ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Αθανάσιος Δημ. Παππάς

ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική
Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα
Ιούνιος 2003

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

"Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ"

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΔΗΜ. ΠΑΠΠΑΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ
Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική
Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα
Ιούνιος 2003

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Εργασία που υποβλήθηκε ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Αθανάσιος Δημ. Παππάς

Υπεύθυνο μέλος ΔΕΠ:
Α. Δημάκη
Επίκουρη Καθηγήτρια

Ο Διευθυντής Μεταπτυχιακών Σπουδών

Μιχαήλ Ζαζάνης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αφιερώνεται
στην οικογένειά μου.

<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u>

Εκφράζω τις θερμές ευχαριστίες μου στην επιβλέπουσα επίκουρο καθηγήτρια του Τμήματος Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Κατερίνα Δημάκη για τη βοήθειά της και το ενδιαφέρον της καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Επίσης ευχαριστώ το προσωπικό της βιβλιοθήκης του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών για την βοήθειά του στην αναζήτηση της σχετικής βιβλιογραφίας και αρθρογραφίας.

<u>ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ</u>

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΔΗΜ. ΠΑΠΠΑΣ

Ο Παππάς Αθανάσιος είναι πτυχιούχος του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Εργάζεται ως μόνιμος καθηγητής μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και σήμερα υπηρετεί στο 2ο Γυμνάσιο Υμηττού.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αθανάσιος Δημ. Παππάς.

Η διδιάστατη κανονική κατανομή.

Ιούνιος 2003

Στην παρούσα διατριβή γίνεται μια γενική παρουσίαση της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Αρχικά δίνεται ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής και γίνεται η μελέτη της επιφάνειας που προκύπτει από την γραφική της παράστασης στο χώρο των τριών διαστάσεων. Ακολουθεί η μελέτη των περιθωρίων και των υπό συνθήκη κατανομών καθώς και η παρουσίαση των σημαντικότερων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της κατανομής. Το πρόβλημα του υπολογισμού των πιθανοτήτων της κατανομής είναι ένα θέμα με μεγάλη πρακτική σημασία και για το οποίο αφ΄ ενός μεν περιγράφεται το γενικό θεωρητικό πλαίσιο αντιμετώπισής του και αφ΄ ετέρου γίνεται και μια πρακτική εφαρμογή. Τέλος γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής καθώς και ορισμένοι έλεγχοι υποθέσεων για αυτές.

ABSTRACT

Athanasios Dim. Pappas

The Bivariate Normal Distribution

June 2003

The present thesis gives a general overview of the bivariate normal distribution. It starts by presenting the formula of the probability density function of the bivariate normal distribution and goes on to study its surface in the 3-dimensional space. The next topic is the study of the marginal and conditional distributions as well as the presentation of the normal distribution's basic characteristics.

Estimating the distribution's probability is a topic of high practical importance. Hence after presenting its theoretical framework the thesis goes on to give a practical application.

The thesis concludes by estimating the distribution's parameters and presenting certain hypotheses testing on them.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει ως θέμα τη μελέτη της ***διδιάστατης κανονικής κατανομής.*** Εκπονήθηκε και υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών τον Φεβρουάριο του έτους 2003, ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική.

Η διδιάστατη κανονική κατανομή μπορεί να θεωρηθεί είτε ως γενίκευση στο χώρο των δύο διαστάσεων της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής, είτε ως ειδική περίπτωση της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής από τον χώρο των n ($n \geq 2$) διαστάσεων στο χώρο των δύο διαστάσεων. Αποτελεί δηλαδή το μεταβατικό στάδιο από τη μια διάσταση στις πολλές διαστάσεις. Για το λόγο αυτό η μελέτη της προηγείται της μελέτης πολυδιάστατων περιπτώσεων γιατί αφενός μεν αυτή συνδέεται με τη μονοδιάστατη περίπτωση, της οποίας αποτελεί γενίκευση και αφετέρου, με την πολυδιάστατη περίπτωση, της οποίας αποτελεί ειδική περίπτωση.

Οι λόγοι για τους οποίους η διδιάστατη κανονική κατανομή και γενικότερα η πολυδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί την πιο σημαντική κατανομή στη στατιστική, απορρέουν από τις ιδιότητες της κατανομής, οι σπουδαιότερες συνοψίζονται παρακάτω:

i) Είναι η γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής και αποτελεί το κατάλληλο μοντέλο για πολλά πραγματικά προβλήματα που αναφέρονται σε χώρους περισσοτέρων της μιας διαστάσεων.

ii) Αν τα δεδομένα που έχουμε συγκεντρώσει, είτε από δειγματοληψία είτε ως αποτελέσματα κάποιου πειράματος δεν μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από μια πολυδιάστατη κανονική κατανομή, τότε σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα η κατανομή του διανύσματος του δειγματικού μέσου είναι ασυμπτωτικά κανονική. Έτσι η διδιάστατη κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της κατανομής του διανύσματος του μέσου, με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο.

iii) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής ορίζεται μοναδικά, αν είναι γνωστά το διάνυσμα των μέσων τιμών και ο πίνακας διακυμάνσεων.

iv) Μηδενική συσχέτιση συνεπάγεται και ανεξαρτησία.

v) Η οικογένεια των διδιάστατων κανονικών κατανομών είναι κλειστή ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς και συνδυασμούς. Με άλλα λόγια, οι κατανομές γραμμικών μετασχηματισμών ή γραμμικών συνδυασμών διδιάστατων κανονικών κατανομών είναι πάλι διδιάστατες κανονικές κατανομές.

vi) Οι περιθώριες κατανομές μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι μονοδιάστατες κανονικές κατανομές.

vii) Οι δεσμευμένες ή υπό συνθήκη κατανομές μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι μονοδιάστατες κανονικές κατανομές.

viii) Θετική ή αρνητική συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής ορίζεται πλήρως από το πρόσημο του συντελεστή συσχέτισης.

Μελέτες για τη διδιάστατη κανονική κατανομή αρχίζουν από τα μέσα του 19^{ου} αιώνα, και κορυφώνονται όταν ο Galton (1888) δημοσίευσε την εργασία του σχετικά με τις εφαρμογές της ανάλυσης συσχέτισης στη γενετική (Pearson 1920). Τότε ο Pearson σημείωνε " Το 1885 ο Galton είχε τελειώσει τη θεωρία της διδιάστατης κανονικής συσχέτισης" αλλά, επειδή " ήταν πολύ μετριόφρων και καθ΄ όλη τη διάρκεια της ζωής του υποτίμησε τις μαθηματικές του δυνάμεις, δεν κατέγραψε συγχρόνως την εξίσωση " της διδιάστατης κανονικής πυκνότητας πιθανότητας (Pearson 1920). Κατά συνέπεια ήταν ο Pearson (1896) ο οποίος "έδωσε έναν οριστικό μαθηματικό τύπο" της διδιάστατης κανονικής πυκνότητας πιθανότητας (Seal, 1967).

Η ανάπτυξη της θεωρίας για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή προκλήθηκε βασικά από τις μελέτες για την ανάλυση παλινδρόμησης και την πολλαπλή και μερική ανάλυση συσχέτισης, και έτυχε πλήρους επεξεργασίας για πρώτη φορά από τον Edgeworth (1892). Μελέτες για τη θεωρία σχετικά με τις δειγματικές κατανομές κάτω από την ασυμπτωτική υπόθεση της κανονικότητας ακολούθησαν. Σήμερα, η θεωρία σχετικά με την πολυμεταβλητή κανονικότητα έχει γίνει ένα μεγάλο πεδίο στη στατιστική και παίζει ένα κεντρικό ρόλο στις στατιστικές εφαρμογές.

Η ύλη που περιλαμβάνεται στην εργασία αυτή κατανέμεται σε εννέα συνολικά κεφάλαια. Ειδικότερα κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει τα εξής:

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και παρουσιάζονται τόσο ο λόγος της επιλογής του θέματος όσο και το περιεχόμενο της εργασίας αυτής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της βασικής θεωρίας που αφορά τις διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές και κατανομές. Όσα αναφέρονται στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στη μονοδιάστατη κανονική κατανομή. Τούτο κρίθηκε αναγκαίο εφ΄ όσον, όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, η διδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής στο χώρο των δύο διαστάσεων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, που είναι και το κύριο κεφάλαιο της εργασίας, αρχικά δίνεται ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της διδιάστατης κανονικής κατανομής και γίνεται μελέτη της γραφικής της παράστασης. Στη συνέχεια γίνεται η μελέτη των περιθωρίων και δεσμευμένων κατανομών καθώς και γραμμικών συνδυασμών διδιάστατων κανονικών κατανομών.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση ορισμένων από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα του υπολογισμού των πιθανοτήτων της διδιάστατης κατανομής και αναφέρονται τρόποι αντιμετώπισής του. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού γίνεται μια εφαρμογή προσεγγίζοντας πιθανότητες της διδιάστατης κανονικής κατανομής με τη βοήθεια ενός σχετικού αλγορίθμου, ο οποίος μπορεί να προγραμματιστεί εύκολα.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναπτύσσεται ο τρόπος παραγωγής μιας ακολουθίας τιμών από τη διδιάστατη κανονική κατανομή και γίνεται αντίστοιχα και μια πρακτική εφαρμογή της σχετικής θεωρίας.

Στο όγδοο κεφάλαιο καλύπτονται θέματα συμπερασματολογίας των παραμέτρων της κατανομής.

Στο ένατο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την όλη μελέτη και παρατίθενται θέματα στα οποία μπορεί να επεκταθεί σε μια μελλοντική μελέτη της κατανομής άλλος μελετητής.

Στο παράρτημα Ι δίνονται ορισμένες αποδείξεις οι οποίες κρίθηκε σκόπιμο να μην παρεμβληθούν στο κυρίως κείμενο και τέλος

Στο Παράρτημα ΙΙ δίνονται πίνακες για τις πιθανότητες της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{\text{Ο}}$

Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της βασικής θεωρίας που αφορά τις διδιάστατες κατανομές. Ο ρόλος αυτού του κεφαλαίου είναι εισαγωγικός, δεδομένου ότι πολλά από τα αναφερόμενα σε αυτό θα εφαρμοστούν στη συνέχεια για την διδιάστατη κανονική κατανομή. Επίσης γίνεται αναφορά στις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και όχι στις διακριτές, δεδομένου ότι η υπό μελέτη διδιάστατη κανονική κατανομή ανήκει σε αυτή την κατηγορία.

Η έννοια της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής και κατανομής αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της μονοδιάστατης τυχαίας μεταβλητής και κατανομής στο χώρο των δύο διαστάσεων. Όλες οι έννοιες που είναι γνωστές για τη μία διάσταση ορίζονται ανάλογα και για τις δύο διαστάσεις ενώ παράλληλα εισάγονται και νέες. Έτσι εισάγονται οι έννοιες των περιθώριων κατανομών, των δεσμευμένων ή υπό συνθήκη κατανομών και ροπών, της συνδιακύμανσης και του συντελεστή συσχετίσεως. Επίσης στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια σύντομη αναφορά στην εύρεση της κατανομής που προκύπτει από μετασχηματισμούς τυχαίων μεταβλητών.

2.1 Διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές.

Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (τ.μ) προκύπτει όταν δύο μεταβλητές μετρούνται πάνω στο ίδιο αντικείμενο. Για παράδειγμα όταν πάνω στο ίδιο άτομο μετράμε το βάρος του (σε κιλά) και το ύψος του (σε cm), τότε το σύνολο των ζευγών που καταγράφονται αποτελούν τιμές μιας διδιάστατης τ.μ., της οποίας η πρώτη συνιστώσα αντιπροσωπεύει το βάρος και η δεύτερη το ύψος ενός τυχαία επιλεγμένου ατόμου.

Ορισμός 2.1.1 : Μια **διδιάστατη τ.μ.** ή **ένα τυχαίο διάνυσμα** του χώρου των δύο διαστάσεων είναι μια μονοσήμαντα ορισμένη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα δειγματικό χώρο ***S*** ενός τυχαίου πειράματος και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του χώρου των δύο διαστάσεων.

Ένα τυχαίο διάνυσμα θα το συμβολίζουμε

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = (X_1, X_2)'$$

Πολύ συχνά για να αναφερθούμε σε ένα τυχαίο διάνυσμα γράφουμε καταχρηστικά $\widetilde{X} = (X_1, X_2)$ ή απλά (X_1, X_2).

2.2 Κατανομή τυχαίου διανύσματος.

Ορισμός 2.2.1 Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\widetilde{X} = (X_1, X_2)$. Αν υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ με πεδίο ορισμού το πεδίο τιμών του $\widetilde{X}$ και τέτοια ώστε:

$$P(X_1 \in \Delta_1, X_2 \in \Delta_2) = \int_{\Delta_1}\int_{\Delta_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

για κάθε διάστημα Δ_i του πεδίου τιμών των X_i, $i = 1,2$, τότε η $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ ορίζεται ως η **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2 ή απλά η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** του τυχαίου διανύσματος $\widetilde{X}$.

Παρατηρήσεις:

1. Είναι φανερό ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2dx_1 = 1$

2. Η σ.π.π μιας διδιάστατης τ.μ. παριστά μια επιφάνεια στον χώρο των τριών διαστάσεων και η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ο όγκος κάτω από την επιφάνεια και πάνω από το ενδεχόμενο.

Ορισμός 2.2.2 Η **από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής** $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ των τ.μ. X_1,X_2 ή **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** του τυχαίου διανύσματος $\widetilde{X}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)dt_2dt_1$$

Αποδεικνύεται ότι για την κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής των X_1,X_2 ισχύουν τα παρακάτω:

1. $0\leq F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\leq 1$ για κάθε $(x_1,x_2)\in\Re^2$
2. Η $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση για κάθε μια από τις μεταβλητές της. Είναι φανερό ότι αν $x_1<x_2$ και $y_1<y_2$ τότε $F_{X_1,X_2}(x_1,y_1)\leq F_{X_1,X_2}(x_2,y_2)$
3. $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\dfrac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}$

2.3 Περιθώριες κατανομές

Οι κατανομές των X_1 και X_2 λέγονται περιθώριες κατανομές. Η σ.π.π της τ.μ X_1 συμβολίζεται με $f_{X_1}(x_1)$ και αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2 .$$

Ανάλογα ορίζεται και η περιθώρια κατανομή της τ.μ. X_2.

2.4 Δεσμευμένες κατανομές.

Αν $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε για κάθε x_2 ορίζουμε τη **δεσμευμένη κατανομή της** $X_1|X_2=x_2$, της οποίας η σ.π.π δίνεται από τη σχέση

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_1|x_2)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}, \qquad f_{X_2}(x_2)>0$$

Ανάλογα ορίζεται και η δεσμευμένη σ.π.π. της **τ.μ.** $X_2|X_1=x_1$.

2.5 Μέση τιμή.

Ορισμός 2.5.1 Έστω $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ **ένα τυχαίο** διάνυσμα, με σ.π.π $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ και $h(X_1,X_2)$ **μια τ.μ.** συνάρτηση των X_1,X_2. Η **μαθηματική ελπίδα** ή **μέση τιμή** της $h(X_1,X_2)$ συμβολίζεται με $Eh(X_1,X_2)$ και ορίζεται ως:

$$Eh(X_1,X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x_1,x_2)\cdot f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

με τον όρο ότι το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει απόλυτα.

Για την μέση τιμή αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $E\left[a_0+\sum_{i=1}^{k}a_ih_i(X_1,X_2)\right]=a_0+\sum_{i=1}^{k}a_iEh_i(X_1,X_2)$
2. $Var[ah(X_1,X_2)+b]=a^2Var[h(X_1,X_2)]$

όπου $a_0,a_1,....,a_k,a$ **και** b **είναι σταθεροί** πραγματικοί αριθμοί.

2.6 Συνδιασπορά -Συντελεστής συσχέτισης

Ορισμός 2.6.1 Αν $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ **είναι ένα τυχαίο** διάνυσμα, **η συνδιασπορά** ή **συνδιακύμανση** των τ.μ. X_1 και X_2 συμβολίζεται **με** $Cov(X_1,X_2)$ **ή** σ_{X_1,X_2} και ορίζεται από η σχέση

$$Cov(X_1,X_2)=E\{(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)\}$$

Για τη **συνδιασπορά αποδεικνύεται ότι ισχύουν** οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $Cov(X_1,X_2)=EX_1-(EX_1)(EX_2)$
2. $Cov(X_1,X_2)=Cov(X_2,X_1)$ **και** $Cov(X,X)=Var(X)$

Ορισμός 2.6.2 Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο τ.μ. X_1 και X_2 συμβολίζεται με ρ_{X_1,X_2} **ή** $\rho(X_1,X_2)$ **ή απλά με** ρ **και ορίζεται από** τη σχέση

$$\rho_{X_1,X_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

όπου σ_1,σ_2 **είναι οι τυπικές αποκλίσεις των** X_1 **και** X_2 **αντίστοιχα.**

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. **Ο συντελεστή**ς συσχέτισης δύο τ.μ. είναι καθαρός αριθμός με τιμές στο **διάστημα** $[-1,\ 1]$.
2. **Αν** $\rho_{X_1,X_2}=1$ τότε οι τ.μ. **λέγονται πλήρως συσχετισμένες θετικά, ενώ αν** $\rho_{X_1,X_2}=-1$ **οι τ.μ. λέγονται πλήρως συσχετισμένες αρνη**τικά.
3. Αν $\rho_{X_1,X_2}=0$ **τότε οι τ.μ. λέγονται ασυσχέτιστες.**
4. Αν $0<\rho_{X_1,X_2}<1$ **οι τ.μ. λέγονται θετικά συσχετισμένες** ενώ αν $-1<\rho_{X_1,X_2}<0$ **οι τ.μ. λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.**
5. **Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι ο** συντελεστής **συσχέτισης** δύο **τ.μ. παραμένει αμετάβλητος όταν οι τ.μ. μετασχηματιστού**ν **γραμμικά. Ιδιαίτερα έχουμε:**

$$\rho(X_1,X_2)=\rho\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)=Cov\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

όπου σ_1,σ_2 είναι οι τυπικές αποκλίσεις των X_1 και X_2 αντίστοιχα και μ_1,μ_2 είναι οι μέσες τιμές τους.

2.7 Ροπές -Ροπογεννήτριες

Ορισμός 2.7.1 Έστω $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Η από κοινού ή παραγοντική απλή (περί το μηδέν) ροπή τάξεως (k_1,k_2) των τ.μ. X_1 και X_2 συμβολίζεται με μ_{k_1,k_2} και ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu_{k_1,k_2}=E\left(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\right)$$

Ορισμός 2.7.2 Έστω $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Η από κοινού κεντρική ροπή ή ροπή περί τις μέσες τιμές τάξεως (k_1,k_2) των τ.μ. X_1 και X_2 συμβολίζεται με λ_{k_1,k_2} και ορίζεται από τη σχέση:

$$\lambda_{k_1,k_2}=E\left[(X_1-\mu_1)^{k_1}(X_2-\mu_2)^{k_2}\right]$$

Ορισμός 2.7.3 Έστω $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Η **από κοινού ροπογεννήτρια** της (X_1,X_2) συμβολίζεται με $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=E\left(e^{t_1X_1+t_2X_2}\right)$$

Για την ροπογεννήτρια συνάρτηση αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής:

1. $m_{a_1X_1+b_1,a_2X_2+b_2}(t_1,t_2)=e^{b_1t_1+b_2t_2}m_{X_1,X_2}(a_1t_1,a_2t_2)$

2. Αν $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=m_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2)$ για κάθε t_1,t_2 τότε

$$f_{X_1,X_2}(z_1,z_2)=f_{Y_1,Y_2}(z_1,z_2) \text{ για κάθε } z_1,z_2$$

2.8 Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 2.8.1 Οι τυχαίες μεταβλητές X_1,X_2 λέγονται **στοχαστικά ανεξάρτητες** ή **απλά ανεξάρτητες** αν για κάθε συλλογή από (Borel) υποσύνολα B_1,B_2 ισχύει η σχέση:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2)=P(X_1 \in B_1)\cdot P(X_2 \in B_2)$$

2.8.1 Κριτήρια ανεξαρτησίας.

Κριτήριο 1. Οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

για κάθε $(x_1,x_2)\in\Re^2$.

Κριτήριο 2. Οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

Κριτήριο 3. Οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $(t_1,t_2)\in(-h_1,h_1)\times(-h_2,h_2)$, με $h_1>0, h_2>0$ ισχύει η σχέση

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=m_{X_1}(t_1)\cdot m_{X_2}(t_2)$$

2.8.2 Συνέπειες ανεξαρτησίας.

Συνέπεια 1. Αν οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ανεξάρτητες τότε οι δεσμευμένες κατανομές είναι ίσες με τις αντίστοιχες περιθωριακές. Δηλαδή ισχύει

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_1|x_2)=f_{X_1}(x_1) \text{ και}$$

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2|x_1)=f_{X_2}(x_2)$$

Συνέπεια 2. . Αν οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$ είναι ανεξάρτητες και $y_1=h(x_1)$, $y_2=h(x_2)$ είναι συναρτήσεις των x_1,x_2 αντίστοιχα, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1=h(X_1)$, $Y_2=h(X_2)$ είναι ανεξάρτητες.

Συνέπεια 3. . Αν οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$είναι ανεξάρτητες με πεπερασμένες μέσες τιμές τότε ισχύει

$$EX_1X_2=(EX_1)(EX_2)$$

Συνέπεια 4. Αν οι τ.μ. $\widetilde{X}=(X_1,X_2)$είναι ανεξάρτητες τότε οι X_1,X_2 είναι ασυσχέτιστες.

2.9 Βασικά χαρακτηριστικά μιας διδιάστατης κατανομής.

Τα βασικά χαρακτηριστικά μιας πολυδιάστατης κατανομής (X_1,X_2)είναι τα ακόλουθα:

1. Το διάνυσμα των μέσων τιμών της $\widetilde{\mu}$ τρ οποίο ορίζεται ως

$$\widetilde{\mu}=(\mu_1,\mu_2)=(EX_1,EX_2)$$

2. Ο πίνακας διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων των τ.μ X_1 και X_2που συμβολίζεται με Σκαι ορίζεται ως

$$\Sigma=\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό του πίνακα Σ είναι ότι είναι συμμετρικός.

2.10 Μετασχηματισμός τυχαίων μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε επιγραμματικά στο θέμα του μετασχηματισμού τυχαίων μεταβλητών δύο διαστάσεων. Η αντιμετώπιση του όλου προβλήματος γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.10.1 Έστω $\widetilde{X}=(X_1,X_2)'$ ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με από κοινού σ.π.π. $f_{\widetilde{X}}(x_1,x_2)$ και $\widetilde{Y}=(Y_1,Y_2)=\left(h_1(\widetilde{X}),h_2(\widetilde{X})\right)$ ένας μετασχηματισμός. Θέτουμε

$$S=\{\widetilde{x}:f_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})>0\} \text{ και}$$

$$T=\{\widetilde{y}=(y_1,y_2):y_1=h_1(x_1,x_2),y_2=h_2(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in S\}$$

Ορίζουμε την ορίζουσα

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1^{-1}(\widetilde{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1^{-1}(\widetilde{y})}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial h_2^{-1}(\widetilde{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2^{-1}(\widetilde{y})}{\partial y_2} \end{vmatrix}=\left|((\frac{\partial x_i}{\partial y_i}))\right|$$

και υποθέτουμε ότι είναι διάφορη του μηδενός. Τότε η από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $\widetilde{Y}$ είναι

$$f_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y})=\begin{cases} f_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})|J|, & \widetilde{y}\in T \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Μεταξύ των Ιακωβιανών οριζουσών των μετασχηματισμών $\widetilde{y}=\widetilde{h}(\widetilde{x})$ και $\widetilde{x}=\widetilde{h}^{-1}(\widetilde{y})$ ισχύει η σχέση

$$\left|((\frac{\partial x_i}{\partial y_j}))\right|=\left|((\frac{\partial y_i}{\partial x_j}))\right|^{-1}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

Η Μονοδιάστατη Κανονική Κατανομή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στη μονοδιάστατη κανονική κατανομή, της οποίας η διδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί γενίκευση στο χώρο των δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα θα δώσουμε τον ορισμό της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής, καθώς και ορισμένα χαρακτηριστικά της, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

3.1 Η μονοδιάστατη κανονική κατανομή

Ορισμός 3.2.1. Μια τυχαία μεταβλητή X ορίζεται να έχει την κανονική κατανομή ή να κατανέμεται κανονικά εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι η

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-(x-\mu)^2\Big/2\sigma^2\right] \tag{3.1}$$

όπου οι παράμετροι μ και σ παίρνουν τιμές $-\infty<\mu<+\infty$ και $\sigma>0$.

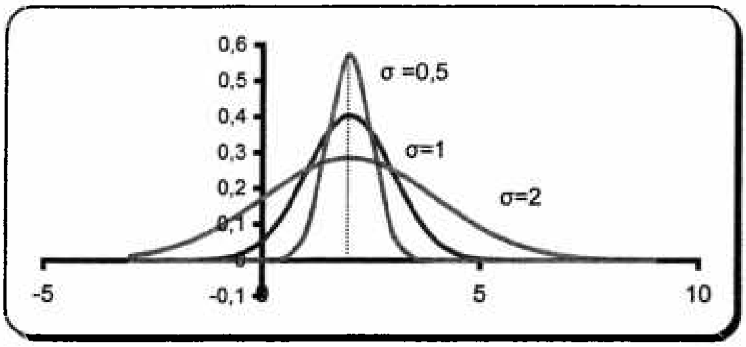
Για να δηλώσουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ γράφουμε $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

Από την (3.1) προκύπτουν τα εξής χαρακτηριστικά για τη σ.π.π της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής:

- Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της (3.1) είναι ίσο με 1.
- $f_X(x) > 0$
- Επειδή $f_X(x-\mu) = f_X(\mu - x)$ η σ.π.π έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \mu$.
- Η μέγιστη τιμή της $f_X(x)$ είναι ίση με $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ και λαμβάνεται όταν $x = \mu$.

  Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου σ τόσο το μέγιστο ύψος ελαττώνεται και αυξάνεται το άνοιγμα προς τα άκρα ώστε το συνολικό εμβαδόν να διατηρείται ίσο με 1.

Η γραφική παράσταση της σ.π.π. της κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές
των παραμέτρων φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1
Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής για
μ=2 και σ=0,5 σ=1 και σ=2

Αν θεωρήσουμε ότι $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ...

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\mu = 0$ και $\sigma = 1$ η σ.π.π της κανονικής κατανομής γίνεται

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-x^2/2\right]$$

και είναι γνωστή ως τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής συμβολίζεται $\Phi(\,.\,)$ και ορίζεται ως

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)du$$

Οι τιμές της $\Phi(.)$ δίνονται από ειδικούς πίνακες. Χρήσιμη είναι η σχέση

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

η οποία μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε την τιμή της $\Phi(.)$ για κάποια τιμή της x, όταν γνωρίζουμε την τιμή της στη θέση $-x$.

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής:

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- $m_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
- $P(a < X < b) = Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - Z\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

3.2. Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Πολλά θεωρητικά αποτελέσματα για τη χρήση της κανονικής κατανομής βασίζονται σε μορφές μιας σειράς θεωρημάτων που είναι γνωστά ως κεντρικά οριακά θεωρήματα. Τα θεωρήματα αυτά θέτουν συνθήκες κάτω από τις οποίες η κατανομή τυποποιημένων αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει σε μια τυποποιημένη κανονική κατανομή καθώς ο αριθμός των μεταβλητών του αθροίσματος αυξάνει. Παρακάτω δίνουμε μια διατύπωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος στην περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 3.2.1 Κεντρικό οριακό θεώρημα:_Αν για κάθε θετικό ακέραιο n, $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ_X και διακύμανση σ_X^2, τότε για κάθε z η $F_{Z_n}(z)$ συγκλίνει προς συγκλίνει στο $\Phi(z)$ καθώς το $n \to \infty$

όπου

$$Z_n = \frac{\left(\overline{X}_n - E\left[\overline{X}_n\right]\right)}{\sqrt{Var\left[\overline{X}_n\right]}} = \frac{\overline{X}_n - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}}$$

3.3 Η σημασία της κανονικής κατανομής στη στατιστική.

Η κανονική κατανομή παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη στατιστική. Φυσικά το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει τη δυνατότητα χρήσης της κανονικής κατανομής σε πολλές εφαρμογές, αλλά υπάρχουν και άλλοι σημαντικοί λόγοι για τους οποίους γίνεται φανερή η χρησιμότητά της.

Καταρχήν, πολλά χαρακτηριστικά πληθυσμών που είναι αντικείμενα διαφόρων ερευνητικών πεδίων φαίνεται να έχουν ή να προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό την κανονική κατανομή.

Επιπλέον, τις δειγματικές κατανομές μεταβλητών που προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς μπορούμε να τις χειριστούμε εύκολα από μαθηματικής άποψης, πράγμα το οποίο δεν είναι και τόσο εύκολο για άλλες κατανομές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Η Διδιάστατη Κανονική Κατανομή

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται η παρουσίαση της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Θα προηγηθεί μια σύντομη ιστορική αναδρομή σχετικά με την προαναφερθείσα κατανομή, και στη συνέχεια θα δούμε πώς αυτή μπορεί να προκύψει ώς γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής, στο χώρο των δύο διαστάσεων. Ακολούθως θα δώσουμε τον τύπο της διδιάστατης κανονικής πυκνότητας πιθανότητας και θα μελετήσουμε την επιφάνεια που προκύπτει από τη γραφική της παράσταση στο χώρο των τριών διαστάσεων. Το κεφάλαιο θα ολοκληρωθεί με τη μελέτη των περιθωρίων και των δεσμευμένων της κατανομών.

4.1 Ιστορική αναδρομή

Η **διδιάστατη κανονική κατανομή** (**bivariate normal distribution**) αποτελεί γενίκευση στο χώρο των δύο διαστάσεων της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής. Η μελέτη της κατανομής αυτής και η στατιστική μεθοδολογία που στηρίζεται σ΄ αυτήν, αποτελούν ειδικό κλάδο της Στατιστικής που λέγεται **πολυδιάστατη στατιστική ανάλυση** (**multivariate statistical analysis**).

Αν και βιβλιογραφικές αναφορές στη διδιάστατη κανονική κατανομή είναι καταγεγραμμένες από τις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα [Adrian (1808), Bravais (1846), Plana (1813), and Helmert (1868)], η συστηματική μελέτη της άρχισε από το τελευταίο τέταρτο του αιώνα αυτού. Η κύρια ώθηση για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος ήρθε με τις εργασίες του Sclols (1875) και ειδικότερα από του Galton (1877,1888) με την υπόδειξη του οποίου ο Dickson (1886) παρουσίασε μια δυνατή γέννηση της διδιάστατης κανονικής κατανομής ως ένα διάνυσμα από συνδυασμό ανεξάρτητων και κανονικά κατανεμημένων μεταβλητών ως συνιστωσών. Συχνά ο Pearson (1901, 1903) εφάρμοσε την διδιάστατη κανονική κατανομή σε βιομετρικά δεδομένα. Αυτός επίσης ασχολήθηκε με τον υπολογισμό πιθανοτήτων για τη διδιάστατη κανονική κατανομή.

Σήμερα η πλειονότητα των διαδικασιών ανάλυσης δεδομένων που αποτελούν μετρήσεις διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών, στηρίζονται στη διδιάστατη κανονική κατανομή. Όταν τα δεδομένα αυτά δεν προέρχονται από την διδιάστατη κανονική κατανομή, αυτή τις περισσότερες φορές μας προσφέρει μια χρήσιμη προσέγγιση της πραγματικής κατανομής. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι πολλές από τις διαδικασίες ανάλυσης δεδομένων που προϋποθέτουν την κανονικότητα, είναι ανθεκτικές σε αποκλίσεις από την υπόθεση της κανονικότητας. Επίσης οι δειγματικές κατανομές των περισσότερων στατιστικών συναρτήσεων είναι κατά προσέγγιση κανονικές, άσχετα από την μορφή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Αυτό καθιστά δυνατή τη χρήση της διδιάστατης κανονικής κατανομής σε ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της διδιάστατης κανονικής κατανομής προκύπτει από το γεγονός ότι ο χειρισμός της από μαθηματικής πλευράς είναι εύκολος και έτσι μπορούν να προκύψουν "κομψά" αποτελέσματα, πράγμα που δεν συμβαίνει κατά κανόνα με άλλες διδιάστατες κατανομές. Φυσικά, η ευκολία του μαθηματικού χειρισμού είναι το λιγότερο το οποίο μπορεί να την κάνει ελκυστική σε έναν στατιστικό.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι εκείνο που κάνει την διδιάστατη κανονική κατανομή δημοφιλή είναι η χρησιμότητά της στις πρακτικές εφαρμογές, η οποία οφείλεται σε τρεις κυρίως λόγους: Πρώτον η κανονική κατανομή αποτελεί σε πολλές περιπτώσεις μια καλή προσέγγιση της κατανομής του προς μελέτη πληθυσμού, δεύτερον, οι δειγματικές κατανομές των περισσότερων στατιστικών συναρτήσεων είναι κατά προσέγγιση κανονικές, ανεξάρτητα από την μορφή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται, λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος και τρίτον η ευκολία που προσφέρει ο μαθηματικός χειρισμός της.

4.2 Από τη μονοδιάστατη κανονική κατανομή στη διδιάστατη.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η διδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής στο χώρο των δύο διαστάσεων. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς από την σ.π.π της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής μπορεί κατ΄ αναλογία να προκύψει η σ.π.π. της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Όπως είναι γνωστό η σ.π.π της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής, με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 είναι η

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\left[(x-\mu)^2/\sigma^2\right]/2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Ο όρος

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

στον εκθέτη εκφράζει το τετράγωνο της απόστασης από το x στο μ, εκφρασμένης σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Ο όρος αυτός μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2=(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)=$$

$$=(x-\mu)\left[E(x-\mu)^2\right]^{-1}(x-\mu)=$$

$$(x-\mu)'\left[E(x-\mu)(x-\mu)'\right]^{-1}(x-\mu)$$

όπου το σύμβολο $(x-\mu)$ παριστά έναν πίνακα στοιχείο (διαστάσεων 1×1) και το $(x-\mu)'$ παριστά τον ανάστροφό του πίνακα.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη σ.π.π της κατανομής του τυχαίου διανύσματος $\tilde{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, αν είναι γνωστό ότι η κατανομή του είναι η διδιάστατη κανονική κατανομή, με καθορισμένες παραμέτρους

$$\mu_1 = E(X_1), \qquad \mu_2 = E(X_2),$$

$$\sigma_1^2 = Var(X_1), \qquad \sigma_2^2 = Var(X_2) \text{ και}$$

$$\rho = Cov(X_1, X_2)/(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = Corr(X_1, X_2).$$

Κατ' αναλογία με τη μονοδιάστατη κανονική κατανομή ο εκθέτης της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής θα έχει τη μορφή

$$(\tilde{x}-\tilde{\mu})'\left[E(\tilde{x}-\tilde{\mu})(\tilde{x}-\tilde{\mu})'\right]^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})$$

όπου για συγκεκριμένες τιμές $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ των τυχαίων μεταβλητών $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$:

i) Το 2×1 διάνυσμα $(\tilde{x}-\tilde{\mu})$ θα είναι το:

$$(\tilde{x}-\tilde{\mu}) = \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}$$

και επομένως το $(\tilde{x}-\tilde{\mu})'$ θα είναι το 1×2 διάνυσμα

$$(\tilde{x}-\tilde{\mu})' = (x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2).$$

ii) Η $E(\tilde{x}-\tilde{\mu})(\tilde{x}-\tilde{\mu})'$ θα είναι ο 2×2 πίνακας

$$E(\tilde{x}-\tilde{\mu})(\tilde{x}-\tilde{\mu})' = E\left(\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2)\right) =$$

$$= E\begin{pmatrix} (x_1-\mu_1)^2 & (x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) \\ (x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) & (x_2-\mu_2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E(x_1-\mu_1)^2 & E\,(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) \\ E(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) & E(x_2-\mu_2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
$$

Ο τελευταίος όμως πίνακας είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2 και ο οποίος, όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.10 συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα Σ. Είναι δηλαδή

$$
E(\tilde{x}-\tilde{\mu})(\tilde{x}-\tilde{\mu})' = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
$$

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του αντιστρόφου του πίνακα Σ. Εφαρμόζοντας μεθόδους της γραμμικής άλγεβρας βρίσκουμε ότι

$$
\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}
$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο πίνακας Σ είναι πάντα αντιστρέψιμος γιατί η ορίζουσά του είναι ίση με:

$$
\det(\Sigma) = |\Sigma| = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 \neq 0
$$

Τελικά για την διδιάστατη κανονική κατανομή κατ' αναλογία με τη μονοδιάστατη κανονική κατανομή θα έχουμε:

$$
(\tilde{x}-\tilde{\mu})'\left[E(\tilde{x}-\tilde{\mu})(\tilde{x}-\tilde{\mu})'\right]^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu}) = (\tilde{x}-\tilde{\mu})'\Sigma^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu}) =
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2 \end{bmatrix}\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix} =
$$

$$
\frac{\sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_2^2-\mu_2)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} =
$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

Η σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής θα έχει την μορφή:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{c}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

όπου η σταθερά c, θα πρέπει να προσδιοριστεί ώστε να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_2dx_1=1 \quad \text{ή}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}dx_2dx_1=c$$

όπου μετά υπολογισμούς βρίσκουμε ότι:

$$c=2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}=\left(\sqrt{2\pi}\right)^2|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}=2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\ \sigma_1\sigma_2.$$

Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω δίνουμε τον ορισμό της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

4.3 Ορισμός της διδιάστατης κανονικής κατανομής

Έστω δύο τ.μ. X_1 και X_2 με από κοινού σ.π.π

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}} \tag{4.1}$$

με $-\infty<x_1<+\infty,\ -\infty<x_2<+\infty,$

όπου $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ρ είναι οι παράμετροι της κατανομής, τέτοιες ώστε $-\infty < \mu_1 < +\infty$, $-\infty < \mu_2 < +\infty$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ και $-1 < \rho < 1$.

Τότε λέμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2)'$ έχει **διδιάστατη κανονική κατανομή** με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ρ και γράφουμε συμβολικά:

$$(X_1,\ X_2)' \sim N\left\{\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},\quad \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right\}$$

Η σχέση (4.1) μπορεί με την βοήθεια πινάκων να γραφεί με την μορφή

$$f(\tilde{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 |\Sigma|^{1/2}} e^{-(\tilde{x}-\tilde{\mu})'\Sigma^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})} \tag{4.2}$$

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $\mu_1 = \mu_2 = 0$ και $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ η (4.1) γίνεται

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\right\}} \tag{4.3}$$

και μας δίνει την σ.π.π. της τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Η σ.π.π της τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής κατανομής μπορεί να προκύψει από την (4.1) κάνοντας τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$u = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad \text{και} \quad v = \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

ο οποίος, λύνοντας ως προς x_1, x_2, μας δίνει:

$$x_1 = u \cdot \sigma_1 + \mu_1 \quad \text{και} \quad x_2 = v \cdot \sigma_2 + \mu_2$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του προηγούμενου μετασχηματισμού είναι η

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{dx_1}{du} & \dfrac{dx_1}{dv}\\ \dfrac{dx_2}{du} & \dfrac{dx_2}{dv}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{vmatrix}=\sigma_1\cdot\sigma_2\neq 0$$

και έτσι θα έχουμε ότι:

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}|J|$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}\sigma_1\sigma_2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2-2\rho uv+v^2\right)}$$

η οποία είναι η σ.π.π. μιας τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού αυτού θα φανεί παρακάτω και ιδιαίτερα στον υπολογισμό των πιθανοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Επίσης η (4.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\begin{aligned}f_{x_1,x_2}(x_1,x_2)&=\phi(x_1)\cdot\phi\left(\frac{x_2-\rho x_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\Big/\sqrt{1-\rho^2}=\\&=\phi(x_2)\cdot\phi\left(\frac{x_1-\rho x_2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\Big/\sqrt{1-\rho^2}\end{aligned}\qquad(4.4)$$

όπου $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ η σ.π.π της μονοδιάστατης τυπικής κανονικής κατανομής.

Στη συνέχεια δείξουμε ότι η ορισθείσα σ.π.π (4.1) είναι μια γνήσια σ.π.π, αποδεικνύοντας ότι το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο επίπεδο ισούται με τη μονάδα. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2)dx_1dx_2=1\,.$$

Προφανώς η σ.π.π είναι θετική. Αντικαθιστούμε

$$u = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad \text{και} \quad v = \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

και έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2 - 2\rho uv + v^2\right)} dudv$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο του u στον εκθέτη και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{(u-\rho v)^2 + \left(1-\rho^2\right)v^2\right\}} dudv$$

και αντικαθιστώντας

$$w = \frac{u - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad dw = \frac{du}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

το προηγούμενο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο απλών ολοκληρωμάτων

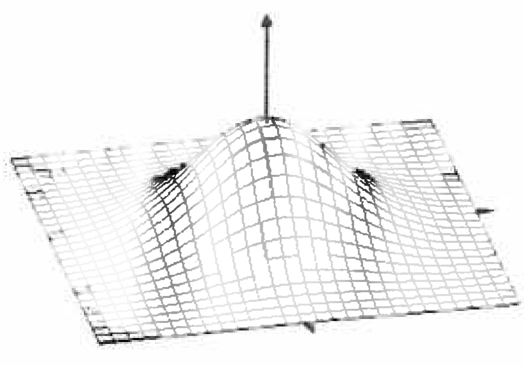
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

όπου τα απλά ολοκληρώματα στην τελευταία ισότητα είναι ίσα με τη μονάδα, γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η σ.π.π. της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής.

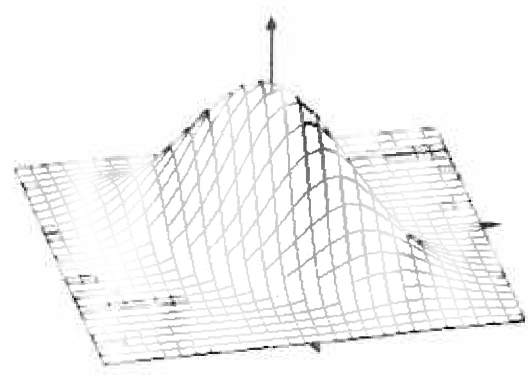
4.4. Η γραφική παράσταση της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής

Η γραφική παράσταση της σ.π.π. είναι μια επιφάνεια πάνω από το επίπεδο $X_1 X_2$, η οποία παραστατικά μπορεί να αποδοθεί με το σχήμα καμπάνας που προκύπτει αδειάζοντας ένα σακουλάκι ζάχαρη πάνω σ΄ ένα τραπέζι.. Για το λόγο αυτό συχνά η διδιάστατη κανονική κατανομή αναφέρεται και ως κατανομή σχήματος καμπάνας. Άλλα ονόματα που χρησιμοποιούνται για την κατανομή αυτή είναι: ***Gaussian, Laplace-Gause και Bravais.***

Στο σχήμα 4.1 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής πυκνότητας ($\mu_1 = \mu_2 = 0$ και $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$). Στο σχήμα 4.1 (a) είναι $\rho = 0$ και στο σχήμα 4.1 (b) είναι $\rho = 0.7$.



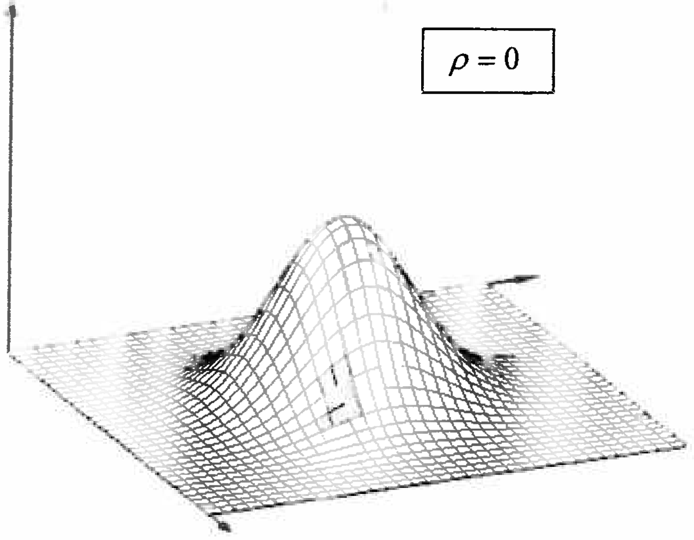
(a)



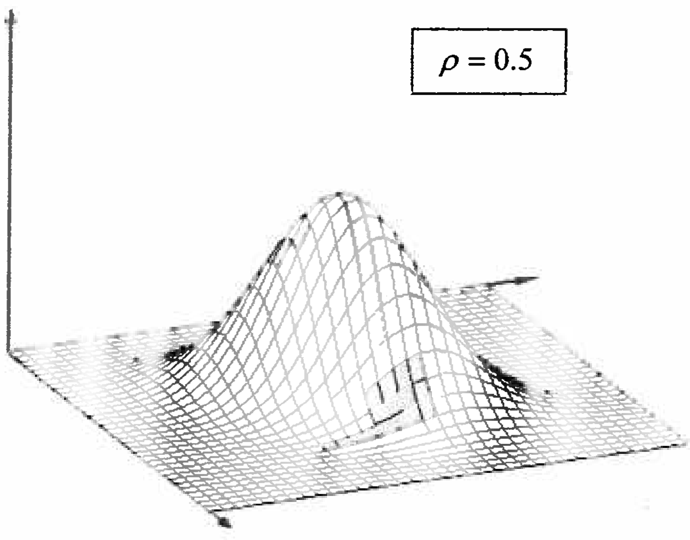
(b)

Σχήμα 4.1

Διδιάστατες τυποποιημένες κανονικές πυκνότητες πιθανότητας (a) ρ=0, (b) ρ=0.7



(α)



(β)

Σχήμα 4.2
Διδιάστατες κανονικές πυκνότητες με σ_1=σ_2
(α) ρ=0 και (β) ρ=0.5

Στο σχήμα 4.2 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο διδιάστατων κανονικών πυκνοτήτων με ίσες διακυμάνσεις $(\sigma_1 = \sigma_2)$ και $\mu_1 = \mu_2$. Στο σχήμα 4.2. (a) είναι $\rho = 0$ ενώ στο σχήμα 4.2.(b) είναι $\rho = 0.5$.

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά της επιφάνειας που προκύπτει από τη γραφική παράσταση της διδιάστατης πυκνότητας πιθανότητας στο χώρο των τριών διαστάσεων. Όπως προκύπτει από τα σχήματα 4.1 και 4.2 η μορφή της γραφικής παράστασης της διδιάστατης πυκνότητας εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής. Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε και την επίδραση που έχουν στην μορφή της επιφάνειας της διδιάστατης πυκνότητας πιθανότητας οι παράμετροι της κατανομής.

4.4.1 Χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της σ.π.π

Μελετώντας τη γραφική παράσταση μιας διδιάστατης πυκνότητας πιθανότητας διαπιστώνουμε ότι γι' αυτήν ισχύουν τα εξής:

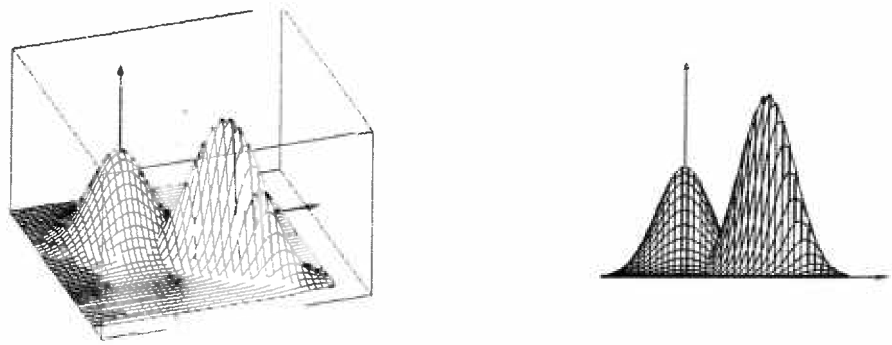
1. Ο όγκος του χώρου που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή και το επίπεδο X_1X_2 όπως αποδείξαμε προηγουμένως είναι ίσος με 1.

2. Το ψηλότερο σημείο της είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$\left(\mu_1, \mu_2, \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

(Βλέπε απόδειξη 1, παράρτημα 1). Δηλαδή το μέγιστο ύψος είναι ίσο με $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, και επιτυγχάνεται όταν $X_1 = \mu_1$ και $X_2 = \mu_2$.

Παρατηρούμε ότι το μέγιστο ύψος είναι αντιστρόφως ανάλογο του γινομένου $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-\rho^2}$ και δεν εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων μ_1, μ_2. Ειδικότερα για σταθερές τιμές των σ_1, σ_2 το μέγιστο ύψος αυξάνεται καθώς αυξάνεται η απόλυτη τιμή του ρ. Στο σχήμα 4.3 βλέπουμε την γραφική παράσταση της διδιάστατης πυκνότητας για $\rho = 0$ και $\rho = 0.8$ και παρατηρούμε την επίδραση που έχει στο μέγιστο ύψος η αύξηση της τιμής της παραμέτρου ρ.



Σχήμα 4.3

Διδιάστατες κανονικές σ.π.π. για ρ=0 και ρ=0.8 και προβολή τους στο επίπεδο X_2OX_3

3. Η τομή της με επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο X_1X_2 έστω το $X_3 = c$, με

$$0 < c < \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

είναι μια έλλειψη η οποία έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- κέντρο το σημείο (μ_1, μ_2)
- μήκη ημιαξόνων $\sqrt{K\cdot\lambda_1}$ και $\sqrt{K\cdot\lambda_2}$ όπου

$$K = -2\cdot\ln\left(c\cdot 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)+\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4\rho^2\sigma_1\sigma_2}}{2}$$

και

$$\lambda_2 = \frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)-\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4\rho^2\sigma_1\sigma_2}}{2}$$

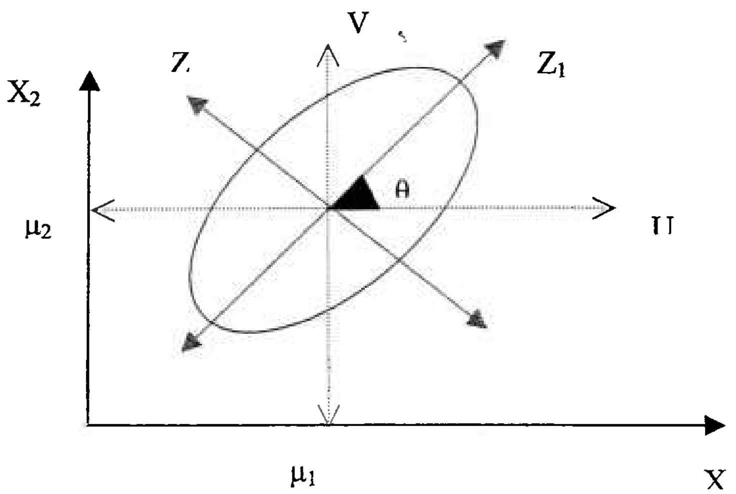
- Ο κύριος άξονας σχηματίζει με τον άξονα Ox_1 γωνία θ τέτοια ώστε

$$\theta = \frac{1}{2} ctn^{-1}\left[\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)/2\rho\sigma_1\sigma_2\right]$$

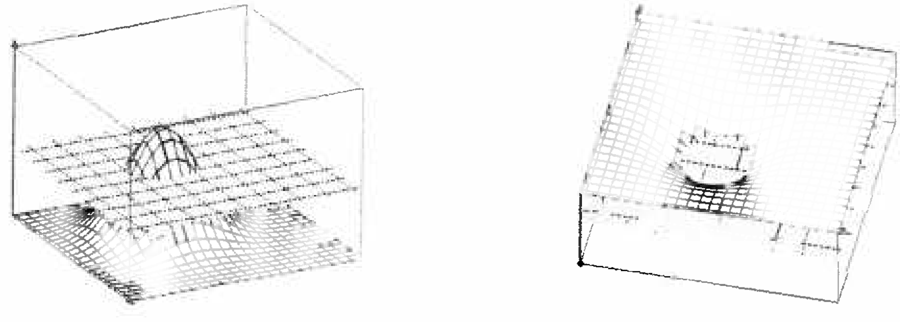
Η γραφική περίπτωση της τομής στη γενική περίπτωση φαίνεται στο σχήμα 4.4. Οι αποδείξεις των παραπάνω χαρακτηριστικών γίνονται στο Π2 του παραρτήματος Ι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

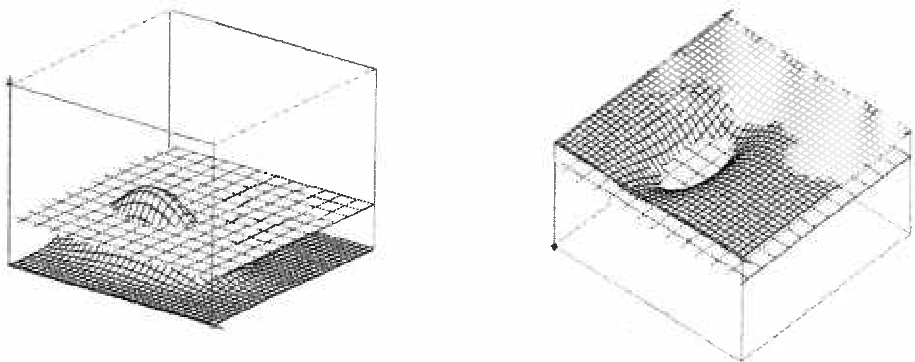
i) Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ και $\rho = 0$ η τομή είναι κύκλος με κέντρο το σημείο (μ_1, μ_2), και ακτίνα ίση με $\sigma \cdot \sqrt{K}$. Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή χαρακτηρίζεται ως **κυκλική κανονική κατανομή** (*circular normal distribution*). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η τομή είναι έλλειψη και η κατανομή χαρακτηρίζεται ως **ελλειπτική κανονική κατανομή** (*elliptical normal distribution*). Στο σχήμα 4.5 φαίνονται οι τομές της επιφάνειας της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής στην περίπτωση που αυτή είναι κύκλος και στην περίπτωση που αυτή είναι έλλειψη.



Σχήμα 4.4
Τομή της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής με το επίπεδο $f(x_1,x_2)=c$



(α) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ και $\rho = 0$

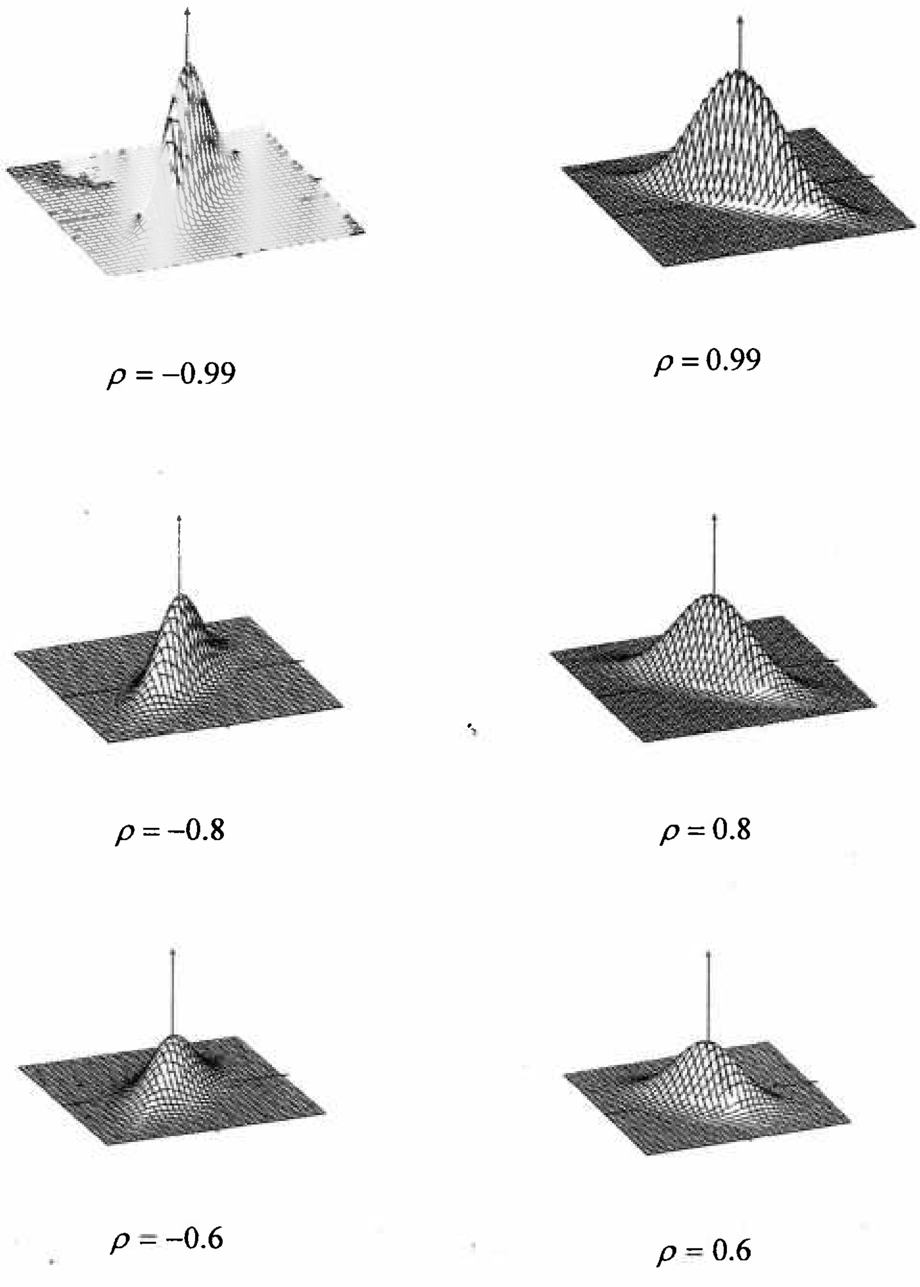


(β) $\sigma_1 = 2$ και $\sigma_2 = 1$ και $\rho = 0$

Σχήμα 4.5

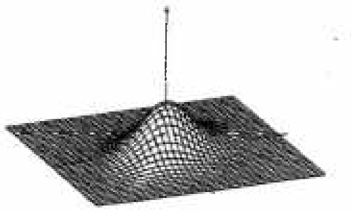
Τομή της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής από επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $X_1 X_2$ ($X_3 = 0.1$)

ii) Όταν οι τιμές των σ_1, σ_2 είναι σταθερές και η απόλυτη τιμή του ρ μεγαλώνει τότε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα αυξάνει ενώ του μικρού ελαττώνεται. Έτσι η σ.π.π τείνει να συγκεντρωθεί γύρω από μια ευθεία, την οποία ορίζει ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης. Στο σχήμα 4.6 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής πυκνότητας ($\mu_1 = \mu_2 = 0$ και $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$) και για ορισμένες τιμές της παραμέτρου ρ που μεταβάλλονται από το -1 στο1. Από τις γραφικές παραστάσεις διαπιστώνουμε ότι με την αύξηση της απόλυτης τιμής του ρ η σ.σ.π τείνει να συγκεντρωθεί γύρω από μια ευθεία.



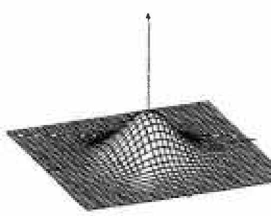
Σχήμα 4.6

Διδιάστατες κανονικές πυκνότητες για διάφορες τιμές της παραμέτρου ρ

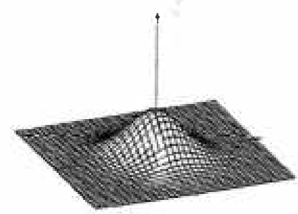


$\rho = -0.4$

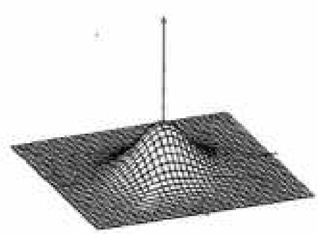
$\rho = 0.4$



$\rho = -0.2$



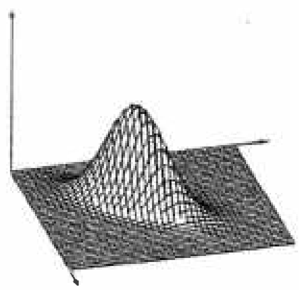
$\rho = 0.2$



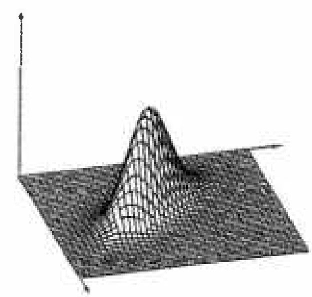
$\rho = 0$

Σχήμα 4.6 (Συνέχεια)

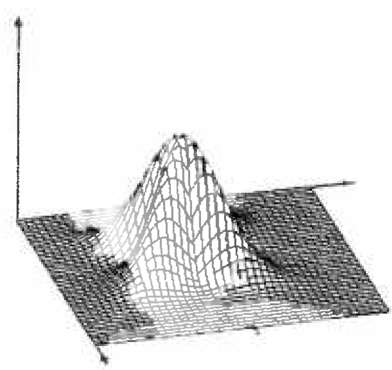
iii) Για αντίθετες τιμές της παραμέτρου ρ και για δεδομένες τιμές των άλλων παραμέτρων, οι μεγάλοι ημιάξονες των ελλείψεων είναι κάθετοι μεταξύ τους. Στο σχήμα 4.7 έχουμε τη γραφική παράσταση δύο διδιάστατων κανονικών πυκνοτήτων με $\sigma_1=\sigma_2=1$ και στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\rho = 0.8$ ενώ στη δεύτερη $\rho = -0.8$. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες γύρω από τις οποίες είναι συγκεντρωμένες οι κανονικές πυκνότητες είναι κάθετες μεταξύ τους.



$\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.8$

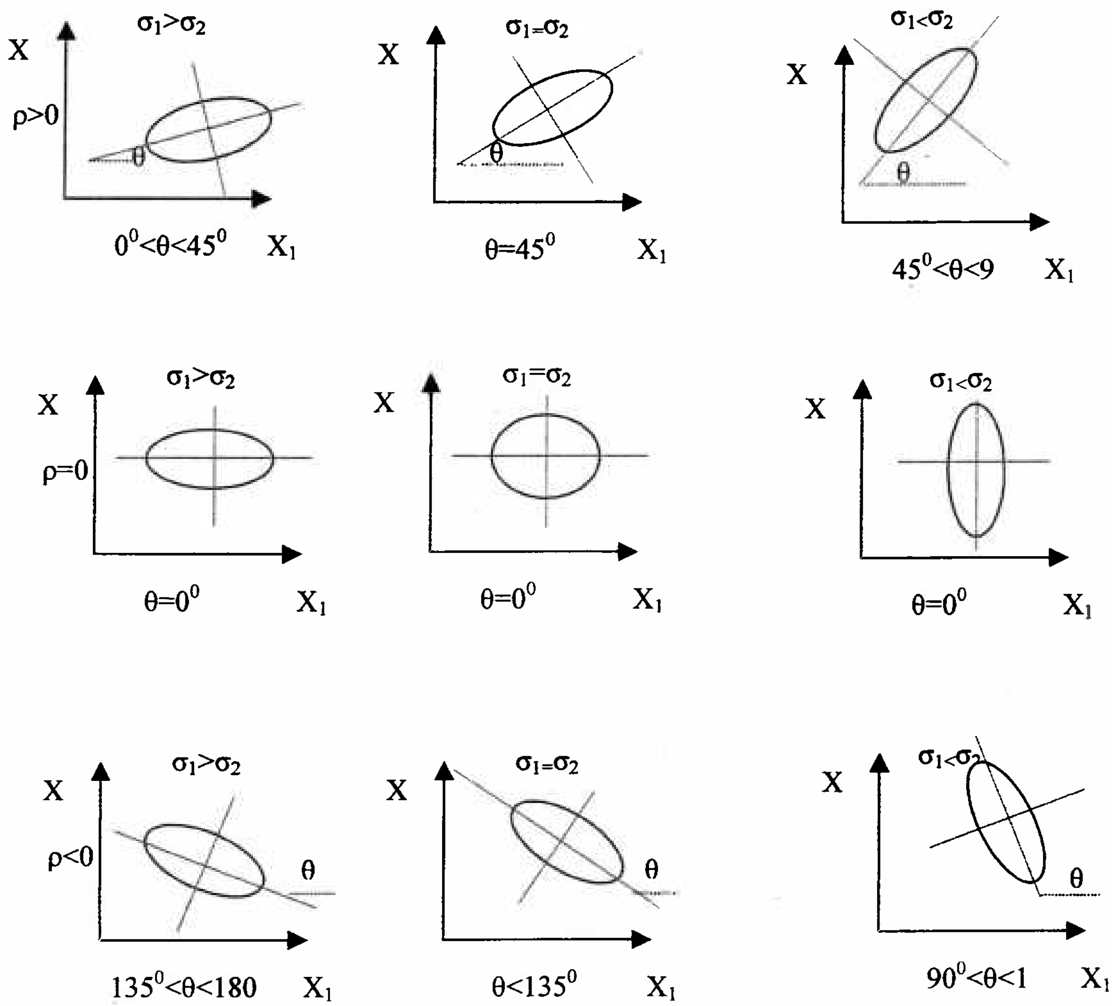


$\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = -0.8$



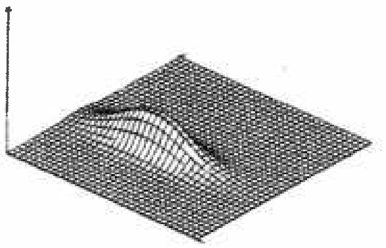
Σχήμα 4.7
Γραφικές παραστάσεις της διδιάστατης κανονικής πυκνότητας
για αντίθετες τιμές του ρ.

iv) Η γωνία θ κατά την οποία στρέφεται ο κύριος άξονας της έλλειψης εξαρτάται τόσο από τις τιμές των παραμέτρων σ_1, σ_2 όσο και από αυτήν της παραμέτρου ρ. Οι τιμές της γωνίας θ ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων δίνονται στο παρακάτω σχήμα 4.8.

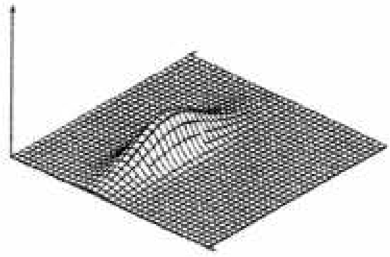


Σχήμα 4.8
Τομή της σ.π.π διδιάστατης κανονικής κατανομής με επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο X_1X_2

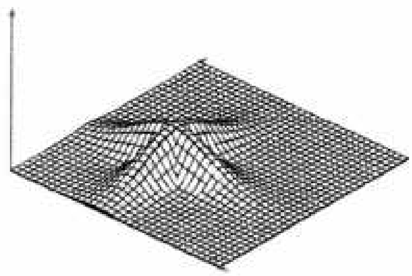
v. Στο σχήμα 4.9 έχουμε τη γραφική παράσταση δύο διδιάστατων κανονικών πυκνοτήτων για $\rho = 0$ και βλέπουμε την επίδραση που έχει σε αυτές η διακύμανση κάθε μεταβλητής. Στην πρώτη περίπτωση που είναι σ_1=3 και σ_2=1 δηλ $\sigma_1 > \sigma_2$ παρατηρούμε ότι το άπλωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας κατά μήκος του άξονα του άξονα x_1 είναι μεγαλύτερο απ' ότι κατά μήκος του άξονα x_2. Το αντίθετο παρατηρούμε στη δεύτερη περίπτωση που έχουμε σ_1=1 και σ_2=3 δηλ $\sigma_1 < \sigma_2$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι διευθύνσεις των ευθειών γύρω από τις οποίες συγκεντρώνονται οι δύο επιφάνειες είναι κάθετες.



$\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 1, \rho = 0$



$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 3, \rho = 0$



Σχήμα 4.9

Διδιάστατες κανονικές πυκνότητες για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων

σ_1, σ_2

iv. Οι καμπύλες που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται **ισοϋψείς καμπύλες πιθανότητας** (*probability contour*) επειδή για όλα τα σημεία του επιπέδου X_1X_2 τα οποία βρίσκονται πάνω στην προβολή μιας τέτοιας καμπύλης στο επίπεδο X_1X_2, η σ.π.π. παίρνει την ίδια τιμή. Επίσης ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια που ορίζει μια ισοϋψής καμπύλη και το υπερκείμενο μέρος της επιφάνειας που ορίζει η γραφική παράσταση της σ.π.π. αντιστοιχεί σε ορισμένη πιθανότητα.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την ισοϋψή καμπύλη που να αντιστοιχεί σε πιθανότητα α. Όπως προκύπτει από την απόδειξη 3 του παραρτήματος 1 η εξίσωση της ισοϋψούς καμπύλης που αντιστοιχεί σε πιθανότητα α με $0 < a < 1$ είναι η

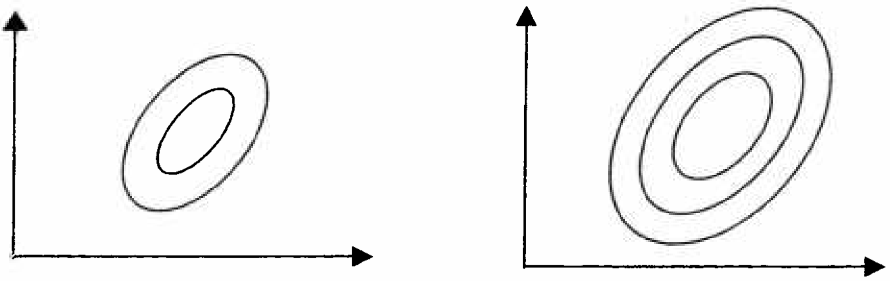
$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = -2\left(1-\rho^2\right)\ln(1-a)$$

Έτσι γνωρίζοντας τις ισοϋψείς καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές πιθανότητες γνωρίζουμε τη διδιάστατη κανονική κατανομή πιθανοτήτων.

Η πυκνότητα των ισοϋψών καμπύλων μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής εξαρτάται από την ποσότητα

$$|\Sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$$

Για μικρές τιμές του $|\Sigma|$ οι ισοϋψείς καμπύλες έχουν μεγάλη πυκνότητα, ενώ για μεγάλες τιμές του $|\Sigma|$ έχουν μικρή πυκνότητα.



Μικρό $|\Sigma|$ Μεγάλο $|\Sigma|$

Σχήμα 4.10
Ισοϋψείς καμπύλες για δύο διδ. καν. κατανομές

4. Η τομή της επιφάνειας που ορίζει η διδιάστατη κανονική συνάρτηση πιθανότητας με ένα επίπεδο κάθετο στο X_1X_2 είναι μια κανονική καμπύλη. (βλέπε παρακάτω θεώρημα 4.7.2)

4.5 Ροπογεννήτρια συνάρτηση και ροπές.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας διδιάστατης τ.μ. (X_1, X_2) (ροπογεννήτρια συνάρτηση) συμβολίζεται με $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)$ και ορίζεται ως

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = m(t_1,t_2) = E\left[e^{t_1X_1+t_2X_2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x_1+t_2x_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Θεώρημα 4.6.1: Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι η

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \exp\left[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\right]$$

<u>Απόδειξη:</u> Αντικαθιστώντας πάλι

$$u = \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \quad \text{και} \quad v = \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}$$

παίρνουμε:

$$m(t_1,t_2) = e^{t_1\sigma_1+t_2s_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1\sigma_1u+t_2s_2v}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\left[\frac{1}{2}/(1-\rho^2)\right](u^2-2ruv+v^2)}dudv,$$

Ο συνδυασμός των εκθετών στο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2 - 2\rho uv + v^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1u - 2(1-\rho^2)t_2\sigma_2v\right],$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο πρώτα ως προς u και στη συνέχεια ως προς v βρίσκουμε ότι η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_1\right]^2 + (1-\rho^2)(v-\rho t_1\sigma_1 - t_2\sigma_2)^2 - (1-\rho^2)(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\right\}$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε

$$w = \frac{u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \text{και} \quad z = v - \rho t_1\sigma_1 - t_2\sigma_2$$

γίνεται

$$-\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+t_2^2\sigma_2^2\right)$$

και έτσι τελικά βρίσκουμε ότι

$$m(t_1,t_2)=e^{t_1\mu_1+t_2\mu_2}\exp\left[\frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_1^2+2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2+t_2^2\sigma_2^2\right)\right]$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-w^2/2-z^2/2}dwdz=\exp\left[t_1\mu_1+t_2\mu_2+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2+2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2+t_2^2\sigma_2^2)\right]$$

δεδομένου ότι το τελευταίο διπλό ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη μονάδα▲

Παρατηρήσεις:

1. Όπως είναι γνωστό χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε ροπή

$$\mu_{rs}=E\left(X_1^rX_2^s\right)$$

παραγωγίζοντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση $m(t_1,t_2)$ r φορές ως προς t_1 και s φορές ως προς t_2 και στη συνέχεια θέτοντας $t_1=t_2=0$.

2. Για την τυποποιημένη διδιάστατη κανονική κατανομή αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής:

$\mu_{12}=\mu_{21}=0$

$\mu_{31}=\mu_{13}=3\rho \qquad \mu_{22}=1+2\rho^2$

$\mu_{41}=\mu_{14}=0 \qquad \mu_{32}=\mu_{23}=0$

$\mu_{51}=\mu_{15}=15\rho \qquad \mu_{42}=\mu_{24}=3\left(1+4\rho^2\right) \qquad \mu_{33}=3\rho(3+2\rho^2)$

Γενικά ισχύει

$$\mu_{2r,2s}=\frac{(2r)!(2s)!}{2^{r+s}}\sum_{j=0}^{t}\frac{(2\rho)^{2j}}{(r-j)!(s-j)!(2j)!}$$

$$\mu_{2r+1,2s+1}=\frac{(2r+1)!(2s+1)!}{2^{r+s}}\times\sum_{j=0}^{t}\frac{(2\rho)^{2j}}{(r-j)!(s-j)!(2j+1)!}$$

$$\mu_{r,s}=0 \text{ αν } r+s \text{ είναι περιττός}$$

όπου $t = \min(r, s)$.

Όπως είναι γνωστό (Kentall M.G and Stuart, A (1963)) οι ροπές συνδέονται με την παρακάτω αναδρομική σχέση

$$\mu_{rs} = (r+s-1)\rho\mu_{r-1,s-1} + (r-1)(s-1)(1-\rho^2)\mu_{r-2,s-2}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι έχουν δημοσιευτεί πίνακες με τις τιμές των ροπών της διδιάστατης κανονικής κατανομής και οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διάφορες εφαρμογές.

3. Είναι γνωστό ότι:

- Αν δύο τυχαία διανύσματα έχουν την ίδια ροπογεννήτρια συνάρτηση, τότε αυτά έχουν και την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
- Δύο τυχαία διανύσματα είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν η από κοινού ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των ροπογεννητριών συναρτήσεων καθενός τυχαίου διανύσματος.

Θεώρημα 4.6.2: Εάν $(X_1, X_2)'$ ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε :

$$E(X_1) = \mu_1$$

$$E(X_2) = \mu_2$$

$$Var(X_1) = \sigma_1^2$$

$$Var(X_2) = \sigma_2^2$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 \text{ και}$$

$$\rho_{X_1,X_2} = \rho$$

Απόδειξη: Οι ροπές μπορούν να παραχθούν υπολογίζοντας την αντίστοιχη παράγωγο της ροπογεννήτριας συνάρτησης $m(t_1, t_2)$ για . $t_1 = t_2 = 0$. Έτσι

$$E[X_1] = \frac{\partial m}{\partial t_1}\Big|_{t_1=t_2=0} = \mu_1$$

$E[X^2] = \frac{\partial^2 m}{\partial t_1^2}\Big|_{t_1=t_2=0} = \mu_1^2 + \sigma_1^2$ κατά συνέπεια η διακύμανση της X_2 είναι

$$E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] = E(X^2) - \mu_1^2 = \sigma_1^2$$

$$Cov(X_1,X_2)=E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]=E[X_1X_2]-\mu_1\mu_2=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}m(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}-\mu_1\mu_2=\rho\sigma_1\sigma_2$$

Επομένως θα έχουμε τη

$$\rho_{x_1,x_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

δηλαδή η παράμετρος ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης των X_1,X_2.

Θεώρημα 4.6.3: Αν (X_1,X_2) έχει την διδιάστατη κανονική κατανομή, τότε οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστες.

Απόδειξη: Αν οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες τότε

$$E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]\Rightarrow E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2]=0\Rightarrow Cov[X_1X_2]=0\Rightarrow \rho_{X_1,X_2}=0$$

δηλαδή οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες.

Αντίστροφα: Αν οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες τότε $\rho_{X_1,X_2}=0\Rightarrow\rho=0$.

Τότε η από κοινού ροπογεννήτρια συνάρτηση των X_1 και X_2 είναι ίση με:

$$m(t_1,t_2)=\exp\left[t_1\mu_1+t_2\mu_2+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2+2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2+t_2^2\sigma_2^2)\right]\Rightarrow_{\rho=0}$$

$$m(t_1,t_2)=\exp\left[t_1\mu_1+t_2\mu_2+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2+t_2^2\sigma_2^2)\right]=\exp\left[t_1\mu_1+\frac{1}{2}t_1^2\sigma_1^2\right]\cdot\exp\left[t_2\mu_2+\frac{1}{2}t_2^2\sigma_2^2\right]$$

δηλαδή ισχύει

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=m_{X_1}(t_1)\cdot m_{X_2}(t_2)$$

επομένως οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 4.6.4: Εάν το τυχαίο διάνυσμα $X=(X_1,X_2)$ ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ τότε:

i) Η τυχαία μεταβλητή $Z=a_1X_1+a_2X_2$, όπου a_1,a_2 είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, ακολουθεί επίσης διδιάστατη κανονική κατανομή

$$Z\sim N\left(\mu=a_1\mu_1+\alpha_2\mu_2,\ \sigma^2=\alpha_1^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2+\alpha_2^2\sigma_2^2\right).$$

ii) Το τυχαίο διάνυσμα $Y=\left(a_1X_1+b_1X_2,\ \alpha_2X_2+b_2X_2\right)$, όπου a_1,a_2,b_1,b_2 είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$\mu_1' = a_1\mu_1 + b_1\mu_2 \qquad \text{και} \qquad \mu_2' = a_2\mu_1 + b_2\mu_2$$

$$\sigma_1'^2 = a_1^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha_1b_1\sigma_1\sigma_2 + b_1^2\sigma_2^2 \qquad \text{και} \qquad \sigma_2'^2 = a_2^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha_2b_2\sigma_1\sigma_2 + b_2^2\sigma_2^2$$

$$\rho' = \frac{\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2 + b_1b_2\sigma_2^2 + \rho\alpha_1b_2\sigma_1\sigma_2 + \rho\alpha_2b_1\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha_1b_1\sigma_1\sigma_2 + b_1^2\sigma_2^2}\ \sqrt{a_2^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha_2b_2\sigma_1\sigma_2 + b_2^2}}$$

iii) Η τυχαία μεταβλητή

$$Y = \frac{1}{\left(1-\rho^2\right)}\left\{\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\cdot\rho\cdot\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

έχει x^2 κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας.

Απόδειξη: i) Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z δίνεται από τη σχέση

$$m_z(t) = E\left(e^{tz}\right) = E\left(e^{t(a_1X_1+a_2X_2)}\right) = E\left(e^{(ta_1)X_1+(ta_2)X_2}\right) = m_{(X_1,X_2)}(ta_1,ta_2) =$$

$$= \exp\left[(ta_1)\mu_1 + (ta_2)\mu_2 + \frac{1}{2}(t^2a_1^2\sigma_1^2 + 2\rho ta_1ta_2\sigma_1\sigma_2 + t^2a_2^2\sigma_2^2)\right]$$

$$= \exp\left[t(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) + \frac{1}{2}t^2(a_1^2\sigma_1^2 + 2\rho a_1a_2\sigma_1\sigma_2 + a_2^2\sigma_2^2)\right]$$

Η ροπογεννήτρια της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής είναι

$$m_{N(\mu,\sigma^2)}(t) = \exp\left(\mu\cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2t^2\right)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία ισότητα με τη ροπογεννήτρια της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής κανονικής και λαμβάνοντας υπόψη μας την παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι

$$Z \sim N\left(\mu = a_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2,\ \sigma^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2\right)$$

ii)

$$m_Y(t_1,t_2) = E\left(e^{t_1(a_1X_1+b_1X_2)+t_2(a_1X_1+b_2X_2)}\right) = E\left(e^{(t_1a_1+t_2a_2)X_1+(t_1b_1+t_2b_2)X_2}\right) = m_{(X_1,X_2)}(t_1a_1+t_2a_2, t_1b_1+t_2b_2,) =$$

$$=\exp\left\{\begin{aligned}&(t_1a_1+t_2a_2)\mu_1+(t_1b_1+t_2b_2)\mu_2+\\&\qquad+\frac{1}{2}\left[(t_1a_1+t_2a_2)^2\sigma_1^2+2\rho(t_1a_1+t_2a_2)(t_1b_1+t_2b_2)\sigma_1\sigma_2+(t_1b_1+t_2b_2)^2\sigma_2^2\right]\end{aligned}\right\}$$

$$=\exp\left\{\begin{aligned}&t_1(\alpha_1\mu_1+b_1\mu_2)+(a_2\mu_1+b_2\mu_2)t_2+\\&\qquad+\frac{1}{2}[t_1^2(a_1^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_1b_1\sigma_1\sigma_2+b_1^2\sigma_2^2)+t_2^2(a_2^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_2b_2\sigma_1\sigma_2+b_2^2\sigma_2^2)+\\&\qquad+2(\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2+b_1b_2\sigma_2^2+\rho\alpha_1b_2\sigma_1\sigma_2+\rho\alpha_2b_1\sigma_1\sigma_2)t_1t_2]\end{aligned}\right\}$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος Y είναι η διδιάστατη κανονική με παραμέτρους

$$\mu_1'=a_1\mu_1+b_1\mu_2 \qquad \text{και} \qquad \mu_2'=a_2\mu_1+b_2\mu_2$$

$$\sigma_1'^2=a_1^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_1b_1\sigma_1\sigma_2+b_1^2\sigma_2^2 \qquad \text{και} \qquad \sigma_2'^2=a_2^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_2b_2\sigma_1\sigma_2+b_2^2\sigma_2^2$$

$$\rho'=\frac{\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2+b_1b_2\sigma_2^2+\rho\alpha_1b_2\sigma_1\sigma_2+\rho\alpha_2b_1\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_1b_1\sigma_1\sigma_2+b_1^2\sigma_2^2}\ \sqrt{a_2^2\sigma_1^2+2\rho\alpha_2b_2\sigma_1\sigma_2+b_2^2}}$$

iii) Η τυχαία μεταβλητή Y μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$Y=\left\{\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\cdot\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)\right]^2\right\}$$

Έχουμε αποδείξει ότι το τυχαίο διάνυσμα $Z=\left(\dfrac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\dfrac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$ ακολουθεί τη διδιάστατη τυποποιημένη κανονική κατανομή. Εφαρμόζοντας το ii) του παρόντος θεωρήματος για

$$a_1=1, \qquad b_1=0, \qquad \alpha_2=-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad b_2=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

βλέπουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα

$$\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1},\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\cdot\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)\right)$$

ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$\mu_1'=0, \quad \mu_2'=0 \qquad \sigma_1'^2=1 \qquad \sigma_2'^2=1 \qquad \text{και} \qquad \rho'=0$$

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τυχαία μεταβλητή $Y \sim X_2^2$ γράφεται ως το άθροισμα τετραγώνων δύο ανεξαρτήτων τυποποιημένων κανονικών κατανομών. ▲

4.6 Περιθώριες και δεσμευμένες κατανομές

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις περιθώριες και τις δεσμευμένες ή υπό συνθήκη κατανομές.

Θεώρημα 4.7.1 : Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε οι περιθώριες κατανομές των X_1 και X_2 είναι μονοδιάστατες κανονικές κατανομές. Ειδικότερα ισχύει:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\rho_{x_1,x_2} = \rho$$

Απόδειξη: Η περιθώρια σ.π.π της X_1 ορίζεται ως

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

Αντικαθιστώντας

$$u = \frac{x_2 - \mu_1}{\sigma_1}$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο ως προς u, βρίσκουμε ότι

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-\rho^2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(u - \rho\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \right] du$$

Στη συνέχεια οι αντικαταστάσεις

$$w = \frac{u - \rho(x_1 - \mu_1)/\sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \text{και} \quad dw = \frac{du}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

μας δίνουν

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$$

η οποία είναι η σ.π.π της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ_1 και διακύμανση σ_1^2, δηλαδή δείξαμε ότι

$$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι: $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

Θα δείξουμε τώρα ότι ο συντελεστής συσχέτισης των X_1 και X_2 είναι ίσος με ρ.

Η συνδιακύμανση μεταξύ των X_1 και X_2 είναι:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_1,X_2) = E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] &= E[X_1X_2 - X_1\mu_1 - X_2\mu_2 + \mu_1\mu_2] = \\ &= E[X_1X_2] - \mu_1\mu_2 = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} m(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0} - \mu_1\mu_2 = \\ &= \rho\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

Έτσι το ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης των X_1, X_2. ▲

Θεώρημα 4.7.2: Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$ και διακύμανση $\sigma_1^2(1-\rho^2)$.

Επίσης η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)$ και διακύμανση $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. Δηλαδή ισχύει:

$$X_1 / X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2),\quad \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

και

$$X_2 / X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1),\quad \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

Απόδειξη: Η δεσμευμένη σ.π.π της X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ ορίζεται ως εξής:

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

και μετά την αντικατάσταση και την εκτέλεση των πράξεων παίρνει την μορφή

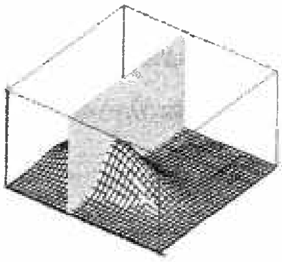
$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2}\left[x_1 - \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)\right]^2\right\}$$

η οποία είναι η σ.π.π. της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής με μέση τιμή $\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$ και διακύμανση $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. Η δεσμευμένη κατανομή της X_2 προκύπτει από την προηγούμενη ισότητα με εναλλαγή των x_1, x_2 και έτσι παίρνουμε ότι

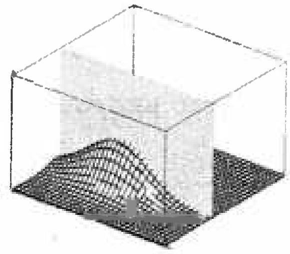
$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2}\left[x_2 - \mu_2 - \frac{\rho\sigma 2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)\right]^2\right\}$$

▲

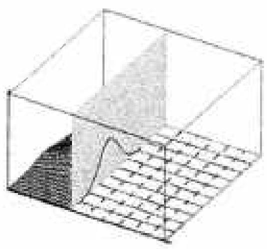
Στο σχήμα 4.11 βλέπουμε τις περιθώριες κατανομές $Y/X = 4$ και $X/Y = 4$ αντίστοιχα.



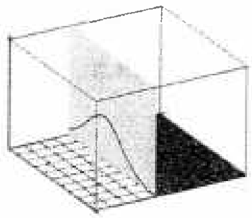
Δεσμευμένη κατανομή $Y / X = 4$



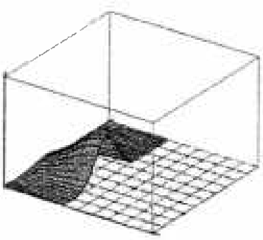
Δεσμευμένη κατανομή $X / Y = 4$



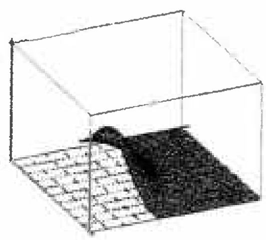
Δεσμευμένη κατανομή $Y / X = 4$



Δεσμευμένη κατανομή $X / Y = 4$



Δεσμευμένη κατανομή $Y / X = 4$



Δεσμευμένη κατανομή $X / Y = 4$

Σχήμα 4.11
Δεσμευμένες κατανομές

Παρατηρήσεις:

1. Με το θεώρημα 4.7.1 αποδείξαμε ότι αν η από κοινού κατανομή δύο μεταβλητών είναι η διδιάστατη κανονική τότε οι περιθώριες κατανομές είναι κανονικές. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή μπορεί οι περιθώριες κατανομές να είναι κανονικές και η από κοινού κατανομή να μην είναι κανονική. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.7.1. Έστω ότι $f_1(x_1,x_2)$ και $f_2(x_1,x_2)$ είναι δύο διδιάστατες κανονικές σ.π.π. με μέσες τιμές 0 , διακυμάνσεις 1 και συντελεστές συσχέτισης ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2} f_1(x_1,x_2) + \frac{1}{2} f_2(x_1,x_2)$$

η οποία είναι σ.π.π. γιατί $f(x_1,x_2) \geq 0$ και

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1,x_2)dx_1 dx_2 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_1,x_2)dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

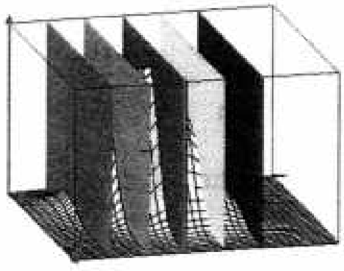
Προφανώς η $f(x_1,x_2)$ δεν είναι η σ.π.π. της διδιάστατης κανονικής κατανομής ωστόσο οι περιθώριες κατανομές των X_1 και X_2 είναι και οι δύο κανονικές.

Η παραπάνω παρατήρηση σε συνδυασμό με το θεώρημα 4.7.1 έχει εφαρμογή στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν ένα δείγμα n ζευγών παρατηρήσεων προέρχεται από την διδιάστατη κανονική κατανομή. Αρχικά γίνεται έλεγχος προσαρμογής της κανονικής κατανομής σε κάθε μια από τις περιθώριες κατανομές. Αν και οι δύο δεν μπορούν να θεωρηθούν κανονικές τότε σύμφωνα με το θεώρημα 4.7.1 μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση της κανονικότητας για την κοινή κατανομή πληθυσμού. Αν όμως οι περιθώριες μπορούν να θεωρηθούν κανονικές τότε σύμφωνα με την παρατήρηση 1 δεν είναι βέβαιο η από κοινού κατανομή ότι θα είναι η διδιάστατη κανονική μεταβλητή.

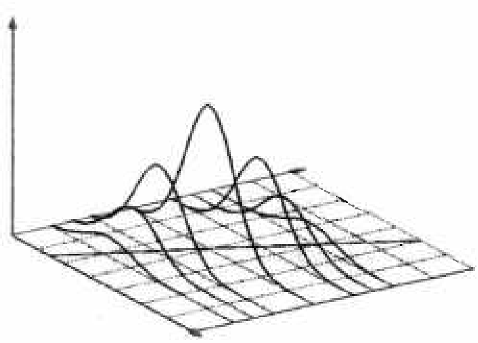
2. Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής σε μια δεσμευμένη κατανομή καλείται καμπύλη παλινδρόμησης (regression curve). Στη περίπτωση της διδιάστατης κανονικής κατανομής, η παλινδρόμηση της X_1 όταν $X_2 = x_2$,όπως είδαμε στο θεώρημα 4.7.2, είναι $\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$, η οποία είναι μια γραμμική συνάρτηση του x_2. Επομένως η εξίσωση

$$x_1 = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$$

στο επίπεδο $X_1 X_2$ παριστά μια ευθεία γραμμή, την παλινδρόμηση της X_1 πάνω στη X_2, η οποία για κάθε τιμή της X_2 μας δίνει τη μέση τιμή της X_1.Η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της X_1 όταν $X_2 = x_2$, $f_{X_1|X_2}(x_1 \mid x_2)$ έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 4.12 για συγκεκριμένες τιμές της X_2.



(α)



Σχήμα 4.12
Ευθεία παλινδρόμησης

4.7 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τον ορισμό της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Από τα όσα αναφέραμε παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα.

- Η διδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής στο χώρο των δύο διαστάσεων.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής δίνεται από τον τύπο

  $$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

  με $-\infty < x_1 < +\infty,\ -\infty < x_2 < +\infty,$

  όπου $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί (οι παράμετροι της κατανομής) τέτοιοι ώστε $-\infty < \mu_1 < +\infty$, $-\infty < \mu_2 < +\infty$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ και $-1 < \rho < 1$.
- Η σ.π.π μπορεί να τυποποιηθεί και να πάρει τη μορφή

  $$f\,(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2\right\}}$$

  Η τυποποιημένη μορφή έχει το πλεονέκτημα ότι εξαρτάται μόνο από την παράμετρο ρ.
- Η γραφική παράσταση της σ.π.π. είναι μια επιφάνεια πάνω από το επίπεδο X_1X_2, η οποία παραστατικά μπορεί να αποδοθεί με το σχήμα καμπάνας που προκύπτει αδειάζοντας ένα σακουλάκι ζάχαρη πάνω σ΄ ένα τραπέζι. Για το λόγο αυτό συχνά η διδιάστατη κανονική κατανομή αναφέρεται και ως κατανομή σχήματος καμπάνας. Η γραφική παράσταση έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
  - i) Ο όγκος του χώρου που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή και το επίπεδο X_1X_2 όπως αποδείξαμε προηγουμένως είναι ίσο με 1.
  - ii) Το ψηλότερο σημείο της είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$\left(\mu_1, \mu_2, \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

iii) Η τομή της με επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο X_1X_2 είναι μια έλλειψη με κέντρο το σημείο (μ_1, μ_2), μήκη ημιαξόνων $\sqrt{K \cdot \lambda_1}$ και $\sqrt{K \cdot \lambda_2}$ και της οποίας ο κύριος άξονας σχηματίζει με τον άξονα Ox_1 γωνία θ ίση με

$$\theta = \frac{1}{2}ctn^{-1}\left[\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)/2\rho\sigma_1\sigma_2\right]$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ και $\rho = 0$ η τομή είναι κύκλος.

iv) Όταν τα σ_1, σ_2 είναι σταθερά και η απόλυτη τιμή του ρ μεγαλώνει τότε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα αυξάνεται ενώ του μικρού μειώνεται. Έτσι η σ.π.π τείνει να συγκεντρωθεί γύρω από μια ευθεία, την ευθεία που ορίζει ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης. Επίσης για αντίθετες τιμές της παραμέτρου ρ και για δεδομένες τιμές των άλλων παραμέτρων, οι μεγάλοι ημιάξονες των ελλείψεων είναι κάθετοι μεταξύ τους

v) Για δεδομένη τιμή της παραμέτρου ρ και $\sigma_1 > \sigma_2$ τότε το άπλωμα της σ.π.π κατά μήκος του άξονα των x_1 είναι μεγαλύτερο απ' ότι κατά μήκος του άξονα x_2. Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση που είναι $\sigma_1 < \sigma_2$.

- Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι η

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \exp\left[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\right]$$

με τη βοήθεια της οποίας αποδεικνύονται οι εξής ιδιότητες, οι οποίες μας δίνουν και την ερμηνεία των παραμέτρων της κατανομής.

$$E(X_1) = \mu_1$$

$$E(X_2) = \mu_2$$

$$Var(X_1) = \sigma_1^2$$

$$Var(X_2) = \sigma_2^2$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 \text{ και}$$

$$\rho_{X_1,X_2} = \rho$$

- Στην περίπτωση που το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) έχει την διδιάστατη κανονική κατανομή, τότε αποδείξαμε ότι οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστες. Επίσης γραμμικοί συνδυασμοί των X_1, X_2 ακολουθούν την κανονική κατανομή.
- Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε οι περιθώριες κατανομές των X_1 και X_2 είναι μονοδιάστατες κανονικές κατανομές. Ειδικότερα ισχύει:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

- Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε η δεσμευμένη κατανομή της X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$ και διακύμανση $\sigma_1^2(1-\rho^2)$.

  Επίσης η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$ και διακύμανση $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. Δηλαδή ισχύει:

$$X_1 / X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \quad \sigma_1^2(1-\rho^2)\right) \text{ και}$$

$$X_2 / X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \quad \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

- Η εξίσωση $x_1 = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$ στο επίπεδο X_1X_2 παριστά μια ευθεία γραμμή, την παλινδρόμηση της X_1 πάνω στη X_2 και η οποία για κάθε τιμή της X_2 μας δίνει τη μέση τιμή της X_1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε **χαρακτηριστικές ιδιότητες** (characterizations) της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Με τον όρο αυτό εννοούμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες, οι οποίες όταν ισχύουν για τις κατανομές δύο τυχαίων μεταβλητών, προκύπτει ότι, η από κοινού κατανομή των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών είναι η διδιάστατη κανονική κατανομή. Έτσι πολλές φορές προκειμένου να αποδείξουμε ότι η από κοινού κατανομή δύο τυχαίων μεταβλητών είναι η διδιάστατη κανονική κατανομή, αποδεικνύουμε ότι αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας.

Τις χαρακτηριστικές ιδιότητες μπορούμε να τις εντάξουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι χαρακτηριστικές ιδιότητες που στηρίζονται στην κατανομή των περιθωρίων και των δεσμευμένων κατανομών. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν εκείνες οι χαρακτηριστικές ιδιότητες που στηρίζονται στην ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών. Η παρουσίαση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής θα γίνει με βάση την παραπάνω ταξινόμηση.

5.1 Οι σημαντικότερες χαρακτηριστικές ιδιότητες

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια παρουσίαση των σπουδαιότερων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Μερικές από τις ιδιότητες αυτές αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής στην πολυδιάστατη περίπτωση και για την διδιάστατη κανονική κατανομή ειδικότερα.

Η πρώτη χαρακτηριστική ιδιότητα αποδίδεται στον Gramér (1941) και έχει ως εξής:

Χαρακτηριστική ιδιότητα 1: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός των X_1 και X_2 έχει τη μονοδιάστατη κανονική κατανομή.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες που στηρίζονται στις περιθώριες και τις δεσμευμένες κατανομές.

5.1.1 Χαρακτηριστικές ιδιότητες που βασίζονται στις περιθώριες και δεσμευμένες κατανομές.

Η επόμενη χαρακτηριστική ιδιότητα της κατηγορίας αυτής διατυπώθηκε και αποδείχτηκε το 1979 από τον J. Brucker. Αυτή η χαρακτηριστική ιδιότητα μας δίνει τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις δεσμευμένες κατανομές δύο τυχαίων μεταβλητών, ώστε η από κοινού κατανομή τους να είναι η δισδιάστατη κανονική. Η διατύπωση αυτής της χαρακτηριστικής ιδιότητας έχει ως εξής:

Χαρακτηριστική ιδιότητα 2: Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 για τις οποίες ισχύει ότι:

$$X_1 / X_2 = x_2 \sim N(a + bx_2, 1) \quad \text{και}$$

$$X_2 / X_1 = x_1 \sim N(c + dx_1, 1),$$

τότε

i) $b = d, \quad$ με $|d| < 1$, και

ii) $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\frac{1}{1-d^2} \begin{bmatrix} a+cd \\ c+ad \end{bmatrix}, \frac{1}{1-d^2} \begin{bmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Α: Απόδειξη: Θα παραθέσουμε στη συνέχεια την απόδειξη της παραπάνω χαρακτηριστικής ιδιότητας , όπως αυτή δόθηκε από τον Brucker (1979).

Έστω $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$ είναι οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και $h_1(x_1/x_2)$, $h_2(x_2/x_1)$ οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Τότε θα είναι

$$g_1(x_1)h_2(x_2/x_1) = g_2(x_2)h_1(x_1/x_2),$$

$$g_1(x_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_2 - c - dx_1)^2\right\} = g_2(x_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - a - bx_2)^2\right\},$$

$$g_1(x_1)\exp\left\{\frac{1}{2}\left[(x_1 - a)^2 - d^2x_1^2 - 2cdx_1\right]\right\} =$$
$$= g_2(x_2)\exp\left\{\frac{1}{2}\left[(x_2 - c)^2 - b^2x_2^2 - 2abx_2\right]\right\}\exp\{bx_1x_2 - dx_1x_2\}.$$

Επειδή ο τελευταίος παράγοντας είναι ο μοναδικός που περιπλέκει το γινόμενο x_1x_2 και $g_i(x_i) \neq 0$ για όλα τα $x_i \in \Re$, η ισότητα θα ισχύει για τα όλα τα x_1 και x_2 μόνο αν $b = d$.

Με $b = d$ αν θέσουμε τη προηγούμενη ισότητα ίση με k θα έχουμε:

$$g_1(x_1) = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(x_1 - a)^2 - d^2x_1^2 - 2cdx_1\right]\right\} =$$
$$= k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(1 - d^2)x_1^2 - 2x_1(a + cd) + a^2\right]\right\}$$

και

$$g_2(x_2) = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(1 - d^2)x_2^2 - 2x_2(c + ad) + c^2\right]\right\}.$$

Για να είναι οι $g_1(x_1)$ και $g_2(x_2)$ συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για όλα τα $-\infty < x_i < +\infty$ θα πρέπει να είναι $|d| < 1$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$g_1(x_1) = k \cdot \exp\left\{-\frac{(1-d^2)}{2}\left(x_1 - \frac{a+cd}{1-d^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{(a+cd)^2}{1-d^2}\right]\right\},$$

$$g_2(x_2) = k \cdot \exp\left\{-\frac{(1-d^2)}{2}\left(x_2 - \frac{c+ad}{1-d^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[c^2 - \frac{(c+ad)^2}{1-d^2}\right]\right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$a^2 - \frac{(a+cd)^2}{1-d^2} = c^2 - \frac{(c+ad)^2}{1-d^2},$$

και ότι η σταθερά κανονικοποίησης είναι

$$k = \left(\frac{1-d^2}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{(a+cd)^2}{1-d^2}\right]\right\}$$

Η από κοινού κατανομή είναι

$$h_1(x_1/x_2)g_2(x_2) = \frac{\sqrt{1-d^2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - a - dx_2)^2 - \frac{(1-d^2)}{2}\left(x_2 - \frac{c+ad}{1-d^2}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-d^2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(x_1 - \frac{a+cd}{1-d^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{c+ad}{1-d^2}\right)^2 - 2d\left(x_1 - \frac{a+cd}{1-d^2}\right)\left(x_2 - \frac{c+ad}{1-d^2}\right)\right]\right\},$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\frac{1}{1-d^2}\begin{bmatrix} a+cd \\ c+ad \end{bmatrix}, \frac{1}{1-d^2}\begin{bmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{bmatrix}\right)$$

**Η τελευταία ισότητα μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας την σχέση

$$(x_1 - a - dx_2)^2 = \left[\left(x_1 - \frac{a+cd}{1-d^2}\right) - d\left(x_2 - \frac{c+ad}{1-d^2}\right)\right]^2.$$

Β. Σχόλια: Σχολιάζοντας την παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα οι Fraser D.A.S και Streit F. (1980), διατυπώνουν την άποψη ότι σε μια εφαρμογή είναι απίθανο για δύο τυχαίες μεταβλητές να γνωρίζουμε και τις δύο δεσμευμένες κατανομές τους, χωρίς να γνωρίζουμε την από κοινού κατανομή τους. Έτσι, η παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα παρουσιάζει ενδιαφέρον περισσότερο από θεωρητικής πλευράς και λιγότερο από πρακτικής.

Επίσης οι Fraser D.A.S και Streit F στο ίδιο άρθρο τους διατυπώνουν πιο απλές συνθήκες για τις δεσμευμένες κατανομές από αυτές που διατύπωσε ο Brucker. Συγκεκριμένα οι συνθήκες που διατυπώθηκαν από τους οι Fraser D.A.S και Streit F είναι οι παρακάτω:

(a_1) Η X_1 έχει μια όχι - απλή περιθώρια κανονική κατανομή.

(b) $X_2 / X_1 = x_1 \sim N(c + dx_1, h)$, για όλα τα $x_1 \in \Re$

ή

(a_2) $X_1 / X_2 = x_2 \sim N(a + bx_2, g)$ για μόνο μια τιμή x_2^0 της X_2 και η X_2 έχει μη - μηδενική περιθώρια κατανομή

(b) $X_2 / X_1 = x_1 \sim N(c + dx_1, h)$, για όλα τα $x_1 \in \Re$

όπου a,b,c,d,g,h είναι πραγματικοί αριθμοί με $g,h > 0$. (Για τον Brucker είναι $g = h = 1$).

Αν η ύπαρξη της από κοινού κατανομής δεν προϋποτίθεται, τότε ο περιορισμός $g < \frac{h}{d^2}$ πρέπει να προστεθεί για την υπό συνθήκη διακύμανση της g X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2^0$ στην συνθήκη (a_2)

Η απόδειξη για την ικανότητα των συνθηκών (a_1) και (b) προκύπτει από τη σχέση

$$f_{\tilde{X}}(x_1, x_2) = f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) \cdot f_{X_1}(x_1)$$

ενώ η ικανότητα των συνθηκών (a_2) και (b) προκύπτει από τη σχέση

$$f_{X_1}(x_1) = f_{X_1/X_2}(x_1/x_2^0) \cdot f_{X_2}(x_2^0) \cdot \left(f_{X_2/X_1}(x_2^0/x_1)\right)^{-1}$$

εξεταζόμενη ως συνάρτηση του x_1. Το δεξί μέλος έχει ένα τετραγωνικό εκθέτη και έτσι πρέπει και το αριστερό. Χωρίς την υπόθεση ότι η από κοινού κατανομή ορίζεται, η συνθήκη $g < \frac{h}{d^2}$ χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε ότι ο τετραγωνικός εκθέτης στο αριστερό μέλος είναι αρνητικά ορισμένος.

Οι επόμενες πέντε χαρακτηριστικές ιδιότητες έχουν δοθεί από τον Bhattacharyya (1943). Αυτές στηρίζονται στην κανονικότητα των δεσμευμένων κατανομών. Σε αυτό το δημοσίευμά του ο Bhattacharyya κάνει την παρακάτω επισήμανση: "*Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μερικά σύνολα από ικανές συνθήκες για τη διδιάστατη κανονική κατανομή, μερικές από τις οποίες θα φανούν ενδιαφέρουσες ενώ άλλες όχι. Πολλές από αυτές είναι πολύ γνωστές.*"

Η προσέγγιση του Bhattacharyya παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Ξεκινά με την υπόθεση ότι η δεσμευμένη σ.π.π. μιας εκ των μεταβλητών, έστω της X_2, συμβολιζόμενης με $f_1(x)$, είναι κανονική για όλα τα $X_1 = x_1$. Στη συνέχεια δείχνει ότι η από κοινού σ.π.π. των X_1 και X_2 είναι της μορφής

$$f(x_1, x_2) = \exp\{-a_1(x_1)x_2^2 - a_2(x_1)x_2 - a_3(x_1)\},$$

όπου $a_1(x_1)$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση του x_1, και $a_2(x_1), a_3(x_1)$ είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x_1, x_2)$ πάνω από το $\Re^2$ να είναι μονάδα. Στη συνέχεια γράφει την παραπάνω πυκνότητα με τη μορφή

$$\exp\left\{-a_1(x_1)\left[x_2 + \frac{a_2(x_1)}{2a_1(x_1)}\right]^2 - a_3(x_1) + \frac{[a_2(x_1)]^2}{4a_1(x_1)}\right\}$$

η οποία μας δείχνει ότι η υπό συνθήκη διακύμανση είναι $\frac{2}{a_1(x_1)}$ και η ευθεία παλινδρόμησης της X_2 πάνω στη X_1 είναι $-\frac{a_2(x_1)}{2a_1(x_1)}$. Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X_1 είναι

$$(\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha})\cdot\frac{\exp\left\{-a_3(x_1)+\dfrac{[a_2(x_1)]^2}{4a_1(x_1)}\right\}}{\sqrt{a_1(x_1)}}$$

Έχοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω παραθέτουμε τους παρακάτω πέντε χαρακτηρισμούς που διατυπώθηκαν από τον Bhattacharyya.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 3: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν η X_1 ακολουθεί την κανονική κατανομή και

$$X_2 \big| X_1 = x_1 \sim N\left(ax_1 + b,\ \sigma^2\right) \quad \text{για όλα τα } x_1 \in \Re .$$

Παρατήρηση: Η παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα παρουσιάζεται και στο βιβλίο του Wilks S.S. (1962).

Χαρακτηριστική ιδιότητα 4: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν η κατανομή του X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι κανονική για όλα τα $x_1 \in \Re$ και οι ισοϋψείς καμπύλες είναι όμοιες ομόκεντρες ελλείψεις.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 5: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν η κατανομή του X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ και η κατανομή του X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι κανονικές για όλα τα $x_2 \in \Re$ και όλα τα $x_1 \in \Re$ και η δεσμευμένη διακύμανση της μιας εκ των μεταβλητών δοθείσης της άλλης είναι σταθερή.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 6: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν η κατανομή του X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ και η κατανομή του X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι κανονικές για όλα τα $x_2 \in \Re$ και όλα τα $x_1 \in \Re$ και η περιθώρια κατανομή μιας εκ των μεταβλητών είναι κανονική.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 7: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν η κατανομή του X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ και η κατανομή του X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$ είναι κανονικές για όλα τα $x_2 \in \Re$ και όλα τα $x_1 \in \Re$ και παλινδρόμηση της μιας εκ των μεταβλητών επί της άλλης είναι γραμμική με μη μηδενική κλίση.

Η επόμενη χαρακτηριστική ιδιότητα διατυπώθηκε από τον Prince (1958)

Χαρακτηριστική ιδιότητα 8: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν

$$\frac{\partial}{\partial \rho} E[g_1(X_1)g_2(X_2)] = E\left[\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} g_1(X_1)g_2(X_2)\right],$$

όπου ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης των X_1, X_2 και g_1, g_2 είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των X_1 και X_2 αντίστοιχα.

Η επόμενη χαρακτηριστική ιδιότητα αποτελεί μια γενίκευση της προηγούμενης χαρακτηριστικής ιδιότητας και διατυπώθηκε από τον Brown J. L. Jr. (1967)

Χαρακτηριστική ιδιότητα 9: Οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 με μοναδιαίες διακυμάνσεις και συντελεστή συσχέτισης ρ ακολουθούν από κοινού τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial \rho} E[g(X_1, X_2)] = E\left[\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} g(X_1, X_2)\right],$$

για κάποια αυθαίρετη συνάρτηση $g(x_1, x_2)$ δύο μεταβλητών.

Οι δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες που ακολουθούν διατυπώθηκαν από τους Bildikar και Patil (1968).

Χαρακτηριστική ιδιότητα 10: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) έχει τη δισδιάστατη κανονική κατανομή αν (X_1, X_2) είναι ένα δισδιάστατο εκθετικού τύπου τυχαίο διάνυσμα, η παλινδρόμηση μιας από τις δύο μεταβλητές στην άλλη είναι γραμμική και η περιθώρια κατανομή οποιασδήποτε από τις δύο μεταβλητές είναι κανονική.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 11: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν (X_1, X_2) είναι ένα διδιάστατο εκθετικού τύπου τυχαίο διάνυσμα, η παλινδρόμηση μιας από τις δύο μεταβλητές στην άλλη είναι γραμμική και η κατανομή του $X_1 + X_2$ είναι κανονική.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 12: Έστω X_1 και X_2 δύο όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μηδενικές μέσες τιμές, ορισμένες δεύτερες ροπές, και με συντελεστή συσχέτισης ρ με $0 < |\rho| < 1$.

Τότε το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) έχει την δισδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και $U = (X_2 - \rho X_1)/(1-\rho^2)^{1/2}$ είναι όμοια και ανεξάρτητα κατανεμημένες..

Χαρακτηριστική ιδιότητα 13: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν ορίζεται μια αριθμήσιμη και καθορισμένη ακολουθία στο $\Re^2$, $\{(a_k, b_k) : k = 1,2,...\}$ τέτοια ώστε κάθε γραμμικός συνδυασμός $a_k X_1 + b_k X_2$ να έχει κανονική κατανομή.

Σημείωση: Με τον όρο καθορισμένη ακολουθία $\{(a_k, b_k) : k = 1,2,...\}$ εννοούμε μια ακολουθία τέτοια ώστε η παραμετρικές εξισώσεις $(t_1 = a_k t,\ t_2 = b_k t)$ παριστούν ένα άπειρο αριθμό γραμμών στο $\Re^2$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 14: Το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, X_2)$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N(a+bx_2,1) \quad \text{για όλα τα } x_2 \in \Re \text{ και}$$
$$X_2|X_1 = x_1 \sim N(c+bx_1,1) \quad \text{για όλα τα } x_1 \in \Re,$$

όπου a,b,c είναι πραγματικοί αριθμοί με $|b|<1$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 15: Το τυχαίο διάνυσμα $X=(X_1,X_2)$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν X_1 έχει κανονική περιθώρια κατανομή και

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N(c+dx_1,h) \quad \text{για όλα τα } x_1 \in \Re,$$

όπου c,d,h είναι πραγματικοί αριθμοί με $h>0$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 16: Το τυχαίο διάνυσμα $X=(X_1,X_2)$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν

$$X_1|X_2 = x_2^0 \sim N(a+bx_2^0,g) \quad \text{και}$$
$$X_2|X_1 = x_1 \sim N(c+dx_1,h) \quad \text{για όλα τα } x_1 \in \Re,$$

όπου η περιθώρια κατανομή της X_2 δεν είναι μηδέν στο x_2^0,και a,b,c,d,g,h είναι πραγματικοί αριθμοί με $g,h>0$.

Σημείωση: Στο προηγούμενο χαρακτηριστική ιδιότητα υποθέτουμε ότι ορίζεται η από κοινού κατανομή, διαφορετικά ο περιορισμός $g<\frac{h}{d^2}$ πρέπει να τεθεί για την υπό συνθήκη διακύμανση g της X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2^0$

Χαρακτηριστική ιδιότητα 17: Έστω X_1 και X_2 είναι δύο όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N(\beta+\alpha x_1,\sigma^2) \quad \text{για όλα τα } x_1 \in \Re,$$

όπου α,β,σ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\sigma>0,|\alpha|<1$. Τότε (X_1,X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή.

Σημείωση:Ησυνθήκη $X_2|X_1 = x_1 \sim N(\beta+\alpha x_1,\sigma^2)$ για όλα τα $x_1 \in \Re$, μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη συνθήκη (Hamedani, (1988)).

$f(x_1,x_2)/f(x_1)$ είναι συνεχής ως προς x_1 για όλα τα $x_1 \in \Re$ και

$X_2|X_1 = x_1 \sim N(\beta+\alpha x_1,\sigma^2)$ για όλα τα $x_1 \in A$, όπου $f(x_1,x_2)$, $f(x_1)$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των (X_1,X_2) και X_1 αντίστοιχα και A είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\Re$.

Χαρακτηριστική ιδιότητα 18: Το τυχαίο διάνυσμα (X_1,X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν οι επόμενες σχέσεις ισχύουν:

i) $\sigma_1(x_2)$ ή $\sigma_2(x_1)$ είναι σταθερή,

ii) Όταν $x_2 \to +\infty, x_2^2\sigma_1^2(x_2) \to +\infty$ (ή μια παρόμοια σχέση ισχύει για το $\sigma_2(x_1)$)

iii) Όταν $x_2 \to +\infty$, $\liminf \sigma_1(x_2) \neq 0$ (ή μια παρόμοια σχέση ισχύει για το $\sigma_2(x_1)$)

iv) Κάτω από τις προηγούμενες συνθήκες οι $m_1(x_2)$ και $m_2(x_2)$ είναι γραμμικές.

5.1.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες που βασίζονται στην ανεξαρτησία.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες που στηρίζονται στην ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών.

Ο Rao (1975) παρουσίασε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Χαρακτηριστική ιδιότητα 19: Έστω X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές και a και b είναι σταθερές τέτοιες ώστε:

i) Οι τυχαίες μεταβλητές $X - aY$ και Y είναι ανεξάρτητες, και

ii) Οι τυχαίες μεταβλητές $Y - bX$ και X είναι ανεξάρτητες.

Τότε το τυχαίο διάνυσμα (X,Y) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν $ab \neq 0$ και $ab \neq 1$.

Οι Khatri και Rao [1976] παρουσίασαν την παρακάτω χαρακτηριστική ιδιότητα:

Χαρακτηριστική ιδιότητα 20: Έστω X,Y,U_1 και U_2 είναι τ.μ και a,b είναι σταθερές τέτοιες ώστε:

i) $Z_1 = X + aY + U_1$ και (Y, U_1, U_2) είναι ανεξάρτητες, και

ii) $Z_2 = bX + Y + U_2$ και (X, U_1, U_2) είναι ανεξάρτητες

Τότε το τυχαίο διάνυσμα (Z_1, Z_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Επίσης τα τυχαία διανύσματα (Z_1, Z_2) και (U_1, U_2) είναι ανεξάρτητα.

Ο Fieger to 1977 παρουσίασε την παρακάτω χαρακτηριστική ιδιότητα:

Χαρακτηριστική ιδιότητα 21: Αν X και Y κατανέμονται ομοιόμορφα με μηδενικές μέσες τιμές, διακυμάνσεις και συντελεστή συσχέτισης ρ, με $0 < |\rho| < 1$. Τότε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) έχει τη διδιάστατη κανονική κατανομή αν και μόνο αν X και $(Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα.

Στη βιβλιογραφία της παρούσας εργασίας υπάρχουν αρκετές αναφορές σε άρθρα στα οποία γίνεται η παρουσίαση πολλών άλλων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής και στις οποίες μπορεί να ανατρέξει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{o}

Υπολογισμός Πιθανοτήτων και Πίνακες

Ο αριθμητικός υπολογισμός των πιθανοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής έχει μεγάλο ενδιαφέρον από πρακτικής πλευράς γιατί αυτό που μας χρειάζεται είναι η αριθμητική τιμή τους και όχι τόσο η αναλυτική τους έκφραση. Επειδή όμως ο ακριβής υπολογισμός τους τις περισσότερες φορές είναι πάρα πολύ δύσκολος, αν όχι αδύνατος, για τούτο έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για την αριθμητική προσέγγισή τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε μεθόδους υπολογισμού ή προσέγγισης των πιθανοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής και στο τέλος θα κάνουμε μια πρακτική εφαρμογή, υπολογισμού πιθανότητων εφαρμόζοντας έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο. Οι τιμές που θα προκύψουν από την εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού θα συγκριθούν με τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνουν άλλοι αλγόριθμοι ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε μια εμπειρική αξιολόγηση της ακρίβειάς του.

6.1 Υπολογισμός πιθανοτήτων:

Αν το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2)'$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή τότε η πιθανότητα $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$ ορίζεται ως

$$\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(u,v)\,du\,dv$$

Οι αριθμητικές τιμές των παραπάνω πιθανοτήτων έχουν υπολογιστεί για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους υπολογισμού και προσεγγίσεων. Επίσης, σε μερικές ειδικές περιπτώσεις, το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα έχει απλή έκφραση. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι αν $\mu_1 = \mu_2 = 0$, τότε

$$F(0,0) = \frac{1}{4} + (1/2\pi)\arcsin\rho$$

για όλα τα $\rho \in (-1,1)$ και όλα τα σ_1^2, σ_2^2.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των μεθόδων υπολογισμού των παραπάνω πιθανοτήτων είναι σκόπιμο να αναφέρουμε το εξής. Η πιθανότητα $F(x_1, x_2)$ εκτός από τις τιμές των x_1, x_2 εξαρτάται από τις πέντε άλλες παραμέτρους της διδιάστατης κανονικής κατανομής, που είναι $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ. Επειδή η πληθώρα αυτή των παραμέτρων δημιουργεί δυσκολίες στην πινακοποίηση των παραπάνω πιθανοτήτων, πριν τον υπολογισμό οποιασδήποτε πιθανότητας θα πρέπει να κάνουμε τυποποίηση. Η τυποποίηση μιας πιθανότητας γίνεται με τη διαδικασία που παρουσιάζεται στη συνέχεια:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$ όπου το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2)'$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ. Τότε μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα τη παραπάνω πιθανότητα με τη μορφή:

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) &= \Pr\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1} \le \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2} \le \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \\ &= \Pr(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2)\end{aligned}$$

όπου

$$U_1 = \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\ , \ U_2 = \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}, \mathrm{u}_1 = \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \quad \text{και} \quad \mathrm{u}_2 = \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}$$

Αλλά όπως έχουμε αποδείξει το τυχαίο διάνυσμα (U_1, U_2) ακολουθεί τη διδιάστατη τυποποιημένη κατανομή. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = F(u_1, u_2)$$

όπου $F(\ldots)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Έτσι ο υπολογισμός πιθανοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής με οποιεσδήποτε παραμέτρους, ανάγεται τελικά στον υπολογισμό της τιμής της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας της τυποποιημένης διδιάστατης κανονικής κατανομής, η οποία έχει μόνο μια παράμετρο το ρ. Κατά συνέπεια, για τον υπολογισμό οποιασδήποτε πιθανότητας αρκεί να έχει κάποιος στη διάθεσή του πίνακες που του δίνουν τις πιθανότητες για την τυποποιημένη διδιάστατη κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό στα παρακάτω όταν θα αναφερόμαστε σε πιθανότητες θα υποθέτουμε ότι αυτές είναι στην τυποποιημένη τους μορφή.

6.1.2 Μέθοδοι υπολογισμού πιθανοτήτων

Στην ενότητα θα αναφερθούμε σε δύο βασικές μεθόδους υπολογισμού των πιθανοτήτων της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο υπολογισμού, κάνοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς και χρησιμοποιώντας ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της διδιάστατης κανονικής κατανομής η προς υπολογισμό πιθανότητα παίρνει την μορφή

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-u^2} du,$$

όπου

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(\frac{x_1 + \sqrt{2\rho}\, u}{\sqrt{1-\rho}} \right) \cdot \Phi\left(\frac{x_2 + \sqrt{2\rho}\, u}{\sqrt{1-\rho}} \right)$$

και $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ είναι η αθροιστική σ.π.π της τυποποιημένης μονοδιάστατης κανονικής κατανομής.

Η παραπάνω μορφή της πιθανότητας $F(x_1,x_2)$ πλεονεκτεί έναντι της αρχικής της μορφής στο ότι εξαρτάται πλέον από ένα απλό ολοκλήρωμα για το οποίο έχουν προταθεί αρκετοί αριθμητικοί τρόποι προσεγγιστικού υπολογισμού του.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο αντί για την χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής

$$F(h,k;\rho)=\left(2\pi\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}\times\int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{k}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2\right)\right\}dx_2dx_1$$

χρησιμοποιείται η ποσότητα

$$L(h,k;\rho)=P(X_1\geq h,X_2\geq k)=$$
$$=\left(2\pi\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}\times\int_{h}^{+\infty}\int_{k}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2\right)\right\}dx_2dx_1$$

Οι δύο συναρτήσεις $F(.)$ και $L(\,.\,)$ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$F(h,k;\rho)=1-L(h,-\infty;\rho)-L(-\infty,k;\rho)+L(h,k;\rho)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$F(h,\infty;\rho)=\Phi(h)\quad\text{και}\quad F(\infty,k;\rho)=\Phi(k)$$

όπου

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Άλλες χρήσιμες σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των συναρτήσεων $F(.)$ και $L(\,.\,)$ είναι οι ακόλουθες:

$$L(h,k;\rho)=L(k,h;\rho)$$
$$L(-h,k;\rho)+L(h,k;-\rho)=1-\Phi(k)$$
$$L(-h,-k;\rho)-L(h,k;-\rho)=1-\Phi(h)-\Phi(k)$$

$$L(h,k;0)=\{1-\Phi(h)\}\{1-\Phi(k)\}$$

$$L(h,k;1)=\Phi(\max(h,k))$$

$$L(h,k;-1)=\begin{cases}0 & (h+k\geq 0)\\ 1-\Phi(h)-\Phi(k) & (h+k\leq 0)\end{cases}$$

Η όλη προσπάθεια των ερευνητών στρέφεται λοιπόν στον υπολογισμό ή την προσέγγιση της τιμής της $L(h,k;\rho)$, όπου με τη βοήθεια της σχέσης

$$F(h,k;\rho)=1-L(h,-\infty;\rho)-L(-\infty,k;\rho)+L(h,k;\rho)$$

και των προηγουμένων σχέσεων, μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε την τιμή της $F(h,k;\rho)$.

Πίνακες που μας δίνουν τις τιμές της $L(h,k,\rho)$ αποκλειστικά για μη αρνητικές τιμές των h και k έχουν δημοσιευτεί από το *National Bureau of Standards,* των Η.Π.Α (1959). Μια άμεση προσέγγιση της τιμής $L(h,k,\rho)$ και η οποία στηρίζεται στη χρήση πολικών συντεταγμένων, έχει δώσει ο Dingi (1979).

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα τρόπο προσέγγισης της $L(h,k,\rho)$ η οποία στηρίχθηκε σε μια πρόταση του Owen (1957). O Owen είχε ότι:

$$L(h,k;\rho)=L\left(h,0;\frac{(\rho h-k)\operatorname{sgn}(h)}{\left(h^2-2\rho hk+k^2\right)^{1/2}}\right)+L\left(k,0;\frac{(\rho k-h)\operatorname{sgn}(k)}{\left(h^2-2\rho hk+k^2\right)^{1/2}}\right)-\begin{cases}0 & \text{αν είναι } hk>0 \quad \text{ή} \quad hk=0 \quad \text{και} \quad h+k\geq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

όπου

$$\operatorname{sgn}(h)=\begin{cases}1, & \text{άν} \quad h\geq 0\\ -1, & \text{άν} \quad h<0\end{cases}$$

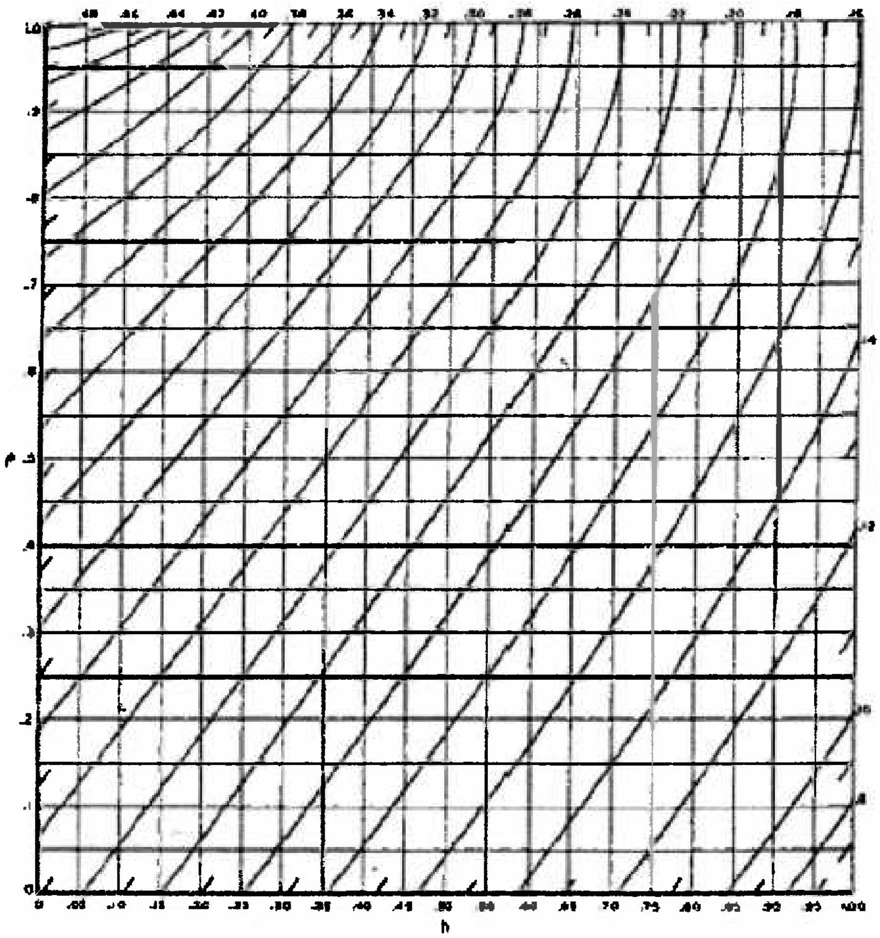
Η τελευταία μορφή της ποσότητας $L(h,k;\rho)$ κάνει δυνατό τον υπολογισμό της σαν άθροισμα δύο ποσοτήτων της μορφής $L(h,0;\rho)$, όπου η τελευταία εξαρτάται πλέον από δύο παραμέτρους. Επειδή η $L(h,0;\rho)$ εξαρτάται από δύο παραμέτρους, αυτό κάνει δυνατή την πινακοποίησή της, πράγμα που έδωσε την αφορμή σε πολλούς ερευνητές να ασχοληθούν με την κατάρτιση τέτοιων πινάκων οι οποίοι έχουν την μορφή διαγραμμάτων. Στο Διάγραμμα 6.1 παραθέτουμε ένα από τα διαγράμματα που έχουν δημοσιευτεί από τους Marvin Zelen και Norman C. Severo (1960) για τον υπολογισμό της $L(h,0;\rho)$

Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε την $L(0.5,0.4;0.8)$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και κάνοντας παρεμβολή στο προηγούμενο διάγραμμα, θα έχουμε:

$$(h^2-2\rho\kappa+k^2)^{1/2}=0.3$$

$$L(0.5,0.4;0.8)=L(0.5,0;0)+L(0.4,0;-0.6)=0.15+0.08=0.23$$

Το σφάλμα της προσέγγισης με τη χρήση του παραπάνω διαγράμματος κυμαίνεται στο διάστημα ± 0.01.



Διάγραμμα 6.1

$L(h,0;\rho)$ για $0\le h\le 1$ και $-1\le \rho\le 0$.

(Τιμές για $h<0$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση $L(h,0;-\rho)=\frac{1}{2}-L(-h,0;\rho)$)

6.1.3 Αλγόριθμος προσέγγισης πιθανοτήτων

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μια απλή μέθοδο που προτάθηκε από τους Montira Jantaravareerat και Nick T. Thomopoulos (1998), με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την πιθανότητα

$$\Pr(Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2) = F(z_1, z_2)$$

όταν το τυχαίο διάνυσμα $(Z_1, Z_2)'$ ακολουθεί την διδιάστατη τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Η βασική ιδέα στην οποία στηρίζεται ο αλγόριθμος είναι η εξής: Όπως είναι γνωστό η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με τον όγκο του στερεού που ορίζεται από το χωρίο στο οποίο παίρνουν τιμές οι τυχαίες μεταβλητές και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής. Το χωρίο ολοκλήρωσης χωρίζεται σε τετράγωνα πλευράς c. Σε κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί ένα στερεό με βάση το τετράγωνο αυτό και του οποίου το άνω μέρος περιορίζεται από την σ.π.π. της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Το άθροισμα των όγκων όλων των στερεών θα μας δώσει την ζητούμενη πιθανότητα.

Ο όγκος κάθε στερεού προσεγγίζεται από τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση το τετράγωνο πλευράς c και ύψος τη μέση τιμή της σ.π.π της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής στις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου. Αναλυτικά η μέθοδος έχει όπως αυτή περιγράφεται παρακάτω:

Υποθέτουμε ότι τα σημεία z_1, z_2 είναι τέτοια ώστε $-3 \le z_1 \le 3$ και $-3 \le z_2 \le 3$ και ότι η μονάδα κάθε άξονα είναι το c=0,1. Έτσι έχουμε 61 τιμές για το z_1 και 61 τιμές για το z_2. Όλα μαζί τα δυνατά ζευγάρια τιμών για τα z_1 και z_2 είναι $61 \times 61 = 3721$.

Κάθε ένα από αυτά τα κελιά παριστάνει ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους 0,1. Έτσι κάθε κελί έχει εμβαδόν 0,01. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για κάθε ζευγάρι τιμών (z_1, z_2) υπολογίζεται κάνοντας τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^o : Υπολογίζουμε την τιμή $f(z_1,z_2)$ της σ.π.π της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Βήμα 2^o : Υπολογίζουμε τη μέση πυκνότητα πιθανότητας $h(z_1,z_2)$ για κάθε κελί στο διάστημα z_1 και z_2 ως την μέση τιμή της σ.π.π της τυποποιημένης κανονικής κατανομής στις τέσσερις κορυφές κάθε κελιού. Αυτή υπολογίζεται ως εξής:

Έστω ότι οι πλευρές του τετραγώνου είναι $\delta_1 = \delta_2 = c = 0{,}1$ και $f(z_1,z_2)$ είναι η σ.π.π της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Θέτουμε

$$g(\delta_1,\delta_2) = f(z_1-\delta_1, z_2-\delta_2)$$

Τότε η μέση πυκνότητα πιθανότητας $h(z_1,z_2)$ ορίζεται ως

$$h(z_1,z_2) = \frac{1}{4}\left(g(0{,}0) + g(\delta_1,0) + g(0,\delta_2) + g(\delta_1,\delta_2)\right)$$

Βήμα 3^o : Υπολογίζουμε τον όγκο για κάθε κελί πολλαπλασιάζοντας τη μέση πυκνότητα πιθανότητας που προκύπτει από το βήμα με το εμβαδόν του κελιού. Από $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}1$, το εμβαδόν είναι ίσο με $0{,}01$, και ο όγκος για (z_1,z_2) δίνεται από

$$P(z_1,z_2) = \delta^2 \times h(z_1,z_2) = 0{,}01 \times h(z_1,z_2)$$

Βήμα 4^o : Η $F(z_1,z_2)$ υπολογίζεται αθροίζοντας τους όγκους για όλα τα κελιά που αντιστοιχούν σε σημεία που είναι κάτω από τα z_1 και z_2. Δηλαδή

$$F(z_1,z_2) = \sum_i \sum_j P(i,j) \text{ όπου } \begin{array}{l} z_1 = -4.0,-3.9,-3.8,....4.0 \\ z_2 = -4.0,-3.9,-3.8,....4.0 \end{array}$$

Παρατηρήσεις:

1. Η παραπάνω μέθοδος είναι προσεγγιστική. Η ακρίβεια προσέγγισης μπορεί να βελτιωθεί αν ελαττώσουμε c. Αυτό όμως μας έχει σαν αποτέλεσμα περισσότερους υπολογισμούς και επομένως θα απαιτείται και περισσότερος χρόνος.

2. Είναι $F(-3,-3) \cong 0$ και $F(3,3) \cong 1$

3. Η παραπάνω μέθοδος μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί προγραμματιστικά για τη παραγωγή πινάκων της υπολογιζόμενης πιθανότητας για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ρ. Μια εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου έχουμε στην επόμενη παράγραφο.

4. Πιθανότητες της μορφής $P(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$ μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια του τύπου

$$P(a \le x \le b,\ c \le y \le d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$$

6.1.4 Εφαρμογή αλγορίθμου για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια πρακτική εφαρμογή του αλγορίθμου των Montira Jantaravareerat και Nick T. Thomopoulos. Ο κώδικας της εφαρμογής είναι γραμμένος σε γλώσσα Rapid-Q Basic Version 1.0.0. και για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων υπολογίστηκαν τα εξής:

Α) Για $\rho = 0$, υπολογίστηκαν οι πιθανότητες

$$F(x_1, x_2) = \Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$$

για $x_1 = -2(1)2$ και $x_2 = -3(1)3$, και χρησιμοποιώντας ως υποδιαιρέσεις των αξόνων διαστήματα μήκους 0.1, 0,05, 0.025 και 0,0125. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο πίνακα 6.1

Στην περίπτωση αυτή επειδή είναι $\rho = 0$ θα έχουμε ότι οι τ.μ X_1 και X_2 εφόσον είναι ασυσχέτιστες θα είναι όπως έχουμε αποδείξει και ανεξάρτητες Επομένως θα ισχύει ότι

$$F(x_1, x_2) = \Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \Pr(X_1 \le x_1) \cdot \Pr(X_2 \le x_2) = \\ = \Phi(x_1) \cdot \Phi(x_2)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής. Για το λόγο αυτό στην τελευταία στήλη του πίνακα 6.1 έχουμε υπολογίσει για κάθε τιμή x_1, x_2, των X_1 και X_2 αντίστοιχα , το γινόμενο $\Phi(x_1)\cdot\Phi(x_2)$ για να μπορέσουμε να κάνουμε συγκρίσεις και έτσι να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την ακρίβεια των προσεγγίσεων που μας δίνει ο αλγόριθμος.

B) Για $\rho = 0.5$ και για $\rho = 0.9$ υπολογίστηκαν οι πιθανότητες

$$F(x_1, x_2) = \Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$$

για $x_1 = -2(1)2$ και $x_2 = -3(1)3$, και χρησιμοποιώντας ως υποδιαιρέσεις των αξόνων διαστήματα μήκους 0.1, 0,05, 0.025 και 0,0125. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες 6.2 και 6.3.

Για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ακρίβεια των προσεγγίσεων που μας δίνει ο αλγόριθμος, για τις τιμές εκείνες για τις οποίες είναι $x_1 = x_2$ παραθέτουμε στην τελευταία στήλη των πινάκων τις αντίστοιχες πιθανότητες όπως αυτές έχουν υπολογιστεί σε σχετικούς πίνακες που είναι δημοσιευμένοι στο βιβλίο του Y.L. Tong και τους οποίους παραθέτουμε στο τέλος της παρούσας εργασίας στο παράρτημα ΙΙ.

Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες βγάζουμε το συμπέρασμα ότι όσο μικραίνει το μήκος c του διαστήματος στο οποίο χωρίζουμε τους άξονες τόσο η προσέγγιση βελτιώνεται και πλησιάζει ικανοποιητικά την αντίστοιχη τιμή που δίνεται από τους πίνακες. Άρα ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική προσέγγιση πιθανοτήτων της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής, παρακάπτοντας τους περιορισμούς των πινάκων.

6.2. Πίνακες πιθανοτήτων

Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους προσέγγισης των πιθανοτήτων της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής και με τη χρήση ισχυρών ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν συνταχθεί και δημοσιευτεί κατά καιρούς αντίστοιχοι πίνακες. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να ενταχθούν σε τέσσερις ομάδες:

Ομάδα Α: Πίνακες μονόπλευρων ποσοστιαίων σημείων.

Οι πίνακες της ομάδας αυτής περιλαμβάνουν τις τιμές του c, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$\Pr(X_1 \le c, X_2 \le c) = \gamma$$

για καθορισμένες τιμές του ρ και του γ.

Ομάδα Β: Πίνακες αμφίπλευρων ποσοστιαίων σημείων:

Οι πίνακες της ομάδας αυτής περιλαμβάνουν τις τιμές του c, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$\Pr(|X_1| \le c, |X_2| \le c) = \gamma$$

για καθορισμένες τιμές του ρ και του γ.

Ομάδα Γ: Πίνακες μονόπλευρων πιθανοτήτων:

Οι πίνακες της ομάδας αυτής περιλαμβάνουν τις τιμές της πιθανότητας

$$\Pr(X_1 \le a, X_2 \le a)$$

για καθορισμένες τιμές του ρ και του α.

Ομάδα Δ: Πίνακες αμφίπλευρων πιθανοτήτων:

Οι πίνακες της ομάδας αυτής περιλαμβάνουν τις τιμές της πιθανότητας

$$\Pr(|X_1| \le a, |X_2| \le a)$$

για καθορισμένες τιμές του ρ και του α.

Αντιπροσωπευτικοί πίνακες από κάθε ομάδα πινάκα υπάρχουν στο παράρτημα ΙΙ. Οι πίνακες αυτοί έχουν ληφθεί από το βιβλίο του Y.L. Tong. Οι υπολογισμοί έγιναν με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή τύπου Cyber 205 Supercomputer στο Tech Computing Network χρησιμοποιώντας διπλή ακρίβεια στους υπολογισμούς. Για τον υπολογισμό της τιμής της αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής $\Phi(z)$ χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα της IMSL βιβλιοθήκης προγραμμάτων, η οποία είναι γνωστό ότι έχει καλή ακρίβεια. Τέλος οι τιμές των πινάκων των ομάδων (α) και (β) περιέχουν τέσσερα δεκαδικά ψηφία ενώ των ομάδων (γ) και (δ) πέντε δεκαδικά ψηφία.

$\rho = 0$						
X_1	X_2	C=0.1	C=0.05	C=0.025	C=0.0125	$\Phi(X_1)*\Phi(X_2)$
-2	-3	0.000022407	0.000034576	0.000032198	0.000028909	0,000030712
-2	-2	0.000404619	0.000580520	0.000547589	0.000501010	0,000517565
-2	-1	0.002951556	0.003968918	0.003783005	0.003516753	0,003609417
-2	0	0.009655822	0.012286610	0.011816309	0.011135135	0,011375031
-2	1	0.016675839	0.020415199	0.019757783	0.018797436	0,019140645
-2	2	0.019600900	0.023577138	0.022883228	0.021865774	0,022232497
-2	3	0.020082801	0.024063378	0.023369626	0.022351742	0,022719350
-1	-3	0.000163453	0.000236387	0.000222442	0.000202919	0,000214179
-1	-2	0.002951556	0.003968918	0.003783005	0.003516753	0,003609417
-1	-1	0.021530592	0.027134843	0.026134775	0.024685221	0,025171491
-1	0	0.070435930	0.084001546	0.081632622	0.078161094	0,079327630
-1	1	0.121644561	0.139575379	0.136496059	0.131945249	0,133483768
-1	2	0.142981883	0.161193040	0.158088096	0.153482899	0,155045843
-1	3	0.146497182	0.164517385	0.161448363	0.156894064	0,158441080
0	-3	0.000534727	0.000731785	0.000694802	0.000642506	0,000674984
0	-2	0.009655822	0.012286610	0.011816309	0.011135135	0,011375031
0	-1	0.070435930	0.084001546	0.081632622	0.078161094	0,079327630
0	0	0.230426558	0.260044245	0.254981537	0.247482350	0,250000000
0	1	0.397952258	0.432084597	0.426348854	0.417779726	0,420672370
0	2	0.467755918	0.499006561	0.493792124	0.485974628	0,488624969
0	3	0.479255990	0.509297763	0.504288000	0.496775438	0,499325016
1	-3	0.000923486	0.001215921	0.001161763	0.001084626	0,001135788
1	-2	0.016675839	0.020415199	0.019757783	0.018797436	0,019140645
1	-1	0.121644561	0.139575379	0.136496059	0.131945249	0,133483768
1	0	0.397952258	0.432084597	0.426348854	0.417779726	0,420672370
1	1	0.687273208	0.717943591	0.712888265	0.705262010	0,707860972
1	2	0.807825823	0.829139860	0.825658628	0.820383138	0,822204095
1	3	0.827686725	0.846239526	0.843208546	0.838616195	0,840208952
2	-3	0.001085472	0.001404245	0.001345540	0.001261671	0,001319255
2	-2	0.019600900	0.023577138	0.022883228	0.021865774	0,022232497
2	-1	0.142981883	0.161193040	0.158088096	0.153482899	0,155045843
2	0	0.467755918	0.499006561	0.493792124	0.485974628	0,488624969
2	1	0.807825823	0.829139860	0.825658628	0.820383138	0,822204095
2	2	0.949524225	0.957558387	0.956267909	0.954295686	0,955017441
2	3	0.972868871	0.977306477	0.976594013	0.975504956	0,975930683

Πίνακας 6.1

Προσεγγιστικός υπολογισμός των πιθανοτήτων $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$ της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής για $\rho = 0$ και με μονάδα των αξόνων $c = 0.1,\ 0.05,\ 0.025$ και 0.0125 αντίστοιχα

$\rho = 0.5$						
X_1	X_2	C=0.1	C=0.05	C=0.025	C=0.0125	Τιμές από πίνακες
-2	-3	0.000359060	0.000486867	0.000462144	0.000427723	
-2	-2	0.003398008	0.004367175	0.004190060	0.003936430	0,00405
-2	-1	0.011469446	0.014175423	0.013692100	0.012991833	
-2	0	0.018211275	0.021991400	0.021327079	0.020356504	
-2	1	0.019961105	0.023929441	0.023236355	0.022220543	
-2	2	0.020098586	0.024075020	0.023381046	0.022363543	
-2	3	0.020101754	0.024078230	0.023384266	0.022366765	
-1	-3	0.000838799	0.001100707	0.001051508	0.000981942	
-1	-2	0.011469446	0.014175423	0.013692100	0.012991833	
-1	-1	0.055914835	0.065941405	0.064182405	0.061610933	0,06251
-1	0	0.116486072	0.133002625	0.130151806	0.125949677	
-1	1	0.142953069	0.160925148	0.157855191	0.153306229	
-1	2	0.146560792	0.164557153	0.161490360	0.156940722	
-1	3	0.146708977	0.164699650	0.161634282	0.157086433	
0	-3	0.001073997	0.001388125	0.001329932	0.001247048	
0	-2	0.018211275	0.021991400	0.021327079	0.020356504	
0	-1	0.116486072	0.133002625	0.130151806	0.125949677	
0	0	0.313642711	0.343327689	0.338280377	0.330784275	0,33333
0	1	0.447914520	0.479152646	0.473910595	0.466073760	
0	2	0.477860977	0.507956879	0.502933562	0.495403945	
0	3	0.479958485	0.509878813	0.504887876	0.497404627	
1	-3	0.001108994	0.001429015	0.001369901	0.001285581	
1	-2	0.019961105	0.023929441	0.023236355	0.022220543	
1	-1	0.142953069	0.160925148	0.157855191	0.153306229	
1	0	0.447914520	0.479152646	0.473910595	0.466073760	
1	1	0.727649475	0.753802577	0.749480549	0.742968817	0,74520
1	2	0.818671670	0.838227943	0.835025765	0.830179176	
1	3	0.828642835	0.846994016	0.843994310	0.839450599	
2	-3	0.001110533	0.001430736	0.001371599	0.001287238	
2	-2	0.020098586	0.024075020	0.023381046	0.022363543	
2	-1	0.146560792	0.164557153	0.161490360	0.156940722	
2	0	0.477860977	0.507956879	0.502933562	0.495403945	
2	1	0.818671670	0.838227943	0.835025765	0.830179176	
2	2	0.953639092	0.960827296	0.959667608	0.957899021	0,95855
2	3	0.973386187	0.977696186	0.977003100	0.975944484	

Πίνακας 6.2

Προσεγγιστικός υπολογισμός των πιθανοτήτων $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$ της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής για $\rho = 0.5$ και με μονάδα των αξόνων $c = 0.1,\ 0.05,\ 0.025$ και 0.0125 αντίστοιχα

$\rho = 0.9$						
X_1	X_2	C=0.1	C=0.05	C=0.025	C=0.0125	Τιμές από πίνακες
-2	-3	0.001071753	0.001384238	0.001325171	0.001241861	
-2	-2	0.011672821	0.014212390	0.013753869	0.013093322	0,1336
-2	-1	0.019875648	0.023818586	0.023127622	0.022116662	
-2	0	0.020098018	0.024074865	0.023380483	0.022362594	
-2	1	0.020098092	0.024074951	0.023380570	0.022362679	
-2	2	0.020098092	0.024074951	0.023380570	0.022362679	
-2	3	0.020098092	0.024074951	0.023380570	0.022362679	
-1	-3	0.001097972	0.001416942	0.001357028	0.001272246	
-1	-2	0.019875648	0.023818586	0.023127622	0.022116662	
-1	-1	0.105916532	0.120490976	0.117940092	0.114207029	0,11549
-1	0	0.146051178	0.163999261	0.160934542	0.156392623	
-1	1	0.146715940	0.164707462	0.161642389	0.157094640	
-1	2	0.146716072	0.164707604	0.161642534	0.157094785	
-1	3	0.146716072	0.164707604	0.161642534	0.157094785	
0	-3	0.001097987	0.001416960	0.001357046	0.001272263	
0	-2	0.020098018	0.024074865	0.023380483	0.022362594	
0	-1	0.146051178	0.163999261	0.160934542	0.156392623	
0	0	0.408593274	0.438234624	0.433176727	0.425678093	0,42822
0	1	0.479310329	0.509236394	0.504238284	0.496748844	
0	2	0.480010730	0.509926434	0.504937027	0.497455509	
0	3	0.480010812	0.509926516	0.504937111	0.497455595	
1	-3	0.001097987	0.001416960	0.001357046	0.001272263	
1	-2	0.020098092	0.024074951	0.023380570	0.022362679	
1	-1	0.146715940	0.164707462	0.161642389	0.157094640	
1	0	0.479310329	0.509236394	0.504238284	0.496748844	
1	1	0.783831489	0.805273181	0.801702326	0.796342000	0,79818
1	2	0.828742614	0.847059757	0.844064145	0.839527680	
1	3	0.829002703	0.847296827	0.844307379	0.839778534	
2	-3	0.001097987	0.001416960	0.001357046	0.001272263	
2	-2	0.020098092	0.024074951	0.023380570	0.022362679	
2	-1	0.146716072	0.164707604	0.161642534	0.157094785	
2	0	0.480010730	0.509926434	0.504937027	0.497455509	
2	1	0.828742614	0.847059757	0.844064145	0.839527680	
2	2	0.964091880	0.969621646	0.968720381	0.967352394	0,96786
2	3	0.974384646	0.978501776	0.977839998	0.976828998	

Πίνακας 6.3

Προσεγγιστικός υπολογισμός των πιθανοτήτων $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$ της διδιάστατης τυποποιημένης κανονικής κατανομής για $\rho = 0.9$ και με μονάδα των αξόνων $c = 0.1,\ 0.05,\ 0.025$ και 0.0125 αντίστοιχα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο}

Παραγωγή Ακολουθίας Τιμών της Διδιάστατης Κανονικής Κατανομής

Σε πολλές εφαρμογές ενδιαφερόμαστε για την παραγωγή μιας ακολουθίας τιμών μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, η οποία να κατανέμεται σύμφωνα με την διδιάστατη κανονική κατανομή και με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τη θεωρητική βάση πάνω στην οποία στηριζόμαστε για την παραγωγή μιας ακολουθίας τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής και στη συνέχεια θα κάνουμε μια πρακτική εφαρμογή της σχετικής μεθοδολογίας παράγοντας μια ακολουθία τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

7.1 Διαδικασία παραγωγής τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την παραγωγή μιας ακολουθίας τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ στηρίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.1_ Έστω Z_0, Z_1, Z_2, ανεξάρτητες $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Για διαφορετικές αλλά συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ με $|\rho| < 1$, ορίζουμε να είναι

$$X_1 = \sigma_1\left(\sqrt{1-|\rho|}Z_1 + \sqrt{|\rho|}Z_0\right) + \mu_1,$$

$$X_2 = \sigma_2\left(\sqrt{1-|\rho|}Z_2 + \delta_\rho\sqrt{|\rho|}Z_0\right) + \mu_2,$$

όπου

$$\delta_\rho = \begin{Bmatrix} 1 & \text{άν } \rho \geq 0 \\ -1 & \text{άν } \rho < 0 \end{Bmatrix}$$

Τότε το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2)'$ ακολουθεί την δισδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ και ρ.

7.2 Εφαρμογή

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναφέραμε παραπάνω για την παραγωγή μιας ακολουθίας τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την παραγωγή μιας ακολουθίας 10 τιμών της διδιάστατης κανονικής κατανομής με παραμέτρους

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1 \quad \text{και} \quad \rho = 0.5$$

Σύμφωνα με την παραπάνω μεθοδολογία για την παραγωγή των τιμών αυτών θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1° : Με το στατιστικό πακέτο Minitab 12 παράγουμε τρεις ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές Z_0, Z_1, Z_2, οι τιμές των οποίων φαίνονται στον πίνακα 7.1

A/A	Z_0	Z_1	Z_2
1	-0,24017	0,64563	-0,2944
2	-0,83832	1,80178	0,20381
3	0,25708	-0,0018	1,52836
4	-0,93389	-1,64841	-1,29836
5	-0,06171	0,46659	-0,32743
6	0,77492	-1,32433	-0,50706
7	-1,63989	0,10451	0,36397
8	0,99268	0,81685	-0,53881
9	1,47807	0,74937	-1,6813
10	0,74154	1,89403	0,72388

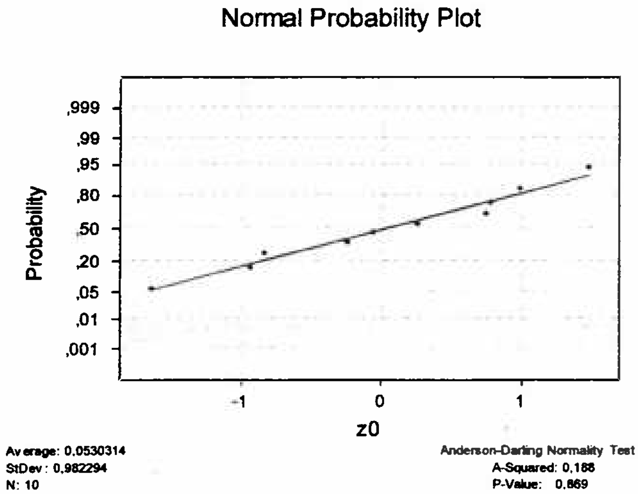
Πίνακας 7.1
Τιμές των τυποποιημένων τ.μ Z_0, Z_1, Z_2

Για να ελέγξουμε αν πράγματι οι τιμές αυτές προέρχονται από κανονική κατανομή μπορούμε να κάνουμε τον παρακάτω έλεγχο υποθέσεων για κάθε ακολουθία τιμών:

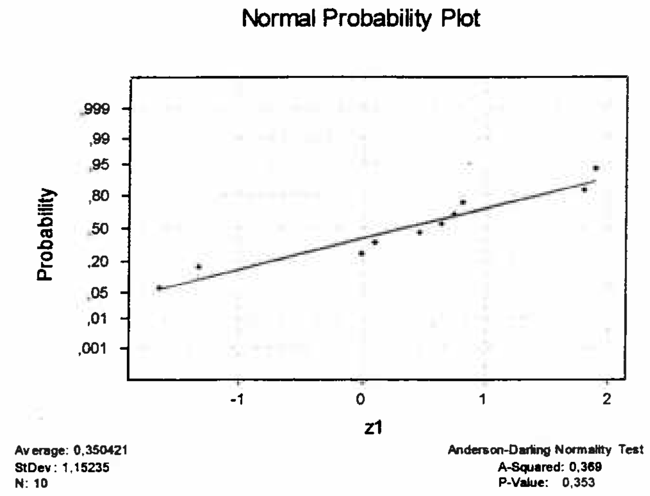
H_0 : Οι τιμές της μεταβλητής Z_i , $i = 0,1,2$ προέρχονται από κανονική κατανομή

H_1 : Οι τιμές της μεταβλητής Z_i , $i = 0,1,2$ δεν προέρχονται από κανονική κατανομή

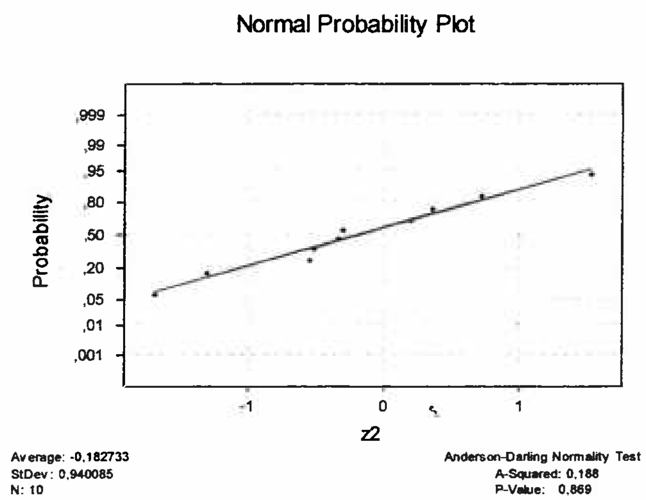
Κάνοντας τον παραπάνω έλεγχο υποθέσεων με το στατιστικό πακέτο Minitab-12 έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα



Διάγραμμα 7.1
Διάγραμμα κανονικότητας για τη μεταβλητή Z_0



Διάγραμμα 7.2
Διάγραμμα κανονικότητας για τη μεταβλητή Z_1



Διάγραμμα 7.3
Διάγραμμα κανονικότητας για τη
μεταβλητή Z_2

Παρατηρούμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις ο έλεγχος έχει υψηλή κρίσιμη τιμή και έτσι δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση της κανονικότητας. Άρα οι τιμές κάθε μιας μεταβλητής προέρχονται από κανονική κατανομή

Βήμα 2°

Με τη βοήθεια των Z_0, Z_1 και Z_2 δημιουργούμε δύο νέες τυχαίες μεταβλητές τις X_1 και X_2 με βάση το μετασχηματισμό

$$X_1 = \sigma_1\left(\sqrt{1-|\rho|}Z_1 + \sqrt{|\rho|}Z_0\right) + \mu_1,$$

$$X_2 = \sigma_2\left(\sqrt{1-|\rho|}Z_2 + \sqrt{|\rho|}Z_0\right) + \mu_2,$$

οι τιμές των οποίων φαίνονται στον πίνακα 7.2

A/A	X_1	X_2
1	1,163636	0,498935
2	1,981158	0,851222
3	0,705834	1,787821
4	-0,4585	-0,21097
5	1,037036	0,475579
6	-0,22934	0,348561
7	0,781007	0,964472
8	1,284707	0,326111
9	1,236991	-0,48175
10	2,046388	1,218967

Πίνακας 7.2

Τιμές των μεταβλητών Z_1, Z_2

Οι τιμές των Z_1,Z_2 προέρχονται από τη διδιάστατη κανονική κατανομή. Ο έλεγχος προσαρμογής της διδιάστατης κανονικής κατανομής σε ένα δείγμα *n* ζευγών παρατηρήσεων είναι πολύπλοκος και δεν μπορεί να γίνει χωρίς ηλεκτρονικό υπολογιστή. Για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη η σχετική διαδικασία περιγράφεται αναλυτικά στο βιβλίο των Olkin-Gleser-Derman, (1980), σελ. 353-359. Μια πρακτική που συχνά ακολουθείται από τους κοινωνικούς ερευνητές (βλέπε π.χ. Blalock H., 1979, R. Iman-W. Conover, 1989) είναι η εξής:

Αρχικά γίνεται έλεγχος προσαρμογής της κανονικής κατανομής σε κάθε μια από τις περιθώριες κατανομές. Αν αυτές δεν μπορούν να θεωρηθούν κανονικές τότε μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση της κανονικότητας για την κοινή κατανομή του πληθυσμού. Αν όμως οι περιθώριες κατανομές μπορούν να θεωρηθούν κανονικές, τότε είναι πολύ πιθανόν αλλά όχι βέβαιο ότι η από κοινού κατανομή είναι κανονική. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται πληροφοριακά παρόλο που υπάρχει κίνδυνος να χρησιμοποιηθεί λανθασμένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{Ο}

Εκτιμητική-Έλεγχος Υποθέσεων

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Στατιστικής είναι η εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων ενός πληθυσμού. Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού μπορεί να γίνει με δύο μεθοδολογίες. Η μία είναι γνωστή με το όνομα εκτιμητική και η άλλη ως έλεγχος υποθέσεων. Και οι δύο μεθοδολογίες αποτελούν κλάδους της Στατιστικής Συμπερασματολογίας.

Και για τις δύο μεθοδολογίες βασικό εργαλείο αποτελεί ένα τυχαίο δείγμα, το οποίο προέρχεται από τον πληθυσμό, τις τιμές των παραμέτρων του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε. Την πληροφορία που περιέχεται στο δείγμα σχετικά με τις παραμέτρους προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε και τελικά να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις τιμές τους. Άρα η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας εξαρτάται πάρα πολύ από τα χαρακτηριστικά του δείγματος, όπως είναι το μέγεθός του, η τυχαιότητά του, η αντιπροσωπευτικότητά του κ.λ.π.

Με την πρώτη μεθοδολογία η εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων μπορεί να γίνει είτε με μια τιμή για την κάθε μια παράμετρο, οπότε λέμε ότι έχουμε σημειακή εκτίμηση, είτε με ένα διάστημα εμπιστοσύνης για κάθε παράμετρο, Με τη δεύτερη μεθοδολογία κάνουμε ορισμένες υποθέσεις για τις τιμές των παραμέτρων και προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν οι υποθέσεις αυτές μπορούν να απορριφθούν ή όχι.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία και των δύο παραπάνω μεθοδολογιών για την εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων μιας διδιάστατης κανονικής κατανομής. Συγκεκριμένα στη ενότητα 8.2 θα αναφερθούμε στην εκτιμητική και στην παράγραφο 8.3 στον έλεγχο υποθέσεων.

8.1 Εκτιμητική.

8.1.1 Αρχές-Μέθοδοι εκτιμητικής.

Όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού το σημείο εκκίνησης για την εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων ενός πληθυσμού είναι ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό. Μια συνάρτηση των τιμών του δείγματος λέγεται **στατιστική συνάρτηση**. Μια οποιαδήποτε στατιστική συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της τιμής μιας παραμέτρου λέγεται **εκτιμητής ή εκτιμήτρια** της παραμέτρου αυτής. Ο εκτιμητής ως στατιστική συνάρτηση έχει τα χαρακτηριστικά της τυχαίας μεταβλητής αλλά είναι και αριθμός που στηρίζεται στο δείγμα.

Εκτιμητές για μια παράμετρο μπορούν να καθοριστούν με πολλούς τρόπους. Έτσι για την επιλογή ενός εκτιμητή χρειάζονται ορισμένα κριτήρια με βάση τα οποία θα μπορεί κανείς να τον επιλέξει μεταξύ του συνόλου των εκτιμητών. Τα κριτήρια εξαρτώνται από τους λόγους για τους οποίους γίνεται η εκτίμηση. Τα περισσότερο βασικά κριτήρια είναι η αμεροληψία, η ελάχιστη διασπορά, η συνέπεια, η επάρκεια, η αποτελεσματικότητα. Στη συνέχεια θα δούμε μερικούς από αυτούς του εκτιμητές στην περίπτωση που θέλουμε να εκτιμήσουμε παραμέτρους της διδιάστατης κανονικής κατανομής.

8.1.2 Εκτιμητές των παραμέτρων

Έστω ότι διαθέτουμε n ανεξάρτητα ζεύγη τυχαίων παρατηρήσεων $X_1=(X_{11},X_{21}), X_2=(X_{12},X_{22}),.....X_n=(X_{1n},X_{2n})$, τα οποία έχουν ληφθεί από πληθυσμό που ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ. Χρησιμοποιώντας το δείγμα αυτό θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να βρούμε εκτιμητές των παραμέτρων.

Θα ξεκινήσουμε την αναζήτηση εκτιμητών χρησιμοποιώντας την αρχή της μέγιστης πιθανοφάνειας. Η επιλογή εκτιμητών με το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας στηρίζεται στην αρχή ότι, οι παράμετροι πρέπει να έχουν τιμές που θα μεγιστοποιούν την πιθανότητα να παρατηρηθεί το συγκεκριμένο δείγμα. Για το λόγο αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας $L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ και βρίσκουμε για ποιες τιμές των παραμέτρων αυτή μεγιστοποιείται.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ λόγω της ανεξαρτησίας των παρατηρήσεων θα είναι ίση με το γινόμενο των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των παρατηρήσεων. Έτσι θα έχουμε:

$$L(\mu_1,\mu_2\sigma_1,\sigma_2\rho)=\prod_{j=1}^{n} f(x_{1j},x_{2j})$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{1j}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{1j}-\mu_1)(X_{2j}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{2j}-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(\overline{X}_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(\overline{X}_1-\mu_1)(\overline{X}_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\overline{X}_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$\times\exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}-2R\frac{S_1S_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

όπου

$$\overline{X}_t=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{tj}\ ,\quad S_t^2=\sum_{j=1}^{n}(X_{tj}-\overline{X}_t)^2 \text{ για } t=1,2$$

$$RS_1S_2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{1j}-\overline{X}_1)(X_{2j}-\overline{X}_2).$$

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας τών παραμέτρων θα προκύψουν για τις τιμές εκείνες των $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ για τις οποίες η συνάρτηση L παίρνει την μέγιστη τιμή της.

Επειδή ο φυσικός λογάριθμος είναι μια αύξουσα συνάρτηση , το μέγιστο της συνάρτησης $\ln L$ θα λαμβάνεται στο ίδιο σημείο με το μέγιστο της συνάρτησης L. Προτιμάμε να εργαστούμε με το $\ln L$ για ευκολία στον υπολογισμό των παραγώγων.

Υπολογίζουμε τον φυσικό λογάριθμο της συνάρτησης L

$$\ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) = -n\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right) -$$

$$-\frac{n}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\frac{\left(\overline{X}_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\left(\overline{X}_1-\mu_1\right)\left(\overline{X}_2-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\left(\overline{X}_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right\} -$$

$$-\frac{n}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} - 2R\frac{S_1S_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}\right\}$$

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους της $\ln L$ ως προς $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τις οποίες θέτουμε ίσο με το μηδέν.

$$\frac{\partial \ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)}{\partial \mu_2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)}{\partial \sigma_1} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)}{\partial \sigma_2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)}{\partial \rho} = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα υπολογίζουμε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων και οι οποίοι είναι:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X}_1$$

$$\hat{\mu}_2 = \overline{X}_2$$

$$\hat{\sigma}_1 = S_1$$

$$\hat{\sigma}_2 = S_2$$

$$\hat{\rho} = R$$

Για τις τιμές αυτές η συνάρτηση $\ln L$ παίρνει την μέγιστη τιμή της γιατί το δεύτερο μέλος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι ≤ 0 και για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων παίρνει την τιμή 0.

Έτσι θα έχουμε ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του διανύσματος $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ είναι το διάνυσμα $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{1j} \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{2j} \end{pmatrix}$

και του πίνακα $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας

$$S = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \\ \hat{\rho}\sigma_1\hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2^2 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ορισμένες ιδιότητες που έχουν τα δύο σύνολα εκτιμητών.

1. Επάρκεια: Οι εκτιμητές $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho})$ θεωρούνται επαρκείς εκτιμητές για τις παραμέτρους $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ εάν σύμφωνα με το παραγοντικό θεώρημα του Neyman, η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τη μορφή

$$L(X_1, X_2, \quad X_n, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) =$$

$$= g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2,) h(X_1, X_2, \quad X_n)$$

όπου $h(X_1, X_2, \quad X_n)$ δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ρ.

Τα δύο σύνολα εκτιμητών $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ και $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho})$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα και το σύνολο των εκτιμητών $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}$ είναι ένα επαρκές σύνολο εκτιμητών για τις παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ρ. Αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία που παρέχεται από το δείγμα για τις υπό εκτίμηση παραμέτρους παρέχεται και από τις εκτιμήτριές τους.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να γραφεί ως

$$L(\mu_1,\mu_2\sigma_1,\sigma_2\rho)=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(\bar{X}_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(\bar{X}_1-\mu_1)(\bar{X}_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\bar{X}_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$\times\exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}-2R\frac{S_1S_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]=$$

$$=g(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\rho},\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,)h(X_1,X_2,\quad X_n)$$

όπου

$$h(X_1,X_2,\ldots,X_n)=1$$

2. Η κατανομή του $\bar{X}=\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}$ είναι κανονική με παραμέτρους

$$\left(\mu_1,\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n},\frac{\sigma_2^2}{n},\rho\right).$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 8.1.1. Έστω n ανεξάρτητα ζεύγη τυχαίων παρατηρήσεων $X_1=(X_{11},X_{21}),X_2=(X_{12},X_{22}),\ldots..X_n=(X_{1n},X_{2n})$, τα οποία έχουν ληφθεί από πληθυσμό που ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ. Τότε το τυχαίο διάνυσμα $Y=\left(a\sum_{i=1}^{n}X_{1i},b\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)$ ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους:

$$\mu_1'=na\mu_1,\ \mu_2'=nb\mu_2\ \sigma_1'^2=a^2n\sigma_1^2,\quad \sigma_2'^2=b^2n\sigma_2^2 \text{ και } \rho'=\rho.$$

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του διανύσματος Y είναι

$$m_Y(t_1,t_2)=E\left(e^{t_1\left(a\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)+t_2\left(b\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{n}e^{(t_1a)X_{1i}+(t_2B)X_{2i}}\right)=$$

και λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων διανυσμάτων $X_1, X_2, ..., X_n$ η τελευταία ισότητα γίνεται

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(E\left(e^{(t_1 a)X_{1i}+(t_2 B)X_{2i}}\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}\left(t_{1i}a, t_{2i}b\right) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \exp\left\{(t_1 a)\mu_1 + (t_2 b)\mu_2 + \frac{1}{2}\left[(t_1 a)^2 \sigma_1^2 + 2\rho(t_1 a)(t_2 b)\sigma_1\sigma_2 + (t_2 b)^2 \sigma_2^2\right]\right\} =$$

$$\exp\left\{t_1(na\mu_1) + t_2(nb\mu_2) + \frac{1}{2}\left[t_1^2(na^2\sigma_1^2) + 2\rho(\sqrt{n}a\sigma_1)(\sqrt{n}b\sigma_2)t_1 t_2 + t_2^2(nb^2\sigma_2^2)\right]\right\}$$

Το τελευταία ισότητα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος είναι η κανονική με παραμέτρους

$$\mu_1' = na\mu_1, \ \mu_2' = nb\mu_2$$

$$\sigma_1'^2 = \alpha^2 n\sigma_1^2, \quad \sigma_2'^2 = b^2 n\sigma_2^2 \text{ και}$$

$$\rho' = \rho \ \blacktriangle$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για $a = b = \frac{1}{n}$ βρίσκουμε ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{1j} \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{2j} \end{pmatrix}$$

είναι κανονική με παραμέτρους

$$\mu_1' = \mu_1, \ \mu_2' = b\mu_2$$

$$\sigma_1'^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2, \quad \sigma_2'^2 = \frac{1}{n}\sigma_2^2 \text{ και}$$

$$\rho' = \rho$$

▲

Για τους παραπάνω εκτιμητές ισχύουν τα εξής:

$$Var(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{n}\sigma_1^2 \quad \text{και} \quad Var(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{n}\sigma_2^2$$

$$Var(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{2}{n}\sigma_1^4\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{και} \quad Var(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{2}{n}\sigma_2^4\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Για μεγάλο n έχουμε:

$$Var(\hat{\rho}) = \frac{1}{n}\left(1-\rho^2\right)^2,$$

$$corr\left(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2\right) = \rho^2,$$

$$corr\left(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\rho}\right) = \rho/\sqrt{2} \quad \text{και} \quad corr\left(\hat{\sigma}_2^2, \hat{\rho}\right) = \rho/\sqrt{2}$$

Αν μερικές από τις παραμέτρους είναι γνωστές, τότε στις υπόλοιπες άγνωστες παραμέτρους αντιστοιχούν διαφορετικές εκτιμήτριες. Παρακάτω αναφέρουμε μερικές τέτοιες ειδικές περιπτώσεις:

i) **Μία μέση τιμή, π.χ. η** μ_1 **είναι γνωστή**: Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας είναι:

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2 - \left(\hat{\rho}\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_2\right)\left(\bar{X}_1 - \mu_1\right) \\ \hat{\sigma}_1 = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{1j}-\mu_1\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}_2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{2j}-\bar{X}_2\right)^2\right]^{1/2}, \\ \hat{\rho} = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{1j}-\mu_1\right)\left(X_{2j}-\bar{X}_2\right)\right]\Big/\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\right)\end{array}\right\}$$

ii) **Οι μέσες τιμές είναι γνωστές:** Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των σ_1, σ_2 και ρ προκύπτουν από τους τύπους (περίπτωση που όλες οι παράμετροι άγνωστες) αντικαθιστώντας τα $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ με μ_1, μ_2 αντίστοιχα. Έτσι θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\sigma}_1 = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{1j}-\mu_1\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}_2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{2j}-\mu_2\right)^2\right]^{1/2} \\ \\ \hat{\rho} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_{1j}-\mu_1\right)\left(X_{2j}-\mu_2\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n}\left(X_{1j}-\mu_1\right)^2\sum_{j=1}^{n}\left(X_{2j}-\mu_2\right)^2\right]^{1/2}}\end{array}\right\}$$

8.2 Έλεγχος υποθέσεων

Σύμφωνα με την τεχνική του ελέγχου υποθέσεων διατυπώνουμε κάποιες υποθέσεις για τις τιμές των παραμέτρων. Στη συνέχεια αντλώντας πληροφορίες από το δείγμα εξετάζουμε κατά πόσο οι παραπάνω υποθέσεις μπορούν να απορριφθούν ή όχι.

Ο πολλαπλός έλεγχος υποθέσεων διαφέρει από την περίπτωση του απλού ελέγχου σε πολλά σημεία. Για παράδειγμα (1) Ο αριθμός των δυνατών υποθέσεων είναι πολύ μεγάλος και (2) σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν αρκετά εναλλακτικά στατιστικά τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε. Ο αριθμός των πιθανών υποθέσεων είναι μεγάλος εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των παραμέτρων. Για παράδειγμα η διδιάστατη κανονική κατανομή έχει 5 παραμέτρους, και για κάθε μια μπορούμε να θέσουμε μια υπόθεση, όπως επίσης και για κάθε υποσύνολο των παραμέτρων.

Υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα στο να ελέγχουμε ταυτόχρονα p μεταβλητές σε έναν πολλαπλό έλεγχο παρά να κάνουμε p ξεχωριστούς απλούς ελέγχους. Τα πλεονεκτήματα σχετίζονται με την πιθανότητα σφάλματος τύπου I, το οποίο παραμένει σταθερό καθώς και με την επίδραση κάθε μεταβλητής στις άλλες.

8.2.1 Έλεγχος για τη μέση τιμή.

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0 : \mu_1 = \mu_{10} \quad \text{και} \quad \mu_2 = \mu_{20} \qquad \text{έναντι της}$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_{10} \quad \text{ή} \quad \mu_2 \neq \mu_{20}$$

υποθέτοντας ότι σ_1, σ_2 και ρ είναι γνωστά .

Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα τυχαίο δείγμα n παρατηρηθέντων διανυσμάτων $X_1 = (x_{11}, x_{21}), X_2 = (x_{12}, x_{22}), \ldots .. X_n = (x_{1n}, x_{2n})$ από την διδιάστατη κανονική κατανομή $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ και από αυτό υπολογίζουμε το τυχαίο διάνυσμα

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{1j} \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{2j} \end{pmatrix}$$

Η ελεγχοσυνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η

$$Z^2 = \frac{n}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_{10}}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_{10}}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_{20}}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_{20}}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

η οποία όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση ακολουθεί την X_2^2.

Έτσι θα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 εάν $Z^2 \geq X_{a,2}^2$, όπου $X_{a,2}^2$ είναι το άνω a ποσοστιαίο σημείο της X_2^2 κατανομής, και a είναι η πιθανότητα λάθους τύπου Ι (απόρριψη της H_0 ενώ αυτή είναι αληθής).

Παρατήρηση: Θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ότι ο παραπάνω έλεγχος είναι ισοδύναμος με τους δύο απλούς ελέγχους

$$E_1 : \begin{Bmatrix} H_0 : \mu_1 = \mu_{10} \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_{10} \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad E_2 : \begin{Bmatrix} H_0 : \mu_2 = \mu_{20} \\ H_1 : \mu_2 \neq \mu_{10} \end{Bmatrix}$$

για τους οποίους, όπως είναι γνωστό, η χρησιμοποιούμενη αντίστοιχη ελεγχοσυνάρτηση είναι η

$$Z_i = \frac{\overline{X}_i - \mu_i}{\sigma_i / \sqrt{n}} \quad \text{i} = 1{,}2$$

η οποία κάτω από την H_0 ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή. Απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας a_i%, $i = 1{,}2$ όταν

$$|Z_i| \geq Z_{a_i/2} \quad i = 1{,}2\,.$$

Όπου Z_a είναι το άνω α-ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\overline{E}_i = \{\text{απορρίπτω την } H_0 \text{ του } E_i \text{ ελέγχου}\} \quad \text{i} = 1{,}2$$

Τότε θα έχουμε

$$P(\overline{E}_i) = a_i \text{ και } P(E_i) = 1 - a_i \quad i = 1{,}2$$

Η πιθανότητα απόρριψης μιας τουλάχιστον από τις μηδενικές υποθέσεις των δύο απλών ελέγχων είναι ίση με:

$$P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2) \leq P(\overline{E}_1) + P(\overline{E}_2) = a_1 + a_2$$

Δηλαδή η πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι είναι μικρότερη ή ίση από $a_1 + a_2$. Για να είναι σχεδόν ισοδύναμοι οι δύο έλεγχοι θα πρέπει να ισχύει

$$a_1 + a_2 = a$$

Επειδή οι δύο απλοί έλεγχοι θεωρούνται ισοδύναμοι συνήθως θέτουμε

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2}.$$

Έτσι κρίσιμη περιοχή καθενός απλού ελέγχου γίνεται

$$|Z_i| \geq Z_{\frac{a}{4}} \quad i = 1,2$$

Οι δύο απλοί έλεγχοι μαζί έχουν πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι μικρότερη ή ίση με το a και επομένως ο έλεγχος αυτός είναι πιο συντηρητικός από τον σύνθετο έλεγχο δηλαδή απορρίπτει πιο δύσκολα τη μηδενική υπόθεση. Η αντικατάσταση ενός πολλαπλού ελέγχου από απλούς έχει μελετηθεί από τον Bonferroni

8.2.2 Χωρία εμπιστοσύνης

Για να προσδιορίσουμε ένα $100(1-a)\%$ χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ εργαζόμαστε ως εξής:

Επειδή η τυχαία μεταβλητή

$$Z^2 = \frac{n}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

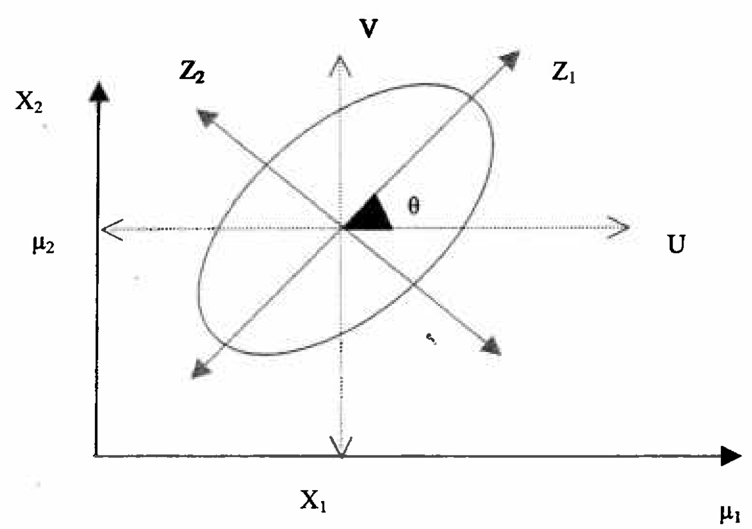
ακολουθεί την κατανομή X_2^2 (όταν σ_1, σ_2 και ρ είναι γνωστά), ένα $100(1-a)\%$ χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ θα προσδιοριστεί από τη σχέση

$$\Pr\left(Z^2 \le X^2_{a,2}\right) = 1 - a$$

από την οποία ένα $100(1-a)\%$ χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ δίνεται από όλα τα διανύσματα $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ για τα οποία ισχύει

$$\frac{n}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\overline{X}_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \le X^2_{a,2}$$

Το παραπάνω χωρίο εμπιστοσύνης παριστάνει μια έλλειψη με κέντρο το σημείο $\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2\right)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.1.



Σχήμα 8.1
100(1-α)% χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα
(μ_1, μ_2)

Παρατήρηση: Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε δύο $100(1-a_i)\%$, $i = 1,2$ διαστήματα εμπιστοσύνης, ένα για το μ_1 και ένα για το μ_2 αντίστοιχα, τότε όπως είναι γνωστό αυτά θα δίνονται από τους τύπους:

$$\overline{X}_i \pm z_{a/2}\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \qquad i = 1,2$$

όπου z_a είναι το α άνω ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα

$$E_i = \{\text{το } i \text{ διάστημα περιέχει την } \mu_i \} \quad i = 1,2$$

τότε θα είναι

$$P(E_i) = 1 - a_i, \quad i = 1,2$$

Επίσης θα έχουμε:

$$P(E_1 \cap E_2) = 1 - P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2) \geq 1 - [P(\overline{E}_1) + P(\overline{E}_2)] = 1 - (a_1 + a_2)$$

Δηλαδή η πιθανότητα ταυτόχρονα το πρώτο διάστημα να περιέχει το μ_1 και το δεύτερο διάστημα να περιέχει το μ_2 είναι τουλάχιστον $1-(a_1+a_2)$. Δηλαδή ορίζεται ένα χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα (μ_1, μ_2) με βαθμό εμπιστοσύνης τουλάχιστον $100[1-(\alpha_1+\alpha_2)]\%$.

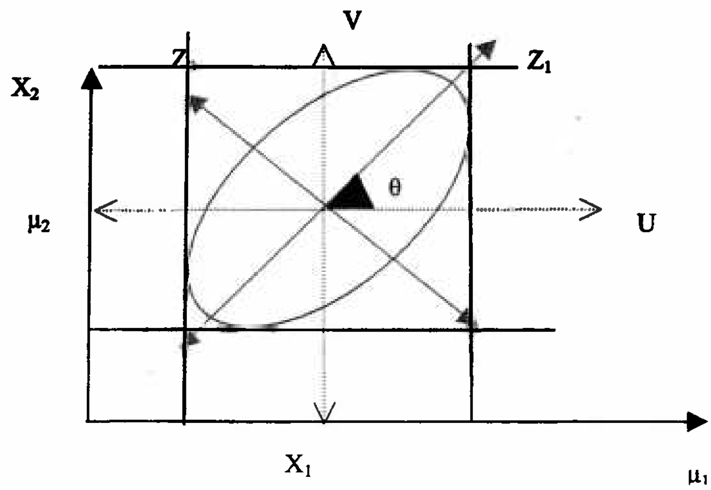
Αν επιλέξουμε $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ τότε ορίζεται ένα χωρίο εμπιστοσύνης με βαθμό εμπιστοσύνης τουλάχιστον $100[1-\alpha]\%$. Συνήθως επιλέγουμε να είναι

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$$

και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι

$$\overline{X}_i \pm z_{a/4} \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \qquad i = 1,2$$

Η γραφική παράσταση του χωρίου αυτού είναι ένα ορθογώνιο με κέντρο το σημείο $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8.2
100(1-α)% χωρίο εμπιστοσύνης για το διάνυσμα
(μ_1,μ_2)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^{o}

Συμπεράσματα-Επεκτάσεις

Στην εργασία αυτή έγινε η παρουσίαση και μελέτη της διδιάστατης κανονικής κατανομής. Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αφενός μεν μια παρουσίαση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από την όλη μελέτη και αφετέρου μια αναφορά στα θέματα στα οποία μπορεί κάποιος να επεκταθεί σε μια μελλοντική μελέτη και τα οποία, στην παρούσα εργασία, είτε δεν αναφέρθηκαν καθόλου, είτε αναφέρθηκαν επιγραμματικά.

9.1 Συμπεράσματα

Από την όλη μελέτη προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η διδιάστατη κανονική κατανομή αποτελεί γενίκευση της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής στο χώρο των δύο διαστάσεων.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

με $-\infty < x_1 < +\infty,\ -\infty < x_2 < +\infty,$

όπου $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί (οι παράμετροι της κατανομής) τέτοιοι ώστε $-\infty < \mu_1 < +\infty$, $-\infty < \mu_2 < +\infty$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ και $-1 < \rho < 1$.

- Η σ.π.π μπορεί να τυποποιηθεί και να πάρει τη μορφή

$$f\,(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2\right\}}$$

Η τυποποιημένη μορφή έχει το πλεονέκτημα ότι εξαρτάται μόνο από την παράμετρο ρ.

- Η γραφική παράσταση της σ.π.π. είναι μια επιφάνεια πάνω από το επίπεδο X_1X_2, η οποία παραστατικά μπορεί να αποδοθεί με το σχήμα καμπάνας. Η γραφική παράσταση έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

i) Ο όγκος του χώρου που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή και το επίπεδο X_1X_2 όπως αποδείξαμε προηγουμένως είναι ίσος με 1.

ii) Το ψηλότερο σημείο της είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$\left(\mu_1,\mu_2,\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

iii) Η τομή της με επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο X_1X_2 είναι μια έλλειψη με κέντρο το σημείο (μ_1,μ_2), μήκη ημιαξόνων $\sqrt{K\cdot\lambda_1}$ και $\sqrt{K\cdot\lambda_2}$ και της οποίας ο κύριος άξονας σχηματίζει με τον άξονα Ox_1 γωνία θ ίση με

$$\theta=\frac{1}{2}ctn^{-1}\left[\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)/2\rho\sigma_1\sigma_2\right]$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ και $\rho=0$ η τομή είναι κύκλος.

iv) Όταν τα σ_1,σ_2 είναι σταθερά και η απόλυτη τιμή του ρ μεγαλώνει τότε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα αυξάνεται ενώ του μικρού μειώνεται. Έτσι η σ.π.π τείνει να συγκεντρωθεί γύρω από μια ευθεία, την ευθεία που ορίζει ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης. Επίσης για αντίθετες τιμές της παραμέτρου ρ και για δεδομένες τιμές των άλλων παραμέτρων, οι μεγάλοι ημιάξονες των ελλείψεων είναι κάθετοι μεταξύ τους

v) Για δεδομένη τιμή της παραμέτρου ρ και $\sigma_1 > \sigma_2$ τότε το άπλωμα της σ.π.π κατά μήκος του άξονα των x_1 είναι μεγαλύτερο απ' ότι κατά μήκος του άξονα x_2. Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση που είναι $\sigma_1 < \sigma_2$.

- Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι η

$$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \exp\left[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\right]$$

- Με τη βοήθεια της ροπογεννήτριας προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες μας δίνουν και την ερμηνεία των παραμέτρων της κατανομής.

$$E(X_1) = \mu_1$$

$$E(X_2) = \mu_2$$

$$Var(X_1) = \sigma_1^2$$

$$Var(X_2) = \sigma_2^2$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 \text{ και}$$

$$\rho_{X_1,X_2} = \rho$$

- Στην περίπτωση που το τυχαίο διάνυσμα (X_1, X_2) έχει την διδιάστατη κανονική κατανομή, τότε αποδείξαμε ότι οι τ.μ X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστες. Επίσης γραμμικοί συνδυασμοί των X_1, X_2 ακολουθούν την κανονική κατανομή.

- Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ και ρ τότε οι περιθώριες κατανομές των X_1 και X_2 είναι μονοδιάστατες κανονικές κατανομές. Ειδικότερα ισχύει:

$$X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$$

$$X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

- Αν (X_1, X_2) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ρ τότε η δεσμευμένη κατανομή της X_1, δοθέντος ότι $X_2 = x_2$, είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_1 + \rho \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$ και διακύμανση $\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)$.

  Επίσης η δεσμευμένη κατανομή της X_2, δοθέντος ότι $X_1 = x_1$, είναι η μονοδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\mu_2 + \rho \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$ και διακύμανση $\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$. Δηλαδή ισχύει:

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \quad \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$

και

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \quad \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$

- Η εξίσωση

$$x_1 = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$$

στο επίπεδο $X_1 X_2$ παριστά μια ευθεία γραμμή, την παλινδρόμηση της X_1 πάνω στη X_2 και η οποία για κάθε τιμή της X_2 μας δίνει τη μέση τιμή της X_1.

- Μπορούμε με την βοήθεια ικανών συνθηκών, που είναι γνωστές ως χαρακτηριστικές ιδιότητες, να αποδείξουμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή.

- Οι πιθανότητες μπορούν να προσεγγιστούν εφαρμόζοντας κάποιον αλγόριθμο.

- Εφαρμόζοντας μια συγκεκριμένη διαδικασία μπορούμε να παράγουμε μια ακολουθία τιμών της κατανομής.

- Τέλος, με την βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος από έναν διδιάστατο κανονικό πληθυσμό μπορούμε να εκτιμήσουμε τις τιμές των παραμέτρων του πληθυσμού ή να ελέγξουμε κάποιες υποθέσεις σχετικά με αυτές.

9.2 Επεκτάσεις.

Μερικά θέματα τα οποία έχουν σχέση με τη διδιάστατη κανονική κατανομή και με τα οποία μπορεί να ασχοληθεί κάποιος σε μια μελλοντική μελέτη είναι τα παρακάτω:

- **Η μελέτη των διατεταγμένων στατιστικών**: Αν $(X_1, X_2)'$ έχει την διδιάστατη κανονική κατανομή και επιπλέον $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ και $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$, να βρεθούν οι κατανομές των $X_{(1)}$ και $X_{(2)}$. Σχετικές πληροφορίες με το θέμα αυτό ο αναγνώστης μπορεί να βρει στα συγγράμματα των Cain (1994), Basu και Ghosh (1978), David (1981), Cain και Pan (1995), David and Galambos (1974) και David, H. A., and Nagaraja, H. N. (1998).
- **Η μελέτη των κατανομών διαφόρων στατιστικών συναρτήσεων:** Αν $(X_1, X_2)'$ έχει την διδιάστατη κανονική κατανομή μπορεί κάποιος να μελετήσει την κατανομή στατιστικών συναρτήσεων των X_1 και X_2. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να μελετήσει την κατανομή του λόγου X_1/X_2 ή του $X_1^2 + X_2^2$. Σχετικές πληροφορίες με το θέμα αυτό ο αναγνώστης μπορεί να βρει στα συγγράμματα των Fieller (1932), Aroian (1986), Weil (1954) και Laurent (1957).

- **Η μελέτη της κατανομής του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης R:** Σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές σχετικά με το θέμα αυτό υπάρχουν στα συγγράμματα των Fisher (1915), Fisher (1921), Hotelling (1953) και Cramér (1946).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα δίνονται ορισμένες αποδείξεις,
οι οποίες κρίθηκε σκόπιμο να μην παρεμβληθούν
στο κυρίως κείμενο.

Π.1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διδιάστατης κανονικής κατανομής λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο σημείο (μ_1, μ_2) και η μέγιστη τιμή είναι ίση με

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Απόδειξη: Θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

ή ισοδύναμα της

$$g(x_1, x_2) = e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

ή ισοδύναμα της

$$\ln g(x_1, x_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

ή ισοδύναμα της

$$h(x_1, x_2) = -\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της h ως προς x_1 και x_2 και θέτοντας αυτές ίσες με το μηδέν, προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} = 0 \\ \rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) - (1-\rho^2)\cdot\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) = 0 \end{array}\right.$$

το οποίο μας δίνει για λύση $(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)$. Επειδή είναι $h(x_1,x_2)\leq 0$ και $h(\mu_1,\mu_2)=0$ συμπεραίνουμε ότι στο σημείο $(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)$ η συνάρτηση h και επομένως και η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της που είναι ίση με

$$\max f(x_1,x_2)=f(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \blacktriangle$$

Π.2. Να βρεθεί η εξίσωση της τομής της επιφάνειας που ορίζει η σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής με ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο X_1X_2.

Απόδειξη: Έστω το επίπεδο $X_3=c$ παράλληλο προς το επίπεδο X_1X_2. Για να ορίζεται η τομή του με την επιφάνεια που ορίζεται από την σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής θα πρέπει

$$0<c<\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Η εξίσωση της τομής θα προκύψει από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x_1,x_2)=c$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}=c \quad\Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}=c\cdot 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}=-2\cdot\ln\left(c\cdot 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

$$\frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\cdot\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}=K,\ \text{όπου } K=-2\cdot\ln\left(c\cdot 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)>0$$

Κάνοντας το μετασχηματισμό

$$U=X-\mu_1 \text{ και } V=Y-\mu_2$$

ο οποίος μας μεταφέρει την αρχή του συστήματος αξόνων στο σημείο (μ_1,μ_2), έχουμε:

$$\frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\frac{1}{\sigma_1^2}u^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{u}{\sigma_1}\right)\left(\frac{v}{\sigma_2}\right)+\frac{1}{\sigma_2^2}v^2\right\} = K \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση Ι. Εστω ότι $\rho \neq 0$.

Κάνουμε το μετασχηματισμό

$$\begin{Bmatrix} Z_1 = U\cdot\cos\theta + V\cdot\sin\theta \\ Z_2 = -U\cdot\sin\theta + V\cdot\cos\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U = Z_1\cdot\cos\theta - Z_2\cdot\sin\theta \\ V = Z_1\cdot\sin\theta + Z_2\cdot\cos\theta \end{Bmatrix}$$

όπου $\theta = \frac{1}{2}ctn^{-1}\left[\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)/2\rho\sigma_1\sigma_2\right]$

ο οποίος κάνει στροφή κατά γωνία θ μοιρών του άξονα U, η (1) παίρνει

$$\frac{z_1^2}{(\sqrt{\lambda_1\cdot K})^2}+\frac{z_2^2}{(\sqrt{\lambda_2\cdot K})^2}=1 \qquad (2)$$

τελικά τη μορφή

όπου οι λ_1, λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\sum=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

και οι οποίες προκύπτουν ως λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα της

$$\lambda^2-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\lambda+\left(1-\rho^2\right)\sigma_1\sigma_2=0$$

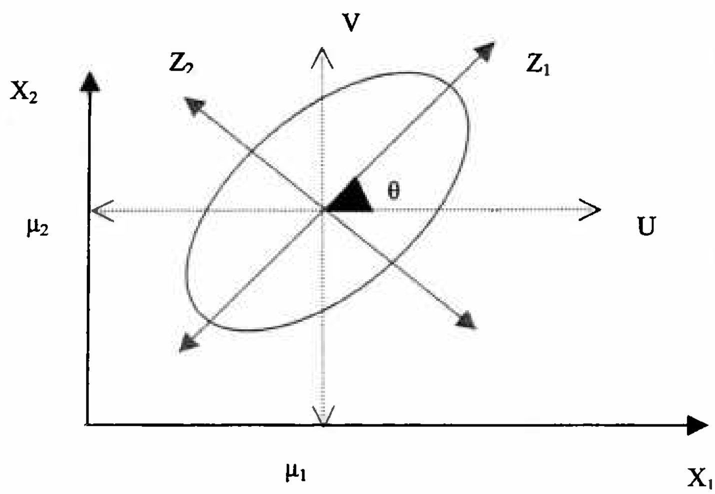
από όπου προκύπτει

$$\lambda_{1,2}=\frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\pm\sqrt{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)^2-4\left(1-\rho^2\right)\sigma_1\sigma_2}}{2}=$$

$$=\frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\pm\sqrt{\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)^2+4\rho^2\sigma_1\sigma_2}}{2}$$

Η (2) είναι η εξίσωση έλλειψης με κέντρο το σημείο (μ_1, μ_2), και με μήκη ημιαξόνων

$\sqrt{K \cdot \lambda_1}$ και $\sqrt{K \cdot \lambda_2}$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα ΙΙΙ.1
Καμπύλη σταθερής πυκνότητας για τη διδιάστατη κανονική κατανομή

Περίπτωση ΙΙ. Εστω ότι $\rho = 0$.

Τότε η (1) παίρνει την μορφή

$$\frac{u^2}{(\sigma_1 \sqrt{K})^2} + \frac{v^2}{(\sigma_2 \sqrt{K})^2} = 1$$

η οποία είναι εξίσωση έλλειψης με άξονες (U, V) , κέντρο το σημείο (μ_1, μ_2) και μήκη ημιαξόνων $\sigma_1 \sqrt{K}$ και $\sigma_2 \sqrt{K}$. Στην ειδική περίπτωση που $\sigma_1 = \sigma_2$ έχουμε κύκλο με ακτίνα $\sigma_1 \sqrt{K}$. Επίσης η δεύτερη αυτή περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της πρώτης για $\theta = 0^0$.

Π.3 Να προσδιοριστεί η εξίσωση της ισοϋψούς καμπύλης για την οποία ο όγκος του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ του επιπέδου που ορίζει η ισοϋψής αυτή καμπύλη και η επιφάνεια της σ.π.π της διδιάστατης κανονικής κατανομής είναι ίσος με a, με $0 < a < 1$.

Απόδειξη. Όπως στις συνεχείς κατανομές με μια μεταβλητή έχουμε τα ποσοστιαία σημεία x_p για τα οποία ισχύει $P(X \leq x_p) = p$, έτσι και στις δύο διαστάσεις θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση του επιπέδου Z=c, ώστε ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια που ορίζει η τομή και το υπερκείμενο μέρος της επιφάνειας που ορίζει η σ.σ.π να αντιστοιχεί σε ορισμένη και προκαθορισμένη πιθανότητα α.

Η τομή του επιπέδου Z=c και της σ.π.π όπως έχουμε αποδείξει έχει εξίσωση

$$\frac{z_1^2}{(\sqrt{\lambda_1 \cdot K})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{\lambda_2 \cdot K})^2} = 1$$

με $K = -2 \cdot \ln\left(c \cdot 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$P\left(\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{K \cdot \lambda_1}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{K \cdot \lambda_2}\right)^2} \leq 1\right) = \alpha \qquad \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{Z_1^2}{\lambda_1} + \frac{Z_2^2}{\lambda_2} \leq K\right) = \alpha$$

αλλά η τ.μ. $\frac{Z_1^2}{\lambda_1} + \frac{Z_2^2}{\lambda_2} \sim X_2^2$ και δεδομένου ότι ισχύει $P\left(X_2^2 < K\right) = 1 - e^{-K/2}$ θα έχουμε:

$$1 - e^{-K/2} = a \qquad \Rightarrow \qquad K = -2\ln(1-a)$$

και αντικαθιστώντας την τιμή του K προσδιορίζουμε την τιμή του

$$c = \frac{1-a}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-\rho^2}}$$

για την οποία η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με α.

Έτσι η εξίσωση της καμπύλης που προκύπτει για την παραπάνω τιμή του c είναι

$$\frac{z_1^2}{(\sqrt{\lambda_1 \cdot K})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{\lambda_2 \cdot K})^2} = 1$$

με $K = -2\ln(1-a)$

ή με τη χρήση των αρχικών μεταβλητών x_1, x_2 θα έχει εξίσωση:

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = -2(1-\rho^2)\ln(1-a)$$

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Adrian, R. (1808). Research concerning the probabilities of errors which happen in making observations, etc., *The Analyst; or Mathematical Museum,* 1, (4), 93-109

Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* (2nd ed.), New York: Wiley

Aroian, L. A (1986). The distribution of the quotient of two correlated normal random variables, *A.S.A., Proceeding of the Business and Economics Section,* 612-613

Basu, A. P. and Ghosh, J. K. (1978). Identifiability of the multinormal order distributions under competing risks model, *Journal of Multi-Analysis,* 8, 413-429

Bhattacharyya, A. (1943). On some sets of sufficient conditions leading the normal bivariate distributions, *Sankhyã,* 6, 399-406

Bildikar, S. and Patil, G. P. (1968). Multivariate exponential-type distributions. *Ann. Math. Statist.*. 39, 4, 1316-1326

Blalock, H.M. (1979). *Social Statistics*, Mc-Graw Hill

Bravais, A. (1846). Analyse mathématique sur la probabilité des erreurs de situation d' un point, *Memoires presentés à l' Academie Royale des Sciences, Paris, 9,* 255-332 (English translation, 1958; White Sands Proving Ground, New Mexico)

Brington, R. S. and May, D. C. (1970). *Handbook of Probability and Statistics with Tables.* second edition, New York, McGraw-Hill

Brown, J. L. Jr. (1967). A generalized form of Price's Theorem and its converse. *IEEE Trans. Information Theory* IT-13: 27-32

Brucker, J. (1979). A note on the bivariate normal distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 8, 175-177

Cadwell, J.H. (1951). The Bivariate Normal Integral, *Biometrika,* 475-481

Cain, M. (1994). The moment-generating function of the minimum of bivariate normal random variables, *The American Statistician,* 48, 124-125

Cain, M. and Pan, E. (1995). Moments of the minimum of bivariate normal random variables, *The Mathematical Scientist,* 20, 119-122

Conover, W.J. and Iman, R.L.(1989). *Modern Business Statistics,* J. Wiley

Cook, M. B. (1951). Two applications of bivariate k-statistics, *Biometrika,* 38, 368-376

Cramér, H. (1941). *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton University Press

Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton, N.J.:Princeton University Press

Daley, D. J. (1974). Computation of bi- and tri-variate normal integral, *Applied Statistics*, 23,435-438

David, F. N. (1938, 1954). *Tables of the Correlation Coefficient.* Cambridge, England, Cambridge University Press

David, H. A. (1973). Concomitants of order statistics, *Bulletin of the Institute of International Statistics,* 45, 295-300

David, H. A. (1981). *Order Statistic.,* Second edition, New York, John Willey & Sons

David, H. A. and Galambos, J. (1974). The asymptotic theory of constants of order statistics, *Journal of Applied Probability,* 11, 762-770

David, H. A. and Nagaraja, H. N. (1998). Concomitants of order statistics, in *Handbook of Statistics-16: Order Statistics: Theory and Methods* (N. Balakrishnan and C. R. Rao, eds.), Amsterdam, The Netherlands: North-Holland

Dickson, I. D. H. (1886). Appendix to Family likeness in stature, by F. Galton, *Proceedings of the Royal Society of London*, 40, 63-73

Dilon, W.-Goldstein, M. (1984). *Multivariate Analysis. Methods and Applications* J. Wiley and Sons

Divgi, D.R. (1979). Calculation of univariate and bivariate normal probability functions, *Annals of Statistics,* 7, 903-910

Fieger, W. (1977). A characterization of multivariate normal distribution. *Communications in Statistics- Theory and Methods,* , A6(2), 135-140

Fieller, E. C. (1932). The distribution of the index in a normal bivariate population, *Biometrika*, 24, 428-440

Fisher, R. A. (1915). Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population, *Biometrika,* 10, 507-521

Fisher, R. A. (1921). On the probable error of a coefficient of correlation deduced from a small sample, *Metron,* 1 4, 3-32

Fraser, D. A. S., and Streit, F. (1980). A further note on the bivariate normal distribution, *Communication in Statistics- Theory and Methods*, 9, 1097-1099

Galton, F. (1877). *Typical Laws of Heredity in Man, Address to Royal Institution of Great Britain*

Galton, F. (1888). Co-relations and their measurement chiefly from anthropometric data, *Proceedings of the Royal Society of London,* 45, 134-145

Garwood, F. (1933). The probability integral of the correlation coefficient in samples from a normal population, *Biometrika,* 25, 71-78

Guenther, W.C. (1977). Desk calculation of probabilities for the distribution of the sample correlation coefficient, *The American Statistician,* 31, 1, 45-48

Hamedani, G.G. (1988). On two recent characterizations of multivariate normal distribution. *Metika,* 35, 41-47

Hamedani, G.G. (1991). On a recent characterization of the bivariate normal distribution, *Metrika,* 38, 225-258

Hamedani, G.G. (1992). Bivariate and multivariate normal characterizations: A brief survey, ***Communication in Statistics- Theory and Methods***, 21, 2665-2688

Helmert, F.R. (1868). Studien über rationelle Vermessungen, im Gebiete der höheren Geodäsie, *Zeitschrift für Mathematitik und Physik,* 13, 73-129

Hotelling, H. (1953). New light on the correlation coefficient and its transforms (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society B* 15, 193-232

Jantaravareerat, M. (1998). *Approximation of the Distribution Function for the standard Bivariate Normal.* Ph.D (Management Science) Thesis. Illinois Institute of Technology, Chicago, IL

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics.* Continuous Univariate Distributions-2, New York: Wiley

Kagan, A. M. and Linnik Yu, V. and Rao, C.R. (1973). *Characterization problems in Mathematical Statistics*, Wiley, New York

Kendall, M.G. and Stuart, A. (1963). *The advanced Theory of Statistics,* 1 London: Griffin

Khatri, C.G. (1975). Characterization of normal law by constancy of regression. *Statistical Distribution in Scientific Work,* 3(G.P. Patil et al. (eds.)), 199-209

Khatri, C.G. (1979). Characterizations of multivariate normality. II: Trough linear regressions, *Journal of Multivariate Analysis,* 9, 589-598

Khatri, C.G. and Rao, C.R. (1976). Characterizations of multivariate normality. I: Through independence of some statistics, *Journal of Multivariate Analysis,* 6, 81-94

Kshirsagar, A. (1972). *Multivariate Analysis*, New York, Dekker

Laurent, A.G. (1957). Bombing problems-a statistical approach, *Operations Research 5,* 75-89

Lin, J-T. (1995). A simple approximation for the bivariate normal integral, *Probability in the Engineering and Information Sciences,* 9, 317-321

Lukatzkaya, M.L. (1965). Some properties of random variables with a generalized normal distribution, *Nauchnye Trudy Novosibirsk. U-ta,* 5, 57-71

Mason, R. L., Young, J.C. and Langley, M. P. (1987). Computer program for generating a bivariate normal, A.S.A., *Proceeding of the Statistical Computing Section*, 448-451

National Bureau of Standards (1959). *Tables of the multivariate Normal Distribution Function and Related Functions,* Applied Mathematics Series 50, U.S. Government Printing Office, Washington 25, D.C.

Olkin, I., Gleser, L. and Derman, C. (1980). *Probability Models and Applications,* McMillan Publishing Co.

Olson, J.M. and Weissfeld, L.A. (1991). Approximation of certain multivariate integrals, *Statistics & Probability Letters,* 11, 309-317

Owen, D.B. (1956). Tables for computing bivariate normal probabilities, *Annals of Mathematical Statistics,. 27,* 1075-1090

Owen, D.B. (1957). *The bivariate normal probability distribution*, Research Report SC 3831-TR, Sandia Corporation

Owen, D.B. (1962). *Handbook of Statistical Tables,* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass

Patil, G.P. and Boswell, M.T. (1970). A characteristic property of multivariate normal density function and some of its applications. *Annals of Mathematical Statistics.* 41, 6, 1979-1977

Pearson, K. (1901). Mathematical contributions to the theory of evolution-VII. On the correlation of characters not quantitatively measurable, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A,* 195, 1-47

Pearson, K. (1903). Mathematical contributions to the theory of evolution-XI. On the influence of natural selection on the variability and correlation of organs, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A,* 200, 1-66

Pearson, K. (1920). Notes on the history of correlation, *Biometrika,* 13, 25-45

Pearson, K. (1931). *Tables of Statisticians and Biometricians,* Vol. 2 , Cambridge University Press, London

Pearson, K. and Young, A.W. (1918). On the product-moments of various orders of the normal correlation surface of two variates, *Biometrika,* 12, 86-92

Plana, G.A. (1813). Mémoire sur divers problèmes de probabilité, *Mémoires de l' Académie Impériale de Turin*, 20, 355-408

Prince, R. (1958). A useful theorem for non linear devices having Gaussian inputs. *IRE Trans, Information Theory* IT-4, 69-72

Rao, B.R., Garg, M.L. and Li, C.C. (1968). Correlation between the sample variances in a singly truncated bivariate normal distribution, *Biometrika* 55, 433-436

Rao, C.R. (1975). Inagural Linnik Memorial Lecture- Some problems in the characterization of the multivariate normal distribution. *Statistical Distribution in Scientific Work,* 3 (G.P. Patil et al. (eds.)), 1-13

Sarabia, J.M. (1995). The centered normal conditionals distribution, *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 24,2889-2900

Schols, C. M. (1875). Over de theorie der fouten in de ruimte en het platte vlak, *Verhandelingen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen,* 15, (English translation, 1958; White Sands Proving Ground, New Mexico)

Smirniv, N.Y. and Bol'shev, L.N. (1962). *Tables for Evaluating a Function of a Bivariate Normal Distribution,* Izdatel'stvo Akademii NauK SSSR, Moscow

Stuart, A. and Ord, J. K. (1987). Kendall' s Advanced Theory of Statistics, Vol. 1 (5th ed). New York: Oxford

Terza, J.V. and Welland, U. (1991). A comparison of bivariate normal algorithms, *Journal of Statistical Computation and Simulation,* 39, 115-123

Tong, Y.L (1990). *The multivariate Normal Distribution.* Springer series in Statistiks Springer-Varlag, USA

Weil, H. (1954). The distribution of radial error, *Annals of Mathematical Statistics 25,* 168-170

Wilks, S.S. (1962). *Mathematical Statistics,* Wiley, New York

Zelen, M. and Severo, N. C. (1960). Graphs for Bivariate Normal Probabilities, *Annals of Mathematical Statistics,. 31, Issue 3,* 619-624

Zelen, M. and Severo, N. C. (1964). Probability function, *Applied Mathematics Series* 55, National Bureau of Standards, Washington, D. C.

Ελληνική

Ζαχαροπούλου, Χ. (1998). *Στατιστική. Μέθοδοι- Εφαρμογές.* Τόμος Β΄ Θεσσαλονίκη

Ξεκαλάκη, Ε., (1993). *Εισαγωγή στη θεωρητική Στατιστική,* Αθήνα

Πανάρετος, Ι., & Ξεκαλάκη Ε. (2000). *Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη* Τόμος ΙΙ, (Εισαγωγή στις πιθανότητες και στην Στατιστική Συμπερασματολογία), Αθήνα

Παπαϊωάννου, Τ. (1981). *Εισαγωγή στις πιθανότητες και την Στατιστική.* Ιωάννινα

Ρούσσας, Γ. Γ. (1975). *Στατιστική Συμπερασματολογία* , Πάτρα