να βελτιωθούν περαιτέρω. Μια σύνοψη όλων των ως τώρα αποτελεσμάτων φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

Οι εργασίες αυτές έχουν ως κοινό σημείο τους ότι εξάγουν τα αποτελέσματα τους κατασκευάζοντας, για ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο κάποιας παραλλαγής ή του ίδιου του $E2\text{-Lin}(3) \bmod 2$ προβλήματος, ένα στιγμιότυπο του Σ -ΠΠΠ ή του A -ΠΠΠ. Η λύση του τελευταίου μας δίνει μία λύση και για το αρχικό πρόβλημα.

Ορισμός 4.2.1 ($E2\text{-Lin}(3) \bmod 2$)

Δίνεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\bmod 2$ με ακριβώς δύο μεταβλητές σε κάθε εξίσωση όπου κάθε μεταβλητή εμφανίζεται συνολικά τρεις φορές.

Ποια είναι εκείνη η ανάθεση μεταβλητών, που μεγιστοποιεί τον αριθμό των εξισώσεων που ικανοποιούνται;

Για κάποιες από τις παραλλαγές όμως (και για όλες όσων γίνεται χρήση) αλλά και για το ίδιο το $E2\text{-Lin}(3) \bmod 2$ πρόβλημα υπάρχουν αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας. Αυτά τα αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας, σε συνδυασμό με το ότι υπάρχει πολυωνυμική κατασκευή για την οποία μία προσεγγιστική λύση για το Σ -ΠΠΠ ή το A -ΠΠΠ δίνει μια προσεγγιστική λύση για την παραλλαγή του $E2\text{-Lin}(3) \bmod 2$ προβλήματος, μας οδηγούν σε κάτω φράγματα μη προσεγγισιμότητας για το Σ -ΠΠΠ ή το A -ΠΠΠ. Στις κατασκευές αυτές γίνεται χρήση της έννοιας του εξαρτήματος, όπου εξάρτημα είναι ένας υπογράφος ενός συνολικού γράφου που επιτρέπει την επιμέρους κατασκευή ή ανάλυση του συνολικού γράφου. Τα εξάρτηματα μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζοντας τον συνολικό γράφο αλλά και ένα εξάρτημα μπορεί να είναι μέρος ενός μεγαλύτερου εξαρτήματος. Επίσης, να πούμε ότι συχνά η τελική κατασκευή του συνολικού γράφου δεν είναι ένας πλήρης γράφος, αλλά οι ακμές που δεν υπάρχουν εννοούνται πως υπάρχουν και το κόστος τους ορίζεται με κάποιον ρητό τρόπο. Όλα αυτά θα φανούν καλύτερα στις επόμενες ενότητες στις οποίες και αναλύεται η εργασία των Papadimitriou και Vempala, η οποία μας έχει δώσει τα καλύτερα κάτω φράγματα μη προσεγγισιμότητας για το Σ -ΠΠΠ και το A -ΠΠΠ μέχρι σήμερα.



4.3 $\frac{117}{116}$ κάτω φράγμα μη προσεγγισιμότητας για το Α-ΠΠΠ

Στην ενότητα αυτή αναλύεται η εργασία των Paradimitriou και Vempala σύμφωνα με την οποία για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι \mathcal{NP} -hard η προσέγγιση του Α-ΠΠΠ ως προς ένα λόγο $\frac{117}{116} - \varepsilon$. Αρχικά το αποτέλεσμα μη προσεγγισιμότητας για κάποια παραλλαγή του E2-Lin(3) mod 2 προβλήματος του οποίου γίνεται χρήση μας το παρέχει ο Hastad στο [15].

Θεώρημα 4.3.1

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος k , ο οποίος εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε να είναι \mathcal{NP} -hard να απαντήσουμε για ένα σύνολο n γραμμικών εξισώσεων mod 2, με τρεις μεταβλητές ανά εξίσωση και με το πολύ k εμφανίσεις κάθε μεταβλητής, αν έχει μία ανάθεση η οποία να ικανοποιεί $n(1 - \varepsilon)$ εξισώσεις, ή δεν υπάρχει ανάθεση που να ικανοποιεί περισσότερες από $n(\frac{1}{2} + \varepsilon)$ εξισώσεις

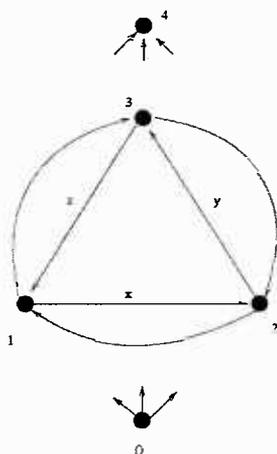
Από το θεώρημα αυτό είναι φανερό το πρόβλημα από το οποίο θα ξεκινήσουμε την κατασκευή. Αλλά η μορφή με την οποία περιγράφονται οι εξισώσεις δεν αλλάζει το αποτέλεσμα του θεωρήματος. Έτσι θεωρούμε ότι οι αρχικές εξισώσεις περιγράφονται από εξισώσεις που είναι όλες της μορφής $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 0 \pmod{2}$, όπου $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ είναι τιμές αληθείας που προκύπτουν σαν θέσεις ή αρνήσεις των αρχικών μεταβλητών, δεδομένου ότι μια μεταβλητή παίρνει τιμές 0 ή 1 mod 2. Αυτό γίνεται πολύ εύκολα αν για κάθε αρχική εξίσωση $x + y + z = 1 \pmod{2}$ πάρουμε την άρνηση για όλες τις μεταβλητές και για κάθε αρχική εξίσωση $x + y + z = 0 \pmod{2}$ πάρουμε την θέση για όλες τις μεταβλητές. Επίσης θεωρούμε ότι κάθε μεταβλητή εμφανίζεται τόσες φορές σαν άρνηση όσες και σαν θέση. Αυτό γίνεται με το εξής τέχνασμα, για κάθε εξίσωση παίρνουμε μια νέα εξίσωση με τις αρνήσεις δύο μεταβλητών για όλους τους δυνατούς ανά δύο συνδυασμούς των μεταβλητών της εξίσωσης. Έστω για παράδειγμα η εξίσωση $x + y + z = 0 \pmod{2}$ τότε οι τρεις νέες εξισώσεις είναι οι $(-x) + (-y) + z = 0 \pmod{2}$, $(-x) + y + (-z) = 0 \pmod{2}$ και $x + (-y) + (-z) = 0 \pmod{2}$. Το πρώτο βήμα, λοιπόν, κατασκευής ξεκινάει από αυτή την μετατροπή του στιγμιότυπου του αρχικού προβλήματος.

Από το τελευταίο στιγμιότυπο θα κατασκευάσουμε έναν κατάλληλο γράφο για να πάρουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. Ο γράφος αυτός δεν θα είναι πλήρης και το κόστος των ακμών που υπάρχουν στον γράφο θα προσδιορίζεται συγκεκριμένα και θα ισχύει η τριγωνική ιδιότητα ενώ οι ακμές που δεν υπάρχουν θα εννοείται ότι υπάρχουν με κόστος αυτό του ελάχιστου μονοπατιού για τους κόμβους που συνδέει η ακμή. Από την συνάρτηση κόστους, για την οποία ισχύει η τριγωνική ιδιότητα, προκύπτει ότι οποιοσδήποτε κύκλος, που περνάει από όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά, μπορεί να αναχθεί σε έναν κύκλο Hamilton χωρίς επιπλέον κόστος. Με δεδομένο το τελευταίο και για τις



ανάγκες της απόδειξης του κάτω φράγματος μη προσεγγισιμότητας, ορίζουμε αυτόν τον κύκλο που περνάει από όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά σαν επαυξημένο κύκλο περιοδεύοντος πωλητή. Να σημειώσουμε πως το κόστος του ελάχιστου επαυξημένου κύκλου περιοδεύοντος πωλητή είναι ίσο με το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton.

Σύμφωνα με την κατασκευή κάθε μία από τις εξισώσεις αυτές αναπαρίσταται με το εξάρτημα εξίσωσης, που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2. Στο εξάρτημα εξίσωσης υπάρχουν τρεις χαρακτηρισμένες ακμές, στο Σχήμα 4.2 είναι αυτές με τα γράμματα x, y, z . Οι τρεις χαρακτηρισμένες ακμές αντιστοιχούν στις τιμές αληθείας της κάθε εξίσωσης. Όπως θα δούμε οι χαρακτηρισμένες ακμές δεν είναι ακριβώς ακμές αλλά είναι κι αυτές με την σειρά τους εξαρτήματα που ονομάζουμε εξαρτήματα ακμής, ενώ όλες οι άλλες ακμές είναι ακριβώς ακμές με κόστος 1. Το εξάρτημα εξίσωσης έχει μία ιδιότητα κεντρικής σημασίας για την κατασκευή και περιγράφεται από το ακόλουθο λήμμα του οποίου η απόδειξη είναι άμεση και παραλείπεται.



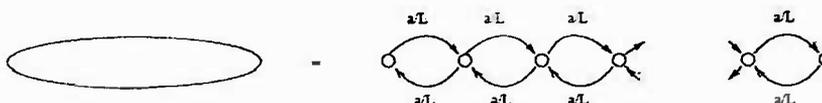
Σχήμα 4.2: Εξάρτημα εξίσωσης

Λήμμα 4.3.1

Για κάθε υποσύνολο S των τριών χαρακτηρισμένων ακμών το ακόλουθο είναι αληθές: Αν ο πληθάνριθμος του S είναι άρτιος αριθμός, τότε το ελάχιστου μήκους μονοπάτι από τον κόμβο 0 στον κόμβο 4, που διασχίζει ακριβώς τις S χαρακτηρισμένες ακμές και όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά, είναι ένα μονοπάτι Hamilton και έχει μήκος 4. Διαφορετικά, αν ο πληθάνριθμος του S είναι περιττός αριθμός, τότε το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο 0 στον κόμβο 4 που διασχίζει ακριβώς τις S χαρακτηρισμένες ακμές και όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά, έχει μήκος 5.

Επίσης κεντρικής σημασίας είναι, όπως θα δούμε παρακάτω, και τα εξαρτή-

ματα ακμής. Ένα εξάρτημα ακμής φαίνεται στο Σχήμα 4.3. Το εξάρτημα ακμής αποτελείται από d δι-κατευθυνόμενα μονοπάτια που καλούνται γέφυρες και συνδέονται μεταξύ τους με κατευθυνόμενες ακμές, οι οποίες ονομάζονται ακμές σύνδεσης. Οι δύο έντονοι κόμβοι είναι κόμβοι τύπου 1,2,3 στο εξάρτημα εξίσωσης. Η πρώτη από αριστερά ακμή έχει κόστος 1 και όλες οι υπόλοιπες b . Τέλος κάθε γέφυρα είναι ένα δι-κατευθυνόμενο μονοπάτι $L+2$ ακμών, κόστους α/L . Εδώ ολοκληρώνεται η περιγραφή των εξαρτημάτων.

Ένα εξάρτημα ακμής αποτελείται από d γέφυρεςΚάθε γέφυρα είναι ένα δι-κατευθυνόμενο μονοπάτι $L+2$ ακμών

Σχήμα 4.3: Εξάρτημα ακμής

Τα εξαρτήματα εξίσωσης κατασκευάζονται έτσι ώστε αποδίδοντας τους τις κατάλληλες χαρακτηρισμένες ακμές, να αναπαρίστανται όλες οι εξισώσεις. Έτσι για κάθε μία από τις εξισώσεις υπάρχει και ένα αντίστοιχο εξάρτημα εξίσωσης, στο οποίο θεωρούμε πως οι ακμές διασχίζονται ή δεν διασχίζονται αν οι αντίστοιχες τιμές αληθείας στην αντίστοιχη εξίσωση παίρνουν τιμές 1 ή 0 αντίστοιχα. Στην συνέχεια τα εξαρτήματα αυτά συνδέονται σειριακά ως προς μία οποιαδήποτε διάταξη (όπου ο κόμβος με τον αριθμό 4 για κάθε εξάρτημα εξίσωσης ταυτίζεται με τον κόμβο αριθμού 0 του επόμενου) κλείνοντας έναν κύκλο (όπου ο κόμβος αριθμού 4 για το τελευταίο εξάρτημα εξίσωσης ταυτίζεται με τον κόμβο αριθμού 0 του πρώτου). Σκοπός, αυτής της κατασκευής, είναι ο ελάχιστος επαυξημένος κύκλος περιοδεύοντος πωλητή να επισκέπτεται όλα τα εξαρτήματα εξίσωσης σε σειρά. Διασχίζοντας, σε κάθε εξάρτημα εξίσωσης, το υποσύνολο των χαρακτηρισμένων ακμών που αντιστοιχούν στις τιμές αληθείας με 1 (σύμφωνα με την απονομή αληθείας) και ξοδεύοντας κόστος 1 σε κάθε εξάρτημα εξίσωσης, για το οποίο η αντίστοιχη εξίσωση δεν ικανοποιείται. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε σαν τυπικό κύκλο αυτόν που επισκέπτεται όλα τα εξαρτήματα εξίσωσης ένα προς ένα, και μέσα σε κάθε εξάρτημα επισκέπτεται ακριβώς το υποσύνολο των ακμών που αντιστοιχούν σε τιμές αληθείας που η τιμή τους είναι 1. Αν η εξίσωση ικανοποιείται, το εξάρτημα εξίσωσης το έχει επισκεφτεί ένα μονοπάτι Hamilton, μήκους 4, διαφορετικά το έχει επισκεφτεί ένα μονοπάτι, μήκους 5.

Όμως η κατασκευή, ως αυτό το σημείο, δεν έχει εξασφαλίσει την συνέπεια για τις εμφανίσεις των μεταβλητών. Είναι, δηλαδή, πιθανό ο ελάχιστος επαυξημένος κύκλος περιδεύοντος πωλητή για τον γράφο να μην είναι ένας τυπικός κύκλος, με την έννοια ότι μπορεί να διασχίζει μία εμφάνιση μιας τιμής αληθείας και να αποφεύγει μια άλλη εμφάνιση για την ίδια τιμή αληθείας, και έτσι ο κύκλος αυτός να μην αντιστοιχίζεται σε κάποια ανάθεση τιμών αληθείας. Για να εξασφαλίσουμε την συνέπεια αυτή χρειάζεται μια επιπλέον βελτίωση της κατασκευής.

Έστω μια μεταβλητή x που εμφανίζεται k φορές σαν άρνηση και k φορές σαν θέση. Η βελτίωση της κατασκευής αφορά τον προσδιορισμό του κατάλληλου ταυτίσματος γέφυρών έτσι ώστε κάθε γέφυρα για κάθε εξάρτημα ακμής που αντιστοιχεί σε θέση του x να ταυτίζεται με κάποια γέφυρα για κάποιο εξάρτημα ακμής που αντιστοιχεί σε άρνηση του x . Δύο γέφυρες για κάθε ταίριασμα ταυτίζονται έτσι ώστε σε καθένα από τα δύο άκρα της γέφυρας, στην οποία ταυτίζονται, να υπάρχει μία επιπλέον ακμή εισόδου και μία επιπλέον ακμή εξόδου. Από την στιγμή που οι γέφυρες ταυτίζονται η γειτονιά κάθε εξαρτήματος ακμής φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Αυτή η κατάλληλη ταύτιση γίνεται με την βοήθεια ενός ειδικού $k \times k$ d -κανονικού διμερή γράφου $X = (V_1, V_2, E)$. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 4.5 αυτού του κεφαλαίου για k αρκετά μεγάλο και για κάθε $b \geq 2$, σχεδόν κάθε b -κανονικός διμερής γράφος $2k$ κόμβων είναι b -ωθητικός. Δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το σημείο το θεώρημα αυτό, αλλά κρατάμε τον ορισμό του b -ωθητικού γράφου.

Ορισμός 4.3.1

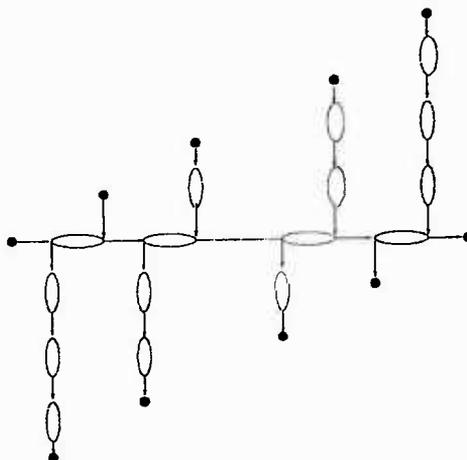
Ένας d -κανονικός διμερής γράφος $G(V_1, V_2, E)$ ονομάζεται b -ωθητικός αν για όλες τις διαμερίσεις του V_1 , σε υποσύνολα U_1, S_1, T_1 , και του V_2 , σε υποσύνολα U_2, S_2, T_2 , τέτοιες ώστε να μην υπάρχουν ακμές από κόμβους του U_1 προς κόμβους του U_2 , ο αριθμός (T_1, T_2) των ακμών ανάμεσα στους T_1 και T_2 ικανοποιεί την σχέση,

$$(b + \frac{1}{2})(T_1, T_2) \geq \min\{|U_1| + |T_2|, |U_2| + |T_1|\} - (b - \frac{1}{2})(|S_1| + |S_2|).$$

Για κάθε μεταβλητή, λοιπόν, x θεωρούμε έναν d -κανονικό διμερή γράφο X (που αποδεικνύεται ότι είναι b -ωθητικός για κατάλληλα d και b) για τον οποίο αντιστοιχίζουμε τους κόμβους V_1 στις εμφανίσεις με θέση του x , τους κόμβους V_2 στις εμφανίσεις με άρνηση του x και για κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους ταυτίζουμε δύο γέφυρες για τις αντίστοιχες εμφανίσεις. Εδώ ολοκληρώνεται η περιγραφή της κατασκευής.

Θα δείξουμε ότι ένας ελάχιστος επαυξημένος κύκλος περιδεύοντος πωλητή αντιστοιχεί σε κάποιον τυπικό κύκλο (το κόστος ελάχιστου επαυξημένου κύκλου περιδεύοντος πωλητή ταυτίζεται με το κόστος ελάχιστου κύκλου Hamilton, αφού όπως αναφέραμε αρχικά ο πρώτος ανάγεται χωρίς επιπλέον κόστος στον δεύτερο). Πρώτα όμως να πούμε ότι τα εξαρτήματα εξίσωσης χαρακτηρίζονται από τρεις τύπους διάσχισης τους. Αν σε ένα εξάρτημα ακμής όλες οι

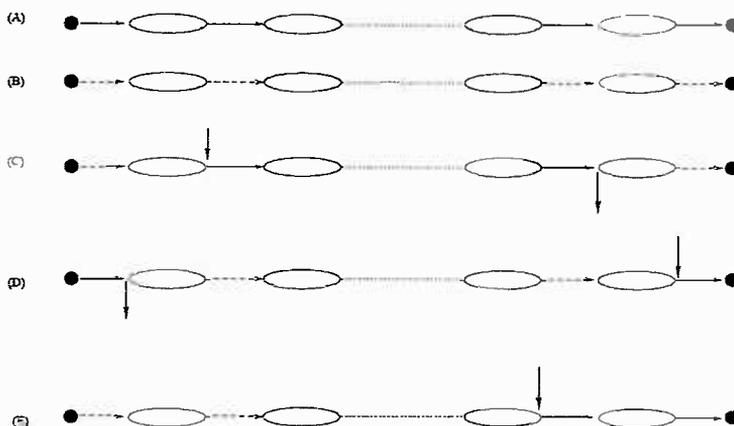




Σχήμα 4.4: Η γειτονιά ενός εξαρτήματος εξίσωσης

ακμές σύνδεσης από αριστερά προς τα δεξιά έχουν διασχισθεί στον επαυξημένο κύκλο περιοδεύοντος πωλητή, τότε αυτό το εξάρτημα ακμής χαρακτηρίζεται ως πλήρως διασχισμένο (Σχήμα 4.5 (A)). Αν καμία από τις ακμές σύνδεσης δεν έχει διασχισθεί, τότε αυτό το εξάρτημα ακμής χαρακτηρίζεται ως πλήρως μη διασχισμένο (Σχήμα 4.5 (B)). Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις το εξάρτημα ακμής χαρακτηρίζεται ως ημιδιασχισμένο. Το χαρακτηριστικό του τελευταίου τύπου είναι πως, σε κάθε εξάρτημα ακμής, υπάρχει τουλάχιστον μία αναστροφή, δηλαδή για το εξάρτημα αυτό υπάρχει μία ακμή σύνδεσης που έχει διασχισθεί ενώ η επόμενη ή η προηγούμενη δεν έχει διασχισθεί. Όμως, τα ημιδιασχισμένα εξαρτήματα ακμής διακρίνονται κι αυτά με την σειρά τους σε τρεις τύπους. Αν η πρώτη και η τελευταία ακμή σύνδεσης δεν έχει διασχισθεί τότε το ημιδιασχισμένο εξάρτημα ακμής λέμε ότι είναι τύπου U (Σχήμα 4.5 (C)). Αν η πρώτη και η τελευταία ακμή σύνδεσης έχουν διασχισθεί τότε το ημιδιασχισμένο εξάρτημα ακμής λέμε ότι είναι τύπου T (Σχήμα 4.5 (D)). Σε κάθε άλλη περίπτωση λέμε ότι το εξάρτημα ακμής είναι τύπου S (Σχήμα 4.5 (E)). Μία άλλη ειδική περίπτωση διάσχισης, που επιφέρει επιπλέον κόστος, αφορά στις γέφυρες και είναι η διπλή διάσχιση (Σχήμα 4.6). Η διπλή διάσχιση συμβαίνει όταν μια συγκεκριμένη γέφυρα διασχίζεται δυο φορές, είτε μία για την θέση της μεταβλητής και μία για την άρνηση της είτε για να διασχισθεί κάποιο άκρο της γέφυρας με επαναφορά.

Γίνεται λοιπόν διαισθητικά αντιληπτό ότι οι αναστροφές και οι διπλές διασχίσεις είναι άχρηστες με την έννοια ότι οι γέφυρες και οι ακμές σύνδεσης πρέπει να διασχίζονται περισσότερες φορές απ' ό τι στον τυπικό κύκλο προκειμένου να υλοποιηθεί η αναστροφή ή η διπλή διάσχιση. Έστω, λοιπόν, ένας οποιοσδήποτε επαυξημένος κύκλος περιοδεύοντος πωλητή. Το κόστος του χωρίζεται σε δύο μέρη. Χωρίζεται στο κόστος γεφυρών, που είναι το συνολικό κόστος διάσχισης



Σχήμα 4.5: Τύποι διάσχησης μιας γέφυρας

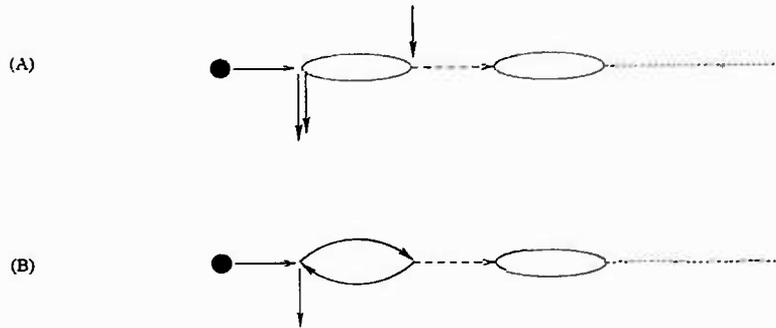
των ακμών σύνδεσης κόστους b και των ακμών κόστους α/L στις γέφυρες, από την μία και στο κόστος εξισώσεων, που είναι το συνολικό κόστος διάσχησης των ακμών κόστους 1, από την άλλη. Θα αποδείξουμε στο ακόλουθο λήμμα αυτό που αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά.

Λήμμα 4.3.2

Το κόστος γέφυρας ενός οποιουδήποτε επαυξημένου κύκλου περιοδεύοντος πωλητή είναι μεγαλύτερο από αυτό του τυπικού κύκλου τουλάχιστον κατά $R \min\{\alpha/2, b\} + D(\alpha + b)$ όπου R είναι ο αριθμός των αναστροφών και D των διπλών διασχίσεων.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία αναστροφή, χ.β.γ. θεωρούμε μία γέφυρα με μία 'οριζόντια' ακμή εισόδου αλλά όχι 'οριζόντια' ακμή εξόδου (οι άλλες δύο περιπτώσεις είναι ανάλογες). Προφανώς, υπάρχει μια κάθετη ακμή εξόδου από την γέφυρα. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Αν υπάρχει κάθετη ακμή εισόδου στην γέφυρα (Σχήμα 4.6 (A)) τότε υπάρχει τοπικά αναθέσιμο κόστος b εξαιτίας της δεύτερης διάσχησης της κάθετης ακμής εξόδου από την γέφυρα. Αν δεν υπάρχει κάθετη ακμή εισόδου (Σχήμα 4.6 (B)), τότε υπάρχει ένα επιπλέον κόστος $(L+2)\alpha/L$ προκειμένου η διαδρομή να περάσει από τους κόμβους της γέφυρας και να επιστρέψει πάλι αριστερά. Όμως, μόνο το μισό κόστος μπορεί να ανατεθεί τοπικά σ' αυτή την αναστροφή, δεδομένου ότι η ίδια γέφυρα μπορεί επίσης να είναι αναστροφή για την κάθετη διεύθυνση (κάθετη διεύθυνση εννοούμε το εξάρτημα ακμής το οποίο έχει ταυτιστεί στην συγκεκριμένη γέφυρα με το εξάρτημα ακμής που απεικονίζεται στην οριζόντια διεύθυνση). Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση, όπου υπάρχει μία κάθετη ακμή η οποία εισέρχεται στην γέφυρα, δεν υπάρχει αναστροφή που να συμβαίνει στην κάθετη διεύθυνση της γέφυρας και αν μια αναστροφή συμβεί νωρίτερα ή αργότερα θα επιφέρει ένα

επιπλέον κόστος. Έτσι σε κάθε αναστροφή μπορεί να ανατεθεί ένα τοπικό κόστος τουλάχιστον $\min\{\alpha/2, b\}$. Οι διπλές διασχίσεις προσμετρούνται άμεσα: Οι ακμές της γέφυρας διασχίζονται διπλά (με επιπλέον κόστος τουλάχιστον α), και το κόστος μίας τουλάχιστον από τις ακμές σύνδεσης από τις οποίες βγαίνουμε από την γέφυρα μπορεί μοναδικά να ανατεθεί στην διπλή διάσχιση. \square



Σχήμα 4.6: Μορφές αναστροφής

Λήμμα 4.3.3

Υπάρχει ένας ελάχιστος επαυξημένος κύκλος περιοδεύοντος πωλητή που είναι τυπικός κύκλος για κάποια ανάθεση.

Απόδειξη. Ας είναι τ ένας οποιοσδήποτε επαυξημένος κύκλος περιοδεύοντος πωλητή. Θα τον μετατρέψουμε χωρίς επιπλέον κόστος σε έναν τυπικό κύκλο.

Έστω x μια μεταβλητή και X ο d -κανονικός διμερής γράφος με τις εμφανίσεις ως θέση του x στην μία πλευρά και τις εμφανίσεις ως άρνηση στην άλλη πλευρά. Θέτουμε σε κάθε κόμβο σε αυτόν τον γράφο την ετικέτα T, U, S^U, S^T ή S^S αν το αντίστοιχο εξάρτημα ακμής είναι διασχισμένο, μη διασχισμένο, ημιδιασχισμένο τύπου U , ημιδιασχισμένο τύπου T και ημιδιασχισμένο τύπου S αντίστοιχα. Ας είναι U_1 το σύνολο των κόμβων με ετικέτα U που βρίσκονται στην αριστερή διαμέριση του γράφου. Ανάλογα ορίζουμε τα $U_2, T_1, T_2, S_1^U, S_1^S, S_1^T, S_2^U, S_2^S$ και S_2^T και ας είναι u_1, u_2, \dots οι αντίστοιχοι πληθάρημοι των συνόλων αυτών. Χ.β.γ. θεωρούμε ότι $u_1 + t_2 \leq u_2 + t_1$. Τροποποιούμε έτσι τον επαυξημένο κύκλο περιοδεύοντος πωλητή ώστε όλα τα εξαρτήματα ακμής εμφανίσεων που αντιστοιχούν σε κόμβους της διαμέρισης που βρίσκονται οι κόμβοι U_1 να είναι όλα διασχισμένα και αυτά που αντιστοιχούν στην διαμέριση που βρίσκονται οι κόμβοι U_2 να είναι όλα μη διασχισμένα, με αποτέλεσμα σε κάθε εξάρτημα εξίσωσης όλα τα εξαρτήματα ακμής της x να έχουν διασχισθεί με συνέπεια. Η τροποποίηση αυτή, αν γίνει για όλες τις μεταβλητές, οδηγεί σε έναν τυπικό κύκλο για κάποια ανάθεση.

Πρέπει να δείξουμε ότι αυτή η τροποποίηση δεν επιφέρει σε καμία περίπτωση

αύξηση του κόστους για την νέα διαδρομή. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε ως προς την μεταβολή του κόστους. Κατά πρώτον, το κόστος γέφυρας του τυπικού κύκλου ελαττώνεται σαν συνέπεια του Λήμματος 4.3.2. Και κατά δεύτερον, το κόστος εξίσωσης του τυπικού κύκλου στην χειρότερη περίπτωση μπορεί να αυξηθεί σαν συνέπεια του τρόπου διάσχισης του εξαρτήματος εξίσωσης. Αρχεί να δείξουμε ότι κατ' απόλυτη τιμή η πρώτη υπερτερεί της δεύτερης. Ας εξετάσουμε μεταβλητή προς μεταβλητή τις αλλαγές που επιφέρει η μετατροπή της διαδρομής.

Για την μεταβλητή x υπάρχουν δύο περιπτώσεις μείωσης του κόστους γέφυρας σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.2 για αυτή τη μεταβλητή, η πρώτη αφορά τις αναστροφές και η δεύτερη τις διπλές διασχίσεις. Ως προς τις αναστροφές, δεδομένου ότι οι ημιδιάσχίσεις τύπου U και τύπου S έχουν τουλάχιστον δύο αναστροφές ανά εξάρτημα ακμής και οι ημιδιάσχίσεις τύπου S έχουν τουλάχιστον μία αναστροφή ανά εξάρτημα ακμής, υπάρχουν τουλάχιστον $2[s_1^U + s_1^T + s_2^U + s_2^T + \frac{1}{2}(s_1^S + s_2^S)]$ αναστροφές στην τ . Και ως προς τις διπλές διασχίσεις, ας υποθέσουμε ότι στον διμερή γράφο X της x υπάρχει μια ακμή που συνδέει τους κόμβους T_1 και T_2 , αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη γέφυρα της ακμής είναι διπλά διασχισμένη. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν (T_1, T_2) διπλές διασχίσεις, όπου (T_1, T_2) είναι το πλήθος των ακμών μεταξύ των T_1 και T_2 στον διμερή γράφο X της x . Σε αυτό το σημείο θέτουμε $\alpha = 2\beta$, έτσι από το Λήμμα 4.3.2 το κόστος μειώνεται συνολικά για την x κατά,

$$(4.1) \quad bR + 3bD \geq b[2s_1^U + 2s_1^T + 2s_2^U + 2s_2^T + s_1^S + s_2^S] + 3b(T_1, T_2)$$

Για να εξετάσουμε την μεταβολή κόστους εξίσωσης να πούμε ότι, στον ελάχιστο επαυξημένο κύκλο περιοδεύοντος πωλητή, το κόστος εξίσωσης μπορεί να είναι είτε 4 είτε 5, το πρώτο κόστος αντιστοιχεί στην ικανοποίηση μίας εξίσωσης και το δεύτερο κόστος σε μη ικανοποίηση. Επειδή για τα εξαρτήματα ακμής με ημιδιάσχιση τύπου T , η πρώτη και η τελευταία ακμή έχουν διασχισθεί, στο εξάρτημα εξίσωσης η αντίστοιχη χαρακτηρισμένη ακμή είναι σαν να έχει διασχισθεί με κόστος εξίσωσης 1. Επίσης, επειδή για τα εξαρτήματα ακμής με ημιδιάσχιση τύπου U , η πρώτη και η τελευταία ακμή δεν έχουν διασχισθεί, στο εξάρτημα εξίσωσης η αντίστοιχη χαρακτηρισμένη ακμή είναι σαν να έχει διασχισθεί χωρίς κανένα κόστος εξίσωσης. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι για τα εξαρτήματα εξίσωσης και για το κόστος εξίσωσης οι ημιδιάσχίσεις τύπου T και U έχουν ανάλογη συμπεριφορά ως προς μία διάσχιση και μη διάσχιση αντίστοιχα. Κάθε εξάρτημα ακμής που αντιστοιχεί σε μία εμφάνιση των συνόλων U_2, T_1 και S_2^U, S_1^T δεν επιφέρει καμία αλλαγή κόστους εξίσωσης, αφού τα πρώτα παραμένουν ίδια ενώ τα δεύτερα διατηρούν την ίδια συμπεριφορά στο εξάρτημα εξίσωσης. Αντίθετα, τα εξαρτήματα ακμής που αντιστοιχούν σε μία εμφάνιση των συνόλων U_1, T_2 αντιστρέφονται, ενώ αυτά που αντιστοιχούν σε μία εμφάνιση των συνόλων S_1^U, S_2^T αντιστρέφουν συμπεριφορά στο εξάρτημα εξίσωσης. Αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής είναι, στην χειρότερη περίπτωση, να επιφέρουν μία αύξηση κόστους κατά 1 που αντιστοιχεί στην μετατροπή διάσχισης ενός

εξαρτήματος εξίσωσης από τρόπο που να ικανοποιεί την εξίσωση σε τρόπο που να μην την ικανοποιεί. Οι ημιδιασχίσεις τύπου S αποτελούν μία ειδική περίπτωση για τις οποίες ισχυριζόμαστε, και θα το δείξουμε, ότι το πολύ μία εξίσωση μετατρέπεται σε μη ικανοποιήσιμη για κάθε δύο ημιδιασχίσεις τύπου S .

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα εξάρτημα εξίσωσης με μία μόνο ημιδιάσχιση τύπου S . Αν το κόστος εξίσωσης είναι 5 δεν υπάρχει κάτι για να αποδείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το κόστος εξίσωσης είναι 4, αυτό σημαίνει ότι για κάθε κόμβο 0,1,2,3,4 στο εξάρτημα εξίσωσης υπάρχει ακριβώς μία ακμή εισόδου και ακριβώς μία εξόδου. Επιπλέον υποθέτουμε ότι τα υπόλοιπα εξαρτήματα εξίσωσης μπορεί, από τους τύπους που ήδη εξετάσαμε, να είναι U_2, T_1, S_1^T ή S_2^U , διαφορετικά η αύξηση κόστους έχει ήδη συνυπολογιστεί. Ας υποθέσουμε χ.β.γ ότι η ημιδιασχισμένη ακμή τύπου S είναι από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2, Θ α δείξουμε ότι πρέπει να υπάρχει άλλο ένα εξάρτημα ακμής με ημιδιάσχιση τύπου S για το ίδιο εξάρτημα εξίσωσης. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει, τότε στο εξάρτημα εξίσωσης η ακμή από τον κόμβο 1 πρέπει να πηγαίνει στον κόμβο 4 (αφού η πρώτη ακμή στο εξάρτημα διάσχισης από το 1 στο 2 δεν διασχίζεται). Τα εξαρτήματα ακμής από τον κόμβο 2 στον 3 και από τον κόμβο 3 στον 1 πρέπει να είναι τύπου T_1 ή S_1^T αφού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακμές από τον κόμβο 2 στον 4 και από τον κόμβο 3 στον 4. Όμως ήδη οι κόμβοι 1,2,3,4 έχουν μία ακμή εισόδου και τοποθετώντας μία οποιαδήποτε ακμή εξόδου από τον κόμβο 4, αυτή θα προσθέσει μία ακμή εισόδου και μία εξόδου σε κάποιους από τους υπόλοιπους κόμβους, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

Καταλήγοντας λοιπόν το κόστος μπορεί να αυξηθεί το πολύ κατά,

$$(4.2) \quad u_1 + t_2 + s_1^U + s_2^T + \frac{1}{2}(s_1^S + s_2^S)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η μείωση του κόστους υπερτερεί της αύξησης. Αρκεί,

$$b[2s_1^U + 2s_1^T + 2s_2^U + 2s_2^T + s_1^S + s_2^S] + 3b(T_1, T_2) \geq u_1 + t_2 + s_1^U + s_2^T + \frac{1}{2}(s_1^S + s_2^S)$$

$$3b(T_1, T_2) \geq u_1 + t_2 - 2b(s_1^T + s_2^U) - b(s_1^U + s_2^T) - (b - \frac{1}{2})(s_1^S + s_2^S)$$

Αν θεωρήσουμε $s_1 = s_1^U + s_1^T + s_1^S$ και $s_2 = s_2^U + s_2^T + s_2^S$, τότε θα αρκούσε να δείξουμε ότι,

$$(4.3) \quad 3b(T_1, T_2) \geq u_1 + t_2 - (b - \frac{1}{2})(s_1 + s_2)$$

Η σχέση όμως προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 4.3.1 του b -ωθητικού d -κανονικού διμερή γράφου και το Θ εώρημα 4.5.1, που μας εγγυάται πως οποιοσδήποτε $k \times k$ b -κανονικός διμερής γράφος για πολύ μεγάλο k είναι b -ωθητικός. Στο σημείο αυτό, λοιπόν, θέτουμε $d = 6$. \square



Θεώρημα 4.3.2

Για κάθε $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Α-ΠΙΠΙ με λόγο $\frac{117}{116} - \varepsilon$, εκτός και αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα n εξισώσεων 3 μεταβλητών mod 2, το οποίο καλούμε J . Από το J κατασκευάζουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο Α-ΠΙΠΙ, το οποίο καλούμε W , που κατασκευάζεται όπως περιγράφηκε σε όσα προηγήθηκαν. Το κόστος ενός τυπικού κύκλου στο W , που αντιστοιχεί σε μία ανάθεση τιμών αληθείας που ικανοποιεί όλες εκτός από F εξισώσεις στο J , είναι,

$$(4.4) \quad \left[\frac{3n}{2} \cdot \left(d \frac{L+2}{L} \alpha + db \right) \right] + [4n + F].$$

Αρκεί να σκεφτούμε ότι από την μία θα διασχισθούν τα μισά εξαρτήματα ακμής, όταν όλα τα εξαρτήματα ακμής είναι $3n$ και το κόστος διάσχισης ενός εξαρτήματος ακμής είναι $d \frac{L+2}{L} \alpha + db$ αν δεν συνυπολογίσουμε το κόστος της πρώτης ακμής για κάθε εξάρτημα ακμής. Από την άλλη συνυπολογίζοντας για κάθε εξάρτημα ακμής το κόστος της πρώτης ακμής που είναι 1 και το κόστος όλων των μη χαρακτηρισμένων ακμών με κόστος επίσης 1, και με την βοήθεια του Λήμματος 4.3.1, το κόστος αυτών των ακμών είναι $4n$ για κάθε εξάρτημα εξίσωσης συν ένα για κάθε εξάρτημα εξίσωσης για το οποίο δεν ικανοποιείται η αντίστοιχη εξίσωση. Να θυμίσουμε ότι στο τέλος του Λήμματος 4.3.3 θέσαμε $d = 2$. Επίσης, στο σημείο αυτό να πούμε πως οι κατάλληλες τιμές, που προτείνονται για τα α και b , είναι $\alpha = 2$ και $b = 2\alpha = 4$. Έτσι, προκύπτει από την Σχέση 4.4 ότι ένας τυπικός κύκλος στο W , ο οποίος αντιστοιχεί σε μία ανάθεση στο J που ικανοποιεί $n(1 - \varepsilon)$ εξισώσεις, είναι κόστους $(\frac{3n}{2} d (\alpha \frac{L+2}{L} + b) + 4 + \varepsilon)n = (58 + \frac{72}{L} + \varepsilon)n$. Επειδή το L είναι αυθαίρετο, το κόστος αυτού του τυπικού κύκλου για πολύ μεγάλο L γίνεται,

$$(4.5) \quad (58 + \varepsilon)n.$$

Αντίστοιχα, ένας τυπικός κύκλος στο W , ο οποίος αντιστοιχεί σε μία ανάθεση στο J που ικανοποιεί $n(\frac{1}{2} + \varepsilon)$ εξισώσεις, είναι κόστους $(\frac{3n}{2} d (\alpha \frac{L+2}{L} + b) + \frac{9}{2} + \varepsilon)n = (58.5 + \frac{72}{L} + \varepsilon)n$. Επειδή το L είναι αυθαίρετο, το κόστος αυτού του τυπικού κύκλου για πολύ μεγάλο L γίνεται,

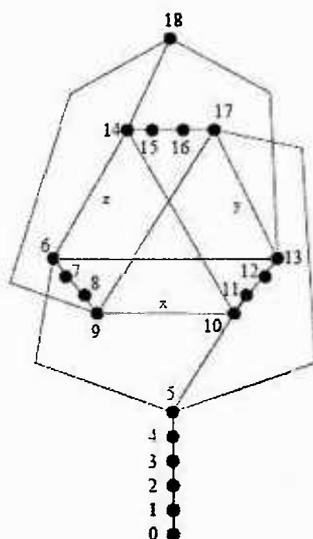
$$(4.6) \quad (58.5 + \varepsilon)n.$$

Έστω, λοιπόν, ότι υπήρχε μια $(\frac{117}{116} - \varepsilon)$ -προσέγγιση για το Α-ΠΙΠΙ. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.3 και τις Σχέσεις 4.5 και 4.6, αν το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton στο W είναι μικρότερο από ή ίσο με $(\frac{117}{116} - \varepsilon)(58 + \varepsilon)n$ που είναι μικρότερο από $(58.5 + \varepsilon)n$, έπεται ότι υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί $n(1 - \varepsilon)$ εξισώσεις. Διαφορετικά, δεν υπάρχει ανάθεση που να ικανοποιεί περισσότερες από $n(\frac{1}{2} + \varepsilon)$ εξισώσεις. Αυτό θα σήμαινε ότι μπορούμε, σε πολυωνυμικό χρόνο, να απαντήσουμε στο πρόβλημα του Θεωρήματος 4.3.1, που είναι NP-hard. Κάτι που με την σειρά του θα σήμαινε ότι $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, που όμως πιστεύουμε ότι δεν ισχύει. \square



4.4 $\frac{220}{219}$ κάτω φράγμα μη προσεγγισιμότητας για το Σ -ΠΠΠΙ

Αντίστοιχα με το Α-ΠΠΠΙ δουλεύουμε και για την περίπτωση του Σ -ΠΠΠΙ. Το εξάρτημα εξίσωσης, που έχει μη κατευθυνόμενες ακμές, φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Το εξάρτημα αυτό είναι το αντίστοιχο της κατασκευής του εξαρτήματος για το Α-ΠΠΠΙ, όπου σ' αυτή την περίπτωση έχουμε αντικαταστήσει καθέναν από τους κόμβους 1,2,3 με ένα μη κατευθυνόμενο μονοπάτι τεσσάρων κόμβων και ο κόμβος 0 έχει αντικατασταθεί από ένα μη κατευθυνόμενο μονοπάτι 6 κόμβων. Όλες οι μη χαρακτηρισμένες ακμές έχουν μήκος $\frac{1}{2}$. Ανάλογα με το Λήμμα 4.3.1 προκύπτει το ακόλουθο λήμμα.



Σχήμα 4.7: Εξάρτημα εξίσωσης

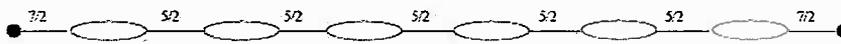
Λήμμα 4.4.1

Για κάθε υποσύνολο S των τριών χαρακτηρισμένων ακμών το ακόλουθο είναι αληθές: Αν ο πληθάνριθμος του S είναι άρτιος αριθμός, τότε το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο 0 στον κόμβο 18, που διασχίζει όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά και ακριβώς τις ακμές του S από τις χαρακτηρισμένες ακμές, είναι ένα μονοπάτι Hamilton και έχει μήκος 18. Διαφορετικά, αν ο πληθάνριθμος του S είναι περιττός αριθμός, τότε το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο 0 στον κόμβο 18 που διασχίζει όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά και ακριβώς τις ακμές του S από τις χαρακτηρισμένες ακμές, έχει μήκος 20.

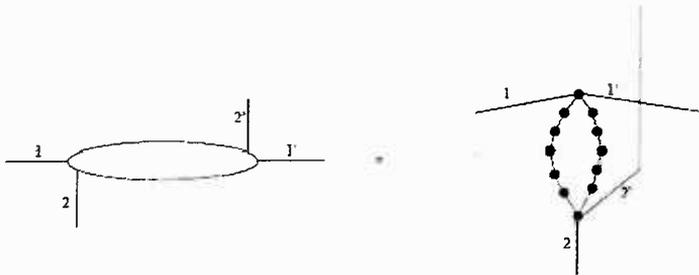
Απόδειξη. Ας έχουμε κατά νου το εξάρτημα εξίσωσης για το Α-ΠΠΠΙ σ' αυτό

το εξάρτημα οι κόμβοι 1,2,3 έχουν αντικατασταθεί από μια τετράδα κόμβων. Παρατηρούμε ότι για το εξάρτημα εξίσωσης οι κόμβοι 10, 17 και 6 είναι κόμβοι εισόδου για τις τετράδες κόμβων, ενώ οι κόμβοι 13, 14 και 9 είναι κόμβοι εξόδου στις τετράδες, όταν οι τετράδες κόμβων πρόκειται να διασχισθούν. Αν βρισκόμαστε στον κόμβο εισόδου για κάποια τετράδα και δεν την διασχίσουμε αλλά την προσπεράσουμε πηγαίνοντας σε οποιοδήποτε άλλο κόμβο εισόδου για κάποια άλλη τετράδα ή στον κόμβο 18, αυτό απαιτεί την διάσχιση όχι μίας αλλά δύο ακμών. Άμεσα, λοιπόν, προκύπτει η απόδειξη ανάλογα με το Λήμμα 4.3.1. \square

Αντίστοιχα τα εξαρτήματα ακμής, για τις χαρακτηρισμένες ακμές, φαίνονται στο Σχήμα 4.8. Τα εξαρτήματα ακμής ξεκινάνε και καταλήγουν σε κάποιους κόμβους του εξαρτήματος εξίσωσης και έχουν συνδεδεμένες σειριακά, με ακμές σύνδεσης, 6 γέφυρες. Η πρώτη και η τελευταία ακμή σύνδεσης έχουν κόστος $\frac{7}{2}$ και όλες οι υπόλοιπες $\frac{5}{2}$. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται η κατασκευή και ο τρόπος ταύτισης δύο γεφυρών. Η ταύτιση γίνεται πάλι με ένα $k \times k$ θ -κανονικό διμερή γράφο, ενώ οι γέφυρες αποτελούνται από $2L$ ακμές και κάθε ακμή στη γέφυρα έχει κόστος $\frac{4}{L}$.



Ένα εξάρτημα ακμής αποτελούμενο από 6 γέφυρες



Μία γέφυρα αποτελούμενη από 2 μονοπάτια L ακμών μήκους $4/L$ το καθένα

Σχήμα 4.8: Εξάρτημα ακμής

Το κόστος ενός οποιοδήποτε επαυξημένου κύκλου περιοδεύοντος πωλητή χωρίζεται στο κόστος εξίσωσης και στο κόστος γεφυρών. Το κόστος εξίσωσης είναι το κόστος διάσχισης των μη χαρακτηρισμένων ακμών στα εξαρτήματα εξίσωσης, στο οποίο προστίθεται κόστος $1/4$ για κάθε ακμή σύνδεσης κόστους $7/2$ που διασχίζεται στα εξαρτήματα ακμής (έτσι ανατίθεται κόστος εξίσωσης

$1/2$ σε κάθε χαρακτηρισμένη ακμή που διασχίζεται συνεπώς, δηλαδή από την μία άκρη ως την άλλη στο εξάρτημα ακμής). Το κόστος γέφυρας προκύπτει αθροιστικά στα εξαρτήματα ακμής από τα κόστη των ακμών σύνδεσης που έχουν διασχισθεί και τα κόστη διάσχισης των κόμβων για κάθε γέφυρα. Στο κόστος γέφυρας αναθέτουμε κόστος $7/2 - 1/4$ στις πρώτες και στις τελευταίες ακμές σύνδεσης στο εξάρτημα ακμής, έτσι ώστε να είμαστε συνεπείς με την ανάθεση κόστους εξίσωσης και κόστους γέφυρας.

Υπάρχουν δύο τυπικοί τρόποι διάσχισης για κάθε γέφυρα. Η μία είναι με είσοδο από την ακμή 1 και έξοδο από την ακμή 1', ενώ η άλλη είναι με είσοδο από την ακμή 2 και έξοδο από την ακμή 2'. Έτσι ένας τυπικός κύκλος (τυπικός κύκλος είναι, όπως προηγούμενα, αυτός που διασχίζει τις χαρακτηρισμένες ακμές με ένα τρόπο που αντιστοιχεί σε κάποια ανάθεση τιμών αληθείας) που αντιστοιχεί σε ανάθεση που δεν ικανοποιεί F εξισώσεις έχει κόστος,

$$\left[\frac{3n}{2} \left(6 \cdot 8 + 5 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) \right) \right] + [9n + F] = \frac{219}{2}n + F.$$

Το κόστος αυτό είναι το κόστος γέφυρας που προκύπτει από την διάσχιση $\frac{3n}{2}$ εξαρτημάτων ακμής, στο οποίο προστίθεται το κόστος εξίσωσης. Το κόστος γέφυρας για κάθε ένα από τα $\frac{3n}{2}$ εξαρτήματα ακμής είναι $6 \cdot 8$ (6 γέφυρες με κόστος ως προς το κόστος γέφυρας $2L \cdot \frac{4}{L} = 8$) $+ 5 \cdot \frac{5}{2}$ (5 μη ακριανές ακμές σύνδεσης στο εξάρτημα ακμής με κόστος ως προς το κόστος γέφυρας $\frac{5}{2}$) $+ 2 \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right)$ (2 ακριανές ακμές σύνδεσης στο εξάρτημα ακμής με κόστος ως προς το κόστος γέφυρας $\frac{7}{2} - \frac{1}{4}$). Από το Λήμμα 4.4.1 και από το γεγονός ότι το κόστος εξίσωσης για κάθε ακμή στο εξάρτημα εξίσωσης είναι $\frac{1}{2}$, προκύπτει ότι το κόστος εξίσωσης είναι 9 για κάθε εξάρτημα εξίσωσης που αντιστοιχεί σε ανάθεση που ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση, και 10 αν η ανάθεση δεν ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση. Συνεπώς το κόστος εξίσωσης είναι $9n$ για όλα τα εξαρτήματα εξίσωσης, στο οποίο προστίθεται κόστος 1 για κάθε εξάρτημα στο οποίο αντιστοιχεί μια ανάθεση που δεν ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση.

Οι μη τυπικοί τρόποι διάσχισης που αντιστοιχούν για είσοδο και έξοδο στις γέφυρες με τα ζεύγη $(1, 2)$, $(1, 2')$, $(1', 2)$, $(1', 2')$ ακμών επιφέρουν ένα επιπλέον ελάχιστο κόστος γέφυρας 4 ως προς αυτό του τυπικού κύκλου. Οι διπλές διασχίσεις, στις οποίες 4 ή περισσότερες ακμές από τις 1, 2, 1', 2' διασχίζονται, επιφέρουν ένα επιπλέον κόστος γέφυρας τουλάχιστον κατά $\frac{5}{2}$ ως προς αυτό του τυπικού κύκλου. Μία τελευταία περίπτωση μη τυπικής διάσχισης είναι η είσοδος και έξοδος σε μία γέφυρα μέσω της ίδιας ακμής. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, στην πρώτη περίπτωση αυτή η ακμή συνδέει δύο γέφυρες. Τότε η γέφυρα στην οποία οδηγούμαστε έχει τουλάχιστον ένα επιπλέον κόστος γέφυρας κατά $\frac{5}{2}$ ως προς αυτό του τυπικού κύκλου. Στην δεύτερη από αυτές περιπτώσεις, η ακμή συνδέει τη γέφυρα με κάποιον κόμβο στο εξάρτημα ακμής. Στην περίπτωση αυτή το τοπικό κόστος τυπικού κύκλου που αντιστοιχεί σε αυτή τη γέφυρα για τις ακμές σύνδεσης είναι $\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} = \frac{9}{2}$, το οποίο είναι το κόστος της πρώτης ή

της τελευταίας ακμής σύνδεσης μειωμένο κατά $\frac{1}{4}$ στο οποίο προστίθεται το μισό κόστος της άλλης ακμής. Ενώ το κόστος γέφυρας διπλής διάσχισης ως προς τις ακμές σύνδεσης είναι $2 \cdot \frac{7}{2}$. Κατά συνέπεια το επιπλέον κόστος αυτού του τύπου διπλής διάσχισης είναι $2 \cdot \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$. Αυτού του τύπου τις ημιδιασχίσεις θα τις καλούμε P . Από αυτά προκύπτει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.4.2

Το κόστος γέφυρας ενός επαυξημένου κύκλου περιοδεύοντος πωλητή είναι μεγαλύτερο από αυτό του τυπικού κύκλου τουλάχιστον κατά $2R + \frac{5}{2}D + \frac{5}{2}P$ όπου R είναι το πλήθος των αναστροφών στις ημιδιασχίσεις διαφορετικές από αυτές του τύπου P , D είναι το πλήθος των διπλών διασχίσεων και P είναι οι ημιδιασχίσεις τύπου P

Θεώρημα 4.4.1

Για κάθε $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ -ΠΠΠ με λόγο $\frac{220}{219} - \varepsilon$, εκτός και αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Απόδειξη. Παρόμοια με το Α-ΠΠΠ δείχνουμε ότι υπάρχει ένας τυπικός κύκλος που είναι ελάχιστος. Η υπόλοιπη απόδειξη είναι και αυτή παρόμοια με αυτή του Α-ΠΠΠ. Το κόστος το οποίο κερδίζουμε στον τυπικό κύκλο είναι,

$$4s_1^T + 4s_2^T + 4s_1^U + 4s_2^U + 2s_1^S + 2s_2^S + \frac{5}{2}(s_1^P + s_2^P) + \frac{5}{2}(T_1, T_2).$$

Το κόστος το οποίο χάνουμε είναι,

$$u_1 + t_2 + s_1^U + s_2^T + s_1^P + s_2^P + \frac{1}{2}(s_1^S + s_2^S).$$

Δεδομένου, πάλι, ότι ο $k \times k$ β-κανονικός διμερής γράφος είναι b -ωθητικός, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.1 και από τον ορισμό του b -ωθητικού γράφου προκύπτει ότι το κέρδος υπερτερεί της απώλειας σε κόστος. Έπεται λοιπόν, ανάλογα με το Α-ΠΠΠ, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Σ -ΠΠΠ με λόγο $\frac{220}{219} - \varepsilon$, εκτός και αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. □

4.5 Η πιθανοτική υποδομή των κάτω φραγμάτων $\frac{117}{116}$ και $\frac{220}{219}$

Όπως είδαμε κατά την ανάπτυξη της κατασκευής του κατάλληλου γράφου, τόσο για το Σ -ΠΠΠ όσο και για το Α-ΠΠΠ, υποθέσαμε ότι ένας $k \times k$ β-κανονικός διμερής γράφος, για αρκετά μεγάλο k , είναι b -ωθητικός. Αυτό όμως μένει να αποδειχθεί. Η απόδειξη είναι πιθανοτική και κάνει χρήση του ακόλουθου λήμματος.



Λήμμα 4.5.1

Για k αρκετά μεγάλο και για κάθε $b \geq 2$, σχεδόν κάθε b -κανονικός διμερής γράφος $2k$ κόμβων έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε υποσύνολο κόμβων U που περιέχεται πλήρως στη μία από τις δύο διαμερίσεις του διμερή γράφου, με $|U| = \alpha k$ και $|N(U)| = \beta k$ (όπου $N(U)$ η γειτονιά του U),

$$(i) \quad 0 \leq \alpha \leq 0.25 \Rightarrow \beta \geq 2\alpha$$

$$(ii) \quad 0.25 \leq \alpha \leq 0.5 \Rightarrow \beta \geq \alpha + 0.25$$

$$(iii) \quad \alpha \geq 0.5 \Rightarrow \beta > 0.5\alpha + 0.5$$

Απόδειξη. Η πιθανότητα κάποιο υποσύνολο κόμβων U , μεγέθους αk , που περιέχεται πλήρως στη μία από τις δύο διαμερίσεις του διμερή γράφου, να έχει το πολύ βk γείτονες είναι το πολύ,

$$P = \binom{k}{\alpha k} \binom{k}{\beta k} \frac{\binom{6\beta k}{6\alpha k}}{\binom{6k}{6\alpha k}}.$$

Αν είναι \tilde{P} η πιθανότητα P αφού χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $\binom{r}{\gamma r} \simeq \left(\frac{1}{\gamma(1-\gamma)^{1-\gamma}}\right)^r$ τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\log \tilde{P}}{k} &= 5\alpha \log(\alpha) + 5(1-\alpha) \log(1-\alpha) - \beta \log(\beta) - \\ &- (1-\beta) \log(1-\beta) - 6\alpha \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 6(\beta-\alpha) \log\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε $\beta = 2\alpha$ στην παραπάνω εξίσωση, τότε η έκφραση αυτή είναι μη αρνητική για $0 \leq \alpha \leq 0.25$. Αντίστοιχα προκύπτουν και τα υπόλοιπα. \square

Στο σημείο αυτό λοιπόν να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο ολοκληρώνει την ανάπτυξη της εργασίας των Papadimitriou και Vempala.

Θεώρημα 4.5.1

Για k αρκετά μεγάλο και για κάθε $b \geq 2$, σχεδόν κάθε b -κανονικός διμερής γράφος $2k$ κόμβων είναι b -ωθητικός.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν διμερή γράφο $2k$ κόμβων, που αποτελείται από τα σύνολα κόμβων V_1 και V_2 . Επίσης, θεωρούμε U_1, S_1, T_1 μία διαμέριση του V_1 , και U_2, S_2, T_2 μία διαμέριση του V_2 , για τις οποίες δεν υπάρχει καμία ακμή που να συνδέει κάποιον κόμβο του U_1 με κάποιον κόμβο του U_2 . Ενώ u_1, s_1, \dots είναι οι αντίστοιχοι πληθάρημοι τους, $n(U) = |N(U)|$ είναι ο πληθάρημος της γειτονιάς ενός συνόλου U και $T = (T_1, T_2)$ είναι το πλήθος των ακμών μεταξύ T_1 και T_2 . Χ.β.γ. θεωρούμε ότι $u_1 + t_2 \leq u_2 + t_1$. Θα αποδείξουμε ότι,

$$(4.7) \quad \left(b + \frac{1}{2}\right)T \geq u_1 + t_2 - \left(b - \frac{1}{2}\right)(s_1 + s_2).$$



Ορίζουμε $H = (b + \frac{1}{2})T - [u_1 + t_2 - (b - \frac{1}{2})(s_1 + s_2)]$ και αρκεί να ισχύει $H \geq 0$. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό,

Ισχυρισμός. Υπάρχει κάποια διαμέριση u_i, s_i, t_i που ελαχιστοποιεί το H για την οποία $T = 0$.

Υποθέτουμε ότι H ελάχιστο και $T > 0$. Τότε, υπάρχει μια ακμή μεταξύ ενός κόμβου w στο T_1 και ενός κόμβου z στο T_2 . Αν αντικαταστήσουμε τον z έτσι ώστε να βρίσκεται στο S_2 ή στο U_2 , τότε το T μειώνεται και το H συνολικά δεν αυξάνει. Θα θεωρήσουμε λοιπόν $T = 0$, αφού το H ελαχιστοποιείται για μια από αυτές τις διαμερίσεις. Εμείς επιθυμούμε να δείξουμε ότι $H \geq 0$ για $b \geq 2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $u_1, t_2 \leq 0.25k$.

Τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.5.1, έχουμε ότι $n(U_1) \geq 2u_1, n(T_2) \geq 2t_2$. Επίσης $s_2 \geq n(U_1) - t_2$ και $s_1 \geq n(T_2) - t_1$, αφού στην γειτονιά του U_1 περιλαμβάνονται τουλάχιστον όλοι οι κόμβοι του V_2 που δεν ανήκουν στο σύνολο U_2 ενώ το ίδιο ισχύει και στην άλλη περίπτωση αφού $T = 0$. Έτσι,

$$\begin{aligned} H &\geq (b - \frac{1}{2})(n(U_1) - t_2 + n(T_2) - u_1) - (u_1 + t_2) \\ &\geq (b - \frac{3}{2})(u_1 + t_2) \geq 0 \quad \text{για } b \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Περίπτωση 2. $u_1, t_2 \geq 0.25k$.

Τότε, και με την βοήθεια του Λήμματος 4.5.1, προκύπτει ότι $u_1, t_2 \leq 0.5k$. Ας υποθέσουμε ότι $u_1 > 0.5k$, τότε $n(U_1) > 0.75k$ και έτσι $u_2 < 0.25k$. Από την άλλη, όμως, $n(T_2) \geq 0.5k$ και έτσι $t_1 \leq 0.5k$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως $u_2 + t_1 < 0.75k \leq u_1 + t_2$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας. Αντίστοιχα εργαζόμαστε και για την περίπτωση που $t_2 > 0.5k$, καταλήγοντας σε άτοπο. Έτσι, από το Λήμμα 4.5.1 έχουμε ότι,

$$u_1 + t_2 \leq u_2 + t_1 \leq 2k - n(U_1) - n(T_2) \leq 1.5k - u_1 - t_2,$$

και έτσι προκύπτει ότι $u_1 + t_2 \leq 0.75k$, και έτσι $s_1 + s_2 \leq 0.5k$. Από τα τελευταία προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} H &\geq (b - \frac{1}{2})(0.5k) - (u_1 + t_2) \\ &\geq \frac{b}{2}k - 0.25k - 0.75k = (\frac{b}{2} - 1)k \geq 0 \quad \text{για } b \geq 2. \end{aligned}$$

Περίπτωση 3. $u_1 \geq 0.25k, t_2 \leq 0.25k$.

Ανάλογη με την περίπτωση αυτή είναι και η περίπτωση που $u_1 \leq 0.25k, t_2 \geq 0.25k$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα 4.5.1 παίρνουμε ότι $n(T_2) \geq 2t_2$. Υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε.



Υποπερίπτωση 3α. $u_1 \leq 0.5k$.

Από το Λήμμα 4.5.1 έχουμε ότι $n(U_1) \geq u_1 + 0.25k$. Έτσι,

$$\begin{aligned} H &\geq (b - \frac{1}{2})(n(U_1) - t_2 + \max\{0, n(T_2) - u_1\}) - (u_1 + t_2) \\ &\geq (b - \frac{1}{2})(u_1 + 0.25k - t_2) + (b - \frac{1}{2})\max\{0, n(T_2) - u_1\} - (u_1 + t_2). \end{aligned}$$

Τώρα αν $u_1 \geq 2t_2$ τότε,

$$\begin{aligned} H &\geq 0.25k(b - \frac{1}{2}) + (b - \frac{3}{2})u_1 - (b + \frac{1}{2})t_2 \\ &\geq 0.25k(b - \frac{1}{2}) - (\frac{7}{2} - b)t_2 \\ &\geq \min\{(\frac{b}{2} - 1)k, 0.25(b - \frac{1}{2})k\}. \end{aligned}$$

Αν $u_1 < 2t_2$ τότε,

$$\begin{aligned} H &\geq 0.25(b - \frac{1}{2})k + (b - \frac{3}{2})t_2 - u_1 \\ &\geq 0.25(b - \frac{1}{2})k - (\frac{7}{4} - \frac{b}{2})u_1 \\ &\geq \min\{(\frac{b}{2} - 1)k, 0.25(b - \frac{1}{2})k\}. \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι $H \geq 0$ για $b \geq 2$.

Υποπερίπτωση 3β. $u_1 > 0.5k$.

Από το Λήμμα 4.5.1 έχουμε ότι $n(U_1) \leq \frac{u_1}{2} + \frac{1}{2}k$. Επίσης,

$$u_1 + t_2 \leq u_2 + t_1 \leq 2k - u_1 - n(U_1) \leq \frac{3}{2}k - \frac{3u_1}{2} \leq \frac{3}{4}k.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} H &\geq (b - \frac{1}{2})(n(U_1) - t_2) - (u_1 + t_2) \\ &\geq (b - \frac{1}{2})(\frac{u_1}{2} + \frac{1}{2}k - t_2) - (u_1 + t_2) \\ &\geq \frac{b}{2}k - \frac{1}{4}k - (\frac{5}{4} - \frac{b}{2})u_1 - (b + \frac{1}{2})t_2. \end{aligned}$$

Αν $b \leq \frac{5}{2}$ τότε,



$$\begin{aligned} H &\geq \frac{b}{2}k - \frac{1}{4}k - \left(\frac{5}{4} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{3}{4-t_2}\right) - \left(b + \frac{1}{2}\right)t_2 \\ &\geq \frac{7b}{8}k - \frac{19}{16}k - \left(\frac{3b}{2} - \frac{3}{4}\right)t_2 \geq \left(\frac{b}{2} - 1\right)k. \end{aligned}$$

Αν $b > \frac{5}{2}$ τότε,

$$H \geq \frac{b}{2}k - \frac{1}{4}k - \left(b + \frac{1}{2}\right)t_2 \geq \frac{b}{4}k - \frac{3}{8}k.$$

Οπότε πάλι ισχύει ότι $H \geq 0$ για $b \geq 2$.

□





Κεφάλαιο 5

Γραμμικός Προγραμματισμός και το ΠΠΠ

5.1 Γραμμικός Προγραμματισμός και Προσεγγισιμότητα

Την τελευταία δεκαετία υπάρχει μία νέα κατεύθυνση στην προσεγγισιμότητα των προβλημάτων βελτιστοποίησης που έχει παράγει πλούσιο θεωρητικό έργο και σημαντικά αποτελέσματα. Σύμφωνα μ' αυτή την κατεύθυνση, κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να εκφραστεί σαν πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού ή απλά Ακέραιο Πρόγραμμα (ΑΠ) και επομένως η λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης μπορεί να αναζητηθεί μέσω της λύσης ενός ΑΠ. ΑΠ είναι το πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας γραμμικής¹ συνάρτησης, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το \mathbb{Z} , την οποία ονομάζουμε αντικειμενική συνάρτηση και η οποία υπόκειται σε κάποιους γραμμικούς περιορισμούς των μεταβλητών της συνάρτησης. Δηλαδή αν $c \in \mathbb{R}^n$, x ένα διάνυσμα n μεταβλητών, A ένας $k \times n$ πίνακας και b ένα διάνυσμα k τιμών, τότε οποιοδήποτε στιγμιότυπο ενός ΑΠ ελαχιστοποίησης στην γενική του μορφή περιγράφεται ως εξής,

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{δεδομένου ότι,} \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x, \text{ ακέραιο διάνυσμα} \end{aligned}$$

Το ΑΠ, ως προς το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης, μπορεί να πάρει

¹Γραμμική είναι μια πολυωνυμική έκφραση μεταβλητών πρώτου βαθμού, δηλαδή μια πολυωνυμική έκφραση που για κάθε όρο του πολυωνύμου το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών είναι το πολύ ένα.



διάφορες μορφές ανάλογα με τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση που θεωρούμε. Το πρώτο λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε, είναι να επιλέξουμε το κατάλληλο ΑΠ επιλέγοντας τους κατάλληλους περιορισμούς και την κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό όμως δεν είναι το μόνο ζήτημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε. Ένα σημαντικότερο ζήτημα είναι πως για τα ΑΠ δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα επιλύει. Το τελευταίο αντιμετωπίζεται αρχικά με την χαλάρωση του ΑΠ και με μία μετέπειτα μέθοδο στρογγυλοποίησης. Σύμφωνα με την χαλάρωση του ΑΠ, αφαιρούμε τον περιορισμό που απαιτεί το διάνυσμα x να είναι ακέραιο και έτσι προκύπτει το αντίστοιχο Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ). Ένα ΓΠ στην γενική του μορφή περιγράφεται όπως και το ΑΠ, αλλά χωρίς τον περιορισμό της ακεραιότητας του διανύσματος x . Ο λόγος για τον οποίο χαλαρώνουμε το ΑΠ είναι, πως γνωρίζουμε, ότι για το ΓΠ υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που το επιλύει, ο αλγόριθμος αυτός είναι ο αλγόριθμος του ελλειψοειδούς που προτάθηκε από τον L. G. Khachian [16]. Λύνοντας, λοιπόν, το ΓΠ αποκτάμε μια λύση \bar{x} η οποία όμως συνήθως είναι ένα μη ακέραιο διάνυσμα και άρα, στην περίπτωση αυτή, δεν είναι λύση του αρχικού ΑΠ. Στο σημείο λοιπόν αυτό, και αν η λύση δεν είναι ακέραια, εφαρμόζουμε στρογγυλοποίηση επί της λύσης \bar{x} . Δεν πρέπει να συγχέει κανείς την έννοια της στρογγυλοποίησης με την κλασική έννοια που γνωρίζουμε, αλλά με την έννοια στρογγυλοποίηση εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση, η οποία δεδομένου ενός διανύσματος με τιμές στο \mathbb{R}^n παράγει ένα διάνυσμα με τιμές στο \mathbb{Z}^n . Για παράδειγμα η κλασική στρογγυλοποίηση για ένα διάνυσμα που γνωρίζουμε ορίζεται από την συνάρτηση $f((x_1, x_2, \dots, x_k)) = ([2x_1], [2x_2], \dots, [2x_k])$. Προφανώς, η μέθοδος στρογγυλοποίησης δεν μας παρέχει την ακριβή λύση του ΑΠ, αλλά μία προσέγγιση της. Η μέθοδος στρογγυλοποίησης δεν προκύπτει άμεσα αλλά αντίθετα σε αρκετές περιπτώσεις είναι πολύ δύσκολο να οριστεί, αφού οφείλει το διάνυσμα που παράγεται από αυτή να ικανοποιεί τους περιορισμούς και να επιτυγχάνει έναν ικανοποιητικό λόγο προσέγγισης. Υπάρχουν μάλιστα προβλήματα για τα οποία δεν έχει βρεθεί μέθοδος στρογγυλοποίησης που να επιτυγχάνει ικανοποιητικό λόγο προσέγγισης, ένα τέτοιο πρόβλημα είναι και το ΠΠΠ.

Σημαντική παράμετρος σ' αυτή την κατεύθυνση είναι το χάσμα ακεραιότητας ή ο λόγος ακεραιότητας. Για κάποιο στιγμιότυπο, αν x^* είναι η λύση του ΑΠ και \bar{x} είναι η λύση του αντίστοιχου ΓΠ, τότε χάσμα ακεραιότητας είναι η διαφορά του \bar{x} από το x^* και λόγος ακεραιότητας είναι ο λόγος $\gamma = \frac{x^*}{\bar{x}}$. Συνολικά, για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και το ΑΠ που προτείνεται, λέμε πως λόγος ακεραιότητας είναι εκείνη η τιμή, για την οποία ο λόγος ακεραιότητας του κάθε στιγμιότυπου είναι μικρότερος από ή ίσος με αυτή την τιμή. Είναι σημαντικό πως ο λόγος ακεραιότητας είναι ανεξάρτητος από την μέθοδο στρογγυλοποίησης αλλά είναι ένα εγγενώς χαρακτηριστικό του ΑΠ που επιλέγεται. Ο τρόπος για να υπολογιστεί ακριβώς αυτός ο λόγος, για το πρόβλημα και το ΑΠ που προτείνεται, είναι να ταυτιστεί κάποιο πάνω με κάποιο κάτω φράγμα του. Ένα κάτω φράγμα συνήθως υπολογίζεται με την κατασκευή κατάλληλου στιγμιότυπου, ενώ ένα πάνω φράγμα συνήθως υπολογίζεται με κάποια κατάλληλη



μέθοδο στρογγυλοποίησης ή και με άλλες μεθόδους.

Επίσης, ο λόγος ακεραιότητας μας παρέχει ένα φράγμα για την προσέγγιση που μπορούμε να επιτύχουμε ως προς οποιαδήποτε μέθοδο στρογγυλοποίησης. Δεδομένου ότι x^* είναι η λύση για κάποιο στιγμιότυπο του ΑΠ και \bar{x} είναι η λύση του αντίστοιχου ΓΠ που προκύπτει από χαλάρωση επί του ΑΠ, έχουμε ότι $\bar{x} \leq x^*$. Αν, τώρα, x είναι η λύση που παίρνουμε από κάποια μέθοδο στρογγυλοποίησης τότε ο λόγος προσέγγισης που επιτυγχάνει είναι $\rho \leq \frac{x}{x^*} \leq \frac{\bar{x}}{x^*}$ για κάθε στιγμιότυπο. Όμως ισχύει ότι $\frac{\bar{x}}{x^*} \geq \frac{x^*}{\bar{x}} \geq \gamma$, για κάθε στιγμιότυπο, και άρα το γ αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τον λόγο προσέγγισης για μία οποιαδήποτε μέθοδο στρογγυλοποίησης. Κατά συνέπεια, ο λόγος ακεραιότητας ενός ΑΠ για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τον λόγο προσέγγισης του προβλήματος μέσω του συγκεκριμένου ΑΠ.

Όπως θα περίμενε κανείς η προσεγγιστικές αυτές λύσεις είναι πολλές φορές σε αντιστοιχία με τις προσεγγιστικές λύσεις που έχουμε από αλγορίθμους που δεν προέρχονται από τον χώρο του Γραμμικού Προγραμματισμού. Κατά συνέπεια τα αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας που προκύπτουν από τον λόγο ακεραιότητας πιστεύουμε πως χαρακτηρίζουν συνολικά τα αντίστοιχα προβλήματα, όταν το ΑΠ αντιπροσωπεύει την δυσκολία του αντίστοιχου προβλήματος. Δηλαδή, σ' αυτή την περίπτωση, ο λόγος ακεραιότητας για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αποτελεί ένα κάτω φράγμα προσεγγισιμότητας συνολικά για το πρόβλημα.

5.2 Το ΑΠ για το Σ-ΠΠΠ και το Α-ΠΠΠ και το αντίστοιχο Held-Karp φράγμα

Πρώτοι οι Held και Karp ακολούθησαν την κατεύθυνση του Γραμμικού Προγραμματισμού για την επίλυση του Σ-ΠΠΠ, παρέχοντας σημαντικά αποτελέσματα, με τις εργασίες τους στα [18] και [19]. Οι Held και Karp, μεταξύ άλλων, πρότειναν ένα ΑΠ και διάφορες μορφές ΓΠ, ισοδύναμων με αυτό που προκύπτει από την χαλάρωση του ΑΠ. Και αυτό γιατί την εποχή εκείνη δεν ήταν γνωστός ο αλγόριθμος του ελλειψοειδούς. Έτσι οι συγγραφείς με τα διάφορα ισοδύναμα ΓΠ προσπάθησαν και επέτυχαν να βρουν το κατάλληλο για το οποίο υπάρχει μία μέθοδο λύσης πολυωνυμικού χρόνου. Σήμερα δεν θεωρούμε την μέθοδο των Held και Karp αλλά την μέθοδο του ελλειψοειδούς για την λύση του Γ-Π. Όμως στην βιβλιογραφία, λόγω του ότι ήταν πρώτοι αυτοί που πρότειναν σαφώς αυτή την κατεύθυνση, η λύση του ΓΠ που προκύπτει από την χαλάρωση του ΑΠ τόσο για το Σ-ΠΠΠ όσο και για το Α-ΠΠΠ συμβολίζεται ως HK και αναφέρεται ως Held-Karp φράγμα.

Ας δούμε, όμως, πως το Σ-ΠΠΠ μπορεί να περιγραφεί σαν ένα ΑΠ. Αρχικά θα διατυπώσουμε κάποιους απαραίτητους ορισμούς. Έτσι, για κάποιον γράφο $G(V, E)$ και την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους, θεωρούμε ότι x_e είναι μια μεταβλητή που αντιστοιχεί στην ακμή $e \in E$, η οποία μπορεί να πάρει την



τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν η αντίστοιχη ακμή συμπεριλαμβάνεται ή όχι (που σκόπιμα δεν λέμε διαδρομή γιατί αυτό που προκύπτει από μια ανάθεση δεν είναι οπωσδήποτε κάποια διαδρομή). Θεωρούμε ότι c_e είναι η τιμή κόστους της αντίστοιχης ακμής e . Θεωρούμε ότι $\delta(v)$ είναι το σύνολο των ακμών που το ένα άκρο τους είναι ο κόμβος v , δηλαδή $\delta(v) = \{ \{u, v\} \in E : u \in V \}$, αντίστοιχα θεωρούμε ότι $\delta(S)$, όπου $\emptyset \subset S \subset V$, είναι το σύνολο των ακμών που έχουν σαν ένα άκρο κάποιον κόμβο στο S και το άλλο άκρο κάποιον κόμβο που ανήκει στο συμπλήρωμα του S ως προς το V , δηλαδή $\delta(S) = \{ \{u, v\} \in E : u \in S, v \in V \setminus S \}$. Τέλος θεωρούμε ότι $x(T)$, όπου $T \subseteq E$, είναι το άθροισμα που προκύπτει για τις μεταβλητές x_e που αντιστοιχούν στις ακμές του T , δηλαδή $x(T) = \sum_{e \in T} x_e$. Κάθε στιγμιότυπο, λοιπόν, του Σ -ΠΠΠ για κάποιον γράφο $G(V, E)$ και κάποια συνάρτηση κόστους c περιγράφεται από το ακόλουθο ΑΠ,

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

δεδομένου ότι,

- (i) $x(\delta(v)) = 2$, για κάθε $v \in V$
- (ii) $x(\delta(S)) \geq 2$, για κάθε $\emptyset \neq S \neq V$
- (iii) $0 \leq x_e \leq 1$, για κάθε $e \in E$
- (iv) x , ακέραιο διάνυσμα

ΑΠ του Σ -ΠΠΠ

Σ' αυτό το ΑΠ θέλουμε μια μεταβλητή x_e να παίρνει την τιμή 0 ή 1, αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (iii) και (iv). Ενώ, αυτό που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι το άθροισμα του κόστους εκείνων των ακμών, που ως προς την ανάθεση τιμών του διανύσματος x , έχουν την τιμή 1. Αν δηλαδή έχουμε αναθέσεις που αντιστοιχούν σε κύκλους Hamilton, τότε προσπαθούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος για κάποιον κύκλο Hamilton που είναι και η λύση του αντίστοιχου Σ -ΠΠΠ. Όμως μια ανάθεση, που υπόκειται στους περιορισμούς αυτού του ΑΠ, αντιστοιχεί σε κάποιον κύκλο Hamilton. Ο κύκλος Hamilton, δεδομένου ότι για κάθε ακμή η αντίστοιχη τιμή είναι 0 ή 1, εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (i) και (ii). Ο περιορισμός (i) εξασφαλίζει ότι κάθε κόμβος θα έχει βαθμό 2 και κατά συνέπεια η ανάθεση στο διάνυσμα x θα αντιστοιχεί σε κάποιον κύκλο Hamilton ή κάποια ένωση ανά δύο ξένων κύκλων των οποίων η ένωση των κόμβων τους είναι το σύνολο V . Άρα θα αρκούσε ένας περιορισμός ο οποίος θα απέκλειε να υπάρχει η ένωση των ανά δύο ξένων κύκλων, θα απέκλειε δηλαδή την περίπτωση να σχηματίζεται κύκλος για κάθε γνήσιο υποσύνολο του V . Ο περιορισμός αυτός είναι ο (ii) και εξασφαλίζει ότι για κάθε μη κενό γνήσιο υποσύνολο S του V υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακμές προς τους κόμβους εκτός του S και κατά συνέπεια δεν σχηματίζεται κύκλος για τους κόμβους του S .

Ανάλογα προς το Σ -ΠΠΠ, κάθε στιγμιότυπο του Α-ΠΠΠ για κάποιον γράφο $G(V, E)$ και κάποια συνάρτηση κόστους c περιγράφεται από το ακόλουθο ΑΠ,



$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

δεδομένου ότι,

- (i) $x(\delta^+(v)) = 1$, για κάθε $v \in V$
- (ii) $x(\delta^-(v)) = 1$, για κάθε $v \in V$
- (iii) $x(\delta^+(S)) \geq 1$, για κάθε $\emptyset \neq S \neq V$
- (iv) $0 \leq x_e \leq 1$, για κάθε $e \in E$
- (v) x , ακέραιο διάλυμα

ΑΠ του Α-ΠΠΠ

Οι νέοι συμβολισμοί που συναντάμε εδώ είναι τα $\delta^+(v)$, $\delta^-(v)$ και $\delta^+(S)$. Οι συμβολισμοί αυτοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς του Σ-ΠΠΠ, δηλαδή $\delta^+(v) = \{(v, u) \in E : u \in V\}$, $\delta^-(v) = \{(u, v) \in E : u \in V\}$ και $\delta^+(S) = \{(v, u) \in E : v \in S, u \in V \setminus S\}$, αν $\emptyset \subset S \subset V$. Αντίστοιχα προς το ΑΠ του Σ-ΠΠΠ οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε ανάθεση που υπόκειται στους περιορισμούς θα είναι κύκλος Hamilton και κατά συνέπεια το ΑΠ του Α-ΠΠΠ υπολογίζει το ελάχιστο κόστος για κάποιον κύκλο Hamilton.



Αφού είδαμε τα ΑΠ τόσο για το Σ-ΠΠΠ όσο και για το Α-ΠΠΠ, ας δούμε τα ΓΠ που προκύπτουν από την χαλάρωση του ακέραιου περιορισμού για αυτά. Αυτό που διαφοροποιεί αυτά τα ΑΠ από τα αντίστοιχα ΓΠ είναι πως στην πρώτη περίπτωση οι μεταβλητές παίρνουν μόνο τις τιμές 0 ή 1, ενώ στην δεύτερη παίρνουν τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Επίσης, στην πρώτη περίπτωση δεν μπορούμε να βρούμε την λύση σε πολυωνυμικό χρόνο ενώ στην δεύτερη μπορούμε, χωρίς φυσικά οι δύο λύσεις να ταυτίζονται στις περισσότερες των περιπτώσεων (αν και μικρή σημασία έχει γνωρίζουμε πως για το Σ-ΠΠΠ οι δύο λύσεις ταυτίζονται για $n \leq 5$). Επίσης, επειδή σε κάθε περίπτωση το ΓΠ προκύπτει από χαλάρωση επί του ΑΠ, έχουμε ότι η λύση του ΓΠ είναι ένα κάτω φράγμα για την λύση του ΑΠ, γι' αυτό άλλωστε και η λύση του ΓΠ καλείται και Held-Karp φράγμα. Τα αντίστοιχα λοιπόν ΓΠ για το Σ-ΠΠΠ και για το Α-ΠΠΠ που προκύπτουν από την χαλάρωση είναι,

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

δεδομένου ότι,

- (i) $x(\delta(v)) = 2$, για κάθε $v \in V$
- (ii) $x(\delta(S)) \geq 2$, για κάθε $\emptyset \neq S \neq V$
- (iii) $0 \leq x_e \leq 1$, για κάθε $e \in E$

ΓΠ του Σ-ΠΠΠ



$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

δεδομένου ότι,

- (i) $x(\delta^+(v)) = 1$, για κάθε $v \in V$
- (ii) $x(\delta^-(v)) = 1$, για κάθε $v \in V$
- (iii) $x(\delta^+(S)) \geq 1$, για κάθε $\emptyset \neq S \neq V$
- (iv) $0 \leq x_e \leq 1$, για κάθε $e \in E$

ΓΠ του Α-ΠΠΠ

Κάποιος εύστοχα μπορεί να παρατηρήσει ότι, παρόλο που για τα ΓΠ υπάρχει πολυωνυμική μέθοδος λύσης, οι περιορισμοί του ΓΠ τόσο για το Σ-ΠΠΠ όσο και για το Α-ΠΠΠ έχουν εκθετικό μέγεθος. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με έναν πολυωνυμικού χρόνου διαχωρισμό των περιορισμών [17] και κρατάμε το θεωρητικό αποτέλεσμα ότι το ΓΠ, που προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις από την χαλάρωση, λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του αρχικού στιγμιότυπου.

Συνοψίζοντας, αν έχουμε ένα στιγμιότυπο του ΠΠΠ (αναφερόμενοι τόσο στο Σ-ΠΠΠ όσο και στο Α-ΠΠΠ) τότε αυτό μπορεί να περιγραφεί από ένα αντίστοιχο ΑΠ, το οποίο δεν μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Όμως για το ΑΠ προκύπτει με χαλάρωση το αντίστοιχο ΓΠ, που λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Η βέλτιστη λύση του ΓΠ, που συμβολίζουμε HK και ονομάζουμε Held-Karp φράγμα, είναι ένα κάτω φράγμα για τη βέλτιστη λύση του ΑΠ, και άρα το HK είναι ένα κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση του ΑΠ. Δηλαδή, αν C^* είναι η βέλτιστη λύση για το ΑΠ (αλλά και το ΠΠΠ), τότε έχουμε ότι $HK \leq C^*$. Μέχρι σήμερα δεν έχει προταθεί κάποια μέθοδος στρογγυλοποίησης για το Σ-ΠΠΠ ή για το Α-ΠΠΠ. Όμως έχουμε άνω και κάτω φράγματα για τον λόγο ακεραιότητας, τα οποία όμως δεν ταυτίζονται με αποτέλεσμα να κάνουμε εικασίες. Μολονότι δεν έχουμε υπολογίσει ακριβώς τον λόγο ακεραιότητας, τα κάτω φράγματα του λόγου ακεραιότητας σημαίνουν ότι δεν μπορεί να βρεθεί μέθοδος στρογγυλοποίησης με καλύτερο λόγο προσέγγισης από τον λόγο ακεραιότητας. Αλλά και γενικότερα, επειδή πιστεύουμε ότι τα ΑΠ που έχουν προταθεί για το Σ-ΠΠΠ και το Α-ΠΠΠ αντιπροσωπεύουν την δυσκολία του Σ-ΠΠΠ και του Α-ΠΠΠ αντίστοιχα, τα κάτω φράγματα για τον λόγο ακεραιότητας του Σ-ΠΠΠ και του Α-ΠΠΠ θεωρούνται και κάτω φράγματα για την προσεγγισιμότητα του ΠΠΠ. Επίσης πιστεύουμε ότι για το Σ-ΠΠΠ ο λόγος ακεραιότητας είναι $4/3$.

5.3 Ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ για το Σ-ΠΠΠ

Για τον λόγο ακεραιότητας του Σ-ΠΠΠ υπάρχει η εικασία σύμφωνα με την οποία ο λόγος ακεραιότητας για το Σ-ΠΠΠ είναι ακριβώς $4/3$. Η εικασία αυτή αποτελεί ισχυρή πεποίθηση της επιστημονικής κοινότητας, η οποία μάλιστα επιβεβαιώνεται και από τα πειραματικά δεδομένα. Παρ' όλα αυτά δεν παύει να αποτελεί μια εικασία, που μένει να αποδειχθεί, χωρίς να είναι ένα θεωρητικό



αποτελεσμα. Τα θεωρητικά αποτελέσματα που έχουμε είναι αυτά σύμφωνα με τα οποία ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ που έχει προταθεί για το Σ-ΠΠΠ είναι άνω φραγμένος από το $3/2$ και κάτω φραγμένος από τα $4/3$.

Το άνω φράγμα, $3/2$, για τον λόγο ακεραιότητας αποδείχτηκε πρώτα από τον Wolsey στην εργασία του στο [20] και αργότερα από τους Shmoys και Williamson στην εργασία τους στο [21]. Οι Shmoys και Williamson στην εργασία τους αποδεικνύουν ότι ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ που έχει προταθεί για το Σ-ΠΠΠ είναι άνω φραγμένος από τα $3/2$. Το βασικό αντικείμενο της εργασίας τους αυτής ήταν πως το Held-Karp φράγμα έχει μία ιδιότητα μονοτονικότητας.

Θεώρημα 5.3.1

Εστω $G(V, E)$ ένας μη κατευθυνόμενος γράφος, c μια συνάρτηση κόστους με την τριγωνική ιδιότητα και HK το Held-Karp φράγμα για αυτό το στιγμιότυπο. Τότε για κάθε $O \subseteq V$, αν είναι HK_O το Held-Karp φράγμα για τον γράφο και την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους που ορίζουν οι κόμβοι O , έπεται ότι $HK_O \leq HK$

Αυτή η ιδιότητα μονοτονικότητας, με δύο επιπλέον επισημάνσεις, οδηγεί στο άνω φράγμα, για τον λόγο ακεραιότητας, που θέλουμε.

Την πρώτη επισημάνση την βρίσκει κανείς στην εργασία των Held και Karp [18]. Σύμφωνα μ' αυτή την επισημάνση, για ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο του Σ-ΠΠΠ, το Held-Karp φράγμα είναι κάτω φραγμένο από το κόστος του ελάχιστου 1-δέντρου για το στιγμιότυπο.

Ορισμός 5.3.1

Εστω ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$ και μια συνάρτηση κόστους c . Τότε ένα 1-δέντρο είναι ένα δέντρο επικάλυψης για τους κόμβους $\{2, \dots, |V|\}$ και δύο ακμές που έχουν ως ένα άκρο τον κόμβο 1. Ελάχιστο 1-δέντρο T μεταξύ όλων των δυνατών 1-δέντρων T' είναι αυτό που έχει το ελάχιστο κόστος, δηλαδή ελάχιστο 1-δέντρο είναι το T για το οποίο ισχύει $c(T) \leq c(T')$ για κάθε 1-δέντρο T' .

Να σημειώσουμε πως το ελάχιστο 1-δέντρο υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αρκεί να υπολογίσουμε το ελάχιστο δέντρο επικάλυψης για τους κόμβους $\{2, \dots, |V|\}$ και να συμπεριλάβουμε τις δύο μικρότερου κόστους ακμές που έχουν σαν ένα άκρο τον κόμβο 1 και το άλλο άκρο είναι ένας από τους κόμβους $\{2, \dots, |V|\}$.

Επίσης, ένας κύκλος Hamilton είναι ένα 1-δέντρο, ενώ το ελάχιστο 1-δέντρο δεν είναι πάντα ένας κύκλος Hamilton. Αλλά, αυτό που παρατηρούμε είναι πως αν θεωρήσουμε κάποιο πραγματικό διάνυσμα $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ και ορίσουμε μια νέα συνάρτηση κόστους την $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \pi_i + \pi_j$ (εύκολα προκύπτει ότι και για την \bar{c}_{ij} ισχύει η τριγωνική ιδιότητα αφού $\bar{c}_{ij} \leq \bar{c}_{ik} + \bar{c}_{kj}$ για κάθε i, j, k), τότε για αυτή τη νέα συνάρτηση κόστους το ελάχιστο 1-δέντρο μπορεί να μην είναι το ίδιο, ενώ ο ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι πάντα ο ίδιος. Ο



ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι πάντα ο ίδιος ανεξάρτητα του πραγματικού διανύσματος και της αντίστοιχης νέας συνάρτησης κόστους, αφού το κόστος ενός οποιοδήποτε κύκλου Hamilton S , για την νέα συνάρτηση κόστους, θα είναι $\sum_{\{i,j\} \in S} \bar{c}_{ij} = \sum_{\{i,j\} \in S} c_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n \pi_i$. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει και για το ελάχιστο 1-δέντρο, αφού για να ισχύει θα έπρεπε όλα τα 1-δέντρα να έχουν τον ίδιο βαθμό σε κάθε κόμβο δεδομένου ότι το κόστος ενός οποιοδήποτε 1-δέντρου T είναι $\sum_{\{i,j\} \in T} \bar{c}_{ij} = \sum_{\{i,j\} \in T} c_{ij} + \sum_{i=1}^n \pi_i d(i)$, όπου $d(i)$ ο βαθμός του κόμβου i στο 1-δέντρο T .

Το ερώτημα, λοιπόν, που προκύπτει είναι αν υπάρχει πραγματικό διάνυσμα για το οποίο το ελάχιστο 1-δέντρο συμπίπτει με τον ελάχιστο κύκλο Hamilton. Και σύμφωνα με το ερώτημα αυτό προέκυψε, ως συνάρτηση του πραγματικού διανύσματος π , η διαφορά του κόστους του ελάχιστου 1-δέντρου από το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton. Αν $\{T_k\}_{k \in \{1, \dots, p\}}$ είναι μια απαρίθμηση όλων των δυνατών 1-δέντρων, τότε η συνάρτηση αυτή είναι η ,

$$f(\pi) = W + 2 \sum_{i=1}^n \pi_i - \min_k [c_k + \sum_{i=1}^n \pi_i d_k(i)],$$

όπου W είναι το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton για το αρχικό στιγμιότυπο (αφού ο ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι πάντα ο ίδιος), c_k είναι το κόστος των ακμών του αντίστοιχου T_k δέντρου και $d_k(i)$ είναι ο βαθμός του i κόμβου στο αντίστοιχο T_k δέντρο. Η συνάρτηση $f(\pi)$ μπορεί να γραφεί καλύτερα και ως,

$$f(\pi) = W - \min_k [c_k + \sum_{i=1}^n \pi_i v_i(k)],$$

όπου $v_i(k) = d_i(k) - 2$. Αυτό που επιθυμούμε είναι να δούμε αν υπάρχει πραγματικό διάνυσμα π' για το οποίο $f(\pi') = 0$. Όμως, επειδή το κόστος του ελάχιστου 1-δέντρου είναι μικρότερο ή ίσο του κόστους του ελάχιστου κύκλου Hamilton, ισχύει ότι $f(\pi) \geq 0$. Κατά συνέπεια, για να δούμε αν η συνάρτηση $f(\pi)$ γίνεται μηδενική για κάποιο π , μελετάμε με τι ισούται το ελάχιστο της $f(\pi)$ και ισοδύναμα μελετάμε την ποσότητα $\max_{\pi} w(\pi)$, όπου $w(\pi) = \min_k [c_k + \sum_{i=1}^n \pi_i v_i(k)]$. Μελετώντας την ποσότητα $\max_{\pi} w(\pi)$ οι Held και Karp απέδειξαν ότι η ποσότητα αυτή ισούται με το Held-Karp φράγμα. Αν HK είναι το Held-Karp φράγμα τότε από την ισότητα αυτή, και για $\pi = 0$, ισχύει ότι $HK = \max_{\pi} w(\pi) \geq w(0) = \min_k c_k$. Δηλαδή το Held-Karp φράγμα είναι κάτω φραγμένο από το κόστος του ελάχιστου 1-δέντρου.

Η δεύτερη επισήμανση είναι πως για οποιοδήποτε στιγμιότυπο του Σ -ΠΠΠ, αν M είναι το ελάχιστο κόστος πλήρους ταιριάσματος τότε αυτό φράσσεται από κάποια έκφραση του Held-Karp φράγματος.

Λήμμα 5.3.1

Έστω ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$, με άρτιο πλήθος κόμβων, και c η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους με την τριγωνική ιδιότητα. Αν HK είναι



το Held-Karp φράγμα για αυτό το στιγμιότυπο και M είναι το κόστος του ελάχιστου πλήρους ταιριάσματος τότε ισχύει ότι $M \leq \frac{1}{2}HK$.

Απόδειξη. Ένα από τα ΓΠ, που πρότειναν οι Held και Karp για το Σ-ΠΠΠ και είναι ισοδύναμο με αυτό που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, είναι το εξής,

$$\min \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_{ij}$$

δεδομένου ότι,

$$(i) \sum_{j>i} x_{ij} + \sum_{j<i} x_{ji} = 2, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1, \text{ για κάθε } \emptyset \subset S \subset V$$

$$(iii) 0 \leq x_{ij} \leq 1, \text{ για κάθε } 1 \leq i < j \leq n$$

Για την ισοδυναμία να πούμε ότι οι υπόλοιποι εκτός από τον περιορισμό (ii) είναι ίδιοι με το ΓΠ που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, ενώ ο περιορισμός (ii) εξασφαλίζει ότι για την ανάθεση ακμών δεν θα υπάρχουν ανά δύο ξένοι κύκλοι.

Αν \bar{x} είναι μια βέλτιστη λύση της παραπάνω φόρμουλας ΓΠ του Σ-ΠΠΠ, τότε το διάνυσμα $\frac{1}{2}\bar{x}$ ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς,

$$(i) \sum_{j>i} x_{ij} + \sum_{j<i} x_{ji} = 1, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq \frac{1}{2}(|S| - 1), \text{ για κάθε } \emptyset \subset S \subset V, |S| \geq 3, |S| \text{ άρτιος}$$

$$(iii) 0 \leq x_{ij} \leq 1, \text{ για κάθε } 1 \leq i < j \leq n$$

Όμως οι περιορισμοί αυτοί είναι οι περιορισμοί του ΓΠ του πλήρους ταιριάσματος σύμφωνα με την εργασία του Edmonds [22]. Ενώ η αντικειμενική συνάρτηση στο ΓΠ που πρότεινε ο Edmonds, προφανώς, είναι η ίδια με αυτή του ΓΠ του Σ-ΠΠΠ. Κατά συνέπεια αφού η λύση $\frac{1}{2}\bar{x}$ είναι εφικτή λύση για το ΓΠ του πλήρους ταιριάσματος προκύπτει ότι $M \leq \frac{1}{2}HK$ \square

Με βάση τις δύο επισημάνσεις και το Θεώρημα 5.3.1, το άνω φράγμα για τον λόγο ακεραιότητας προκύπτει ως εξής. Γνωρίζουμε ότι κάθε δέντρο επικάλυψης έχει άρτιο πλήθος κόμβων περιττού βαθμού, κατά συνέπεια και κάθε 1-δέντρο έχει άρτιο πλήθος κόμβων περιττού βαθμού. Άρα για τους κόμβους περιττού βαθμού υπάρχει πλήρες ταιρίασμα. Όμως το 1-δέντρο με το πλήρες ταιρίασμα σχηματίζουν έναν γράφο Euler, αφού ο γράφος που προκύπτει είναι συνεκτικός και όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό. Αντίστοιχα, λοιπόν, προς τον αλγόριθμο του Christofides που είδαμε στην Ενότητα 3.3, αν C^* είναι το κόστος του ελάχιστου κύκλου Hamilton, c_s είναι το κόστος του ελάχιστου 1-δέντρου και M_O είναι το κόστος ελάχιστου πλήρους ταιριάσματος για τους κόμβους O



περιτού βαθμού του 1-δέντρου, τότε έχουμε ότι $C^* \leq c_s + M_0$. Από την τελευταία σχέση, και αν HK_0 είναι το Held-Karp φράγμα για το Σ -ΠΠΠ που περιορίζεται στους κόμβους O , έχουμε ότι,

$$C^* \leq c_s + M_0$$

$$(5.1) \quad C^* \leq HK + \frac{1}{2}HK_0$$

$$(5.2) \quad C^* \leq HK + \frac{1}{2}HK$$

$$(5.3) \quad C^* \leq \frac{3}{2}HK$$

Η Σχέση 5.1 προκύπτει από την πρώτη επισήμανση και το Λήμμα 5.3.1, η Σχέση 5.2 προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.1 και η Σχέση 5.3 μας παρέχει το άνω φράγμα για τον λόγο ακεραιότητας, ότι δηλαδή ο λόγος ακεραιότητας είναι $\frac{C^*}{HK} \leq \frac{3}{2}$.

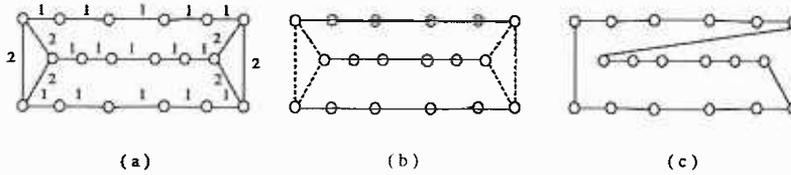
Η απόδειξη του κάτω φράγματος για τον λόγο ακεραιότητας γίνεται με την κατασκευή κατάλληλου στιγμιότυπου που ο λόγος ακεραιότητας του προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή $4/3$. Την κατασκευή αυτή μπορεί να την βρει κανείς στην εργασία των Boyd και Labonte [23]. Μάλιστα, αν και δεν είναι θεωρητικό αποτέλεσμα, είναι ενδιαφέρον πως στην εργασία των τελευταίων υπάρχει ένας τύπος, ως προς το πλήθος των κόμβων του στιγμιότυπου, για τον λόγο ακεραιότητας που συγκλίνει στα $4/3$. Ο τύπος όμως αυτός έχει αποδειχθεί μόνο για $n \leq 10$. Συγκεκριμένα οι Boyd και Labonte έλυσαν ένα τετραγωνικό πρόγραμμα, στο οποίο μεταβλητές είναι τόσο τα x_e όσο και τα c_e και διαπίστωσαν ότι για $n \leq 10$ (αφού για μεγαλύτερα n δεν ήταν δυνατό να λυθεί το τετραγωνικό πρόγραμμα σε ένα λογικό χρονικό διάστημα) ο λόγος ακεραιότητας γ_n , για στιγμιότυπα n κόμβων, ακολουθεί τον τύπο,

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{4n+6}{3n+9} & , \text{ αν } n = 0 \text{ mod } 2 \\ \frac{4\lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2}{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2} & , \text{ αν } n = 1 \text{ mod } 2 \\ \frac{4\lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 4}{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 4} & , \text{ αν } n = 2 \text{ mod } 2. \end{cases}$$

Το στιγμιότυπο, για το οποίο ο λόγος ακεραιότητας προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή $4/3$, αποτελείται από τρία παράλληλα οριζόντια μονοπάτια $k+1$ κόμβων που συνδέονται με k ακμές, κόστους ένα. Οι τρεις τελευταίοι κόμβοι από κάθε πλευρά συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους με ακμές κόστους δύο. Οι ακμές που δεν υπάρχουν εννοείται πως υπάρχουν και έχουν κόστος αυτό του ελάχιστου μονοπατιού για τον γράφο. Η κατασκευή αυτή φαίνεται στο Σχήμα 5.1 (α). Η λύση του αντίστοιχου ΓΠ είναι αυτή για την οποία η ανάθεση τιμών στις



ακμές έχει ως εξής. Όλες οι ακμές που υπάρχουν στο Σχήμα 5.1 (b) εκτός απ' αυτές που είναι διακεκομμένες έχουν τιμή 1, ενώ οι διακεκομμένες ακμές έχουν τιμή $\frac{1}{2}$. Κατά συνέπεια έχουμε ότι το Held-Karp φράγμα HK ισούται με $HK = 3k + 6$. Ενώ ο ελάχιστος κύκλος Hamilton είναι αυτός που φαίνεται στο Σχήμα 5.1 (c) με κόστος $C^* = 4k + 6$. Κατά συνέπεια ο λόγος ακεραιότητας ισούται με $\gamma = \frac{C^*}{HK} = \frac{4k+6}{3k+6}$ που συγκλίνει ασυμπτωτικά στα $4/3$ για πολύ μεγάλο k .



Σχήμα 5.1: Παράδειγμα για το οποίο ο λόγος ακεραιότητας είναι $4/3$

5.4 Ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ για το Α-ΠΙΠΠ

Ο λόγος ακεραιότητας του ΑΠ για το Α-ΠΙΠΠ είναι άνω φραγμένος από το $\log_2 n$, όπως έδειξε ο Williamson στην εργασία του [24], όμως αυτό δεν θα μας απασχολήσει αφού πιστεύεται πως αυτό το φράγμα απέχει πολύ από τον πραγματικό λόγο και δεν μας παρέχει κάποιον ιδιαίτερο αλγόριθμο. Αυτό που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως είναι το κάτω φράγμα που μας παρείχαν οι Charikar, Goemans και Karloff στην εργασία τους στο [25], με την κατασκευή κατάλληλης οικογένειας γράφων, της οποίας ο λόγος ακεραιότητας συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 2. Μάλιστα, με αυτό τους το κάτω φράγμα κατέρριψαν την εικασία, πως ο λόγος ακεραιότητας για το Α-ΠΙΠΠ είναι $4/3$, που είχαν κάνει νωρίτερα οι Carr και Vempala με την εργασία τους στο [31]. Ενώ, επιπλέον, έκαναν την εικασία πως ο λόγος ακεραιότητας για το Α-ΠΙΠΠ είναι ακριβώς 2. Για να αναπτύξουμε και να παρουσιάσουμε την εργασία των Charikar, Goemans και Karloff, πρέπει πρώτα να δοθούν οι παρακάτω ορισμοί.

Ορισμός 5.4.1

Υποδίγραφος Euler, $H(V_H, E_H)$, ενός κατευθυνόμενου γράφου, $G(V_G, E_G)$, είναι ένας γράφος με σύνολο κόμβων $V_H = V_G$ και σύνολο ακμών $E_H \subseteq E_G$, με πιθανή πολλαπλότητα κάποιων ακμών, τέτοια ώστε να ισχύει,

- i) ο βαθμός εισόδου για κάθε κόμβο είναι ίσος με τον βαθμό εξόδου
- ii) ο H να είναι ασθενώς συνδεδεμένος²

² Ασθενώς συνδεδεμένος είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος για τον οποίο ο αντίστοιχος μη κατευθυνόμενος γράφος, που προκύπτει αν οι κατευθυνόμενες ακμές γίνουν μη κατευθυνόμενες, είναι συνδεδεμένος.



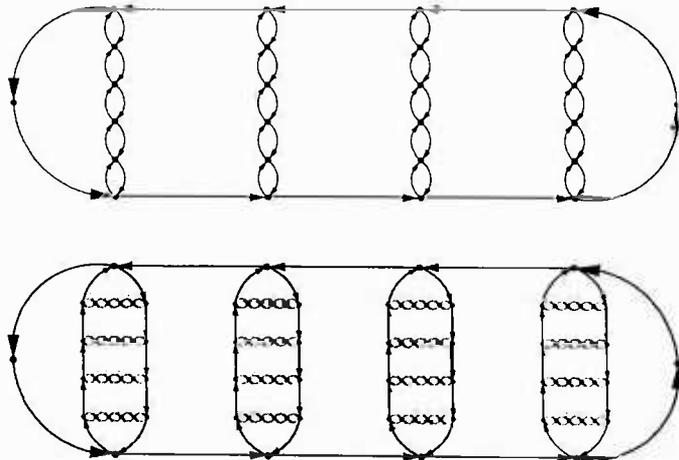
Ορισμός 5.4.2

Διαφορά βαθμών ενός κόμβου v σε έναν δίγραφο G καλούμε τον βαθμό εξόδου ελαττωμένο κατά τον βαθμό εισόδου και συμβολίζεται ως $def_G(v)$.

Να σημειώσουμε ότι στην πραγματικότητα ο υποδίγραφος, έτσι όπως ορίζεται για τις ανάγκες αυτής της ενότητας, είναι ένας πολυγράφος. Επίσης ένας υποδίγραφος Euler είναι ακριβώς ένας ασθενώς συνδεδεμένος υποδίγραφος με μηδενική διαφορά βαθμών σε κάθε κόμβο. Ένας υποδίγραφος Euler μπορεί να διασχισθεί από έναν κύκλο περνάει από όλους τους κόμβους τουλάχιστον μία φορά, αφού η διαφορά βαθμών είναι μηδενική για κάθε κόμβο ενώ ο υποδίγραφος Euler είναι ασθενώς συνδεδεμένος. Κατά συνέπεια, και λόγω της τριγωνικής ιδιότητας, το Α-ΠΙΠΠ είναι ισοδύναμο με την εύρεση ενός υποδίγραφου Euler για τον οποίο ελαχιστοποιείται το άθροισμα $\sum_{e \in E_H} m_e \cdot c(e)$ όπου E_H το σύνολο ακμών, m_e η πολλαπλότητα της ακμής e και c η συνάρτηση κόστους του γράφου G .

Ορισμός 5.4.3

Αν $s, t \in V$ και $s \neq t$, τότε (s, t) -υποδίγραφος Euler, $F(V_F, E_F)$, ενός κατευθυνόμενου γράφου, $G(V_G, E_G)$, ονομάζεται ένας γράφος με σύνολο ακμών $V_F = V_G$ και σύνολο ακμών $E_F \subseteq E_G$, με πιθανή πολλαπλότητα κάποιων ακμών, τέτοια ώστε ο υποδίγραφος του G που προκύπτει, αν ταυτιστούν οι κόμβοι s και t , να είναι Euler. Ο (s, t) -υποδίγραφος Euler καλείται κλειστός αν η διαφορά κόμβων για όλους τους κόμβους είναι μηδενική και ανοιχτός διαφορετικά.



Σχήμα 5.2: Αναπαράσταση δύο επιπέδων για την κατασκευή: δίγραφοι G_2 και G_3 για $r = 4$

Προκειμένου να καταλήξουμε στο κάτω φράγμα, 2, για τον λόγο ακεραιότη-

τας θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια (G_k) και από αυτή μια οικογένεια (L_k) κατευθυνόμενων γράφων, όπου για τα αντίστοιχα κόστη των τελευταίων θα αποδείξουμε ότι ο λόγος ακεραιότητας προσεγγίζει ασυμπτωτικά το δύο. Αρχικά κατασκευάζουμε την οικογένεια (G_k) με τον εξής τρόπο. Να θυμίσουμε ότι στην περίπτωση που κατασκευάζουμε γράφους για το Δ-ΠΙΠΠ οι ακμές που δεν περιλαμβάνονται έχουν σαν κόστος αυτό της ελάχιστης διαδρομής. Ο G_1 αποτελείται από ένα δικατευθυνόμενο μονοπάτι $r + 2$ κόμβων, ξεκινώντας από έναν κόμβο που θα καλούμε πηγή και καταλήγοντας σε έναν κόμβο που θα καλούμε απόληξη (προφανώς καθέννας από τους δύο ακραίους κόμβους στο δικατευθυνόμενο μονοπάτι μπορεί να είναι είτε πηγή είτε απόληξη). Κάθε μία από τις $2(r + 1)$ ακμές έχουν κόστος 1. Για τους υπόλοιπους της οικογένειας γράφους, δηλαδή για κάθε $k \geq 2$, κατασκευάζουμε τον G_k ως εξής (Σχήμα 5.2). Αρχικά τοποθετούμε τους $2 + 2r$ κόμβους $s, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_r, t$, όπου s και t θα είναι αντίστοιχα η πηγή και η απόληξη για τον G_k . Για απλότητα θα θεωρούμε $u_0 = v_0 = s$ και $u_{r+1} = v_{r+1} = t$. Για αυτούς τους κόμβους τοποθετούμε τις ακμές (u_i, u_{i+1}) και (v_{i+1}, v_i) , όπου $i = 0, 1, \dots, r$, με κόστος για κάθε μία από αυτές ίσο με r^{k-1} . Έπειτα τοποθετούμε r διακριτά ισομορφικά αντίγραφα του G_{k-1} με τον εξής τρόπο, για το i -οστό αντίγραφο ταυτίζουμε την πηγή με τον κόμβο u_i και την απόληξη με τον κόμβο v_i . Και εδώ ολοκληρώνεται η κατασκευή.

Αν $V(G_k)$ είναι οι κόμβοι του γράφου G_k , τότε σύμφωνα με την κατασκευή αυτή έχουμε ότι $|V(G_k)| = 2 + r|V(G_{k-1})| = r^k + 2 \sum_{i=0}^{k-1} r^i$, δηλαδή $|V(G_k)| = \Theta(r^k)$, για κάθε $k \geq 1$. Επίσης, αν t_k είναι το άθροισμα από τα κόστη των ακμών για τον G_k , τότε έχουμε ότι $t_1 = 2(r + 1)$ και $t_k = 2(r + 1)r^{k-1} + rt_{k-1}$, από το οποίο προκύπτει ότι $t_k = (2k)r^{k-1}(r + 1)$, για κάθε $k \geq 1$. Έστω ότι α_k είναι το ελάχιστο κόστος ενός ανοιχτού (s, t) -υποδύγραφου Euler για τον G_k , και β_k είναι το ελάχιστο κόστος ενός κλειστού (s, t) -υποδύγραφου Euler για τον G_k . Τότε η επόμενη πρόταση μας παρέχει τους κατάλληλους αναδρομικούς τύπους για τα α_k και β_k .

Πρόταση 5.4.1

$$\alpha_1 = r + 1, \beta_1 = 2r,$$

και για κάθε $k \geq 2$,

$$\alpha_k \geq \min_{l \in \{0, 1, \dots, r\}} \{(l + r + 1)r^{k-1} + l\alpha_{k-1} + (r - l)\beta_{k-1}\},$$

$$\beta_k \geq \min_{l \in \{0, 1, \dots, r\}} \{(l + 2r - 2)r^{k-1} + l\alpha_{k-1} + (r - l)\beta_{k-1}\}.$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\alpha_1 = r + 1$, αφού ο ανοιχτός (s, t) -υποδύγραφος του G_1 με ελάχιστο συνολικό κόστος είναι αυτός με ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την πηγή στην απόληξη ή αντίστροφα. Και ισχύει ότι $\beta_1 = 2r$, αφού ο κλειστός (s, t) -υποδύγραφος του G_1 με ελάχιστο συνολικό κόστος είναι ο ίδιος ο γράφος G_1 αφού αφαιρεθούν δύο ακμές αντίθετης κατεύθυνσης που έχουν σαν άκρα τους ίδιους κόμβους.



Θα αποδείξουμε τους αναδρομικούς τύπους και για $k \geq 2$. Έστω ότι F είναι ένας (s, t) -υποδίγραφο του Euler για τον G_k , H_i είναι το ισομορφικό αντίγραφο του G_{k-1} στον G_k που έχει ως πηγή τον κόμβο u_i και απόληξη τον κόμβο v_i , και F_i είναι ο περιορισμός του F στο H_i . Έστω, επίσης, ότι l είναι το πλήθος των ανοιχτών F_i , και άρα το πλήθος των κλειστών F_i είναι $r - l$. Το συνολικό κόστος που προκύπτει για τα F_i είναι $l\alpha_{k-1} + (r - l)\beta_{k-1}$. Αυτό που απομένει είναι εκτιμήσουμε το ελάχιστο κόστος που προκύπτει από τις υπόλοιπες ακμές.

Αν p_i είναι η πολλαπλότητα της ακμής (u_i, u_{i+1}) , και q_i είναι η πολλαπλότητα της ακμής (v_{i+1}, v_i) , για $i = 0, \dots, r$, τότε το συνολικό κόστος για τις ακμές στον $F \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i$ είναι $r^{k-1} \sum_{i=0}^n (p_i + q_i)$. Αποδεικνύοντας ότι,

$$(5.4) \quad \sum_{i=0}^n (p_i + q_i) \geq \begin{cases} l + r + 1 & \text{αν ο } F \text{ είναι ανοιχτός} \\ l + 2r - 2 & \text{αν ο } F \text{ είναι κλειστός.} \end{cases}$$

θα έχουμε αποδείξει αυτό που θέλουμε.

Προκειμένου να αποδείξουμε την Σχέση 5.4 χρειαζόμαστε δύο βασικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1: $p_i - q_i = \text{def}_F(s)$ για $i = 0, 1, \dots, r$.

Για κάθε δίγραφο $G(V, E)$ και για κάθε $S \subset V$, το άθροισμα των διαφορών βαθμών για τους κόμβους του S είναι ίσο με τον πλήθος των ακμών που φεύγουν από τους κόμβους του S ελαττωμένος κατά το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στους κόμβους του S , δηλαδή,

$$\sum_{v \in S} \text{deg}_G(v) = |\delta^+(S)| - |\delta^-(S)|.$$

Εφαρμόζοντας το αυτό στον F για $S = \{s\} \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_i)$, όπου $i \in \{0, \dots, r\}$, προκύπτει ότι $p_i - q_i = \text{def}_F(s)$ για $i = 0, 1, \dots, r$, αφού ο F έχει διαφορά βαθμών 0 σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους εκτός του s και t .

Παρατήρηση 2: ο F_i είναι κλειστός $\Leftrightarrow p_{i-1} = p_i \Leftrightarrow q_{i-1} = q_i$

Παρατηρούμε ότι $\text{def}_{F_i}(u_i) = p_{i-1} - p_i = q_{i-1} - q_i$, όπου $i \in \{1, \dots, r\}$, από το οποίο προκύπτει ότι ο F_i είναι κλειστός αν και μόνο αν $p_{i-1} = p_i$ ή ισοδύναμα $q_{i-1} = q_i$.

Για να αποδείξουμε την Σχέση 5.4, αρχικά υποθέτουμε ότι ο F είναι ανοιχτός. Χ.β.γ. θεωρούμε ότι $\text{def}_F(s) > 0$, και έτσι έχουμε $p_i - q_i \geq 1$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, r\}$. Έτσι έχουμε ότι $\sum_{i=0}^n (p_i + q_i) = \sum_{i=0}^n (p_i - q_i + 2q_i) \geq r + 1 + \sum_{i=0}^n q_i$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=0}^n q_i \geq l/2$ προκειμένου να αποδείξουμε την Σχέση 5.4 για την περίπτωση που ο F είναι ανοιχτός (υπενθυμίζουμε ότι l είναι το πλήθος των ανοιχτών (u_i, v_i) -υποδίων του Euler F_i). Πράγματι, αν το q_i ήταν μηδενικό για όλα τα i , το l θα ήταν μηδενικό από την δεύτερη



παρατήρηση. Κάθε φορά όμως που αυξάνει κάποιο q_i κατά 1, το l μπορεί να αυξηθεί το πολύ κατά 2 μονάδες, αφού τα F_i και F_{i+1} τότε θα είναι ανοιχτά. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας, και έτσι $\sum_{i=0}^r (p_i + q_i) \geq r + 1 + 2 \sum_{i=0}^r q_i \geq r + 1 + l$ για την περίπτωση που το F είναι ανοιχτό.

Τώρα υποθέτουμε ότι ο F είναι κλειστός. Από την πρώτη παρατήρηση έχουμε ότι $p_i = q_i$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, και άρα $\sum_{i=0}^r (p_i + q_i) = 2 \sum_{i=0}^r p_i$. Λέμε ότι μπορεί να υπάρχει το πολύ μόνο μία πολλαπλότητα p_x , με $x \in \{0, 1, \dots, r\}$ για την οποία να ισχύει $p_x = 0$. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχουν δύο πολλαπλότητες p_x και p_y , για τις οποίες ισχύει $p_x = p_y = 0$ αυτό θα σήμαινε επίσης ότι $q_x = q_y = 0$. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση ο αντίστοιχος μη κατευθυνόμενος γράφος του F αποτελείται από τουλάχιστον τρεις διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, και άρα ακόμα κι αν ταυτίσουμε τον πρώτο με τον τελευταίο κόμβο ο αντίστοιχος μη κατευθυνόμενος γράφος αποτελείται από τουλάχιστον δύο διαφορετικές συνιστώσες και άρα δεν είναι υποδίγραφος Euler. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο αποδεικνύοντας ότι υπάρχει το πολύ μόνο μία πολλαπλότητα p_x , με $x \in \{0, 1, \dots, r\}$ για την οποία να ισχύει $p_x = 0$. Άρα το διάνυσμα $p = (p_x)_{x \in \{0, 1, \dots, r\}}$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο, κατά θέση, από ένα διάνυσμα p' το οποίο έχει παντού άσσους, εκτός πιθανόν από κάποια είσοδο σε κάποια θέση x που είναι μηδενική. Στο p' οι είσοδοι που διαφέρουν μεταξύ τους είναι δύο και για το αντίστοιχο l' θα ίσχυε τότε ότι $l' \leq 2$. Καθώς αυξάνει το p' , ως που να φτάσει το p , κατά μία μονάδα ανά μία θέση, το l' αυξάνει το πολύ κατά 2 για κάθε αύξηση. Έτσι, και από την δεύτερη παρατήρηση, προκύπτει ότι

$$l \leq 2 + 2 \left(\left(\sum_{i=0}^r p_i \right) - r \right)$$

δηλαδή,

$$2 \sum_{i=0}^r p_i \geq l + 2r - 2$$

αποδεικνύοντας έτσι την Σχέση 5.4 για την περίπτωση που το F είναι κλειστό. \square

Το ακόλουθο λήμμα δίνει δύο κάτω φράγματα για τα α_k και β_k που προκύπτουν από τους αναδρομικούς τύπους της Πρότασης 5.4.1

Λήμμα 5.4.1

Για τα α_k και β_k , όπως αυτά ορίστηκαν στην Πρόταση 5.4.1, ισχύει ότι $\alpha_k \geq (2r - 2)k r^{k-1} - (r - 3)r^{k-1}$ και $\beta_k \geq (2r - 2)k r^{k-1}$.

Απόδειξη. Θεωρώ $\alpha'_1 = r + 1, \beta'_1 = 2r - 2$, και για κάθε $k \geq 2$

$$\alpha'_k = \min_{l \in \{0, 1, \dots, r\}} \{ (l + r + 1)r^{k-1} + l\alpha'_{k-1} + (r - l)\beta'_{k-1} \}$$



$$\beta'_k = \min_{l \in \{0,1,\dots,r\}} \{(l+2r-2)r^{k-1} + l\alpha'_{k-1} + (r-l)\beta'_{k-1}\}$$

Η μόνη διαφορά με τον αναδρομικό τύπο της Πρότασης 5.4.1 είναι στις τιμές β_1 και β'_1 και ότι οι ανισοισότητες αντικαταστήθηκαν από ισότητες στα α'_k και β'_k . Προφανώς, με επαγωγή στο \mathbb{N} έχουμε ότι $\alpha_k \geq \alpha'_k$ και $\beta_k \geq \beta'_k$ για κάθε $k \geq 1$. Άρα για να αποδειχθεί το λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\alpha'_k \geq (2r-2)kr^{k-1} - (r-3)r^{k-1} \text{ και } \beta'_k \geq (2r-2)kr^{k-1}$$

Δεδομένων, όμως, των τύπων για τα α'_k και β'_k έχουμε ότι $\beta'_k = \alpha'_k + (r-3)r^{k-1}$ για κάθε $k \geq 1$. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι,

$$\beta'_k = \min_{l \in \{0,1,\dots,r\}} \{(l+2r-2)r^{k-1} + r\beta'_{k-1} - l(r-3)r^{k-2}\}$$

Η έκφραση όμως που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι γραμμική ως προς το l και ο συντελεστής του l σ' αυτή την έκφραση είναι $3r^{k-2}$. Άρα, η έκφραση ελαχιστοποιείται για $l = 0$, και έτσι έχουμε ότι,

$$\beta'_k = (2r-2)r^{k-1} + r\beta'_{k-1}.$$

Με βάση, λοιπόν, αυτόν τον αναδρομικό τύπο και δεδομένου ότι $\beta'_1 = 2r-2$ έπεται ότι $\beta'_k = (2r-2)kr^{k-1}$ για κάθε $k \geq 1$. Έτσι, και με βάση την αρχική υπόθεση, αποδεικνύεται το φράγμα του β_k . Ενώ, η απόδειξη του φράγματος του α_k έπεται από την σχέση $\beta'_k = \alpha'_k + (r-3)r^{k-1}$. \square

Προκειμένου να καταλήξουμε στο ότι το κάτω φράγμα του λόγου ακεραιότητας είναι 2, κατασκευάζουμε τον κατάλληλο δίγραφο $L_k(V_{L_k}, E_{L_k})$. Ο τελευταίος προκύπτει από τον $G(V_{G_k}, E_{G_k})$ ως εξής. Οι κόμβοι είναι $V_{L_k} = V_{G_k} \setminus \{s, t\}$, οι ακμές είναι αυτές του E_{G_k} , αφού αφαιρέσουμε τις ακμές (s, u_1) , (u_r, t) , (t, v_r) και (v_1, s) , και επιπλέον θέσουμε τις ακμές (u_r, u_1) και (v_1, v_r) και το κόστος στην κάθε μία ακμή είναι r^{k-1} . Το συνολικό κόστος για τον L_k είναι ίσο με το συνολικό κόστος του G_k μειωμένο κατά $2r^{k-1}$, και έτσι είναι μικρότερο από $t_k = 2kr^{k-1}(r+1)$.

Τα δύο επόμενα λήμματα μας δίνουν τα κατάλληλα θεωρητικά αποτελέσματα προκειμένου να αποδειχθεί ότι ο λόγος ακεραιότητας προσεγγίζει το 2 για μεγάλα r και k , προκειμένου να αποδειχθεί δηλαδή το Θεώρημα 5.4.1

Λήμμα 5.4.2

Για κάθε $r \geq 3$ και κάθε $k \geq 2$, το κόστος κάθε υποδίγραφου Euler L_k είναι τουλάχιστον $(2k-1)(r-1)r^{k-1}$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με αυτή για τον G_k στην Πρόταση 5.4.1, και υιοθετούμε τους ίδιους συμβολισμούς. Θεωρούμε έναν οποιοδήποτε υποδίγραφο Euler F για τον L_k και l το πλήθος των ανοιχτών (u_i, v_i) -υποδίγραφων του Euler που αντιστοιχούν στα F_i . Όπως και για τον G_k το συνολικό κόστος μέσα στα F_i είναι τουλάχιστον $l\alpha_{k-1} + (r-l)\beta_{k-1}$. Ισχυριζόμαστε ότι οι υπόλοιπες ακμές συνεισφέρουν στο συνολικό κόστος τουλάχιστον κατά $(l+r-1)r^{k-1}$. Αν ισχύει αυτός ο ισχυρισμός, τότε το συνολικό κόστος του



F είναι τουλάχιστον $(l+r-1)r^{k-1} + l\alpha_{k-1} + (r-l)\beta_{k-1}$ και από την απόδειξη του Λήμματος 5.4.1 αυτό είναι τουλάχιστον $(2r-2)kr^{k-1} - (r-1)r^{k-1} = (2k-1)(r-1)r^{k-1}$, αποδεικνύοντας έτσι το επιθυμητό φράγμα. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε τον ισχυρισμό.

Έστω ότι p_i είναι η πολλαπλότητα της ακμής (u_i, u_{i+1}) στο F για $i = 1, \dots, r$. Εδώ, όπως και στην υπόλοιπη απόδειξη, οι δείκτες θα ερμηνεύονται κυκλικά με την έννοια ότι ο δείκτης $r+1$ θα αναπαριστά τον 1 και ο δείκτης 0 θα αναπαριστά τον r . Παρόμοια έστω ότι είναι q_i η πολλαπλότητα της ακμής (v_{i+1}, v_i) στο F για $i = 1, \dots, r$, με δείκτες που ερμηνεύονται κυκλικά. Οι ακμές μεταξύ των u_i αλλά και των v_i συνεισφέρουν κατά $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i)r^{k-1}$, και έτσι ο στόχος είναι να αποδείξουμε ότι $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \geq l+r-1$.

Αντίστοιχα με την Πρόταση 5.4.1, το F_i είναι κλειστό αν (αν και μόνο αν) $p_{i-1} = p_i$ αν $q_{i-1} = q_i$, και από αυτό, δεδομένου ότι ο F είναι υποδίγραφος Euler, έπεται πως,

$$(5.5) \quad l \leq 2 \left(\sum_{i=1}^r p_i \right) = 2 \left(\sum_{i=1}^r q_i \right).$$

Δεδομένου ότι πρέπει να υπάρχει ο ίδιος αριθμός ακμών που εισέρχονται και εξέρχονται από το τους κόμβους του H_i , έχουμε ότι $p_{i-1} + q_i = p_i + q_{i-1} \geq 1$, και άρα ότι $p_i - q_i = p_{i-1} - q_{i-1}$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε ότι $p_i - q_i = 0$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να έχουμε $p_j = q_j = 0$ και $p_k = q_k = 0$, για $j \neq k$. Διαφορετικά για το $V(H_{j+1}) \cup V(H_{j+2}) \cup \dots \cup V(H_k)$ δεν θα υπάρχουν ακμές εισόδου και εξόδου από και προς τον υπόλοιπο γράφο. Έτσι, προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^r p_i = \sum_{i=1}^r q_i \geq r-1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν όλα τα p_i είναι ίσα με 1 εκτός από ένα που είναι μηδενικό. Δηλαδή στην περίπτωση που ισχύει η ισότητα έχουμε ότι $l = 2$, αφού το l είναι ίσο με το πλήθος των $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ για τα οποία ισχύει $p_{i-1} \neq p_i$. Αν δεν ισχύει η ισότητα, τότε $\sum_{i=1}^r p_i \geq r$, και άρα $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \geq 2r = r + r \geq l + r$. Διαφορετικά, ισχύει ότι $\sum_{i=1}^r p_i = r-1$, από το οποίο προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) = 2(r-1) = r+r-2 \geq r+1 = l+r-1$, για $r \geq 3$. Με τον τρόπο αυτόν αποδεικνύεται ο ισχυρισμός για αυτή την περίπτωση. Στην δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι $p_i - q_i \geq 1$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ (χ.β.γ.) Για την περίπτωση αυτή έχουμε $p_i - q_i \geq 1$, για κάθε i , από το οποίο μαζί με την Σχέση 5.5 έπεται ότι $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) \geq \sum_{i=1}^r (p_i - q_i) + 2 \sum_{i=1}^r q_i \geq r + l$, αποδεικνύοντας έτσι τον ισχυρισμό και για αυτή την περίπτωση. \square

Λήμμα 5.4.3

Το διάνυσμα x με $x_e = \frac{1}{2}$ για κάθε ακμή e είναι επικτική λύση για το ΓΠ του στιγματίου L_k . Έτσι $HK \leq \frac{t_k}{2} = kr^{k-1}(r+1)$

Απόδειξη. Το λήμμα έπεται άμεσα από τους ισχυρισμούς ότι:

(i) Ο L_k έχει ακριβώς δύο ακμές εισόδου και δύο ακμές εξόδου για κάθε κόμβο και



(ii) Ο L_k έχει τουλάχιστον δύο ακμές και στις δύο κατευθύνσεις για μία οποιαδήποτε διαμέριση του σε δύο σύνολα κόμβων.

Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται εύκολα με αναγωγή, αποδεικνύοντας ότι όλοι οι κόμβοι του G_k έχουν βαθμό εισόδου και εξόδου 2, εκτός από τους s και t , για τους οποίους ο βαθμός εισόδου και εξόδου είναι 1, οι οποίοι όμως δεν περιλαμβάνονται στον L_k .

Για να αποδείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό, αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ακμών προς την μία κατεύθυνση. Αφού, δεδομένου ότι ο L_k είναι Euler, όσες ακμές υπάρχουν από την μία διαμέριση προς την άλλη, τόσες θα υπάρχουν και από την τελευταία προς την πρώτη. Σύμφωνα με το θεώρημα του Menger, η ύπαρξη δύο ακμών προς την μία κατεύθυνση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής, θεωρώντας έναν σταθερό κόμβο του L_k , στην περίπτωση μας τον u_1 , τότε για κάθε κόμβο v του L_k υπάρχουν δύο διακριτά ως προς τις ακμές μονοπάτια από τον v στον u_1 . Αποδεικνύοντας, λοιπόν, πως για τον u_1 και για κάθε v στον L_k υπάρχουν δύο διακριτά ως προς τις ακμές μονοπάτια από τον v στον u_1 , αποδεικνύουμε και τον δεύτερο ισχυρισμό.

Αρχικά, θα δείξουμε με αναγωγή ότι υπάρχουν στον G_k , για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε κόμβο v στον G_k , δύο διακριτά ως προς τους κόμβους μονοπάτια από τον κόμβο v προς τον κόμβο s και προς τον κόμβο t αντίστοιχα. Αυτό προφανώς ισχύει για $n = 1$, και έστω ότι ισχύει για κάθε $n < k$ τότε θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k$. Για τον v ισχύει ότι $v \in H_i$ για κάποιο i . Τότε υπάρχουν δύο διακριτά ως προς τις ακμές μονοπάτια από τον v προς τον u_i και προς τον v_i αντίστοιχα από επαγωγική υπόθεση, αφού ο H_i είναι ισομορφικό αντίγραφο του G_{k-1} . Τα δύο αυτά διακριτά, ως προς τις ακμές, μονοπάτια μπορούν να επεκταθούν το ένα προς το s και το άλλο προς το t σχηματίζοντας δύο διακριτά μονοπάτια από τον κόμβο v προς τον κόμβο s και προς τον κόμβο t αντίστοιχα.

Με βάση, λοιπόν, αυτό που μόλις δείξαμε, για τον v υπάρχουν δύο διακριτά μονοπάτια προς τον u_i (το οποίο θα καλούμε P_1) και προς τον v_i (το οποίο θα καλούμε P_2) αντίστοιχα. Το P_1 μπορεί να επεκταθεί προς τον u_1 , χρησιμοποιώντας τις ακμές $(u_i, u_{i+1}), \dots, (u_{r-1}, u_r), (u_r, u_1)$, παίρνοντας ένα μονοπάτι P'_1 από τον v προς τον u_1 .

Αν $i \neq 1$, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το P_2 από το u_i στο v_1 μέσω των ακμών $(v_i, v_{i-1}), \dots, (v_2, v_1)$ και από τον v_1 στον u_1 μέσω οποιουδήποτε κατευθυνόμενου μονοπατιού στον H_1 . Το μονοπάτι P'_2 που προκύπτει θα είναι διακριτό, ως προς τις ακμές, με αυτό του P'_1 .

Αν $i = 1$ τότε το P'_1 δεν χρησιμοποιεί την ακμή (u_r, u_1) , και έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε το P_2 πρώτα από το v_1 στο u_r , προσθέτοντας την ακμή (u_1, u_r) , και έπειτα στο u_r μέσω ενός κατευθυνόμενου μονοπατιού στον H_r , και τελικά από τον u_r στον u_1 μέσω της ακμής (u_r, u_1) . Και σ' αυτή την περίπτωση το μονοπάτι P'_2 που θα προκύψει θα είναι διακριτό ως προς το P'_1 . \square

Θεώρημα 5.4.1

Για τον L_k , όπου $k \geq 2$ με $r \geq 3$, ο λόγος ανάμεσα στο ελάχιστο κόστος κάθε



υποδίγραφοι Euler και του Held-Karp φράγματος είναι τουλάχιστον $\frac{r-1}{r+1} \cdot \frac{2k-1}{k}$, ο οποίος συγκλίνει ασυμπτωτικά στο 2 καθώς τα k και r αυξάνουν.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα Λήμματα 5.4.1 και 5.4.3. \square

5.5 Η χρησιμότητα του Held-Karp φράγματος

Αφού είδαμε τις βασικές θεωρητικές συνισταμένες, ας δούμε την σημασία του Held-Karp φράγματος σε επίπεδο υλοποίησης αλγορίθμων. Αρχικά, ένα τόσο δύσκολο πρόβλημα είναι πρόσφορο σε νέες ιδέες και αντίστοιχους αλγορίθμους, αλλά και για τους αλγορίθμους που ήδη υπάρχουν χρειαζόμαστε κάποιο μέτρο σύγκρισης ως προς την ποιότητα της λύσης, όταν δεν υπάρχουν στενά φράγματα για την προσέγγιση που επιτυγχάνουν. Δηλαδή θέλουμε για έναν οποιονδήποτε αλγόριθμο, αφού δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή λύση του ΠΠΠ, να μπορούμε να πούμε πόσο κοντά είμαστε σε αυτή, για δεδομένα στιγμιότυπα σε πειραματικό επίπεδο. Αυτό λοιπόν μπορούμε να το κάνουμε με την βοήθεια του Held-Karp φράγματος με τον εξής τρόπο, δεδομένου ότι το Held-Karp φράγμα είναι μια χαρακτηριστική τιμή για ένα στιγμιότυπο του ΠΠΠ, για καθέναν από τους υπό σύγκριση αλγορίθμους, υπολογίζουμε τον λόγο της λύσης που επιτυγχάνει C προς το HK φράγμα HK . Βέβαια, ο τελευταίος λόγος, για τα συγκεκριμένα στιγμιότυπα, είναι και ένα φράγμα για την προσέγγιση, που υπόκειται στο χάσμα και ισοδύναμα στον λόγο ακεραιότητας, αφού ισχύει ότι $HK \leq C^*$ και κατά συνέπεια ισχύει ότι $\frac{C}{C^*} \leq \frac{C}{HK}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας πειραματικής διαδικασίας μπορεί να βρει κανείς στην εργασία των Johnson και McGeoch [26].

Επίσης, το HK φράγμα είναι μια βασική παράμετρος δύο διαφορετικών μη πολυωνυμικών αλλά σημαντικών μεθόδων που στοχεύουν στην βέλτιστη επίλυση των ΑΠ του Σ-ΠΠΠ αλλά και του Α-ΠΠΠ. Η πρώτη μέθοδος είναι η Branch and Bound, μία καλή παρουσίαση της μεθόδου βρίσκεται στο [3] και μια υλοποίηση της μεθόδου για το ΠΠΠ βρίσκεται στο [19]. Η δεύτερη μέθοδος είναι η Cutting Plane που αναπτύσσεται στις εργασίες [27],[28], με τις εργασίες αυτές να στηρίζονται σε νωρίτερη δουλειά [27] που είχε κάνει μεταξύ άλλων και ο πατέρας της μεθόδου Simplex, ο Dantzig. Οι μέθοδοι αυτές δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά θα λέγαμε πως είναι οι βέλτιστες δυνατές, από αυτές που μέχρι σήμερα γνωρίζουμε, μη πολυωνυμικές που για κάποια τάξη μεγέθους μπορούν να υπολογίσουν μια ακριβή λύση, πιθανότατα μέσα σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Η τάξη μεγέθους δεν υπόκειται σε κάποιους θεωρητικούς περιορισμούς αλλά υπόκειται στη βάση της πειραματικής δοκιμασίας. Για να δώσουμε μια τάξη μεγέθους για τις μεθόδους αυτές, οι Applegate, Bixby, Chvatal, και Cook για να υπολογίσουν το 2004 ένα στιγμιότυπο 24,978 πόλεων, που μάλιστα προέρχονται από την Σουηδία, χρειάστηκαν συνολικά 91.9 CPU χρόνια με έναν επεξεργαστή Intel Xeon 2.8 GHz [30]. Οι μέθοδοι αυτές είναι χρήσιμες, αφού κάποιος μπορεί να απαιτεί την βέλτιστη λύση ανεξαρτήτως χρόνου, και έχουν ενδιαφέρον όχι όμως από την σκοπιά που εξετάζουμε το



ΠΠΠ. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι πως το ΗΚ φράγμα χρησιμοποιείται στις μεθόδους αυτές με τέτοιο τρόπο που ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση των υπολογισμών να συνδέεται άμεσα με τον λόγο ακεραιότητας.



Κεφάλαιο 6

Τοπική Αναζήτηση και το ΠΠΠΠ

6.1 Τοπική αναζήτηση

Μία άλλη σημαντική κατεύθυνση για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι η τοπική αναζήτηση, που ξεκίνησε να αναπτύσσεται ανάμεσα στα τέλη του 1950 και τα τέλη του 1960. Σύμφωνα με την κατεύθυνση αυτή, ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα τοπικής αναζήτησης, αφού οριστεί πρώτα μια κατάλληλη γειτονιά. Για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, αν \mathcal{S} είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων τότε γειτονιά για το πρόβλημα αυτό είναι μια συνάρτηση $\mathcal{N} : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$ που αντιστοιχίζει σε κάθε εφικτή λύση $s \in \mathcal{S}$ ένα σύνολο εφικτών λύσεων $\mathcal{N}(s) \subseteq \mathcal{S}$. Η γειτονιά μπορεί να μην είναι συμμετρική, δηλαδή μπορεί το s_1 να ανήκει στην γειτονιά του s_2 χωρίς το s_2 να ανήκει στην γειτονιά του s_1 , όταν $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$. Επίσης να πούμε πως τοπικό βέλτιστο, ως προς κάποια γειτονιά, ορίζεται οποιαδήποτε εφικτή λύση η οποία είναι η βέλτιστη για την γειτονιά της. Αντίστοιχα, ολικό βέλτιστο είναι το βέλτιστο ανάμεσα σε όλα τα τοπικά βέλτιστα, δηλαδή ολικό βέλτιστο είναι η βέλτιστη λύση του στιγμιότυπου για το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αφού δώσαμε τους κατάλληλους ορισμούς, μπορούμε να πούμε ότι πρόβλημα τοπικής αναζήτησης OP/\mathcal{N} ενός προβλήματος βελτιστοποίησης OP , για το οποίο έχει οριστεί κατάλληλη γειτονιά \mathcal{N} , είναι το πρόβλημα εύρεσης κάποιου τοπικού βέλτιστου για αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως προς την αντίστοιχη γειτονιά. Τέλος υπάρχουν προβλήματα τοπικής αναζήτησης για τα οποία υπάρχει ένα τοπικό βέλτιστο και είναι και ολικό βέλτιστο και άλλα για τα οποία κάποιο τοπικό βέλτιστο δεν είναι οπωσδήποτε και ολικό βέλτιστο. Το ΠΠΠΠ με τις γειτονιές που θα εξετάσουμε ανήκει στην δεύτερη κατηγορία και κατά συνέπεια η λύση του ΠΠΠΠ με την αντίστοιχη γειτονιά μας παρέχει μία προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του ΠΠΠΠ.

Για ένα οποιοδήποτε πρόβλημα τοπικής αναζήτησης υπάρχει ένας γενικός



αλγόριθμος που το επιλύει. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτόν, ξεκινάμε επιλέγοντας με κάποια διαδικασία μία αρχική εφικτή λύση, s_0 , και αναζητούμε αν στην γειτονιά της υπάρχει αυστηρά καλύτερη εφικτή λύση, s , από την αρχική εφικτή λύση, s_0 . Στην περίπτωση που υπάρχει, επαναλαμβάνουμε την διαδικασία με αρχική εφικτή λύση, s_0 , αυτή την αυστηρά καλύτερη εφικτή λύση, s . Στην περίπτωση που δεν υπάρχει, ο αλγόριθμος τερματίζει έχοντας υπολογίσει κάποιο τοπικό βέλτιστο. Αν, λοιπόν, A είναι ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος βελτιστοποίησης και \mathcal{N} μια κατάλληλα ορισμένη γειτονιά για το A , τότε στην γενική του περίπτωση ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το πρόβλημα A/\mathcal{N} , που καλούμε *LocalSearch*, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής,

LocalSearch(A)

Θεωρούμε $s \in \mathcal{S}$ μια αρχική εφικτή λύση;

Όσο υπάρχει εφικτή λύση $x \in \mathcal{N}(s)$ αυστηρά καλύτερη από την τρέχουσα εφικτή λύση s κάνε

$s = x$;

τέλος επανάληψης

Ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης μπορεί να παραμετροποιηθεί ως προς τον τρόπο που επιλέγουμε την αρχική λύση, για παράδειγμα μπορούμε να επιλέγουμε με έναν τυχαίο τρόπο την αρχική εφικτή λύση είτε με κάποιον ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Επίσης, μπορεί να παραμετροποιηθεί ως προς την διαδικασία με την οποία επιλέγουμε την αυστηρά καλύτερη εφικτή λύση, η διαδικασία επιλογής καλείται *rintoting*. Παράδειγμα δύο διαφορετικών τρόπων *rintoting* είναι είτε να επιλέγουμε την πρώτη αυστηρά καλύτερη εφικτή λύση που βρίσκουμε είτε να επιλέγουμε την βέλτιστη ανάμεσα σε όλες τις αυστηρά καλύτερες εφικτές λύσεις. Οι παραμετροποιήσεις αυτές είναι σημαντικές, αφού μπορούν να οδηγήσουν σε καλύτερη λύση αλλά και σε καλύτερο χρόνο που απαιτεί ο αλγόριθμος για την εξαγωγή της λύσης.

Ανεξάρτητα του πως θα παραμετροποιήσουμε τον αλγόριθμο, πιο κρίσιμο είναι το να έχει οριστεί πρώτα η κατάλληλη γειτονιά. Αν κάποιος επιλέξει μια γειτονιά με μικρό πληθάριθμο (για απλότητα θεωρούμε ότι για όλες τις εφικτές λύσεις ο πληθάριθμος της γειτονιάς είναι ο ίδιος, τον οποίο θα καλούμε πληθάριθμο της γειτονιάς εν γένει) τότε η αναζήτηση μέσα στην γειτονιά θα είναι πολυωνυμική, όμως πιθανότατα το τοπικό βέλτιστο στο οποίο συγκλίνει θα απέχει σημαντικά από το ολικό βέλτιστο. Από την άλλη αν επιλέξουμε μια γειτονιά με μεγάλο πληθάριθμο τότε αυτή η γειτονιά πιθανότατα θα μας παρέχει ένα τοπικό βέλτιστο που θα βρίσκεται κοντά στο ολικό αλλά και πιθανότατα θα έχει αυξηθεί εκθετικά ο χρόνος αναζήτησης μέσα στην γειτονιά. Επίσης, λόγω της συνδυαστικής φύσης των προβλημάτων αυτών, ακόμα και στην περίπτωση που επιλέξουμε μια γειτονιά με μικρό πληθάριθμο είναι δυνατόν, αν και ο χρόνος αναζήτησης μέσα στη γειτονιά είναι πολυωνυμικός, να απαιτούνται εκθετικά το πλήθος βήματα επανάληψης μέχρι του σημείου που ο αλγόριθμος θα τερματίσει. Η ανάπτυξη, λοιπόν, μιας καλής γειτονιάς πρέπει με κάποιον τρόπο να



βρίσκει έναν τρόπο που θα συμβιβάζει όλα αυτά. Στην πραγματικότητα αυτό που γίνεται, σε πολλές περιπτώσεις, είναι πως η ανάπτυξη μιας γειτονιάς και ενός αλγόριθμου τοπικής αναζήτησης στηρίζονται σε ιδέες που δοκιμάζονται πειραματικά και εξελίσσονται με βάση την παρατήρηση πειραματικών δεδομένων. Αυτό συμβαίνει γιατί το θεωρητικό υπόβαθρο για την τοπική αναζήτηση δεν μας επιτρέπει ακόμα να αναλύσουμε πλήρως τα αντίστοιχα ζητήματα.

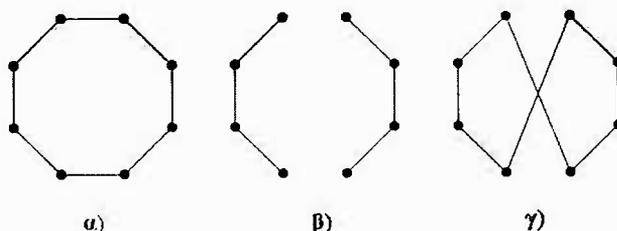
6.2 Οι σημαντικότερες γειτονιές για το ΠΠΠ

Η πρώτη σημαντική οικογένεια γειτονιών που έχει προταθεί για το ΠΠΠ είναι οι k -OPT γειτονιές. Οι δύο πρώτες εργασίες, στις οποίες συναντάμε κάποια μορφή αυτών των γειτονιών, εμφανίστηκαν το 1958. Οι εργασίες αυτές είναι αυτή του Croes [32], όπου συναντάμε μία μορφή της 2-OPT γειτονιάς, και του Bock [33], όπου συναντάμε μία μορφή της 3-OPT γειτονιάς. Αργότερα το 1965, πρώτα οι Reiter και Sherman μελέτησαν πιο συστηματικά αυτές τις γειτονιές στην εργασία τους στο [34], αλλά ο Lin ήταν αυτός που έδειξε την ισχύ της 3-OPT γειτονιάς με την εργασία του στο [35]. Οι γειτονιές αυτές έχουν προταθεί κυρίως για το Σ -ΠΠΠ, αν και μπορούν να επεκταθούν και για το A -ΠΠΠ. Η λογική τους είναι πως αν έχουμε μία εφικτή λύση για το ΠΠΠ (δηλαδή έναν κύκλο Hamilton) μπορούμε να αφαιρέσουμε κάποιες k ακμές και να συμπεριλάβουμε κάποιες άλλες k ακμές σχηματίζοντας μια νέα εφικτή λύση (δηλαδή ένα νέο κύκλο Hamilton). Το κόστος της νέας εφικτής λύσης θα έχει αυξηθεί κατά το κόστος των ακμών που συμπεριλαμβάνουμε και θα έχει ελαττωθεί κατά το κόστος των ακμών που αφαιρούμε. Άρα κάθε φορά για να δούμε αν η νέα εφικτή λύση είναι μικρότερου κόστους, τότε αρκεί να υπολογίσουμε την διαφορά του κόστους των ακμών που συμπεριλαμβάνουμε από αυτό των ακμών που αφαιρούμε.

Για να ορίσουμε την k -OPT γειτονιά για το Σ -ΠΠΠ, αν $k \geq 2$, είναι ευκολότερο να το κάνουμε μέσα από τις k -OPT κινήσεις. Μία k -OPT κίνηση είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας από μία εφικτή λύση οδηγούμαστε σε μία άλλη εφικτή λύση. Για να δώσουμε την k -OPT κίνηση αρκεί να περιγράψουμε μία 2-OPT κίνηση, από την οποία εύκολα μπορεί κανείς να επεκτείνει την αντίληψη του για τις k -OPT κινήσεις. Αν έχουμε μία εφικτή λύση, s , (Σχήμα 6.1 α)) τότε η 2-OPT κίνηση αναφέρεται στην αφαίρεση δύο ακμών από την s (Σχήμα 6.1 β)), με αποτέλεσμα να προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες, και την μετέπειτα σύνδεση των συνεκτικών αυτών συνιστωσών με τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγηθούμε σε μια νέα εφικτή λύση, t (Σχήμα 6.1 γ)). Αν $k \geq 2$ και s μία εφικτή λύση για το Σ -ΠΠΠ, τότε k -OPT γειτονιά της s είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων που προκύπτουν από όλες τις δυνατές m -OPT κινήσεις, για κάθε $2 \leq m \leq k$, επί της s . Να σημειώσουμε για να έχουμε μία αντίληψη του μεγέθους αυτής της γειτονιάς πως, για παράδειγμα, για την 2-OPT γειτονιά το πλήθος των γειτονικών λύσεων μιας αρχικής εφικτής λύσης είναι ο συνδυασμός των n ανά 2 ακμών, αν αφαιρέσουμε τις ακμές που μοιράζονται κάποιον κόμ-

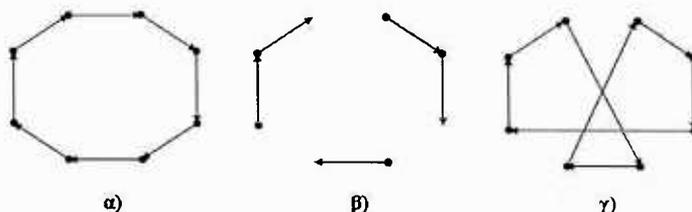


βο, στην αρχική εφικτή λύση. Δηλαδή, στην 2-OPT γειτονιά, το πλήθος των γειτονικών λύσεων μιας αρχικής εφικτής λύσης είναι ίσο με $\binom{n}{2} - n$.



Σχήμα 6.1: Μία 2-OPT κίνηση για το Σ-ΠΠΠ

Οι k -OPT γειτονιές για το Α-ΠΠΠ, αν $k \geq 3$, ορίζονται ανάλογα προς το Σ-ΠΠΠ. Αν σε κάποια εφικτή λύση του Α-ΠΠΠ αφαιρέσουμε κάποιες k ακμές προκύπτουν συνεκτικές συνιστώσες, οι οποίες δεν συνδέονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο Σ-ΠΠΠ για να σχηματίσουν νέα εφικτή λύση. Αυτός είναι και ο λόγος που η 2-OPT κίνηση, άρα και η 2-OPT γειτονιά, δεν ορίζεται για το Α-ΠΠΠ, αφού αν αφαιρέσουμε δύο ακμές από έναν κύκλο Hamilton, σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, δεν υπάρχει τρόπος οι συνεκτικές συνιστώσες, που προκύπτουν, να συνδεθούν έτσι ώστε να σχηματίσουν έναν νέο κύκλο Hamilton. Όμως αντίστοιχα προς το Σ-ΠΠΠ, αν $k \geq 3$, μπορούν να οριστούν οι k -OPT κινήσεις, και άρα και η k -OPT γειτονιά, για το Α-ΠΠΠ. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.2 που απεικονίζει μία 3-OPT κίνηση.

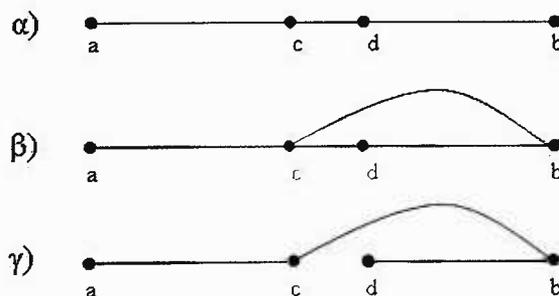


Σχήμα 6.2: Μία 3-OPT κίνηση για το Α-ΠΠΠ

Μια άλλη σημαντική γειτονιά, σημαντικότερη από τις k -OPT, που έχουμε για το Σ-ΠΠΠ είναι η Lin-Kernighan γειτονιά που αναπτύσσεται στην εργασία [36] των συγγραφέων από τους οποίους πήρε και το όνομά της. Η γειτονιά αυτή ορίζεται με τον εξής τρόπο. Έστω ότι έχουμε μια αρχική εφικτή λύση, τότε γειτονικές λύσεις της είναι αυτές που παράγονται από όλες τις δυνατές έγκυρες διαδοχικές περιστροφές. Είναι απαραίτητο λοιπόν να περιγράψουμε τι είναι μια περιστροφή και πότε μία περιστροφή είναι έγκυρη. Έστω ότι έχουμε μια αρχική εφικτή λύση και αφαιρούμε κάποια ακμή $\{b, a\}$, τότε προκύπτει ένα μονοπάτι

Hamilton (Σχήμα 6.3 α)). Θεωρούμε στα άκρα αυτού του μονοπατιού έναν κόμβο σταθερό, έστω τον a , και έναν μεταβλητό, έστω τον b . Για τον κόμβο που έχουμε ορίσει ως μεταβλητό, δηλαδή τον b , συμπεριλαμβάnuμε κάποια ακμή που έχει ως ένα άκρο τον κόμβο αυτόν, έστω την $\{b, c\}$ (Σχήμα 6.3 β)). Έτσι στην νέα ανάθεση ακμών σχηματίζεται ένας κύκλος. Το επόμενο βήμα είναι από τις δύο ακμές του αρχικού μονοπατιού Hamilton, που έχουν ως ένα άκρο τον κόμβο c , να αφαιρέσουμε εκείνη, έστω την $\{c, d\}$, που σπάει τον κύκλο σχηματίζοντας ένα νέο μονοπάτι Hamilton (Σχήμα 6.3 γ)), στο οποίο θεωρούμε νέο μεταβλητό κόμβο τον d , που είναι το νέο άκρο στο νέο μονοπάτι Hamilton. Αν πληρείται κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο, η περιστροφή αυτή θεωρείται έγκυρη και η εφικτή λύση που προκύπτει, αν κλείσουμε το μονοπάτι με την ακμή που συνδέει τα άκρα a και d , θεωρείται γειτονική λύση της αρχικής εφικτής λύσης. Το κριτήριο αυτό, περίπου, απαιτεί το κόστος των ακμών που αφαιρέσαμε ελαττωμένο κατά το κόστος των ακμών που συμπεριλάβαμε και αυτής που κλείνει το μονοπάτι Hamilton να είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί, χωρίς να επιτρέπεται να συμπεριλάβουμε ακμές που αφαιρέσαμε, με νέο μεταβλητό κόμβο, τον κόμβο d .

Αυτή είναι η βασική ιδέα της Lin-Kernighan γειτονιάς και από κει και πέρα υπάρχουν πολλές παραλλαγές ως προς το σε ποιο βάθος μπορούμε να φτάσουμε και ως προς το πως επιλέγουμε την ακμή που θα σχηματίσει κύκλο σε κάθε περιστροφή. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί πως οι Lin και Kernighan εκτός από την γειτονιά πρότειναν, όπως είναι φυσικό, και έναν αντίστοιχο αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος αυτός υλοποιεί κάτι που είναι χρήσιμο και σε άλλα προβλήματα τοπικής αναζήτησης, δηλαδή ο αλγόριθμος αυτός τρέχει τον αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης ως προς πολλές τυχαία παραγόμενες αρχικές εφικτές λύσεις παρέχοντας μας έτσι καλύτερες προσεγγίσεις. Η γειτονιά και ο αλγόριθμος αυτός από πολλούς θεωρήθηκε ο καλύτερος για το Σ-ΠΠΠ από το 1973 έως το 1989.



Σχήμα 6.3: Μία περιστροφή ως προς την Lin-Kernighan γειτονιά για το Σ-ΠΠΠ

Οι διάφοροι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης που έχουν αναπτυχθεί για το Σ-ΠΠΠ με αυτές τις γειτονιές, με βάση τα πειραματικά δεδομένα που έχουμε [37],[26], συγκλίνουν πολύ γρήγορα ως προς κάποια χαμηλής τάξης πολυωνυμο προς το μέγεθος της εισόδου και παράγουν πολύ καλές προσεγγίσεις. Μάλιστα στην εργασία του Johnson [37] βλέπουμε ότι κατά μέσο όρο, για τα στιγμιότυπα που παίρνει ο Johnson, αυτοί οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης τρέχουν σε καλύτερο χρόνο και παράγουν καλύτερες προσεγγίσεις από τον αλγόριθμο του Christofides. Επίσης, σε μετέπειτα εργασία του ίδιου [26] βλέπουμε ότι, για τα δεδομένα στιγμιότυπα που παίρνει, μια καλύτερη υλοποίηση του αλγόριθμου του Christofides τρέχει σε καλύτερο χρόνο από τους αλγόριθμους τοπικής αναζήτησης αλλά οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης για κάποιες παραλλαγές της Lin-Kernighan γειτονιάς παράγουν τις καλύτερες προσεγγίσεις ανάμεσα στους αλγόριθμους που δοκιμάζονται, μεταξύ των οποίων είναι και ο αλγόριθμος του Christofides. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την εργασία [26], κατά μέσο όρο ο αλγόριθμος του Christofides απαιτεί 0.44 sec και ο λόγος του προς το Held-Karp φράγμα είναι της τάξης του 11.05%, όταν έχουμε δύο αλγόριθμους τοπικής αναζήτησης βασισμένους σε δύο παραλλαγές της Lin-Kernighan γειτονιάς που ο ένας απαιτεί 2.06 sec και ο λόγος του προς το Held-Karp φράγμα είναι της τάξης του 2% και ο άλλος απαιτεί 1840 sec και ο λόγος του προς το Held-Karp φράγμα είναι της τάξης του 0.69%.

6.3 Πολυπλοκότητα των k -OPT και Lin-Kernighan γειτονιών

Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων τοπικής αναζήτησης είναι δύσκολο να εξεταστεί θεωρητικά. Ας σκεφτούμε το ΠΠΠ/2-OPT με τον αντίστοιχο αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης. Αν και η αναζήτηση μέσα στην γειτονιά γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι δύσκολο να πει κάποιος πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν προκειμένου να φτάσουμε σε κάποιο τοπικό βέλτιστο. Αυτό εξαρτάται από την αρχική επικριτή λύση, την διαδικασία pivoting και κυρίως την δομή της γειτονιάς για την οποία δεν μπορούμε πάντα να έχουμε τέτοια εικόνα της που να μπορούμε να πούμε κάτι για τις επαναλήψεις που θα χρειαστούν. Για παράδειγμα ο Lueker κατασκεύασε στιγμιότυπο για το οποίο υπάρχει εκθετικό πλήθος διαδοχικών 2-OPT κινήσεων μέχρι να φτάσουμε στην τοπικά βέλτιστη λύση με την εργασία του στο [40], και αργότερα οι Chandra, Karloff και Tovey επέκτειναν την κατασκευή αυτή για οποιαδήποτε k -OPT γειτονιά με $k \geq 2$ με την εργασία τους στο [44]. Όμως αυτά τα αποτελέσματα προϋποθέτουν την διαδικασία pivoting, με συνέπεια το αποτέλεσμα αυτό να μην μπορεί να χαρακτηρίσει το αντίστοιχο πρόβλημα τοπικής αναζήτησης αφού μπορούν να υπάρχουν άλλοι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης με διαφορετική διαδικασία pivoting, που για αυτό το στιγμιότυπο, να χρειάζεται πολυωνυμικό πλήθος 2-OPT κινήσεων προκειμένου να συγκλίνει ο αλγόριθμος.

Επίσης, σημαντικό είναι να πούμε πως δεν είναι ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης από τον οποίο μπορεί να προκύπτει η πολυπλοκότητα του αν-



τίστοιχου προβλήματος. Για παράδειγμα, για το ΓΠ ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης που γνωρίζουμε είναι η μέθοδος Simplex, που είναι μη πολυωνυμικός για τις περισσότερες διαδικασίες ρινοiting που γνωρίζουμε (για τις υπόλοιπες δεν υπάρχει κάποιο αποτέλεσμα που να μας λέει αν ο αντίστοιχος αλγόριθμος είναι πολυωνυμικός ή όχι), όμως ο αλγόριθμος του ελλειψοειδούς είναι ένας αλγόριθμος που δεν χαρακτηρίζεται ως αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης, είναι πολυωνυμικού χρόνου και επιλύει το ΓΠ.

Επιπλέον, ενώ έχουμε μια σημαντική κλάση, αυτή των \mathcal{NP} -πλήρων προβλημάτων, αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει τα προβλήματα τοπικής αναζήτησης. Η κλάση των \mathcal{NP} -πλήρων προβλημάτων χαρακτηρίζει προβλήματα βελτιστοποίησης στην εκδοχή αποφάσεως και συνεπακόλουθα προβλήματα βελτιστοποίησης στην εκδοχή κόστους, αφού ένα πρόβλημα στην εκδοχή αποφάσεως δεν είναι δυσκολότερο από αυτό στην εκδοχή κόστους με την έννοια πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση από την εκδοχή κόστους για να λύσουμε το πρόβλημα στην εκδοχή αποφάσεως. Αυτό δεν συμβαίνει και με τα προβλήματα τοπικής αναζήτησης αφού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση του προβλήματος τοπικής αναζήτησης για να λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης στην εκδοχή αποφάσεως. Για τον λόγο αυτό προτάθηκε, από τους Johnson, Papadimitriou και Yannakakis στην εργασία τους στο [39], η κλάση PLS για να χαρακτηρίσει προβλήματα τοπικής αναζήτησης.

Ορισμός 6.3.1

Ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π λέμε ότι ανήκει στην κλάση PLS αν υπάρχουν τρεις πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι A_Π, B_Π, C_Π τέτοιοι ώστε:

1. Ο αλγόριθμος A_Π υπολογίζει αν ένα στιγμιότυπο x είναι ένα στιγμιότυπο του Π και παράγει μια αρχική εφικτή λύση s_0 για αυτό το στιγμιότυπο.
2. Δεδομένου ενός στιγμιότυπου x και μίας λύσης s , ο αλγόριθμος B_Π υπολογίζει αν η s είναι εφικτή για το x , κι αν είναι υπολογίζει το κόστος της s .
3. Δεδομένου ενός στιγμιότυπου x και μίας λύσης s , ο αλγόριθμος C_Π υπολογίζει αν το s είναι τοπικά βέλτιστη λύση, και αν όχι ο αλγόριθμος C_Π παράγει μία γειτονική λύση της s με αυστηρά μικρότερο κόστος.

Όπως παρατηρεί κανείς αυτές είναι οι ελάχιστες συνθήκες που πρέπει να πληρεί ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης προκειμένου να μας επιτρέπεται να πούμε ότι ο αλγόριθμος αυτός μπορεί και να είναι πολυωνυμικού χρόνου για το αντίστοιχο πρόβλημα τοπικής αναζήτησης.

Αντίστοιχα προς την \mathcal{NP} -πλήρη κλάση, μέσα στην κλάση των PLS προβλημάτων υπάρχει μια κλάση προβλημάτων τα οποία ανάγονται το ένα στο άλλο. Η κλάση αυτή είναι η κλάση των PLS -πλήρων προβλημάτων. Ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης λέμε πως είναι PLS -πλήρες αν ανήκει στην κλάση PLS και κάθε άλλο πρόβλημα, που είναι PLS , PLS -ανάγεται σε αυτό.

Ορισμός 6.3.2

Αν είναι Π_1 και Π_2 δύο αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης τότε μία PLS -αναγωγή



αποτελείται από δύο πολυωνυμικού χρόνου υπολογίσιμες συναρτήσεις h και g τέτοιες ώστε,

- i) Η συνάρτηση h αντιστοιχίζει τα στιγμιότυπα x του Π_1 σε στιγμιότυπα του Π_2 ,
- ii) Η συνάρτηση g αντιστοιχίζει τις εφικτές λύσεις του $h(x)$ σε εφικτές λύσεις του x και
- iii) Για όλα τα στιγμιότυπα του Π_1 , αν s είναι ένα τοπικό βέλτιστο για το στιγμιότυπο $h(x)$ του Π_2 τότε η εφικτή λύση $g(s)$ είναι τοπικό βέλτιστο του x .

Αξιζει να σημειώσουμε πως το πρώτο πρόβλημα που αποδείχτηκε πως είναι *PLS*-πλήρες είναι το Circuit/Flip, τόσο στην εκδοχή ελαχιστοποίησης όσο και στην εκδοχή μεγιστοποίησης. Ανάλογα με την *NP*-πληρότητα, για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι *PLS*-πλήρες, αρκεί το πρόβλημα να είναι *PLS* και κάποιο άλλο γνωστο *PLS*-πλήρες πρόβλημα να *PLS*-ανάγεται σε αυτό. Οι *PLS*-αναγωγές στις περισσότερες περιπτώσεις είναι πολύ ειδικές και πολυσέλιδες. Επίσης, το μόνο που γνωρίζουμε για αυτή την κλάση είναι πως αν κάποιο από τα προβλήματα τοπικής αναζήτησης, που ανήκουν στην *PLS*-πλήρη κλάση, επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και κάθε πρόβλημα, που ανήκει στην *PLS*-πλήρη κλάση, επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτή τη στιγμή δεν γνωρίζουμε να υπάρχει κάποιος πολυωνυμικός αλγόριθμος για κάποιο από τα προβλήματα που ανήκουν σ' αυτή την κλάση και η εικασία που έχει γίνει είναι ότι δεν υπάρχει.

Μία ακόμα πιο ισχυρή κλάση προβλημάτων τοπικής αναζήτησης είναι η κλάση των σφικτά *PLS*-πλήρων προβλημάτων [38]. Η κλάση αυτή ορίζεται αντίστοιχα προς την *PLS*-πλήρη κλάση, μόνο που εδώ ζητάμε η *PLS*-αναγωγή να είναι σφικτή. Θα αναφέρουμε έναν απαραίτητο ορισμό και έπειτα θα δώσουμε τον ορισμό της σφικτά *PLS*-αναγωγής.

Ορισμός 6.3.3

Έστω Π ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης και x ένα στιγμιότυπο του Π . Ο γράφος της γειτονιάς $NG_{\Pi}(x)$ του στιγμιότυπου x είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος με κάθε κόμβο να αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του x και μία κατευθυνόμενη ακμή (s, t) να ανήκει στον γράφο αν η εφικτή λύση t ανήκει στην γειτονιά της εφικτής λύσης s . Ο γράφος μετάβασης $TG_{\Pi}(x)$ είναι ο υπογράφος του $NG_{\Pi}(x)$ ο οποίος περιλαμβάνει μόνο εκείνες τις ακμές (s, t) για τις οποίες το κόστος της εφικτής λύσης t είναι αυστηρά καλύτερο από αυτό της s .

Ορισμός 6.3.4

Έστω ότι P και Q είναι δύο προβλήματα τοπικής αναζήτησης και έστω ότι (h, g) είναι μία *PLS*-αναγωγή από το P στο Q . Τότε λέμε ότι η αναγωγή είναι σφικτή αν για κάθε στιγμιότυπο x του P μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο R εφικτών λύσεων από το $y = h(x)$ του Q τέτοιο ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το R περιλαμβάνει όλα τα τοπικά βέλτιστα του στιγμιότυπου y .



2. Για κάθε εφικτή λύση p του x μπορούμε να κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο μία εφικτή λύση $q \in R$ του y τέτοια ώστε $g(q) = p$.
3. Θεωρούμε τον γράφο μετάβασης του y , τον $TG_Q(y)$, ο οποίος περιλαμβάνει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το $q \in R$ στο $q' \in R$, τέτοιο ώστε όλοι οι κόμβοι που βρίσκονται στο κατευθυνόμενο μονοπάτι να είναι εκτός του R και θεωρούμε $p = g(q, x)$ και $p' = g(q', x)$ τις αντίστοιχες λύσεις του x . Τότε θα ισχύει είτε ότι $p = p'$ είτε ότι ο $TG_\Pi(x)$ θα περιλαμβάνει μια ακμή από το p στο p' .

Η κλάση των σφικτά PLS -πλήρων προβλημάτων είναι πιο ισχυρή από την κλάση των PLS -πλήρων προβλημάτων, αφού για τα σφικτά PLS -πλήρη προβλήματα γνωρίζουμε πως έχουν εκθετική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης [38].

Για τις διάφορες γειτονιές του ΠΠΠ, ως προς την PLS -πληρότητα, αυτό που γνωρίζουμε είναι πως το ΠΠΠ με μια ειδική γειτονιά την LK' , που κατασκευάστηκε από τους Johnson, Papadimitriou και Yannakakis και είναι μια παραλλαγή της Lin-Kernighan γειτονιάς, είναι ένα σφικτά PLS -πλήρες πρόβλημα [39]. Όπως επίσης γνωρίζουμε ότι για κάποιο σταθερό k αρκετά μεγάλο έχει αποδειχθεί ότι το ΠΠΠ/ k -OPT είναι ένα σφικτά PLS -πλήρες πρόβλημα, σύμφωνα με την εργασία του Krentel [40]. Μάλιστα, ο Krentel ισχυρίστηκε πως το $k = 8$ ικανοποιεί το αποτέλεσμα του, που ίσως μπορεί να αναχθεί και σε $k = 6$. Κατά συνέπεια τα προβλήματα τοπικής αναζήτησης ΠΠΠ/ LK' και ΠΠΠ/ k -OPT για κάποιο k σταθερό και αρκετά μεγάλο έχουν εκθετική πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης. Όμως παραμένει ανοιχτό ακόμα το ερώτημα αν για την 2-OPT, την 3-OPT και την Lin-Kernighan γειτονιά τα αντίστοιχα προβλήματα τοπικής αναζήτησης είναι PLS -πλήρη και άρα για αυτά τα προβλήματα δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για την πολυπλοκότητα τους.

6.4 Προσεγγισιμότητα της 2-OPT γειτονιάς

Αντίστοιχα προς την πολυπλοκότητα είναι δύσκολο να εξαχθούν θεωρητικά αποτελέσματα προσεγγισιμότητας για τις διάφορες γειτονιές του Σ -ΠΠΠ. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα που έχουμε αυτή τη στιγμή αφορούν την 2-OPT γειτονιά. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, γνωρίζουμε πως ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το Σ -ΠΠΠ/2-OPT έχει λόγο προσέγγισης $4\sqrt{n}$. Όπως επίσης γνωρίζουμε πως ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το (1,2)-ΠΠΠ/2-OPT έχει λόγο προσέγγισης $3/2$. Το (1,2)-ΠΠΠ είναι το Σ -ΠΠΠ με τον περιορισμό ότι η συνάρτηση κόστους έχει πεδίο τιμών το $\{1, 2\}$, δηλαδή το κόστος για κάθε ακμή είναι 1 ή 2. Για την προσεγγισιμότητα του (1,2)-ΠΠΠ γνωρίζουμε πως υπάρχει αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης $8/7$, σύμφωνα με το αποτέλεσμα που μας παρείχαν οι Bergman και Karpinski στην εργασία τους στο [42]. Επίσης για το ίδιο πρόβλημα, γνωρίζουμε πως δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης καλύτερο από $741/740$, σύμφωνα με το αποτέλεσμα που μας παρείχαν οι Engebretsen και Karpinski στην εργασία



τους στο [43].

Οι Chandra, Karloff και Tovey στην εργασία τους στο [44] απέδειξαν μεταξύ άλλων ότι ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το Σ -ΠΠΠ/2-*OPT* έχει λόγο προσέγγισης $4\sqrt{n}$ και ότι το φράγμα αυτό είναι στενό. Προκειμένου να αποδειχθεί αυτός ο λόγος προσέγγισης απαραίτητο είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.4.1

Έστω $G(V, E)$ ένας πλήρης μη κατευθυνόμενος γράφος, c η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους και $T(V)$ μία τοπικά βέλτιστη λύση ως προς την 2-*OPT* γειτονιά. Τότε για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$, αν είναι $E_k = \{e \in T(V) | c(e) > 2C^*/\sqrt{k}\}$, ισχύει ότι $|E_k| < k$.

Απόδειξη. Αρχικά θα κάνουμε μια παρατήρηση.

Παρατήρηση:

Για κάποιο στιγμιότυπο του Σ -ΠΠΠ, λόγω της τριγωνικής ιδιότητας, για κάθε $V' \subseteq V$ έπεται ότι $C^*(V') \leq C^*$, όπου $C^*(V')$ είναι η λύση του Σ -ΠΠΠ που περιορίζεται στους κόμβους V' και C^* είναι η λύση του Σ -ΠΠΠ, συνολικά για το στιγμιότυπο.

Θεωρούμε $G(V, E)$ έναν πλήρη μη κατευθυνόμενο γράφο, c την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους, $T(V)$ μία τοπικά βέλτιστη λύση ως προς την 2-*OPT* γειτονιά και $E_k = \{e \in T(V) | c(e) > 2C^*/\sqrt{k}\}$, για $k \in \{1, \dots, n\}$. Θα αποδείξουμε με την εις άτοπον απαγωγή ότι ισχύει $|E_k| < k$, για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$, υποθέτοντας το αντίθετο. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $r = |E_k| \geq k$. Διευθετούμε τις ακμές στο $T(V)$ έτσι ώστε να σχηματίζουν έναν κατευθυνόμενο κύκλο Hamilton. Θεωρούμε τις κατευθυνόμενες ακμές (ως προς την ως άνω διεύθυνση) στο E_k , $(t_1, h_1), (t_2, h_2), \dots, (t_r, h_r)$, όπου τα t_i είναι η αφετηρία και τα h_i είναι η κατάληξη για κάθε ακμή.

Αρχικά θα δούμε πόσες καταλήξεις μπορούν να υπάρχουν σε μια σφαίρα ακτίνας $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$ με κέντρο κάποιο σημείο στον μετρικό χώρο. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός των καταλήξεων σε κάθε τέτοια σφαίρα είναι μικρότερος από \sqrt{k} , με την εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι υπάρχει σφαίρα ακτίνας $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$ με κέντρο κάποιο σημείο στον μετρικό χώρο, για την οποία οι καταλήξεις που βρίσκονται μέσα στην σφαίρα είναι οι $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_p}$, για κάποιο $p \geq \sqrt{k}$. Και ας είναι $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_p}$ οι αντίστοιχες αφετηρίες. Για οποιαδήποτε u, v , με $u \neq v$, ισχύει ότι $d(t_{i_u}, t_{i_v}) \leq \frac{2C^*}{\sqrt{k}}$, αφού βρίσκονται στην σφαίρα ακτίνας $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$. Επίσης, ισχύει ότι $d(h_{i_u}, h_{i_v}) \geq \frac{2C^*}{\sqrt{k}}$, αφού διαφορετικά έχουμε έναν κύκλο Hamilton, $T(V) \cup \{(t_{i_u}, t_{i_v}), (h_{i_u}, h_{i_v})\} \setminus \{(t_{i_u}, h_{i_u}), (t_{i_v}, h_{i_v})\}$, μικρότερου κόστους από τον $T(V)$, που ανήκει στην 2-*OPT* γειτονιά του $T(V)$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το ότι η λύση $T(V)$ είναι τοπικά βέλτιστη ως προς την 2-*OPT* γειτονιά. Κατά συνέπεια υπάρχουν



$p \geq \sqrt{k}$ αφετηρίες για τις οποίες οι αποστάσεις μεταξύ των αφετηριών αυτών είναι τουλάχιστον $\frac{2C^*}{\sqrt{k}}$. Το τελευταίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η λύση του Σ-ΠΠΠ που περιορίζεται σε αυτές τις αφετηρίες είναι κόστους τουλάχιστον $\sqrt{k} \frac{2C^*}{\sqrt{k}} = 2C^*$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την παρατήρηση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης.

Τώρα θα δείξουμε πόσες καταλήξεις μπορούν να υπάρχουν ως προς κάποια απόσταση μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία μία κατάληξη t_i και θεωρούμε την σφαίρα ακτίνας $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$ με κέντρο την κατάληξη t_i . Αφαιρούμε όλες τις καταλήξεις στην σφαίρα, έπειτα επιλέγουμε κάποια από τις υπόλοιπες και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ώσπου όλες οι καταλήξεις να έχουν αφαιρεθεί. Δεδομένου ότι υπάρχουν τουλάχιστον k καταλήξεις και σε μία μόνο επανάληψη μπορούν να αφαιρεθούν λιγότερες από \sqrt{k} , αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί περισσότερες από \sqrt{k} φορές. Προφανώς οι καταλήξεις V' που απομένουν, με αυτή τη διαδικασία, είναι περισσότερες από \sqrt{k} και οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι μεγαλύτερες από $\frac{C^*}{\sqrt{k}}$. Όμως, αυτό σημαίνει πως $C^*(V') > \sqrt{k} \cdot \frac{C^*}{\sqrt{k}} > C^*$ το οποίο είναι άτοπο δεδομένης της παρατήρησης που κάναμε στην αρχή της απόδειξης. \square

Θεώρημα 6.4.1

Ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης με την 2-OPT γειτονιά επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $4\sqrt{n}$ για το Σ-ΠΠΠ.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.4.1 προκύπτει πως αν διατάξουμε τις ακμές της T ως προς τα κόστη τους, τότε η k -οστή ακμή είναι κόστους το πολύ $2C^*/\sqrt{k}$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να φράξουμε το κόστος C της διαδρομής T ως εξής,

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^n c(k\text{-οστή ακμή}) \\ &\leq 2C^* \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\leq 2C^* \int_{x=0}^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 4\sqrt{n}C^* \end{aligned}$$

\square

Οι Khanna, Motwani, Sudan και Vazirani στην εργασία τους στο [45] απέδειξαν ότι ο αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το (1,2)-ΠΠΠ/2-OPT έχει λόγο προσέγγισης $3/2$. Η απόδειξη αυτή αναπτύσσεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.4.2

Ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης με την 2-OPT γειτονιά επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $3/2$ για το Συμμετρικό (1,2)-ΠΠΠ.



Απόδειξη. Θεωρούμε $C = \langle u_{\pi_1}, u_{\pi_2}, \dots, u_{\pi_n}, u_{\pi_1} \rangle$ έναν κύκλο Hamilton, που είναι μια τοπικά βέλτιστη λύση ως προς την 2-OPT γειτονιά, και O τον ελάχιστο κύκλο Hamilton. Θα καταλήξουμε στην απόδειξη του θεωρήματος με μια κατάλληλη αντιστοίχιση ανάμεσα στις ακμές μοναδιαίου κόστους για τους δύο κύκλους. Για κάθε ακμή e μοναδιαίου κόστους στην O , η αντιστοίχιση μιας ακμής e' μοναδιαίου κόστους στην C γίνεται ως εξής. Κάθε ακμή e είναι της μορφής $e = (u_{\pi_i}, u_{\pi_j})$, για κάποια i, j με $i < j$. Αν $j = i+1$ τότε η ακμή e' , για την οποία $e \rightarrow e'$, είναι η $e' = e$. Διαφορετικά μία από τις $e_1 = (u_{\pi_i}, u_{\pi_{i+1}})$ και $e_2 = (u_{\pi_j}, u_{\pi_{j+1}})$ θα είναι μοναδιαίου κόστους και άρα η ακμή e' για την οποία $e \rightarrow e'$ θα είναι η $e' = e_1$ ή η $e' = e_2$. Αν και οι δύο ακμές ήταν κόστους 2 τότε ο κύκλος Hamilton που προκύπτει από τον C , αν αφαιρέσουμε τις e_1 και e_2 και συμπεριλάβουμε τις ακμές e και $(u_{\pi_{i+1}}, u_{\pi_{j+1}})$, είναι μικρότερου κόστους από τον C και άρα ο C δεν είναι τοπικά βέλτιστη λύση ως προς την 2-OPT γειτονιά. Το τελευταίο σχηματίζει αντίθεση ως προς την αρχική υπόθεση.

Θεωρούμε U_O το σύνολο των ακμών μοναδιαίου κόστους για τον O και U_C το σύνολο των ακμών μοναδιαίου κόστους για τον C , που προκύπτει σύμφωνα με την ως άνω αντιστοίχιση. Σε κάθε ακμή $e' = (u_{\pi_i}, u_{\pi_{i+1}})$ στο σύνολο U_C μπορεί να αντιστοιχούν το πολύ δύο ακμές του συνόλου U_O , αφού το O είναι κύκλος Hamilton και στον κόμβο u_{π_i} μπορεί να αντιστοιχούν το πολύ δύο ακμές κόστους 1 της O . Έτσι προκύπτει ότι $|U_C| \geq |U_O|/2$. Προφανώς, όσο μικρότερος είναι ο πληθάνριθμος του συνόλου U_C τόσο μεγαλύτερο είναι το κόστος στην διαδρομή C . Άρα στην χειρότερη περίπτωση, για τον λόγο προσέγγισης, θεωρούμε ότι $|U_C| = |U_O|/2$, και έχουμε ότι,

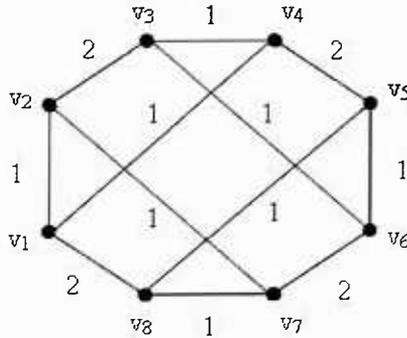
$$\begin{aligned} \frac{c(C)}{c(O)} &= \frac{|U_C| + 2(n - |U_C|)}{|U_O| + 2(n - |U_O|)} \\ &= \frac{\frac{|U_O|}{2} + 2(n - \frac{|U_O|}{2})}{|U_O| + 2(n - |U_O|)} \\ &= \frac{\frac{3}{2}|U_O| + 2(n - |U_O|)}{|U_O| + 2(n - |U_O|)} \\ &\leq \frac{\frac{3}{2}|U_O| + 3(n - |U_O|)}{|U_O| + 2(n - |U_O|)} \\ &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Να σημειώσουμε πως $2(n - |U_O|) \leq 3(n - |U_O|)$, αφού προφανώς $n \geq |U_O|$, με την ισότητα $n = |U_O|$ να αντιστοιχεί στην χειρότερη περίπτωση ως προς τον λόγο προσέγγισης. Επίσης το $|U_O|$ παίρνει τιμές συναρτησί του n και γ' αυτό δεν μπορούμε να δούμε που συγκλίνει ασυμπτωτικά ο λόγος προσέγγισης για πολύ μεγάλα n χωρίς να συνυπολογίζουμε τις τιμές $|U_O|$. \square

Αυτός ο λόγος προσέγγισης αποδεικνύεται ότι είναι στενός. Για να αποδείξουμε ότι ο λόγος προσέγγισης είναι στενός, θεωρούμε έναν πλήρη γράφο $G(V, E)$ τέτοιο ώστε $|V| = 2n$, και για τον οποίο οι ακμές $\{2i, 2i - 1\}$ και



$\{2i - 1, (2i + 1) \bmod 2n + 1\}$ για $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ είναι κόστους 1 και όλες οι υπόλοιπες ακμές είναι κόστους 2. Αυτός ο γράφος φαίνεται στο Σχήμα 6.4 για $n = 4$, όπου οι ακμές που δεν φαίνονται είναι κόστους 2. Για αυτό το στιγμιότυπο, είναι δυνατόν ένας αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης, ως προς την 2-OPT γειτονιά να ξεκινήσει ή να συγκλίνει σε κάποιο σημείο στην εφικτή λύση $T = \{ \{k, k + 1\} | k \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\} \} \cup \{2n, 1\}$, αφού είναι τοπικά βέλτιστη. Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι τοπικά βέλτιστη ως προς την 2-OPT γειτονιά. Προφανώς, για να οδηγηθούμε σε μία καλύτερη λύση από αυτή που ήδη έχουμε πρέπει να συμπεριλαμβάνεται κάποια από τις ακμές κόστους 1 που δεν συμπεριλαμβάνονται ήδη. Έστω λοιπόν ότι v είναι μια ακμή κόστους 1 που δεν συμπεριλαμβάνεται στην T . Για κάθε ακμή v παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ακμές κόστους 1 που βρίσκονται στην πρώτη από τις δύο συνιστώσες που ορίζουν τα άκρα της v στην T , και δύο ακμές κόστους 2 που βρίσκονται στην δεύτερη συνιστώσα. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την παρατήρηση, σε κάθε 2-OPT κίνηση, για την λύση T , που θα συμπεριλάβει μια ακμή κόστους 1, το κόστος των ακμών που θα αφαιρεθούν είναι ακριβώς τρία. Επίσης, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν δύο ακμές κόστους 1, που να μην συμπεριλαμβάνονται στην T , για τις οποίες τα άκρα τους με κάποιον τρόπο να ορίζουν δύο ακμές στην T . Σύμφωνα λοιπόν με την δεύτερη παρατήρηση, σε κάθε 2-OPT κίνηση, για την λύση T , το κόστος των ακμών που θα συμπεριλαμβάνονται στην διαδρομή είναι τουλάχιστον 3. Οι δύο αυτές παρατηρήσεις οδηγούν άμεσα στο συμπέρασμα ότι η T είναι τοπικά βέλτιστη ως προς την 2-OPT γειτονιά.



Σχήμα 6.4: Στιγμιότυπο Συμμετρικού (1,2)-ΠΠΠ με λόγο προσέγγισης $3/2$ για $|V| = 8$

Το κόστος της βέλτιστης λύσης είναι $C^* = 2n$, με αντίστοιχο κύκλο Hamilton τον $T^* = \langle a_0, a_1, \dots, a_0 \rangle$, όπου $a_{2k-1} = 2k$ και $a_{2k} = 2k - 1$, για $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (για το παράδειγμα του σχήματος $T^* = \langle v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_5, v_8, v_7, v_2 \rangle$). Θα δείξουμε ότι η T^* είναι ένας κύκλος Hamilton. Εύκολα παρατη-

ρούμε ότι ξεκινάμε και καταλήγουμε στον ίδιο κόμβο a_0 . Επίσης, παρατηρούμε ότι επισκεπτόμαστε όλους τους κόμβους ακριβώς μία φορά, αφού η ακολουθία a_k , για $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, είναι μία διάταξη των κόμβων V . Άρα η T^* σχηματίζει έναν κύκλο Hamilton, ενώ οι ακμές της είναι ακριβώς αυτές οι οποίες ορίστηκαν να έχουν κόστος 1 και άρα $C^* = |V|$. Από την άλλη το κόστος της τοπικά βέλτιστης λύσης T είναι $C = 3\frac{|V|}{2} = 3|V|/2$, αφού είναι μια διάσχιση ακμών με κόστος 1 και 2 εναλλάξ. Άρα έχουμε ότι, $\frac{C}{C^*} = \frac{3|V|/2}{|V|} = \frac{3}{2}$. Αν θυμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.2, τότε η περίπτωση που εξετάσαμε είναι πράγματι η χειρότερη δυνατή περίπτωση, αφού για κάθε ακμή κόστους 1 στην T αντιστοιχίζονται δύο ακμές κόστους 1 από την T^* και όλες οι ακμές στην βέλτιστη λύση (στον ελάχιστο κύκλο Hamilton) είναι κόστους 1.

Συμπεράσματα

Το θεωρητικό έργο που αφορά το ΠΠΠ είναι πυκνό και βρίσκεται σε ένα πολύ υψηλό επίπεδο, αλλά και οι επιστήμονες που έχουν παράγει αυτό το έργο είναι πολλοί και κορυφαίοι στον χώρο τους. Το γεγονός αυτό είναι δυνατόν να αποτρέψει κάποιον να εντυφλήσει στο ΠΠΠ. Όμως το ΠΠΠ είναι ένα σημαντικό πρακτικό πρόβλημα και ως τέτοιο ένας οποιοσδήποτε αλγόριθμος, καλύτερος από αυτούς που ήδη ξέρουμε, θα είχε ένα άμεσο πρακτικό αντίκρυσμα και όφελος. Κατά συνέπεια είναι πολύ σημαντικό και εξαιρετικά ενδιαφέρον να εξελίξουμε αυτό το θεωρητικό έργο, από την μελέτη του οποίου προκύπτουν εξαιρετικά ενδιαφέροντα ανοικτά ερωτήματα.

Συνοψίζοντας αυτή την εργασία θα λέγαμε τα εξής. Δεν έχει νόημα να αναζητούμε πολυωνυμικούς αλγόριθμους που λύνουν βέλτιστα, ή ως προς μια προσέγγιση του, το ΠΠΠ, αν δεν ισχύει για αυτό η τριγωνική ιδιότητα. Επίσης, δεν έχει νόημα να αναζητούμε πολυωνυμικούς αλγόριθμους που λύνουν βέλτιστα οποιαδήποτε παραλλαγή του Δ-ΠΠΠ (Σ-ΠΠΠ, Α-ΠΠΠ ή Ε-ΠΠΠ). Αυτό που έχει νόημα είναι να αναζητούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους ή προσεγγιστικά σχήματα για τις διάφορες παραλλαγές του Δ-ΠΠΠ. Για το Ε-ΠΠΠ γνωρίζουμε πως υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα και πως δεν μπορεί να υπάρχει πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα. Κατά συνέπεια, αυτό που θα είχε κάποιο ενδιαφέρον θα ήταν να βρεθεί κάποιο άλλο προσεγγιστικό σχήμα με καλύτερη πολυπλοκότητα χρόνου. Για το Σ-ΠΠΠ γνωρίζουμε πως υπάρχει ένας 1.5-προσεγγιστικός αλγόριθμος, όταν γνωρίζουμε πως δεν μπορεί να υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης καλύτερο από 220/219. Κατά συνέπεια, ενδιαφέρον θα ήταν να βρούμε κάποιο προσεγγιστικό αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης καλύτερο από 1.5 ή να αυξήσουμε το κάτω φράγμα μη προσεγγισιμότητας, 220/219. Για το Α-ΠΠΠ γνωρίζουμε πως υπάρχει ένας $0.841 \log n$ -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όταν γνωρίζουμε πως δεν μπορεί να υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης καλύτερο από 117/116. Κατά συνέπεια, ενδιαφέρον θα ήταν να βρούμε ένα προσεγγιστικό αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης καλύτερο από $0.841 \log n$, και ακόμα πιο ενδιαφέρον θα ήταν ο λόγος προσέγγισης να είναι σταθερός και όχι συναρτησιακός, ή να αυξήσουμε το κάτω φράγμα μη προσεγγισιμότητας, 117/116. Να τονίσουμε πως πιστεύουμε ότι για το Α-ΠΠΠ υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με σταθερό λόγο προσέγγισης. Άρα κάτι που



θα άλλαζε σημαντικά αυτά που γνωρίζουμε για το Α-ΠΠΠ, και κατ' επέκταση για το ΠΠΠ, θα ήταν να βρούμε για αυτό το πρόβλημα κάποιον ρ -προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Επίσης, το Δ -ΠΠΠ επιχειρείται να προσεγγιστεί από την κατεύθυνση του Ακέραιου Προγραμματισμού (ΑΠ). Ο ΑΠ δεν έχει καταφέρει ακόμα να μας δώσει έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο, αφού δεν έχει υλοποιηθεί κάποια μέθοδος στρογγυλοποίησης. Ενδιαφέρον, λοιπόν, θα ήταν να βρεθεί κάποια μέθοδος στρογγυλοποίησης. Η βέλτιστη λύση συγκεκριμένου ΑΠ για το Σ -ΠΠΠ και Α-ΠΠΠ είναι γνωστή ως Held-Karp φράγμα. Για τα ίδια ΑΠ του Α-ΠΠΠ και του Σ -ΠΠΠ έχουν αποδειχθεί σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με τους λόγους ακριαιότητας. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί πως το κάτω φράγμα αυτού του λόγου ακριαιότητας είναι $4/3$ για το Σ -ΠΠΠ και 2 για το Α-ΠΠΠ. Πιστεύεται επίσης ότι οι λόγοι αυτοί είναι ακριβώς $4/3$ και 2 αντίστοιχα και ότι οι ίδιοι αποτελούν φράγματα μη προσεγγισιμότητας για το Σ -ΠΠΠ και Α-ΠΠΠ αντίστοιχα.

Τέλος, μία άλλη σημαντική κατεύθυνση που έχει χρησιμοποιηθεί για το Δ -ΠΠΠ είναι η τοπική αναζήτηση. Προς αυτή την κατεύθυνση έχει προταθεί, από τους Paradimitriou και Yannakakis, ένα θεωρητικό πλαίσιο μέσα από το οποίο εξετάζουμε την πολυπλοκότητα των αντίστοιχων προβλημάτων τοπικής αναζήτησης. Επίσης, η πειραματική εμπειρία έχει δείξει πως η τοπική αναζήτηση, με τις γειτονίες που έχουν προταθεί για το Δ -ΠΠΠ, μας παρέχει τους καλύτερους αλγόριθμους, ως προς την προσέγγιση που επιτυγχάνουν και με τους αλγόριθμους αυτούς να απαιτούν πολυωνυμικό χρόνο. Όμως θεωρητικά αποδεικνύεται πως ο λόγος προσέγγισης της 2-OPT γειτονιάς για το Σ -ΠΠΠ είναι συναρτησιακός. Αυτό που θα είχε, λοιπόν, ενδιαφέρον σ' αυτή την κατεύθυνση θα ήταν μία καλύτερη θεωρητική ανάλυση που θα ανταποκρίνεται στην εμπειρία μας.



Βιβλιογραφία

- [1] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας,
“Απειροστικός Λογισμός”,
Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.
- [2] C. H. Papadimitriou,
“Computational complexity”,
Addison-Wesley, 1994.
- [3] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz,
“Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity”,
Dover Publications, 1982.
- [4] M. R. Garey, R. L. Graham and D. S. Johnson,
“Some NPcomplete geometric problems”,
In Proceedings of the 8th ACM Symposium on Theory of Computing
(STOC), pp. 10-22, 1976.
- [5] C. H. Papadimitriou,
“Euclidean TSP is NP-complete”,
TCS 4, pp. 237-244, 1977.
- [6] N. Christofides,
“Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Traveling Salesman
Problem”,
Technical Report in Carnegie-Mellon University, 1976.
- [7] S. Arora,
“Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean TSP and oth-
er Geometric Problems”,
JACM 45 (5), pp. 753-782, 1998
- [8] A. Frieze, G. Galbiati and F. Maffioli,
“On the worst-case performance of some algorithms for the asymmetric
traveling salesman problem”,
Networks 12, pp. 23-39, 1982.



- [9] M. Blaser,
“A New Approximation Algorithm for the Asymmetric TSP with Triangle Inequality”,
Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pp. 638-645, 2002.
- [10] H. Kaplan, M. Lewenstein, N. Shafir and M. Sviridenko,
“Approximation Algorithms for Asymmetric TSP by Decomposing Directed Regular Multidigraphs”,
In Proceedings of 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 56-67, 2003.
- [11] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis,
“The traveling salesman problem with distances one and two”,
Mathematics of Operations Research 18 (1), pp. 1-11, 1993.
- [12] L. Engebretsen,
“An Explicit Lower Bound for TSP with Distances One and Two”,
Algorithmica 35 (4), pp. 301-319, 2003.
- [13] H. J. Bckenhauer and S. Seibert,
“Improved Lower Bounds on the Approximability of the Traveling Salesman Problem”,
RAIRO Theoretical Informatics and Applications 34, pp. 213-255, 2000.
- [14] C. H. Papadimitriou and S. Vempala,
“On the approximability of the traveling salesman problem”,
In Proceedings of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pp. 126-133, 2000.
- [15] J. Hastad,
“Some optimal inapproximability results”,
JACM 48 (4), pp. 798-859, 2001.
- [16] L. G. Khachian,
“A polynomial algorithm for linear programming”,
English translation in Soviet Mathematics Doklady 20, pp. 191-194, 1979.
- [17] M. Grotschel, L. Lovasz and A. Schrijver,
“Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization”,
Springer-Verlag, 1988.
- [18] M. Held, and R. M. Karp,
“The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees”,
Operations Research 18, pp. 1138-1162, 1970.



- [19] M. Held, and R.M. Karp,
“The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II”,
Mathematical Programming 1, pp. 6-25, 1971.
- [20] L. A. Wolsey,
“Heuristic Analysis, Linear Programming and Branch and Bound”,
Mathematical Programming Study 13, pp. 121-134, 1980.
- [21] D. Shmoys and D. Williamson,
“Analyzing the Held- Karp TSP Bound: A Monotonicity Property with Application”,
Information Processing Letters 35 (6), pp. 281-285, 1990.
- [22] J. Edmonds,
“Maximum Matching and a Polyhedron with 0,1-Vertices”,
Journal of Research of the National Bureau of Standards 69B, pp. 125-130, 1965.
- [23] S. Boyd and G. Labonte,
“Finding the exact integrality gap for small travelling salesman problems”,
Proceedings of Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO), Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 83-92, 2002.
- [24] D. P. Williamson,
“Analysis of the Held-Karp Heuristic for the Traveling Salesman Problem”,
M.S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
- [25] M. Charikar, M. Goemans and H. Karloff,
“On the Integrality Ratio for Asymmetric TSP”,
In Proceedings of 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 101-107, 2004.
- [26] D. S. Johnson and L. A. McGeoch,
“Experimental analysis of heuristics for the STSP”,
στο βιβλίο των G. Gutin, A. Punnen,
“The Traveling Salesman Problem and its Variations”,
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 369-443, 2002.
- [27] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvatal and W. Cook
“On the solution of traveling salesman problems”,
Documenta Mathematica, Extra Volume ICM 1998, Vol. III, pp. 645-656, 1998.



- [28] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvatal and W. Cook,
“Implementing the Dantzig-Fulkerson-Johnson Algorithm for Large
Traveling Salesman Problems”,
Mathematical Programming, Series B 97, pp. 91-153, 2003.
- [29] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson and S. M. Johnson,
“Solution for a large-scale traveling salesman problem”,
Operations Research 2, pp. 393-410, 1954.
- [30] <http://www.tsp.gatech.edu/sweden/compute/cpu.htm>
- [31] R. Carr and S. Vempala,
“Towards a 4/3 Approximation Algorithm for the Asymmetric TSP”,
Mathematical Programming 100 (3), pp. 569-587, 2004.
- [32] G. A. Croes,
“A method for solving traveling salesman problems”,
Operations Research 6, pp. 791-812, 1958.
- [33] F. Bock,
“An algorithm for solving “travelling-salesman” and related network
optimization problems”,
14th ORSA National Meeting, 1958.
- [34] S. Reiter and G. R. Sherman,
“Discrete Optimizing”,
SIAM Journal 13, pp. 864-889, 1965.
- [35] S. Lin,
“Computer solutions of the traveling salesman problem”,
Bell Systems Journal 44, pp. 2245-2269, 1965.
- [36] S. Lin and B. W. Kernighan,
“An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem”,
Operations Research 21, pp. 498-516, 1973.
- [37] D. S. Johnson and L. A. McGeoch,
“The traveling salesman problem: A case study”,
στο βιβλίο Local Search in Combinatorial Optimization των E.H.
Aarts and J. K. Lenstra,
John Wiley & Sons, 1997.
- [38] M. Yannakakis,
“Computational Complexity”,
στο βιβλίο Local Search in Combinatorial Optimization των E.H.
Aarts and J. K. Lenstra,
John Wiley & Sons, 1997.



- [39] D. S. Johnson, C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis,
“How easy is local search?”,
Journal of Computer and System Sciences 37, pp. 79-100, 1988.
- [40] M. W. Krentel,
“Structure in locally optimal solutions”,
In Proceedings of 30th Annual IEEE Symposium on Foundations of
Computer Science (FOCS), pp. 216-221, 1989.
- [41] C. H. Papadimitriou,
“The complexity of the Lin-Kernighan heuristic for the traveling sales-
man problem”,
SIAM Journal on Computing 21, pp. 450-465, 1992.
- [42] P. Berman and M. Karpinski,
“8/7-approximation algorithm for (1, 2)-TSP”,
Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete
Algorithms (SODA), pp. 641-648, 2006.
- [43] L. Engebretsen and M. Karpinski,
“Approximation Hardness of TSP with Bounded Metrics”,
LNCS 2076, Springer, pp. 201-212, 2001.
- [44] B. Chandra, H. Karloff and C. Tovey,
“New results on the old k-opt algorithm for TSP”,
SIAM Journal on Computing 28 (6), pp. 1998-2029, 1999.
- [45] S. Khanna, R. Motwani, M. Sudan and U.V. Vazirani,
“On Syntactic versus Computational Views of Approximability”,
In Proceedings of 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of
Computer Science (FOCS), pp. 819-830, 1994.
- [46] P. Christopoulos and V. Zissimopoulos,
“An Overview of What We Can and Cannot Do with Local Search”,
ANNALES DU LAMSADE N°2, pp. 155-206, 2004.





Αντρέα

