

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

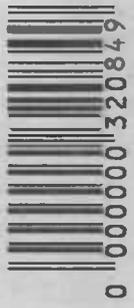
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ειδ. 57905
Αρ. 332.09495
ταξ. ΒΑΦ

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ARCH ΣΤΟ
ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

ΒΑΦΟΠΟΥΛΟΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ



Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος



Αθήνα, Δεκέμβριος, 1997



2.5	Προβλέψεις με υποδείγματα ARCH	48
2.5.1	Μέτρηση της Αβεβαιότητας της Πρόβλεψης	48
2.5.2	Εμμονή στη Διακύμανση	53
2.6	Πολυπαραμετρικά Υποδείγματα	54
2.7	Τα Μοντέλα GARCH-in-the-mean	56
2.8	Εκτίμηση	58
2.8.1	Μέγιστη Πιθανοφάνεια (ML)	58
2.8.2	Μέθοδοι Ολικής Μεγιστοποίησης	60
2.9	Έλεγχοι Εξειδίκευσης για ARCH	61
2.10	Επίλογος	62
2.11	Πίνακας Συντομογραφιών	63
3	Περιγραφική Ανάλυση Δεδομένων	64
3.1	Η Πορεία του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών	64
3.2	Ανάλυση Αποδόσεων	67
3.3	Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας	72
3.4	Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης	74
	Παράρτημα	78
4	Εμπειρικές Εφαρμογές των Υποδειμάτων ARCH	80
4.1	Εισαγωγή	80
4.2	Μεθοδολογία και Εμπειρικά Αποτελέσματα	82
4.2.1	Μονοπαραμετρικά Υποδείγματα	82
4.2.2	Πολυπαραμετρικά Υποδείγματα	95
4.3	Συμπεράσματα	104
	Βιβλιογραφία	106



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη καθηγήτρια κ. Σοφία Δημέλη για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και διορθώσεις της, οι οποίες με βοήθησαν να ολοκληρώσω την επίπονη συγγραφή της μεταπτυχιακής διατριβής.

Μεγάλες ευχαριστίες οφείλω σε όλους τους καθηγητές μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών και ειδικότερα, στους κύριους Παναγιώτη Παπακυριαζή και Μιχάλη Μαγδαληνό, οι οποίοι μου ενέπνευσαν το πάθος για τη Χρηματοοικονομική Οικονομετρία. Το πάθος αυτό υλοποιήθηκε με τη βοήθεια του κ. Ηλία Τζαβαλή και τον ευγνωμονώ γι' αυτό.

Τέλος, δεν θα παραλείψω να ευχαριστήσω την εταιρεία ESTIMA (RATS) για τη πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε το αξιόλογο λογισμικό της.



Κατάλογος Διαγραμμάτων

1	Ο Γενικός Δείκτης του Χ.Α.Α. σε Ημερήσια Βάση	66
2	Ο Τραπεζικός Δείκτης του Χ.Α.Α. σε Ημερήσια Βάση	67
3	Οι Συνεχώς Ανατοκίζόμενες Αποδόσεις του Γενικού Δείκτη σε Ημερήσια Βάση	68
4	Οι Συνεχώς Ανατοκίζόμενες Αποδόσεις του Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια Βάση	69
5	Ο Γενικός Δείκτης του Χ.Α.Α. σε Εβδομαδιαία Βάση	92
6	Η Δεσμευμένη Διακύμανση του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α σε Εβδομαδιαία Βάση	93
7	Ο Τραπεζικός Δείκτης του Χ.Α.Α. σε Εβδομαδιαία Βάση	93
8	Η Δεσμευμένη Διακύμανση του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α σε Εβδομαδιαία Βάση	94
9	Η Δεσμευμένη Διακύμανση του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α σε Ημερήσια Βάση	101
10	Η Δεσμευμένη Συνδιακύμανση του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια Βάση	102
11	Ο Διαχρονικά μεταβαλλόμενος συντελεστής β του Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια Βάση	102



Κατάλογος Πινάκων

1	Παρουσίαση των Στοιχείων του Δείγματος	64
2	Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Συνεχώς Ανατοκίζόμενων Αποδόσεων του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	70
3	Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Συνεχώς Ανατοκίζόμενων Αποδόσεων των Τρίμηνων Εντόκων Γραμματίων του Ελληνικού Δημοσίου (Ε.Γ.Ε.Δ) σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	71
4	Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Υπερβάλλουσων Αποδόσεων του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη πάνω από την Απόδοση των Τρίμηνων Ε.Γ.Ε.Δ σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	72
5	Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας των Δεικτών του Χ.Α.Α.	73
6	Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης κατά Engle - Granger μεταξύ του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	75
7	Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας των Καταλοίπων των εξισώσεων Συνολοκλήρωσης	75
8	Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης κατά Johansen μεταξύ του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	77
9	Εκτιμήσεις του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τις Ημερήσιες Υπερβάλλουσες Αποδόσεις του Γενικού Δείκτη και του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α.	87
10	Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Ημερήσια Στοιχεία	88



11 Εκτιμήσεις του υποδείγματος EGARCH (2, 1) για τις Εβδομαδιαίες Υπερβάλλουσες Αποδόσεις του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α.	89
12 Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας της $\log(\sigma_t^2)$	91
13 Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Εβδομαδιαία Στοιχεία	94
14 Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Εβδομαδιαία Στοιχεία	95
15 Εκτιμήσεις του Bivariate GARCH-M (1, 1) για το Γενικό και Τραπεζικό Δείκτη του Χ.Α.Α. σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση	99
16 Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία του Συντελεστή β του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α. για διαφορετικά Δείγματα	104



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διεθνής χρηματιστηριακή κρίση του Νοεμβρίου του 1997, η οποία ξεκίνησε από τις αναδυόμενες¹ αγορές της Άπω Ανατολής εξαπλώθηκε διαδοχικά στις κύριες και δευτερεύουσες χρηματαγορές ανά το κόσμο. Τα επενδυμένα διεθνή κεφάλαια στις αναδυόμενες αγορές στις αρχές του 1980 δεν ξεπερνούσαν τα μερικά εκατομμύρια δολάρια. Σήμερα, είναι τοποθετημένα πάνω από 100 δισεκατομμύρια δολάρια, με αποτέλεσμα οι αναδυόμενες αγορές να αποτελούν το κύριο μέσο διαφοροποίησης των χαρτοφυλακίων των μεγάλων επενδυτικών οργανισμών. Επιπρόσθετα, η ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη έχει εκμηδενίσει το πρόβλημα της απόστασης και παράλληλα, έχει μειώσει αισθητά το κόστος συναλλαγών. Οι παραπάνω διαπιστώσεις συνεπάγονται μια αύξηση της συσχέτισης και συμπίεσης (co-movement) των κύριων με τις περιφερειακές χρηματιστηριακές αγορές.

Συνεπώς, η πιο προσεκτική και εκτεταμένη μελέτη των αναδυόμενων αγορών αποτελεί σήμερα, μια επιτακτική ανάγκη. Ειδικότερα, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάλυση της επίδρασης μιας διαταραχής στη μεταβλητότητα των αναμενόμενων αποδόσεων καθώς επίσης, και ο υπολογισμός των διαχρονικά μεταβαλλόμενων συντελεστών συστηματικού κινδύνου βήτα (beta coefficient).

¹ Η Διεθνής Χρηματοοικονομική Εταιρεία (International Financial Corporation ή IFC) ορίζει μια αναδυόμενη αγορά ως την αγορά που λειτουργεί στα πλαίσια μιας αναπτυσσόμενης οικονομίας και πληρεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις ανάπτυξης. Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιείται και στη παρούσα εργασία.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρηματοοικονομική θεωρία (Financial Economics) είναι το κομμάτι εκείνο της οικονομικής θεωρίας και των κοινωνικών επιστημών, εν γένει, με το μεγαλύτερο εύρος πρακτικών εφαρμογών. Αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό διότι οι χρηματαγορές δεν είναι μια αφηρημένη επιστημονική έννοια, αλλά αποτελούν ένα πρακτικό μέρος της οικονομικής ζωής και διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη σταθερότητα και ανάπτυξη της παγκόσμιας οικονομίας. Επομένως, παρ' ότι μερικά θέματα της επιστημονικής βιβλιογραφίας που αφορούν τη χρηματοοικονομική θεωρία φαίνονται εκ πρώτης όψεως πρακτικώς ανεφάρμοστα, εντούτοις, παίζουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία κατάλληλων χρηματοοικονομικών υποδειγμάτων.

Από την άλλη πλευρά, η πρακτική φύση της χρηματοοικονομικής θεωρίας δεν μπορεί να υποκαταστήσει την έλλειψη της μεθόδου του πειράματος, η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη στις φυσικές επιστήμες. Συνεπώς, η πρωταρχική πηγή συμπερασμάτων για έναν οικονομολόγο που ασχολείται με τη χρηματοοικονομική θεωρία είναι η στατιστική μελέτη οικονομικών μοντέλων, δηλαδή η χρηματοοικονομική οικονομετρία (financial econometrics). Η σημαντική αναγκαιότητα της χρήσης της οικονομετρίας στη χρηματοοικονομική θεωρία - περισσότερο απ' ό,τι σε άλλους κλάδους της οικονομικής επιστήμης- πηγάζει από το γεγονός ότι η αβεβαιότητα διαδραματίζει το κεντρικό ρόλο στη χρηματοοικονομική θεωρία και τις εφαρμογές της. Οι βασικές μορφές αβεβαιότητας αφορούν την αβεβαιότητα στη συμπεριφορά των επενδυτών και κυρίως, των τιμών. Πράγματι, αν δεν υπήρχε η αβεβαιότητα, η χρηματοοικονομική θεωρία θα αποτελούσε μια άσκηση στη βασική μικροοικονομική θεωρία. Η ύπαρξη, λοιπόν, της χρηματοοικονομικής θεωρίας ως επιστημονικού κλάδου οφείλεται εν πολλοίς στην αβεβαιότητα.

Το γεγονός αυτό έχει σημαντικές συνέπειες στη χρηματοοικονομική οικονομετρία. Οι στοχαστικές μεταβολές των χρηματοοικονομικών μεταβλητών, για τις οποίες απαιτείται η εκτίμηση και ο έλεγχος ενός χρηματοοικονομικού υποδείγματος με τη χρήση της στατιστικής θεωρίας, είναι στενά συνδεδεμένες με το τρόπο που η αβεβαιότητα εισάγεται στα χρηματοοικονομικά υποδείγματα. Η σύνδεση αυτή μεταξύ



θεωρίας και εμπειρικής εφαρμογής δεν εφαρμόζεται στις κοινωνικές επιστήμες, ενώ αντίθετα, είναι η βασική πρακτική, για πολλές δεκαετίες, στις φυσικές επιστήμες. Επομένως, ο συνδυασμός της ενσωμάτωσης της πληροφόρησης που μας δίνουν τα δεδομένα στην θεωρία και της εφαρμογής εξελιγμένων μοντέλων για τη σωστή ερμηνεία των δεδομένων, είναι η πρόκληση που έχει να αντιμετωπίσει ο ερευνητής που ασχολείται με χρηματοοικονομική οικονομετρία.

Η συναρπαστική αυτή πρόκληση σε συνδυασμό με τη ραγδαία ανάπτυξη της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς¹, καθιστούν τις εφαρμογές μιας νέας κατηγορίας υποδειγμάτων (ARCH) στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών πολύ χρήσιμες και επίκαιρες.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση στη χρηματοοικονομική θεωρία αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων και στα σχετικά υποδείγματα που έχουν αναπτυχθεί. Οι σημαντικότερες εναλλακτικές μορφές των στατιστικών υποδειγμάτων Αυτοπαλινδρομικής Δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας (ARCH), τα οποία θα μας βοηθήσουν να ελέγξουμε τη χρηματοοικονομική θεωρία παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2. Επίσης, εξετάζονται οι διαφορετικές ερμηνείες, οι προεκτάσεις και οι εκτιμήσεις με υποδείγματα ARCH. Επιπρόσθετα, γίνεται ειδική αναφορά στα πολυπαραμετρικά και στα υποδείγματα στο μέσο, τα οποία συνδέουν τη στατιστική με την οικονομική θεωρία. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται η στατιστική περιγραφή, οι έλεγχοι μοναδιαίας ρίζας και οι έλεγχοι συνολοκλήρωσης των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν στις εμπειρικές εκτιμήσεις. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε καθώς επίσης και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προέκυψαν, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η μονοπαραμετρική και πολυπαραμετρική εξειδίκευση του στατιστικού μοντέλου για να ερμηνεύσει τα δεδομένα της ελληνικής χρηματαγοράς. Τέλος, στην ενότητα 4.3 υπάρχουν τα συμπεράσματα και οι τελικές διαπιστώσεις που προέκυψαν από την εφαρμογή των υποδειγμάτων ARCH.²

¹ Στις αρχές του 1985 το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών είχε ετήσιο όγκο συναλλαγών μερικές δεκάδες δισεκατομμύρια, ενώ σήμερα, ο όγκος αυτός παρατηρείται σε ημερήσια βάση. Μαζί όμως με την ανάπτυξη αρχίζουν να διαφαίνονται σημαντικά σημεία εξορθολογισμού της αγοράς. Το βασικότερο είναι ότι έχουν μειωθεί οι πλασματικές συναλλαγές («αέρας»), γεγονός που καθιστά την έρευνα της συμπεριφοράς των μετοχών πιο αξιόπιστη και χρήσιμη.

² Η χρήση της πολυπαραμετρικής εξειδίκευσης ARCH γίνεται για πρώτη φορά στα στοιχεία των ελληνικών μετοχών.



Κεφάλαιο 1

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων

1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στη σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία είναι η ποσοτικοποίηση της σχέσης αντιστάθμισης (tradeoff) μεταξύ κινδύνου και αναμενόμενης απόδοσης. Παρ' ότι η κοινή λογική μας υπαγορεύει πως μια επένδυση με κίνδυνο - σε μετοχές, για παράδειγμα - θα προσφέρει, εν γένει, υψηλότερες αποδόσεις από μια επένδυση χωρίς κίνδυνο, αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα μια συστηματική θεωρία η οποία μετράει τον κίνδυνο, καθώς επίσης και την ανταμοιβή που συνεπάγεται η ανάληψή του. Το υπόδειγμα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων (Capital Asset Pricing Model ή CAPM) αναπτύχθηκε στην πρώτη του μορφή από τον Markowitz (1959) και στην συνέχεια βελτιώθηκε από τους Sharpe (1964), Lintner (1965) και Merton (1973).

Το κλασικό (standard) υπόδειγμα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων (στο εξής CAPM) έχει ως βάση του τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης με δεδομένο τον κίνδυνο. Επίσης, ορίζει γραμμική σχέση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου και της συνδιακύμανσης της απόδοσής του με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Το πρόβλημα αποτίμησης των περιουσιακών στοιχείων είναι δυνατόν να εξετασθεί και σε μακροοικονομικό πλαίσιο με τη χρήση υποδειγμάτων επιχειρηματικών κύκλων (business cycle models). Τα υποδείγματα αυτά ονομάζονται CAPM με βάση την κατανάλωση (Consumption CAPM ή CCAPM) και στηρίζονται στη διαχρονική μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην ενότητα 1.2 γίνεται σύντομη ανασκόπηση του κλασικού CAPM. Στην επόμενη ενότητα -1.3- παρουσιάζεται το διαχρονικό CAPM του Merton (1973). Το CCAPM και οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες προσομοιάζει με το κλασικό CAPM εξετάζονται στην ενότητα 1.4. Στην ενότητα 1.5 περιγράφεται η κριτική που αναπτύχθηκε γύρω από τα εμπειρικά



αποτελέσματα του κλασικού CAPM. Παράλληλα, αναπτύσσεται μια εναλλακτική μορφή του CAPM, απαλλαγμένη από τα μειονεκτήματα του κλασικού CAPM.

1.2 Το Κλασικό CAPM

Η αρχή της εκτενούς βιβλιογραφίας για το CAPM ήταν το άρθρο του Markowitz (1959) το οποίο μελετούσε την επιλογή ενός χαρτοφυλακίου. Για πρώτη φορά έθεσε το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή σε όρους αναμενόμενης απόδοσης και διακύμανσης της απόδοσης. Υποστήριξε ότι ο επενδυτής επιλέγει με άριστο τρόπο ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μέσου-διακύμανσης (mean-variance efficient portfolio), δηλαδή το χαρτοφυλάκιο με την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση, σε ένα δεδομένο επίπεδο διακύμανσης. Οι Sharpe (1964) και Lintner (1965) με βάση την θεωρία του Markowitz μελέτησαν τις επιδράσεις στην οικονομία ως σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, έδειξαν ότι αν οι επενδυτές έχουν ομοιογενείς προσδοκίες και διακρατούν ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μέσου-διακύμανσης, τότε -αν δεν υπάρχουν ατέλειες στην αγορά - το χαρτοφυλάκιο της αγοράς θα είναι και αυτό ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μέσου-διακύμανσης, επιλεγμένο με άριστο τρόπο.

Τα αποτελέσματα των Sharpe και Lintner που αφορούν το CAPM υποθέτουν την ύπαρξη δυνατότητας δανεισμού και δανειοδότησης με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk free rate of interest). Για αυτή την μορφή του CAPM η αναμενόμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου i ισούται με :

$$E [R_i] = R_f + \beta_{im} (E[R_m] - R_f) \quad (1.2.1)$$

$$\beta_{im} = Cov [R_i, R_m] / Var [R_m] \quad (1.2.2)$$

όπου: R_m η απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς

R_f η απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο

Το υπόδειγμα των Sharpe και Lintner φανερώνει με πιο έντονο τρόπο τις συνέπειες και τα αποτελέσματά του, αν στην θέση των απλών αποδόσεων χρησιμοποιήσουμε τις υπερβάλλουσες αποδόσεις (excess returns). Ως υπερβάλλουσα απόδοση ορίζεται η



διαφορά - θετική ή αρνητική - της απλής απόδοσης του στοιχείου με κίνδυνο και του στοιχείου χωρίς κίνδυνο. Αν συμβολίσουμε με Z_i την υπερβάλλουσα απόδοση του στοιχείου i , δηλαδή $Z_i \equiv R_i - R_f$, τότε το Sharpe-Lintner CAPM μετασχηματίζεται ως εξής:

$$E[Z_i] = \beta_{im} E[Z_m] \quad (1.2.3)$$

$$\beta_{im} = \text{Cov}[Z_i, Z_m] / \text{Var}[Z_i] \quad (1.2.4)$$

όπου Z_m είναι η υπερβάλλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Επειδή η απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο υποθέτουμε ότι είναι μη στοχαστική, οι εξισώσεις (1.2.2) και (1.2.4) είναι ισοδύναμες. Στις εμπειρικές εφαρμογές, αντίθετα, η διαδικασία που παράγει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι στοχαστική, και επομένως, οι συντελεστές β (beta coefficients) διαφέρουν. Η εμπειρική βιβλιογραφία στο μεγαλύτερο μέρος της χρησιμοποιεί τις υπερβάλλουσες αποδόσεις και κατά συνέπεια την σχέση (1.2.4). Στην πλειοψηφία τους οι οικονομετρικοί έλεγχοι εστιάζονται σε τρεις συνέπειες της εξίσωσης (1.2.3). Πιο συγκεκριμένα ότι:

- ο σταθερός όρος είναι μηδέν.
- ο συντελεστής β περιλαμβάνει το σύνολο της μεταβλητότητας των αναμενόμενων υπερβάλλουσων αποδόσεων.
- η επιδότηση για τον κίνδυνο (risk premium) της αγοράς, $E[Z_m]$, είναι θετική.

Ο Black (1972) υποθέτοντας απουσία του στοιχείου χωρίς κίνδυνο κατέληξε σε μια γενικότερη εναλλακτική μορφή του CAPM. Σε αυτήν την υποδειματοποίηση, η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη με το όνομα του δημιουργού της (Black version of CAPM), η αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση του στοιχείου i , πέρα από την απόδοση του στοιχείου με μηδενικό β (zero-beta), είναι γραμμικά συσχετιζόμενη με το β_i . Ειδικότερα, για την αναμενόμενη απόδοση του στοιχείου i , $E[R_i]$, έχουμε την εξίσωση:

$$E [R_i] = E[R_{0m}] + \beta_{im} (E[R_m] - E[R_{0m}]) \quad (1.2.5)$$

όπου R_m είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς και R_{0m} είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου με μηδενικό β που σχετίζεται με το m . Το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει εξ' ορισμού την ελάχιστη διακύμανση, από όλα τα χαρτοφυλάκια τα οποία είναι ασυσχέτιστα με το m (Κάθε άλλο χαρτοφυλάκιο μπορεί να έχει ίση απόδοση με το χαρτοφυλάκιο με μηδενικό β , αλλά θα έχει πάντα υψηλότερη διακύμανση). Εξαιτίας του γεγονότος ότι όλες οι τιμές στο υπόδειγμα του Black είναι πραγματικές, πρέπει να αποπληθωρίσουμε το συντελεστή β . Επομένως, σε πραγματικούς όρους, ο συντελεστής β ορίζεται ως εξής:

$$\beta_{im} = Cov [R_i, R_m] / Var [R_m] \quad (1.2.6)$$

Η οικονομετρική ανάλυση του υποδείγματος του Black είναι πιο πολύπλοκη από αυτή του υποδείγματος των Sharpe και Lintner, διότι λαμβάνει την απόδοση του στοιχείου με μηδενικό συντελεστή β ως στοχαστική μεταβλητή. Το υπόδειγμα του Black μπορεί να ελεγχθεί ως ένας περιορισμός του υποδείγματος των πραγματικών αποδόσεων της αγοράς (real-return market model). Πιο συγκεκριμένα, το γενικό υπόδειγμα των πραγματικών αποδόσεων της αγοράς ορίζει ότι:

$$E [R_i] = \alpha_{im} + \beta_{im} E[R_m] \quad (1.2.7)$$

ενώ το υπόδειγμα του Black περιορίζει επιπρόσθετα την παραπάνω μορφή ως εξής:

$$\alpha_{im} = E[R_{0m}] (1 - \beta_{im}) \quad \forall i \quad (1.2.8)$$

Με άλλα λόγια, το υπόδειγμα του Black, επιβάλλει τον περιορισμό ότι ο σταθερός όρος - ο οποίος είναι διαφορετικός για κάθε στοιχείο - του υποδείγματος των πραγματικών αποδόσεων της αγοράς ισούται με το γινόμενο της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου με μηδενικό β , επί τη διαφορά του συντελεστή β του συγκεκριμένου στοιχείου από την μονάδα.



Το CAPM είναι υπόδειγμα μιας περιόδου και επομένως, οι σχέσεις (1.2.3) και (1.2.4) δεν έχουν διαχρονική ισχύ, είναι στατικές. Όταν κάνουμε οικονομετρική ανάλυση είναι αναγκαίο να κάνουμε κάποιες υποθέσεις όσον αφορά την συμπεριφορά των χρονολογικών σειρών των αποδόσεων, έτσι ώστε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα διαχρονικά. Ειδικότερα, υποθέτουμε πως οι αποδόσεις είναι διαχρονικά ανεξάρτητες και ως σύνολο κατανέμονται κανονικά (jointly multivariate normal). Οι παραπάνω υποθέσεις επιβάλλονται στις υπερβάλλουσες αποδόσεις του υποδείγματος των Sharpe-Lintner και στις πραγματικές αποδόσεις του υποδείγματος του Black. Παρ' ότι είναι πολύ ισχυρές υποθέσεις, έχουν το πλεονέκτημα της συμβατότητας με την θεωρία του CAPM. Αυτό συμβαίνει διότι η συγκεκριμένη μορφή του CAPM είναι στην φύση της στατικής και μετατρέπεται τεχνητά σε δυναμική, με την επανάληψή της για κάθε περίοδο. Επομένως, δεν υπάρχει διαχρονική αλληλεπίδραση μεταξύ των υπερβάλλουσων αποδόσεων.

Το CAPM είναι χρήσιμο στις εφαρμογές που απαιτούν τη μέτρηση της αναμενόμενης απόδοσης των μετοχών, όπως η εκτίμηση του κόστους κεφαλαίου και η αξιολόγηση των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε εν συντομία την χρήση του στην εκτίμηση του κόστους κεφαλαίου. Το κόστος του μετοχικού κεφαλαίου είναι μια πολύ χρήσιμη πληροφορία στις αποφάσεις που αφορούν την κατάρτιση των προϋπολογισμών κόστους κεφαλαίου των επιχειρήσεων (corporate capital budgeting). Επιπρόσθετα, εξάγεται ένας μέσος ρυθμός απόδοσης των επενδύσεων (rate of return), ο οποίος λειτουργεί ως κριτήριο στην αξιολόγηση επενδυτικών προγραμμάτων. Η συγκεκριμένη εφαρμογή απαιτεί τη χρήση των εξής δεδομένων: το συντελεστή β των μετοχών, την επιδότηση του κινδύνου για την αγορά και την απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο. Ο πιο συνηθισμένος εκτιμητής του β μιας μετοχής είναι ο εκτιμητής OLS της κλίσης του υποδείγματος των υπερβάλλουσων αποδόσεων για την αγορά, δηλαδή ο συντελεστής β της παρακάτω εξίσωσης παλινδρόμησης:

$$Z_{it} = \alpha_{im} + \beta_{im} Z_{mt} + \varepsilon_{it} \quad (1.2.9)$$

όπου με i συμβολίζεται το εκάστοτε περιουσιακό στοιχείο και με t η χρονική περίοδος, $t = 1, 2, \dots, T$. Συνεπώς, Z_{it} και Z_{mt} είναι οι πραγματοποιημένες υπερβάλλουσες αποδόσεις στο χρόνο t , για το στοιχείο i και την m αγορά, αντίστοιχα. Το

χαρτοφυλάκιο της αγοράς, συνήθως, προσεγγίζεται από τον Γενικό δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών και η απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο από την απόδοση των Εντόκων Γραμματίων του Δημοσίου. Η εξίσωση (1.2.9) εκτιμάται, στις περισσότερες περιπτώσεις, για πέντε χρόνια σε μηνιαία βάση ($T = 60$). Με δεδομένο τον εκτιμητή του β , το κόστος του κεφαλαίου προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ιστορικό μέσο των υπερβάλλουσων αποδόσεων του Γενικού Δείκτη πάνω από την απόδοση των Εντόκων Γραμματίων.

1.3 Το Διαχρονικό Υπόδειγμα CAPM του Merton

Παρ' ότι το κλασικό υπόδειγμα εκτίμησης περιουσιακών στοιχείων αποτελεί μια σπουδαία εξέλιξη για τη σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία, έχει δεχτεί μεγάλη κριτική από θεωρητικής άποψης για τις περιοριστικές υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται. Ειδικότερα για:

- α) την υπόθεση ότι οι επενδυτές επιλέγουν τα χαρτοφυλάκια τους, σύμφωνα με το κριτήριο μέσου-διακύμανσης του Markowitz και
- β) τις βοηθητικές υποθέσεις της ομοιογένειας των προσδοκιών και του μοντέλου της μίας περιόδου.

Από την σκοπιά της εμπειρικής εφαρμογής, η κριτική εστιάζεται στο ότι ενώ το μοντέλο προβλέπει ότι η προσδοκώμενη υπερβάλλουσα απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου είναι ανάλογη της συνδιακύμανσης της απόδοσής του με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς (υπόδειγμα με συντελεστή β), οι Black, Jensen και Scholes (1972) έδειξαν ότι τα περιουσιακά στοιχεία με χαμηλό (υψηλό) β , έχουν κατά μέσο όρο μεγαλύτερη (μικρότερη) απόδοση από αυτήν που το μοντέλο έχει προβλέψει.

Το θεωρητικό υπόδειγμα που θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την ενότητα είναι το διαχρονικό υπόδειγμα ισορροπίας της κεφαλαιαγοράς του Merton. Το υπόδειγμα αυτό βασίζεται σε ένα καταναλωτή-επενδυτή που μεγιστοποιεί διαχρονικά την συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητάς του, υπό τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό. Επομένως, η συμπεριφορά του αλλάζει διαχρονικά καθώς αντιμετωπίζει συνεχώς μεταβαλλόμενες επενδυτικές ευκαιρίες. Οι υποθέσεις που γίνονται στο διαχρονικό CAPM είναι οι εξής:



1. Τα περιουσιακά στοιχεία εμπερικλείουν κάποια υποχρέωση, η οποία όμως είναι περιορισμένη.
2. Δεν υπάρχουν στοιχεία κόστους στις συναλλαγές, φόρος ή προβλήματα με την ατομικότητα των περιουσιακών στοιχείων.
3. Ο αριθμός των επενδυτών και η περιουσία τους είναι τέτοια ώστε ο επενδυτής πιστεύει ότι μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει στην τιμή της αγοράς όση ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου επιθυμεί.
4. Οι συναλλαγές γίνονται στις τιμές ισορροπίας.
5. Υπάρχει αγορά συναλλάγματος στην οποία μπορείς να δανείσεις ή να δανειστείς με το ίδιο επιτόκιο.
6. Επιτρέπονται και οι πωλήσεις μικρής ποσότητας περιουσιακών στοιχείων όπως και η πλήρης χρήση των χρημάτων που εισπράχθηκαν από τις πωλήσεις αυτές.
7. Οι συναλλαγές των περιουσιακών στοιχείων επεκτείνονται ως τον άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Αναφορικά με τη δυναμική εξέλιξη των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων που συναλλάσσονται στην αγορά, ο επενδυτής γνωρίζει κάθε στιγμή το σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών, καθώς επίσης, και τις στοχαστικές διαδικασίες που ακολουθούν οι μεταβολές στο σύνολο αυτό. Ο επενδυτής επιλέγει το υποκειμενικά βέλτιστο χαρτοφυλάκιο λαμβάνοντας υπ' όψη του την διαχρονική σχέση υποκατάστασης ανάμεσα στις αποδόσεις της τρέχουσας περιόδου και των αποδόσεων των μελλοντικών περιόδων.

Η περιγραφή της προσφοράς επενδυτικών κεφαλαίων στις χρηματαγορές, θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ των τρεχουσών αποδόσεων και των μεταβολών του συνόλου των επενδυτικών ευκαιριών. Ειδικότερα, κάθε επιχείρηση στο υπόδειγμα μας, επενδύει σε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο και εκδίδει μία κοινή μετοχή. Αν ονομάσουμε $N(t)$ τον αριθμό των μετοχών της επιχείρησης που βρίσκονται στα χέρια των μετόχων και $P(t)$ την τιμή κάθε μετοχής, τότε τα $N(t)$ και $P(t)$ δίνονται από τις εξισώσεις διαφορών:

$$P(t+h) \equiv [X + (1 - \lambda) P_k(t+h) K(t)] / N(t) \quad (1.3.1)$$

$$N(t+h) = N(t) + [P_k(t+h) [K(t+h) - (1 - \lambda) K(t)] - X] / P(t+h) \quad (1.3.2)$$



με αρχικές συνθήκες: $P(0)=P$, $N(0)=N$ και $V(0)=N(0)P(0)$,

όπου: $K(t)$ το κεφάλαιο που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t

$P_k(t)$ η τιμή της μονάδας του κεφαλαίου

$V(t)$ η αξία του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή t

h το μήκος μιας περιόδου, στην οποία μας ενδιαφέρει η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου

X οι χρηματικές ροές (cash flows)

λ ο ρυθμός της φυσικής απόσβεσης του κεφαλαίου

Επίσης, είναι αναγκαίες και οι παρακάτω πρόσθετες υποθέσεις:

8. Όλες οι στοχαστικές διαδικασίες που περιγράφουν το σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών και τις μεταβολές τους, είναι μια διαχρονικά ομογενής, ακολουθία Markov.
9. Επιτρέπονται μόνο τοπικές μεταβολές στις προκαθορισμένες μεταβλητές της ακολουθίας.
10. Ο προσδοκώμενος ρυθμός απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή t είναι:

$$\alpha \equiv E_t \{ [P(t+h) - P(t)] / P(t) \} / h$$

και η διακύμανση της απόδοσης στη μονάδα του χρόνου είναι:

$$\sigma^2 \equiv E_t \{ ((P(t+h) - P(t)) - \alpha h)^2 \} / h$$

όπου τα α , σ^2 υπάρχουν ($\sigma^2 > 0$) και είναι συνεχείς συναρτήσεις του h . E_t είναι ο τελεστής των δεσμευμένων προσδοκιών στο σύνολο πληροφοριών που είναι διαθέσιμες το χρόνο t . Όταν το h τείνει στο μηδέν, το α ονομάζεται στιγμιαία προσδοκώμενη απόδοση, ενώ το σ^2 καλείται αντίστοιχα στιγμιαία διακύμανση της απόδοσης.



Η στοχαστική διαφορική εξίσωση για τη στιγμιαία απόδοση του i -περιουσιακού στοιχείου θα είναι:

$$\frac{dP_i}{P_i} = a_i dt + \sigma_i dz_i \quad (1.3.3)$$

όπου η dz_i περιγράφει μια ακολουθία Wiener.

Η δυναμική των μεταβολών στο σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών κατά τη διάρκεια του χρόνου, δίνεται από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$da_i = a_i dt + b_i dq_i \quad (1.3.4)$$

$$d\sigma_i = f_i dt + g_i dx_i \quad (1.3.5)$$

Οι εξισώσεις (1.3.4) και (1.3.5) αποτελούν ένα σύστημα Markov, με dq_i και dx_i ως δεδομένες ακολουθίες Wiener. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν n -διαφορετικά - με ανεξάρτητη απόδοση - περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο και ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, σε στιγμιαία βάση. Αναλυτικότερα, η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο δίνει στον επενδυτή σίγουρο ρυθμό απόδοσης $r(t)$, μόνο κατά τη διάρκεια της στιγμής t . Το $r(t)$ παίζει το ρόλο του επιτοκίου δανεισμού για τον ιδιωτικό τομέα και οι μελλοντικές τιμές του είναι αβέβαιες.

Αν υπάρχουν κ επενδυτές τότε ο κ -ιστός επενδυτής μεγιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$E_o \left[\int_0^{T^k} U^k [C^k(s), s] ds + B^k [W^k(T^k), T^k] \right] \quad (1.3.6)$$

όπου: E_o η δεσμευμένη προσδοκία στο σύνολο πληροφοριών το οποίο είναι διαθέσιμο την περίοδο μηδέν,

$W^k(0) = W^k$ οι προκαθορισμένες μεταβλητές του συνόλου των επενδυτικών ευκαιριών,

T^k η κατανομή πιθανότητας της ηλικίας θανάτου,

$C^k(t)$ η στιγμιαία κατανάλωση τη χρονική στιγμή t ,

$U^κ$ μία αυστηρά κοίλη von Neumann - Morgestern συνάρτηση
χρησιμότητας για την κατανάλωση,

$B^κ$ μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση «κληροδοτήματος» (endowment) ή
χρησιμότητας του τελικού πλούτου,

W συνολικός πλούτος

Αν αφαιρέσουμε τους δείκτες, η εξίσωση συσσώρευσης για τον κ-οστό επενδυτή
είναι:

$$dW = \left[\sum_1^n w_i (a_i - r) + r \right] W dt + \sum_1^n w_i W \sigma_i dz_i + (y - c) dt \quad (1.3.7)$$

όπου:

$w_i \equiv N_i P_i / W$ μια οριακή μεταβολή στον πλούτο που διατίθεται στο στοιχείο i ,

N_i ο αριθμός των μετοχών από το i -περιουσιακό στοιχείο,

y το εισόδημα του επενδυτή από εργασία.

Από την (1.3.7) και τον εισοδηματικό περιορισμό του επενδυτή $W = \sum_1^{n+1} N_i P_i$

προκύπτει η σχέση:

$$(y - c) dt = \sum_1^{n+1} dN_i (P_i + dP_i) \quad (1.3.8)$$

η οποία σημαίνει ότι η καθαρή αξία των νέων μετοχών που αγοράζονται από τον
επενδυτή πρέπει να είναι ίση με την αξία των αποταμιεύσεων που προέρχονται από
την αμοιβή της εργασίας του.

Στην συνέχεια για να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις ζήτησης των περιουσιακών
στοιχείων, υποθέτουμε ότι $y = 0$. Οι $n+1$ συνθήκες πρώτης τάξης που προκύπτουν
από τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης για έναν επενδυτή, ο οποίος
μεγιστοποιεί τη συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας (1.3.6) επιλέγοντας
κατανάλωση και επένδυση κάθε χρονική στιγμή, δίνουν τις παρακάτω συναρτήσεις
ζήτησης:



$$w_i W = A \sum_1^n u_{ij} (a_j - r) + \sum_1^m \sum_1^n H_k \sigma_j g_k n_{jk} u_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.3.9)$$

όπου:

u_{ij} τα στοιχεία του αντιστρόφου πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των στιγμιαίων αποδόσεων,

$A \equiv -J_W / J_{WW}$ με $J(W, T, X) = B(W, T)$ και X μια προκαθορισμένη μεταβλητή της οποίας τα στοιχεία, x_i , αντιστοιχούν στις τρέχουσες τιμές για τα P , a και σ ,

$$dX = F(X) dt + G(X) dQ,$$

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_m],$$

G ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $[g_1, g_2, \dots, g_m]$,

$dQ = [dq_1, dq_2, \dots, dq_m]$ μια ακολουθία Weiner,

n_{jk} ο στιγμιαίος συντελεστής συσχέτισης των dq_j και dz_k ,

$$H_k \equiv -J_{kW} / J_{WW}.$$

Ο πρώτος όρος της (1.3.9) είναι η συνηθισμένη συνάρτηση ζήτησης για ένα περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο στο μοντέλο της μίας περιόδου και το A είναι ανάλογο του αντιστρόφου του απόλυτου δείκτη αποστροφής του κινδύνου του επενδυτή (absolute rate of risk aversion). Ο δεύτερος όρος της (1.3.9) είναι το κομμάτι της ζήτησης του περιουσιακού στοιχείου που έχει σχέση με την προφύλαξη (hedging) του επενδυτή από ανεπιθύμητες αλλαγές στο σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών. Ως ανεπιθύμητες ορίζονται οι αλλαγές οι οποίες θα έχουν σαν αποτέλεσμα τη μείωση της μελλοντικής κατανάλωσης, με δεδομένο το επίπεδο του μελλοντικού πλούτου. Μπορεί ναδειχτεί ότι όλοι οι συντηρητικοί επενδυτές (risk-averse investors) παίρνουν τέτοιου είδους προφυλάξεις. Έτσι αν το σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών που παρατηρείται στην πράξη δεν είναι το προσδοκώμενο, ο επενδυτής θα περιμένει να αποζημιωθεί με ένα υψηλότερο επίπεδο πλούτου, ως αποτέλεσμα της θετικής συσχέτισης των αποδόσεων. Ενώ αντίθετα, αν οι εκ των υστέρων παρατηρούμενες αποδόσεις είναι χαμηλότερες, ο επενδυτής θα αναμένει ένα πιο ικανοποιητικό επενδυτικό περιβάλλον. Αυτή η συμπεριφορά δείχνει την προσπάθεια για μείωση της μη αναμενόμενης μεταβλητότητας στη διαχρονική κατανάλωση.

Όταν το σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών είναι σταθερό στη διάρκεια του χρόνου και η κατανομή της τιμής κάθε μετοχής είναι λογαριθμικο-κανονική (*log-normal*) για όλα τα περιουσιακά στοιχεία, τότε η ζήτηση των χαρτοφυλακίων επενδύσεων (1.3.9) αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο. Στην απλή αυτή περίπτωση, αποδεικνύεται ότι οι αποδόσεις σε ισορροπία δίνονται από τη σχέση:

$$\alpha_i - r = \beta_i (\alpha_M - r), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.3.10)$$

όπου $\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma^2_M$, σ_{iM} είναι η συνδιακύμανση της απόδοσης του i -περιουσιακού στοιχείου με την απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς και α_M είναι η προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Επομένως, με σταθερό το σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών, η συμπεριφορά των επενδυτών συμπίπτει με εκείνη του υποδείγματος της μιας περιόδου.

Μια άλλη εναλλακτική μορφή του υποδείγματος είναι εκείνη κατά την οποία το επιτόκιο (λαμβάνεται ως προκαθορισμένη μεταβλητή) είναι ικανό να περιγράψει τις μεταβολές στο σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών. Τότε η συνάρτηση ζήτησης του k -ιστού επενδυτή για το i -περιουσιακό στοιχείο δίνεται από τις σχέσεις:

$$d_i^k = A^k \sum_l^n u_{il} (a_l - r), \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (1.3.11)$$

$$d_n^k = A^k \sum_l^n u_{nl} (a_l - r) - gH^k / \sigma_n, \quad (1.3.12)$$

όπου: $d_i^k = w_i^k W^k$, $H^k = -(\partial c^k / \partial r) / (\partial c^k / \partial W^k)$ και $g = \sigma_{jr} / \rho_{jr} \sigma_j$, σ_{jr} είναι η στιγμιαία συνδιακύμανση της απόδοσης του j -περιουσιακού στοιχείου και των αλλαγών στο επιτόκιο και ρ_{jr} είναι ο συντελεστής στιγμιαίας συσχέτισης της απόδοσης του j -περιουσιακού στοιχείου με τις αλλαγές στο r .

Από τις σχέσεις (1.3.11) και (1.3.12) συμπεραίνουμε ότι τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια επενδύσεων όλων των επενδυτών μπορούν να χωριστούν σε δύο μέρη, καθένα από τα οποία γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός τριών χαρτοφυλακίων επενδύσεων (αμοιβαία κεφάλαια). Το πρώτο και το τρίτο αμοιβαίο κεφάλαιο παρέχουν στους επενδυτές ένα ικανοποιητικό όριο για τις αβέβαιες αποδόσεις, ενώ το

δεύτερο αμοιβαίο κεφάλαιο τους προφυλάσσει από ανεπιθύμητες διαχρονικές αλλαγές στο όριο αυτό.

Με τη βοήθεια των συναρτήσεων ζήτησης (1.3.11) και (1.3.12) μπορούμε να εξάγουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η αγορά εκκαθαρίζει στο σημείο ισορροπίας. Στην συνέχεια, αν τις συνδυάσουμε με την σχέση (1.3.8), προκύπτει η σχέση ισορροπίας ανάμεσα στην προσδοκώμενη απόδοση ενός συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου και στην αναμενόμενη απόδοση της αγοράς, για την ειδική περίπτωση του διαχρονικά μεταβαλλόμενου επιτοκίου (δηλαδή $\alpha_i = \alpha_i(r)$, $\sigma_i = \sigma_i(r)$):

$$\alpha_i - r = \frac{\sigma_i [\rho_{iM} - \rho_{in} \rho_{nM}]}{\sigma_M (1 - \rho_{nM}^2)} (\alpha_M - r) + \frac{\sigma_i [\rho_{in} - \rho_{iM} \rho_{nM}]}{\sigma_n (1 - \rho_{Mn}^2)} (\alpha_n - r), \quad i=1, \dots, n-1, \quad (1.3.13)$$

Η εξίσωση (1.3.13) σημαίνει ότι, σε κατάσταση ισορροπίας, οι επενδυτές αποζημιώνονται -σε όρους αναμενόμενης απόδοσης- για την αντοχή τους στη συστηματική αβεβαιότητα της αγοράς και στον κίνδυνο των δυσάρεστων μεταβολών στο σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών. Είναι φανερό ότι η (1.3.13) αποτελεί μια γενίκευση του «αποδοτικού μετώπου των επενδύσεων» (security market line), την οποία συναντάμε στο κλασικό CAPM.

Συμπερασματικά, το διαχρονικό υπόδειγμα εκτίμησης περιουσιακών στοιχείων, φαίνεται να εξηγεί τα στοιχεία της αγοράς καλύτερα από το κλασικό CAPM. Επιπρόσθετα, όπως δείξαμε μελετώντας την τελευταία ειδική περίπτωση του γενικού διαχρονικού CAPM, οι σχέσεις ισορροπίας για τις αναμενόμενες αποδόσεις στο κλασικό CAPM, είναι δυνατόν να ισχύουν μόνο κάτω από πολύ ειδικές πρόσθετες υποθέσεις.

1.4 Το CAPM με βάση την Κατανάλωση (CCAPM)

Το πρόβλημα επιλογής του ατόμου μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας αναλύθηκε από τον Samuelson (1969) και τον Merton (1969). Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση του Samuelson, η οποία γίνεται σε διακριτό χρόνο.

Εξετάζουμε έναν καταναλωτή που μεγιστοποιεί στο χρόνο μηδέν την εξής συνάρτηση ευημερίας:

$$E \left[\sum_{t=0}^{T-1} (1 + \theta)^{-t} u(c_t) / \theta \right] \quad (1.4.1)$$

Ο συμβολισμός $E (\dots / t)$ δηλώνει την δεσμευμένη προσδοκία στο σύνολο των πληροφοριών τον χρόνο t και αντικαθιστά το συμβολισμό $E (\dots / I_t)$, όπου I_t είναι το διαθέσιμο σύνολο πληροφοριών στο χρόνο t . Το θ συμβολίζει το συντελεστή διαχρονικής προτίμησης του ατόμου. Επομένως, ο καταναλωτής μεγιστοποιεί την προεξοφλημένη παρούσα αξία της αναμενόμενης χρησιμότητάς του, δεσμευμένη στο σύνολο πληροφοριών κατά το χρόνο $t = 0$.

Η συνάρτηση χρησιμότητας $u(\cdot)$ επιτελεί μια διπλή λειτουργία. Πρώτον, χαρακτηρίζει το βαθμό υποκατάστασης ανάμεσα σε κατανάλωση διαφορετικών περιόδων και δεύτερον, αντανακλά τη στάση του καταναλωτή απέναντι στον κίνδυνο. Ο καταναλωτής έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο περιουσιακά στοιχεία, το στοιχείο με κίνδυνο, το οποίο προσφέρει απόδοση R_i (στοχαστική και άγνωστη το χρόνο t) και το στοιχείο χωρίς κίνδυνο με απόδοση R_f (μη-στοχαστική και γνωστή το χρόνο t). Για τους σκοπούς της συγκεκριμένης ανάλυσης δεν είναι απαραίτητο να εξειδικεύσουμε πλήρως το διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό, κάτω από τον οποίο ο καταναλωτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα κάθε περίοδο. Απλά πρέπει να υποθέσουμε ότι ο καταναλωτής τη χρονική περίοδο t μπορεί να επιλέξει τη διαχρονική μεταφορά του πλούτου του, ο οποίος είναι εκφρασμένος σε κάποια από τα n περιουσιακά στοιχεία με (καθαρή) στοχαστική απόδοση R_{it} , $i = 1, \dots, n$, και σε ένα στοιχείο χωρίς κίνδυνο με απόδοση R_f . Αν λύσουμε το πλήρες πρόβλημα με την μέθοδο του *δυναμικού προγραμματισμού* (dynamic programming), τότε προκύπτει ένα σύνολο από $n + 1$ συνθήκες πρώτης τάξης, στο χρόνο t , με την εξής μορφή:

$$u'(c_t) = (1 + \theta)^{-1} E[u'(c_{t-1}) (1 + R_{it}) / t], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4.2)$$

$$u'(c_t) = (1 + \theta)^{-1} (1 + R_f) E[u'(c_{t-1}) / t], \quad (1.4.3)$$



Η επεξήγησή τους είναι προφανής. Ο καταναλωτής πρέπει να επιλέξει κατά μήκος της άριστης πορείας (optimal path) το ποσό της κατανάλωσης που εξισώνει την οριακή χρησιμότητα αυτής της περιόδου με την προεξοφλημένη αναμενόμενη οριακή χρησιμότητα της επόμενης περιόδου. Η παραπάνω πρόταση πρέπει να επιβεβαιώνεται πάντα στο όριο, ανεξάρτητα αν το περιουσιακό στοιχείο που εξετάζεται, είναι με κίνδυνο ή χωρίς. Για τα στοιχεία με κίνδυνο ο παράγοντας που μετράει είναι η αναμενόμενη τιμή του γινομένου της οριακής χρησιμότητας και της απόδοσής του, τα οποία είναι και τα δύο αβέβαια τον χρόνο t . Για το στοιχείο χωρίς κίνδυνο, η απόδοσή του είναι ντετερμινιστική και επομένως, μπορεί να βγει έξω από την μαθηματική ελπίδα. Με αυτόν το τρόπο προκύπτει η σχέση (1.4.3). Οι συνθήκες πρώτης τάξης (1.4.2) και (1.4.3) είναι ένα σύνολο κοινών περιορισμών στις στοχαστικές ακολουθίες της κατανάλωσης και της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφουν την εξέλιξη των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων στην κατάσταση ισορροπίας, με δεδομένη την ακολουθία της κατανάλωσης.

Αντικαθιστώντας την (1.4.3) στην (1.4.2), παρατηρούμε ότι:

$$0 = E[u'(c_{t+1}) (R_{it} - R_f) / t], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4.4)$$

Ισοδύναμα, και καταργώντας για απλότητα το χρονικό σύμβολο στον ορισμό των δεσμευμένων πρώτων και δεύτερων ροπών (για παράδειγμα, η $E[\cdot / t]$ θα συμβολίζεται ως $E[\cdot]$ κ.ο.κ), προκύπτει:

$$0 = E[u'(c_{t+1})] E[R_{it} - R_f] + Cov[u'(c_{t+1}) R_{it}], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4.5)$$

Επομένως, η αναμενόμενη απόδοση του στοιχείου i στην ισορροπία ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$E[R_{it}] = R_f - \{Cov[u'(c_{t+1}) R_{it}] / E[u'(c_{t+1})]\} \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4.6)$$

Όσο πιο υψηλή είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων ενός στοιχείου με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης, τόσο πιο χαμηλή είναι η αναμενόμενη απόδοση του στοιχείου αυτού, στην ισορροπία. Η υπόθεση της φθίνουσας οριακής

χρησιμότητας έχει ως συνέπεια ότι στην ισορροπία οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να δεχτούν χαμηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις σε ένα περιουσιακό στοιχείο, το οποίο εξασφαλίζει προφύλαξη έναντι του κινδύνου της χαμηλής κατανάλωσης. Αυτό επιτυγχάνεται με την υψηλότερη απόδοση που λαμβάνει ο καταναλωτής σε περιόδους που χαρακτηρίζονται από χαμηλή κατανάλωση.

Η εξίσωση (1.4.6) πρέπει να ισχύει για κάθε καταναλωτή που είναι ελεύθερος να επιλέξει ανάμεσα στα $n + 1$ στοιχεία. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι καταναλωτές είναι όμοιοι (υπόθεση αντιπροσωπευτικού καταναλωτή), ζουν για πάντα και η συνάρτηση κατανάλωσης έχει μια συγκεκριμένη μορφή, η σχέση (1.4.6) μπορεί να εκτιμηθεί οικονομικά, χρησιμοποιώντας δεδομένα για την συνολική κατανάλωση και τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων. Αν όμως οι καταναλωτές διαφέρουν, για παράδειγμα, έχουν διαφορετική συνάρτηση χρησιμότητας, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η σχέση (1.4.6) είναι δυνατόν να εκτιμηθεί, είναι πιθανόν να μην ικανοποιούνται για αθροιστικά δεδομένα (aggregate data) [βλέπε Grossman και Shiller (1982)]. Παρ' όλα αυτά η εξίσωση (1.4.6) επιτυγχάνει να μας δώσει με απλό τρόπο τους παράγοντες που καθορίζουν τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα περιουσιακό στοιχείο m , που αντιπροσωπεύει το σύνολο της αγοράς και συσχετίζεται αρνητικά με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης στην επόμενη περίοδο, $u'(c_{t+1})$.

Δηλαδή, $u'(c_{t+1}) = -\gamma R_{it}$, για $\gamma > 0$. Έπεται, λοιπόν, για όλα τα στοιχεία με κίνδυνο ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$Cov [u'(c_{t+1}) R_{it}] = -\gamma Cov [R_{mt} R_{it}] \quad (1.4.7)$$

Επιπλέον, για το στοιχείο m , η εξίσωση (1.4.6) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E [R_{mt}] &= R_f - \{Cov [u'(c_{t+1}) R_{mt}] / E[u'(c_{t+1})]\} \\ &= R_f + \{\gamma Var [R_{mt}] / E[u'(c_{t+1})]\} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

και αντικαθιστώντας τις (1.4.7) και (1.4.8) στην (1.4.6), προκύπτει η θεμελιώδης σχέση :

$$E [R_{it}] - R_f = \{Cov (R_{it} R_{mt}) / Var (R_{mt})\} (E[R_{mt}] - R_f), \quad (1.4.9)$$

και αν ορίσουμε $\beta_i = \{Cov (R_{it} R_{mt}) / Var (R_{mt})\}$, η (1.4.9) γράφεται ως εξής:

$$E [R_{it}] - R_f = \beta_i (E[R_{mt}] - R_f), \quad (1.4.10)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως «αποδοτικό μέτωπο επενδύσεων» (security market line). Με απλά λόγια, σημαίνει ότι η διαφορά της αναμενόμενης απόδοσης ενός δεδομένου στοιχείου από την απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο (αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση), είναι ένα ποσοστό της διαφοράς της αναμενόμενης απόδοσης της αγοράς από την απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο. Ο συντελεστής που εκφράζει αυτό το ποσοστό είναι ίσος με τον συντελεστή β_i , ο οποίος έχει την ερμηνεία του συντελεστή της παλινδρόμησης του R_{it} πάνω στο R_{mt} .

Η εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι μια μετοχή με υψηλή διακύμανση στις αποδόσεις της είναι δυνατόν να απαιτεί ή να μην απαιτεί επιδότηση κινδύνου (risk premium) για να την αποκτήσουν ή να την κρατήσουν οι καταναλωτές. Αν οι μεταβολές αυτές είναι θετικά συσχετιζόμενες με την αγορά, τότε το συγκεκριμένο στοιχείο θα έχει υψηλό β και θα απαιτεί θετική επιδότηση κινδύνου. Αν, αντίθετα, οι μεταβολές είναι ασυσχέτιστες με αυτές της αγοράς, ο κίνδυνος διακράτησης του στοιχείου αυτού είναι τελείως διαφοροποιημένος (μηδενικός) και στην ισορροπία η απόδοσή του θα ισούται με την απόδοση του στοιχείου χωρίς κίνδυνο. Αν μια μετοχή συνδιακυμαίνεται αρνητικά με την αγορά, παρέχει μια προφύλαξη (hedge) για τους επενδυτές, οι οποίοι θα είναι ευτυχημένοι αν το κρατούν σε μια αναμενόμενη απόδοση μικρότερη από αυτή του στοιχείου χωρίς κίνδυνο.

Μια σύγκριση των εξισώσεων (1.4.6) και (1.4.10) φανερώνει την συγκριτικά μεγαλύτερη ευκολία εκτίμησης της τελευταίας. Η σχέση ισορροπίας που συνδέει την αναμενόμενη απόδοση της αγοράς, το στοιχείο χωρίς κίνδυνο και την αναμενόμενη απόδοση κάθε στοιχείου με κίνδυνο, δεν απαιτεί εξειδίκευση των προτιμήσεων και

της αποστροφής από τον κίνδυνο (*risk aversion*). Ο υπολογισμός του β γίνεται μέσω μιας απλής παλινδρόμησης. Ως αποτέλεσμα αυτού οι συντελεστές β έχουν γίνει κλασικό εργαλείο στην εφαρμοσμένη χρηματοδοτική διοίκηση.

1.5 Τα Προβλήματα των Εμπειρικών Εφαρμογών του CAPM

Το κλασικό CAPM είναι μια ρεαλιστική προσέγγιση στην αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων, όταν η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης συσχετίζεται σε υψηλό βαθμό με την απόδοση της χρηματιστηριακής αγοράς, ή γενικότερα με το χαρτοφυλάκιο των εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων. Αναφερόμαστε στα εμπορεύσιμα στοιχεία γιατί η ύπαρξη ενός σημαντικού μη-εμπορεύσιμου αγαθού, για παράδειγμα του ανθρώπινου πλούτου, είναι πολύ πιθανόν να μειώσει τη συσχέτιση. Σε αυτή την περίπτωση το CAPM που βασίζεται στην κατανάλωση αποτελεί την καλύτερη εξειδίκευση. Στην πράξη το CCAPM (με τη χρήση δεδομένων για τη συνολική κατανάλωση) εμφανίζεται να περιγράφει χειρότερα τα στοιχεία από ότι το κλασικό CAPM (Mankiw και Shapiro 1986).

Οι κρίσιμες υποθέσεις πάνω στις οποίες βασίστηκαν τα υποδείγματα τα οποία περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες είναι οι εξής:

1. Όλοι οι επενδυτές επιλέγουν ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μέσου-διακύμανσης με βάση τον χρονικό ορίζοντα μιας περιόδου, παρ' ότι δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση χρησιμότητας (η υπόθεση αυτή δεν ισχύει για το CCAPM).
2. Όλοι οι επενδυτές έχουν τις ίδιες αντικειμενικές προσδοκίες αναφορικά με τους μέσους, τις διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων.
3. Η αγορά είναι πλήρως αποτελεσματική, δηλαδή δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών, στρεβλωτικοί φόροι και περιορισμοί στο μέγεθος της δανειοδότησης και της δανειοληψίας.

Οι εμπειρικοί έλεγχοι του CAPM συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο μέρος του ενδιαφέροντός τους στην πρώτη υπόθεση. Παράλληλα, ισχυροποιούν την δεύτερη με την προσθήκη των διαχρονικά σταθερών κατανομών των ροπών και την αντικατάσταση του συνόλου της αγοράς από την αγορά των μετοχών. Αυτοί οι έλεγχοι έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα, εν γένει, ότι η επιδότηση κινδύνου σε



συγκεκριμένα περιουσιακά στοιχεία εξηγείται από μεταβλητές διαφορετικές από την εκτιμημένη συνδιακύμανση. Πιο συγκεκριμένα, η διακύμανσή τους, το μέγεθος της επιχείρησης και ο μήνας Ιανουάριος, είναι μεταβλητές που φαίνεται πως μπορούν να εξηγήσουν τις αναμενόμενες αποδόσεις. Πλήρης ανασκόπηση - ανάμεσα σε άλλες - της εμπειρικής μελέτης πάνω σε αυτό το θέμα γίνεται από τον Jensen (1978) και τον Schwert (1983).

Μια εξήγηση της αποτυχίας του CAPM να ερμηνεύσει πλήρως την παρατηρούμενη επιδότηση κινδύνου, σύμφωνα με τον Roll (1977), είναι ότι κάθε εμπειρική συνδιακύμανση υπολογίζεται από μία ατελή αγορά περιουσιακών στοιχείων. Μια τέτοια παραδοχή όμως μετατρέπει το CAPM σε ένα υπόδειγμα που δεν μπορεί να ελεγχθεί. Εναλλακτικές εξηγήσεις της αποτυχίας αυτής προτείνουν την αντικατάσταση του CAPM από άλλα υποδείγματα όπως την «θεωρία αποτίμησης μέσω του αρμπιτράζ» (Arbitrage Pricing Theory ή APT) και το CCAPM, το οποίο αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Μέσα από τη σύντομη ανάπτυξη της εναλλακτικής μορφής του CAPM που θα παρουσιασθεί στις επόμενες παραγράφους αλλά και στο εμπειρικό υπόδειγμα το οποίο εκτιμάται στο τέταρτο κεφάλαιο, υποστηρίζεται ότι οι επενδυτές αν έχουν κοινές προσδοκίες για τις ροπές των μελλοντικών αποδόσεων, αυτές είναι δεσμευμένες προσδοκίες, και επομένως, τυχαίες μεταβλητές και όχι σταθερές¹.

Ορίζουμε ως y_t το διάνυσμα των (πραγματικών) υπερβάλλουσων αποδόσεων όλων των περιουσιακών στοιχείων της αγοράς. Οι υπερβάλλουσες αποδόσεις ορίζονται ως η διαφορά της ονομαστικής απόδοσης των στοιχείων με κίνδυνο και της ονομαστικής απόδοσης του στοιχείου χωρίς κίνδυνο, κατά τη διάρκεια της περιόδου t . Επίσης, θέτουμε μ_t και H_t να είναι, αντίστοιχα, το διάνυσμα του δεσμευμένου μέσου και η μήτρα της δεσμευμένης συνδιακύμανσης των αποδόσεων, με δεδομένη την πληροφόρηση την περίοδο $t - 1$. Με ω_{t-1} συμβολίζεται το διάνυσμα των μεριδίων κάθε στοιχείου στο χαρτοφυλάκιο στο τέλος της προηγούμενης περιόδου και συνεπώς, η υπερβάλλουσα απόδοση της αγοράς είναι $y_{M(t)} = y_t \omega_{t-1}$. Το διάνυσμα των συνδιακυμάνσεων της αγοράς είναι απλά $H_t \omega_{t-1}$ και σύμφωνα με το CAPM ισχύει η εξίσωση:

¹ Για περαιτέρω διερεύνηση στο θέμα αυτό βλέπε Ferson (1985), Rothschild (1985) και Ferson, Kandel και Stambaugh (1986).



$$\mu_t = \delta H_t \omega_{t-1} \quad (1.5.1)$$

Σε αυτή την υποδειγματοποίηση, όπως προήλθε από τον Jensen (1972), το δ είναι ένας συντελεστής που δείχνει την αγοράία τιμή του κινδύνου (market price of risk) ή εναλλακτικά, εκφράζει ένα συνολικό μέτρο της σχετικής αποστροφής από τον κίνδυνο (aggregate measure of relative risk aversion) στην ισορροπία. Στην εργασία αυτή θα υποθέσουμε ότι το δ είναι διαχρονικά σταθερό.

Η δεσμευμένη διακύμανση της υπερβάλλουσας απόδοσης της αγοράς ισούται με $\sigma_{M(t)}^2 = \omega_{t-1} H_t \omega_{t-1}$ και ο δεσμευμένος μέσος με $\mu_{M(t)} = \omega_{t-1}' \mu_t$, όπου με βάση την (1.5.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$\mu_{M(t)} = \delta \sigma_{M(t)}^2 \quad (1.5.2)$$

Έτσι, γίνεται πλέον φανερό πως το δ δείχνει την υποκατάσταση μεταξύ μέσου και διακύμανσης ή εναλλακτικά, απόδοσης και κινδύνου. Αν ορίσουμε τον συντελεστή β ενός στοιχείου ως το λόγο της συνδιακύμανσής του με την αγορά προς την διακύμανση του χαρτοφυλακίου της αγοράς, $\beta_t = H_t \omega_{t-1} / \sigma_{M(t)}^2$, και την αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (1.5.1) και (1.5.2), τότε προκύπτει η γνωστή σχέση:

$$\mu_t = \beta_t \mu_{M(t)} \quad (1.5.3)$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η μήτρα συνδιακύμανσης των αποδόσεων μεταβάλλεται διαχρονικά, έπεται ότι οι μέσες αποδόσεις και οι συντελεστές β θα είναι επίσης, διαχρονικά μεταβαλλόμενοι.

Μέχρι αυτό το σημείο παραθέσαμε το CAPM σε όρους δεσμευμένων ροπών, από τη στιγμή που αυτές αντανακλούν τη διαθέσιμη πληροφόρηση κατά τη χρονική στιγμή που λαμβάνονται οι αποφάσεις για τη διάρθρωση του χαρτοφυλακίου. Αλλά το υπόδειγμα αυτό ορίζει και μια σχέση μεταξύ των μη-δεσμευμένων ροπών. Στην ειδική περίπτωση όπου τα μερίδια των στοιχείων είναι σταθερά, οι μη-δεσμευμένοι μέσοι είναι σταθεροί και ίσοι με:

$$E(y_t) = \delta V(y_t) - \delta^3 V(H_t, \omega) \omega$$

Μόνο αν $V(H_t, \omega) = 0$ οι μη-δεσμευμένες ροπές ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις του CAPM που ικανοποιούν και δεσμευμένες ροπές.

Στην παρούσα μελέτη επιτρέπουμε στη μήτρα δεσμευμένης συνδιακύμανσης ενός συνόλου αποδόσεων να μεταβάλλεται διαχρονικά, ακολουθώντας ένα υπόδειγμα γενικευμένης αυτοπαλινδρομικής δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity* ή *GARCH*). Τα υποδείγματα αυτής της μορφής έχουν εισαχθεί από τον Bollerslev (1986) και βασικά υποθέτουν ότι οι επενδυτές χρησιμοποιούν στις αποφάσεις τους τις καινούργιες «εκπλήξεις», οι οποίες αποκαλύπτονται διαμέσου των αποδόσεων της προηγούμενης περιόδου. Επομένως, οι επενδυτές μαθαίνουν για τις αλλαγές στην μήτρα διακύμανσης μόνο από την πληροφόρηση που παρέχουν οι αποδόσεις. Βέβαια, είναι φυσικό ότι πρόσθετη πληροφόρηση, σχετική με τις προσδοκίες των επενδυτών, να προκαλέσει πρόβλημα εξειδίκευσης.

Η προσέγγιση που παραθέσαμε μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πολυπαραμετρική γενίκευση της έρευνας των Engle, Lilien και Robins (1987), στην οποία χρησιμοποιείται μόνο ένα περιουσιακό στοιχείο και κατά συνέπεια η διαχρονικά μεταβαλλόμενη επιδότηση για τον κίνδυνο εκτιμάται ως συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης του μοναδικού αυτού στοιχείου. Από μια διαφορετική οπτική γωνία, η συγκεκριμένη μορφή υποδειματοποίησης μπορεί να εκληφθεί ως μια στατιστική εφαρμογή του διαχρονικού CAPM του Bodie et al.(1983, 1984), στο οποίο δεν υπήρχαν άγνωστες παράμετροι και στατιστικοί έλεγχοι για την ερμηνευτική αξία του υποδείγματος. Επιπλέον, η ανάλυση της θεωρίας και η εμπειρική εφαρμογή που πραγματοποιείται σε αυτήν την εργασία, προσπαθεί να προχωρήσει ένα βήμα πιο μπροστά από τον Frankel (1985), ο οποίος υποθέτει ότι τα ω_t μπορεί να είναι διαχρονικά μεταβαλλόμενα αλλά όχι και η μήτρα H_t .

Μετά την ανάλυση του θεωρητικού υπόβαθρου πάνω στο οποίο θα βασισθούν οι εμπειρικές εκτιμήσεις στο τέταρτο κεφάλαιο, είναι χρήσιμο να προσεγγίσουμε από πιο κοντά τα οικονομετρικά υποδείγματα που χρησιμοποιούνται για να ενσωματώσουν τις αλλαγές στην χρηματοοικονομική θεωρία, αλλά και τα βασικά χαρακτηριστικά που παρατηρούνται στις χρονολογικές σειρές. Έτσι, λοιπόν, στο



κεφάλαιο που ακολουθεί γίνεται μια ανασκόπηση των κυριότερων εναλλακτικών μορφών των υποδειγμάτων ARCH.

Επιμαίς Μορφές Υποδειγμάτων ARCH

Επιμαίς Μορφές

Η βασική μορφή του υποδείγματος ARCH είναι η ακόλουθη:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2$$

όπου $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \dots, p$ και $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$.

Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH. Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH. Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH.

Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH. Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH. Η μορφή αυτή είναι η πιο απλή μορφή του υποδείγματος ARCH.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές Μορφές Υποδειγμάτων ARCH

2.1 Εισαγωγή

Οι ρίζες της μεθοδολογίας των υποδειγμάτων αυτοπαλινδρομικής δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity ή ARCH) αναζητούνται στις αρχές του αιώνα μας στα συγγράμματα του Bachelier (1900), ο οποίος πρώτος έγραψε για τη συμπεριφορά των κερδοσκοπικών τιμών. Μετά από ένα μεγάλο χρονικό κενό ο Mandelbrot (1963a,b,1967) αναμόχλευσε το ενδιαφέρον για τις ιδιότητες των χρονολογικών σειρών των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και διαπίστωσε ότι:

- ◆ Οι μη δεσμευμένες κατανομές έχουν παχιές ουρές (thick tails).
- ◆ Οι διακυμάνσεις μεταβάλλονται διαχρονικά.
- ◆ Οι μεγάλες (μικρές) μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες (μικρές) μεταβολές (μικρές ή μεγάλες).

Οι διαπιστώσεις αυτές αποτελούν τα βασικά χαρακτηριστικά (stylized facts) για πολλές οικονομικές μεταβλητές.

Η αφετηρία μιας συστηματικής προσπάθειας να δημιουργηθούν οικονομετρικά υποδείγματα συμβατά με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, έγινε με το θεμελιακό άρθρο του Robert Engle (1982). Σε αντίθεση με το γεγονός της σύντομης ιστορίας τους, τα υποδείγματα ARCH έχουν καταφέρει να προσελκύσουν το έντονο ενδιαφέρον της διεθνούς βιβλιογραφίας. Οι πολυάριθμες εφαρμογές τους προέρχονται, στο μεγαλύτερο μέρος, από εμπειρική παρατήρηση και όχι από θεωρητική τεκμηρίωση.

Πριν την εισαγωγή των ARCH, οι ερευνητές είχαν συνειδητοποιήσει τις μεταβολές της διακύμανσης, αλλά χρησιμοποιούσαν μη-συστηματικές μεθόδους για να «πιάσουν» αυτό το χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, ο Mandelbrot (1963a)



χρησιμοποίησε τη μέθοδο των διαδοχικών εκτιμητών (recursive estimates) της διακύμανσης και ο Klein (1977) υπολόγισε τους κινητούς μέσους εκτιμητές της διακύμανσης. Το υπόδειγμα του Engle (1982) ήταν, τελικά, αυτό που κατάφερε να ανταποκριθεί στα κυριότερα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Εκτός όμως από το γεγονός ότι τα υποδείγματα ARCH εξηγούν τα παρατηρούμενα χαρακτηριστικά, βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές στο πεδίο της οικονομικής επιστήμης. Οι πιο σημαντικές από αυτές ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες, οι οποίες περιλαμβάνουν τις εξής εφαρμογές:

A) Αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων (asset pricing)

1. Έλεγχος των CCAPM, ICAPM και APT.
2. Έλεγχοι μεταβλητότητας και αποτελεσματικότητας της αγοράς (EMH tests).
3. Εκτίμηση διαχρονικά μεταβαλλόμενου συστηματικού κινδύνου.
4. Μέτρηση διαχρονικής κατανομής των επιτοκίων.
5. Δημιουργία βέλτιστων δυναμικών πολιτικών κάλυψης έναντι του κινδύνου. (optimal dynamic hedging strategies).
6. Εξέταση του τρόπου με τον οποίο διαχέεται η πληροφόρηση ανάμεσα στις αγορές, στις χώρες και στα περιουσιακά στοιχεία.
7. Αποτίμηση χρηματιστηριακών παραγώγων (derivatives).
8. Υποδειματοποίηση της επιδότησης κινδύνου (risk premium).

B) Μακροοικονομική θεωρία

1. Σύσταση χαρτοφυλακίων με έλλειμμα (αναπτυσσόμενες χώρες).
2. Μέτρηση αβεβαιότητας που προέρχεται από τον πληθωρισμό.
3. Εξέταση διασυνδέσεων μεταξύ συναλλαγματικής αβεβαιότητας και εμπορίου.
4. Μελέτη των επιδράσεων της πολιτικής της Κεντρικής Τράπεζας.
5. Μελέτη της αλληλεπίδρασης της μακροοικονομίας και της κεφαλαιαγοράς.

Στην επόμενη ενότητα αναλύονται οι βασικές εναλλακτικές μορφές των υποδειγμάτων ARCH. Επειδή τα υποδείγματα αυτά περιγράφουν ποικίλα βασικά χαρακτηριστικά επιδέχονται διαφορετικές ερμηνείες, οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 2.3. Έχει διαπιστωθεί ότι τα βασικά υποδείγματα ARCH δεν εξηγούν σημαντικά χαρακτηριστικά των χρονολογικών σειρών, όπως για παράδειγμα το



«αποτέλεσμα μόχλευσης» (leverage effect), την υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis) και τον υψηλό βαθμό μη-γραμμικότητας. Ως συνέπεια αυτού δημιουργήθηκαν γενικεύσεις και επεκτάσεις του βασικού ARCH, οι οποίες εξετάζονται στην ενότητα 2.4. Οι προβλέψεις με υποδείγματα ARCH είναι στην ενότητα 2.5. Στις ενότητες 2.6 και 2.7 αναλύονται περαιτέρω γενικεύσεις, όπως τα πολυπαραμετρικά ARCH και τα ARCH στο μέσο (ARCH in-the-mean ή ARCH-M). Η εκτίμηση και ο έλεγχος των ARCH εξετάζονται στις ενότητες 2.8 και 2.9, αντίστοιχα. Στην τελευταία ενότητα συγκεντρώνουμε τα βασικά σημεία και τις βασικές διαπιστώσεις, ενώ παρατίθεται και πρόσθετος πίνακας με τις συντομογραφίες των διαφόρων υποδειγμάτων.

2.2 Η Έννοια της Αυτοπαλινδρομικής Δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε το αρχικό υπόδειγμα ARCH του Engle (1982) και αναλύουμε την ακολουθία και τις ιδιότητές της, με έμφαση σε αυτές που κάνουν τα ARCH ελκυστικά στην υποδειματοποίηση της μεταβλητότητας των οικονομικών χρονολογικών σειρών. Στη συνέχεια, εξετάζουμε το γενικευμένο ARCH (Generalized ARCH ή GARCH) του Bollerslev (1986), με το οποίο επιτυγχάνεται μια πιο συνοπτική παραμετροποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης. Τέλος, περιγράφονται οι μη-δεσμευμένες ροπές των υποδειγμάτων τέτοιας μορφής.

2.2.1 Ορισμός της διαδικασίας ARCH

Μια διαδικασία ARCH μπορεί να ορισθεί με διάφορους τρόπους. Στη συγκεκριμένη ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε τους όρους της κατανομής καταλοίπων από μια δυναμική παλινδρόμηση:

$$y_t = x_t' \xi + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2.1)$$

όπου: y_t εξαρτημένη μεταβλητή

x_t $k \times 1$ διάνυσμα εξωγενών μεταβλητών



ζ $\kappa \times 1$ διάνυσμα συντελεστών παλινδρόμησης

Η κατανομή του στοχαστικού σφάλματος αποτελεί τη βάση ενός ARCH υποδείγματος. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Engle (1982), υποθέτουμε για το σφάλμα ε_t ότι είναι δεσμευμένο στις πραγματοποιημένες τιμές ενός συνόλου μεταβλητών $\Psi_{t-1} = \{y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, x_{t-2}, \dots\}$ και ακολουθεί την εξής κατανομή:

$$\varepsilon_t / \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.2.2)$$

όπου:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (2.2.3)$$

με $\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0 \quad i = 1, \dots, q$

έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι η δεσμευμένη διακύμανση θα είναι πάντα μη-αρνητική. Το ξεχωριστό χαρακτηριστικό των σχέσεων (2.2.2) και (2.2.3) δεν είναι μόνο το γεγονός ότι η δεσμευμένη διακύμανση (h_t) είναι συνάρτηση του συνόλου Ψ_{t-1} , αλλά περισσότερο η συναρτησιακή μορφή μέσα από την οποία ορίζεται.

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (2.2.1), μια μεγάλη διαταραχή αποτυπώνεται με μια μεγάλη απόκλιση του y_t από το δεσμευμένο μέσο x_t ή ισοδύναμα, με μια μεγάλη τιμή -θετική ή αρνητική- του ε_t . Στο υπόδειγμα ARCH, η διακύμανση του τρέχοντος σφάλματος (ε_t) -δεσμευμένη στις πραγματοποιημένες τιμές των σφαλμάτων με χρονική υστέρηση ε_{t-i} , ($i = 1, \dots, q$)- είναι μια αύξουσα συνάρτηση των σφαλμάτων με υστέρηση, άσχετα αν είναι θετικά ή αρνητικά. Επομένως, μεγάλα (μικρά) σφάλματα τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλα (μικρά) σφάλματα (θετικά ή αρνητικά). Η τάξη της χρονικής υστέρησης, q , καθορίζει το μήκος του χρόνου στο οποίο η διαταραχή (shock) επιδρά, δεσμευμένη στην διακύμανση των διαδοχικών σφαλμάτων. Όσο μεγαλύτερο είναι το q , τόσο μακρύτερο θα είναι το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα εκτείνονται οι επιδράσεις μιας διαταραχής.

Η παραπάνω γραμμική συνάρτηση των τετραγωνικών σφαλμάτων με χρονική υστέρηση (2.2.3), αποτελεί την πιο απλή μορφή που μπορεί να πάρει η δεσμευμένη συνάρτηση διακύμανσης και να επιφέρει συγκέντρωση (clustering) μεγάλων αποκλίσεων. Κάθε μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση των απόλυτων τιμών των

σφαλμάτων με χρονική υστέρηση, θα οδηγήσει σε τέτοιου είδους συγκέντρωση. Παρ' όλα αυτά, από τη στιγμή που η διακύμανση αναμένεται ως τετραγωνική απόκλιση, ο γραμμικός συνδυασμός των τετραγωνικών σφαλμάτων με χρονική υστέρηση αποτελεί ένα φυσικό μέτρο της τρέχουσας τάσης στην διακύμανση, το οποίο εξηγεί τη δεσμευμένη διακύμανση. Άλλες εναλλακτικές μορφές της συνάρτησης δεσμευμένης διακύμανσης θα εξετασθούν αναλυτικά στην 2.4.1.

2.2.2 Γενικευμένη αυτοπαλινδρομική δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

Στην πρώτη εμπειρική εφαρμογή του ARCH η οποία εξέταζε την σχέση του επιπέδου και της μεταβλητότητας του πληθωρισμού, ο Engle (1982,1983) βρήκε ένα μεγάλο q στην συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται την εκτίμηση μεγάλου αριθμού παραμέτρων υπό ανισοτικούς περιορισμούς. Για την επίλυση του προαναφερόμενου προβλήματος ο Bollerslev (1986) και ο Taylor (1986), παράλληλα και ανεξάρτητα, πρότειναν την επέκταση της σχέσης (2.2.3), την οποία ονόμασαν γενικευμένο ARCH (Generalized ARCH ή GARCH). Η επέκταση αποδεικνύεται πολύ πρακτική στις εφαρμογές των υποδειγμάτων, διότι σπάνια χρειάζεται να εξειδικεύσουμε υπόδειγμα μεγαλύτερο από αυτό με μια χρονική υστέρηση. Ειδικότερα, προτείνουν ότι η δεσμευμένη διακύμανση πρέπει να εξειδικευθεί ως εξής:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p} \quad (2.2.4)$$

με $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$ $i = 1, \dots, q$ και $\beta_i > 0$ $i = 1, \dots, p$

έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι η δεσμευμένη διακύμανση θα είναι πάντα μη-αρνητική. Οι Nelson και Cao (1992) έχουν αποδείξει ότι οι συντελεστές είναι αυστηρά θετικοί με την επιβολή και πιο ασθενών ικανών συνθηκών. Το υπόδειγμα (2.2.4) είναι ένα γενικευμένο ARCH (GARCH) της τάξης p και q , συμβολίζεται ως GARCH (p, q) και γράφεται με πιο συνοπτικό τρόπο ως:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) h_t$$



όπου: $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$

$$\beta(B) = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p$$

είναι πολυώνυμα στον τελεστή υστέρησης (backshift operator) B . Αν οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - \beta(B)$ είναι έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, η σχέση (2.2.4) ξαναγράφεται:

$$h_t = \alpha_0 / [1 - \beta(1)] + \alpha(B) / [1 - \beta(B)] \varepsilon_t^2 = \alpha^*_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.2.5)$$

όπου $\alpha^*_0 = \alpha_0 / [1 - \beta(1)]$

δ_i συντελεστής του B^i στο ανάπτυγμα του $\alpha(B) / [1 - \beta(B)]$

Επομένως, η εξίσωση (2.2.5) δείχνει ότι μια διαδικασία GARCH (p, q) μπορεί να γραφεί ως μια ARCH (∞), αν επιβάλλουμε μια μορφή ορθολογικών υστερήσεων (rational lag) στους συντελεστές. Η γενίκευση του ARCH σε GARCH είναι παρόμοια με αυτή του MA σε ARMA. Ο απώτερος στόχος είναι να παρουσιάσουμε πιο συνοπτικά ένα ARCH μεγάλης τάξης.

2.2.3 Οι μη-δεσμευμένες ροπές των ARCH

Οι ιδιότητες των υποδειγμάτων ARCH που περιγράψαμε παραπάνω συνάγονται από την μελέτη των μη-δεσμευμένων ροπών τους. Ο Engle (1982) ανέλυσε τις σημαντικότερες ροπές και διατύπωσε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξή τους. Ο Milhoj (1985) εξέτασε πρόσθετες ροπές και ο Bollerslev (1986) επέκτεινε αυτά τα αποτελέσματα για τα μοντέλα GARCH. Η εξαγωγή των μη-δεσμευμένων ροπών του ARCH είναι δυνατή με την εκτεταμένη χρήση του παρακάτω νόμου:



Law of Iterated Expectations (L.I.E)

Αν $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ δύο σύνολα τυχαίων μεταβλητών και y (scalar) μια τυχαία μεταβλητή τότε:

$$E(y / \Omega_1) = E \{ E(y / \Omega_2) / \Omega_1 \}$$

Σε αυτή την εργασία τα Ω_1 και Ω_2 είναι σύνολα πληροφοριών, διαθέσιμων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μια ειδική περίπτωση του L.I.E προκύπτει αν θέσουμε $\Omega_1 = \emptyset$ (κενό σύνολο) και η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$E(y) = E \{ E(y / \Omega_2) \}$$

Η έκφραση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί συνδέει μια μη-δεσμευμένη ροπή με μια δεσμευμένη και από την στιγμή που τα ARCH είναι εξειδικευμένα σε όρους δεσμευμένων ροπών, μας προσφέρει τον τρόπο να εξάγουμε τις μη-δεσμευμένες ροπές.

Αρχικά, ας εξετάσουμε τον **μη-δεσμευμένο μέσο** ενός GARCH (p, q) σφάλματος ε_t , με δεσμευμένη διακύμανση την (2.2.4). Αν εφαρμόσουμε τον L.I.E :

$E(\varepsilon_t) = E\{E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\}$ και επειδή το υπόδειγμα προβλέπει $E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = 0$ για όλες τις πραγματοποιημένες τιμές του Ψ_{t-1} , αμέσως συνεπάγεται ότι:

$$E(\varepsilon_t) = E\{E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\} = 0$$

δηλαδή η διαδικασία GARCH έχει μηδενικό μέσο.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την **μη-δεσμευμένη διακύμανση** ενός GARCH (p, q) σφάλματος. Για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε ένα GARCH (1,1), σημειώνοντας πως τα αποτελέσματα ισχύουν και γενικά. Θέτοντας στην σχέση (2.2.4) $p=q=1$ και εφαρμόζοντας τον L.I.E θα έχουμε:



$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_t^2) &= E\{E(\varepsilon_t^2 / \Psi_{t-1})\} \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1 E(h_{t-1}) \\
&= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)E(\varepsilon_{t-1}^2)
\end{aligned}$$

η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση διαφορών στην ακολουθία των διακυμάνσεων. Υποθέτοντας ότι η διαδικασία ξεκίνησε απείρως πίσω στο παρελθόν με μια πεπερασμένη αρχική διακύμανση, η ακολουθία των διακυμάνσεων συγκλίνει στη σταθερά:

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1) \quad \text{αν } \alpha_1 + \beta_1 < 1$$

Αντίστοιχα, για το GARCH (p, q) ο Bollerslev (1986) έδωσε την παρακάτω ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της σειράς:

$$\alpha(1) + \beta(1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η διακύμανση ισούται με :

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 / (1 - \alpha(1) - \beta(1))$$

Ενώ η διακύμανση του σφάλματος (ε_t) δεσμευμένου στο Ψ_{t-1} αλλάζει καθώς μεταβάλλονται τα στοιχεία του συνόλου πληροφοριών, η μη-δεσμευμένη διακύμανσή του είναι ομοσκεδαστική. Μια από τις συνεισφορές της μεθοδολογίας ARCH συνίσταται στο αποτέλεσμα ότι οι αλλαγές στη μεταβλητότητα των οικονομικών χρονολογικών σειρών μπορεί να προκύπτουν από ένα συγκεκριμένο τύπο μη-γραμμικότητας παρά από μια εξωγενή δομική αλλαγή στη διακύμανση, οπότε είναι δυνατή και η πρόβλεψή τους.

Η φύση της μη-δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας μιας διαδικασίας ARCH αναλύεται από ροπές ανώτερης τάξης. Συγκεκριμένα, η τέταρτη ροπή για το ARCH

που περιγράφεται στη σχέση (2.2.1) μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει {αν ισχύει ότι $3\alpha^2_1 < 1$ }:

$$E(\varepsilon^4) / \sigma^4_\varepsilon = 3 \{(1 - \alpha^2_1) / (1 - 3\alpha^2_1)\} > 3$$

το οποίο συνεπάγεται ότι έχει πιο χοντρές ουρές από την κανονική κατανομή. Αυτή η ιδιότητα κάνει ελκυστικά τα ARCH, διότι συναντάται συνήθως στην κατανομή πιθανοτήτων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων (Pagan, 1996).

Παραπάνω εξετάσαμε τη μονομεταβλητή κατανομή ενός απλού σφάλματος (ε_t). Οι ροπές της συνδυασμένης κατανομής (joint distribution) των ε_t μας αποκαλύπτουν και άλλες χρήσιμες ιδιότητες των ARCH. Για $k \geq 1$ οι *αυτοσυνδιακυμάνσεις* (autocovariances) ενός GARCH (p, q) είναι:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = E\{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} / \Psi_{t-1})\} = E\{\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\} = 0$$

Επομένως, η διαδικασία GARCH είναι μη-αυτοσυσχετιζόμενη (serially uncorellated) με σταθερό μέσο μηδέν και ασθενώς στάσιμη (weakly stationary), αν υπάρχει η διακύμανση. Μια επίσης αξιοσημείωτη ιδιότητα την οποία ανέδειξε ο Nelson (1990a) για το GARCH (1, 1) είναι ότι μπορεί να χαρακτηρίζεται από ισχυρή στασιμότητα (strong stationarity) χωρίς να είναι ασθενώς στάσιμο. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της ασθενούς στασιμότητας, η οποία απαιτεί το μέσο, τη διακύμανση και τις αυτοσυνδιακυμάνσεις να είναι πεπερασμένες και ανεξάρτητες από το χρόνο. Αντίθετα, η ισχυρή στασιμότητα προϋποθέτει ότι η συνάρτηση κατανομής κάθε πεπερασμένου συνόλου των ε_t να είναι αμετάβλητη κάτω από χρονικές μεταβολές, χωρίς να απαιτούνται πεπερασμένες ροπές.

Η έλλειψη αυτοσυσχέτισης είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ARCH, το οποίο τα κάνει κατάλληλα για την υποδειγματοποίηση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς (Efficient Market Hypothesis ή E.M.H), στην ασθενή μορφή της, απαιτεί ότι οι παρελθόντες ρυθμοί απόδοσης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουμε τις προβλέψεις των μελλοντικών ρυθμών αποδόσεων.



Στη σχέση (2.2.1) υποθέτουμε ότι y_t είναι ο ρυθμός απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου και $\xi = 0$, έτσι ώστε να μην υπάρχει όρος παλινδρόμησης στο υπόδειγμα. Συνεπώς, το y_t είναι ίσο με το ε_t , δηλαδή είναι μια «καθαρή» διαδικασία GARCH. Η άριστη πρόβλεψη της απόδοσης y_t ισούται με την προσδοκία της απόδοσης, δεσμευμένης σε κάθε διαθέσιμη πληροφορία. Αλλά επειδή το GARCH ορίζει $E(y_t) = E\{E(y_t / \Psi_{t-1})\} = 0$, οι παρελθούσες παρατηρήσεις του y_t που περιλαμβάνονται στο Ψ_{t-1} δεν επηρεάζουν την άριστη πρόβλεψη του ρυθμού απόδοσης. Άρα η παρουσία του ARCH δεν σημαίνει απαραίτητα την παραβίαση της υπόθεσης της αποτελεσματικότητας της αγοράς. Βέβαια, η έλλειψη αυτοσυσχέτισης δεν συνεπάγεται ανεξαρτησία των ε_t .

Το θέμα της εξειδίκευσης της τάξης των χρονικών υστερήσεων (p, q) , αντιμετωπίζεται με ανάλογο τρόπο όπως και στη μεθοδολογία των Box - Jenkins, δηλαδή χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των καταλοίπων, αντί του επιπέδου των καταλοίπων. Στην πράξη, πολύ σπάνια συναντάμε την ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερης τάξης από GARCH (2, 1) και GARCH (1, 2), ενώ στη συντριπτική πλειοψηφία οι ερευνητές περιγράφουν τα δεδομένα με GARCH (1, 1).

2.3 Ερμηνείες των ARCH

Εκτός από την απλότητα, ο κύριος λόγος επιτυχίας των ARCH έγκειται στο ότι ερμηνεύουν πολλές παρατηρούμενες ιδιότητες των δεδομένων όπως οι παχιές ουρές της κατανομής, η συγκέντρωση μεγάλων και μικρών αποκλίσεων, οι μη-γραμμικότητες και οι αλλαγές στη δυνατότητα να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές. Επομένως, δεν είναι παράξενο ότι αυτά τα υποδείγματα επιδέχονται πολλές ερμηνείες, τις βασικότερες από τις οποίες εξετάζουμε στην ενότητα αυτή.

2.3.1 Ερμηνεία του τυχαίου συντελεστή (Random Coefficient)

Στην τελευταία ενότητα τονίσαμε ότι τα ARCH λαμβάνουν υπ' όψη τους τη συγκέντρωση μεγάλων και μικρών σφαλμάτων, και την υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis), όπως παρατηρούνται σε πολλές χρονολογικές σειρές. Ένα από τα



σημαντικότερα μελήματα του Engle όταν εισήγαγε την εν λόγω μεθοδολογία, ήταν η δυνατότητα των οικονομετρών να προβλέψουν τις μελλοντικές μεταβλητότητες από την μια περίοδο στην άλλη. Οι προβλέψεις συνήθως απαιτούν την χρήση ενός υποδείγματος δεσμευμένου μέσου. Η αβεβαιότητα σχετικά με το δεσμευμένο μέσο μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή τυχαίου συντελεστή.

Έστω μια διαδικασία AR (1) με τυχαίο αυτοπαλινδρομικό συντελεστή (φ_t):

$$y_t = \varphi_t y_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου $\varphi_t \sim (\varphi, a_1)$ και $\varepsilon_t \sim (0, a_0)$ είναι ανεξάρτητα. Έτσι, $E(y_t / \Psi_{t-1}) = \varphi y_{t-1}$ όπως και στην AR (1) με σταθερό συντελεστή. Αντίθετα όμως η $Var(y_t / \Psi_{t-1}) = a_0 + a_1 y_{t-1}^2$ έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (2.2.3). Με βάση το οικονομετρικό αυτό πλαίσιο για να φτάσουμε σε ένα γενικό ARCH μέσα από την έννοια του τυχαίου συντελεστή, πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^q \varphi_{i,t} \varepsilon_{t-i} + u_t = \sum_{i=1}^q (\varphi_i + \eta_{i,t}) \varepsilon_{t-i} + u_t \quad (2.3.1)$$

όπου $\eta_t = (\eta_{1,t}, \dots, \eta_{q,t})' \sim (0, A_{q \times q})$ και $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ είναι ανεξάρτητα. Άρα η (2.3.1) συνεπάγεται ότι:

$$E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \Phi' \varepsilon_{t-1}$$

όπου $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_q)$ και $\varepsilon_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})'$

$$Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \varepsilon_{t-1}' A \varepsilon_{t-1} + \sigma_u^2 \quad (2.3.2)$$

Αν $A = [(a_{ij})]$ είναι μια διαγώνια μήτρα με $A = diag(a_1, \dots, a_q)$ και $\sigma_u^2 = a_0$ τότε:

$$Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

όπως και στην (2.2.3). Μια μη-διαγώνια μήτρα A σημαίνει ότι έχουμε μια διαδικασία ARCH με πρόσθετους όρους εκτός κυρίας διαγωνίου (cross products terms) μεταξύ των παρελθόντων σφαλμάτων. Το βαθύτερο νόημα της προηγούμενης διαπίστωσης είναι ότι λαμβάνεται υπ' όψη η αλληλεπίδραση μεταξύ των καταλοίπων και της δεσμευμένης διακύμανσης. Το υπόδειγμα (2.3.2) αναλύεται από τους Bera, Higgins και Lee (1992), οι οποίοι το ονόμασαν προσαυξημένο ARCH (Augmented ARCH ή AARCH). Αν προσθέσουμε επιπλέον και γραμμικούς όρους ε_{t-1} στην σχέση (2.3.2), θα προκύψει το τετραγωνικό ARCH (Quadratic ARCH ή QARCH) του Sentana (1991). Οι Bera, Higgins και Lee (1990) επέκτειναν το θεωρητικό πλαίσιο που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.2.1) και (2.3.1) και στο πλαίσιο των GARCH. Είναι φανερό ότι αντίθετα με το ARCH, το AARCH δεν είναι συμμετρικό, με την έννοια ότι η δεσμευμένη διακύμανση εξαρτάται από το πρόσημο των υστερήσεων του σφάλματος ε_t (lagged error).

2.3.2 Ερμηνεία του μη-γραμμικού υποδείγματος

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά των υποδειγμάτων ARCH, είναι αυτό που αφορά τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των τιμών του ε_t , δηλαδή ότι:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-j}^2) \neq 0 \quad \text{και} \quad \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad j \neq 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν ότι οι τιμές των ε_t δεν συσχετίζονται γραμμικά. Αντίθετα, συσχετίζονται τα τετράγωνα των τιμών τους, δηλαδή ορίζεται μια μη γραμμική σχέση μεταξύ των σφαλμάτων. Στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται διάφορες μορφές μοντέλων μη-γραμμικών χρονολογικών σειρών (non-linear time series models), όπως τα διγραμμικά (bilinear), τα threshold autoregressive, τα εκθετικά αυτοπαλινδρομικά (exponential autoregressive) και τα μη-γραμμικά κινητού μέσου όρου (non-linear moving average), τα οποία χαρακτηρίζονται από την παραπάνω ιδιότητα (βλέπε Tong, 1990). Για απλούστευση, θα εξετάσουμε τη σχέση του δι-γραμμικού και του ARCH υποδείγματος. Μια χρονολογική σειρά $\{\varepsilon_t\}$ λέμε ότι ακολουθεί ένα διγραμμικό υπόδειγμα αν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:



$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^q \varphi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \beta_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k} + u_t \quad (2.3.3)$$

όπου u_t είναι μια ακολουθία από *i.i.d* $(0, \sigma_u^2)$ τυχαίες μεταβλητές. Οι δύο πρώτες δεσμευμένες ροπές της είναι:

$$E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \sum_{i=1}^q \varphi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \beta_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k}$$

$$Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \sigma_u^2$$

Οι δεσμευμένες αυτές ροπές έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες των ARCH, όπου ο μέσος είναι, εν γένει, μια σταθερά και η διακύμανση μεταβάλλεται διαχρονικά. Από την άλλη πλευρά, οι μη δεσμευμένες ροπές μπορεί να είναι πανομοιότυπες. Για παράδειγμα, ένα διγραμμικό υπόδειγμα:

$$\varepsilon_t = b_{21} \varepsilon_{t-2} u_{t-1} + u_t$$

έχει:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-2}^2) = b_{21} \sigma_u^2$$

και επειδή η διαδικασία αυτή είναι αυτοσυσχετιζόμενη στα τετράγωνα, θα χαρακτηρίζεται από προσωρινή συγκέντρωση (clustering) και από μεγάλες αποκλίσεις, όπως ένα υπόδειγμα ARCH. Πράγματι, ένα διγραμμικό υπόδειγμα είναι αρκετά όμοιο με ένα ARCH και μπορεί να παρασταθεί σαν υπόδειγμα AR τυχαίου συντελεστή. Η σχέση (2.3.3) μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^m [\varphi_j + A_j] \varepsilon_{t-j} + u_t = \sum_{j=1}^m \varphi_{jt} \varepsilon_{t-j} + u_t \quad (2.3.4)$$

όπου $m = \max(p, r)$, $A_j = b_{jk} u_{t-k}$ με $\varphi_i = 0$, $i \geq p+1$, $b_{jk} = 0$, $j \geq r+1$



Η βασική διαφορά του υποδείγματος (2.3.4) από το (2.3.1) είναι ότι στο δεύτερο οι συντελεστές είναι τυχαίοι, ενώ στο αμέσως παραπάνω υπόδειγμα το μέρος των μεταβλητών συντελεστών $[A_j(t)]$ εξαρτάται από τις προηγούμενες διαταραχές, u_t . Μελετώντας τις ομοιότητες και τις διαφορές των διγραμμικών και των ARCH υποδειγμάτων, συμπεραίνουμε ότι παρ' ότι και τα δύο λαμβάνουν υπ' όψη τη μη-γραμμική εξάρτηση, στα ARCH αυτό γίνεται σε πολλαπλασιαστική μορφή:

$$\varepsilon_t = u_t f_1(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = u_t f_{1t} \quad (2.3.5)$$

ενώ στα διγραμμικά σε αθροιστική μορφή:

$$\varepsilon_t = f_2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) + u_t = u_t + f_{2t} \quad (2.3.6)$$

όπου $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ είναι δύο καλά ορισμένες συναρτήσεις. Οι Higgins και Bera (1991) προτείνουν μια διαδικασία τύπου Cox για να ελέγξουν την ύπαρξη του ενός ή του άλλου υποδείγματος.

Από την πρακτική πλευρά, οι δύο τύποι υποδειγμάτων έχουν διαφορετικές συνέπειες. Με τη χρήση ενός διγραμμικού υποδείγματος είναι δυνατόν να βελτιώσουμε την πρόβλεψη σημείου σε σχέση με ένα ARMA, αλλά χάνουμε σε αξιοπιστία στην πρόβλεψη διαστήματος. Από την άλλη πλευρά, ένα ARCH μας βοηθάει να προβλέψουμε τη δεσμευμένη διακύμανση χωρίς κανένα επιπλέον όφελος στην πρόβλεψη σημείου. Είναι, επίσης, εφικτή και η ύπαρξη ενός συνδυασμένου ARCH -διγραμμικού υποδείγματος. Η εμπειρική διερεύνηση του θέματος προσφέρει ποικίλα αποτελέσματα. Ο Hsieh (1989) βρήκε ότι το ARCH είναι ικανό να εξηγήσει τις μη-γραμμικότητες στο μάρκο, το καναδικό δολάριο και το ελβετικό φράγκο αλλά όχι στην στερλίνα και το γιεν.

Τέλος, πρέπει να τονίσουμε ένα πρόβλημα που απορρέει από την χρήση του υποδείγματος του μη-γραμμικού δεσμευμένου μέσου στην εξήγηση των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Για να ανταποκριθεί το υπόδειγμα στην παρατηρούμενη στην πράξη μεταβλητότητα, θα πρέπει η πρώτη του ροπή να παρουσιάζει μεγάλη ετερομορφία, γεγονός που μεταφράζεται σε τεράστια



ανεκμετάλλευτα κέρδη για τους επενδυτές. Πιθανότατα, για αυτόν τον λόγο τα μοντέλα με μη-γραμμικότητα στο μέσο δεν τόσο γνωστά όσο τα ARCH, τα οποία παριστάνουν τις αλλαγές στη μεταβλητότητα με αλλαγές στη δεσμευμένη διακύμανση και έτσι δεν αντιμετωπίζουν το προαναφερόμενο πρόβλημα.

2.4 Προεκτάσεις του υποδείγματος

Η αρχική έκδοση του μοντέλου ARCH από τον Engle υπέθετε, όπως ήταν φυσικό, ότι η συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης είναι γραμμική στα τετραγωνικά σφάλματα και η δεσμευμένη κατανομή τους είναι κανονική. Αναγνώρισε όμως ότι αυτές οι δύο υποθέσεις είναι περιοριστικές και ακατάλληλες για συγκεκριμένες εφαρμογές. Πάνω σε αυτό το σκεπτικό βασίστηκε ένα μέρος της εμπειρικής μελέτης, μέρος της οποίας περιγράφουμε στην τρέχουσα ενότητα.

2.4.1 Μη-γραμμική δεσμευμένη διακύμανση

Μια από τις πρώτες δυσκολίες που παρουσιάστηκε στο γραμμικό ARCH, ήταν η εμφάνιση αρνητικών συντελεστών α_i . Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε από τους Geweke (1986) και Milhoj (1987a) με την εισαγωγή του λογαριθμικού ARCH (Log ARCH):

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(\varepsilon_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(\varepsilon_{t-q}^2) \quad (2.4.1)$$

Αν πάρουμε την εκθετική μορφή και των δύο μερών της (2.4.1), τότε η h_t είναι αυστηρά θετική και δεν χρειάζεται να εισάγουμε ανισοτικούς περιορισμούς. Για να καθορίσουμε ποια σχέση από τις (2.2.3) και (2.4.1) είναι η καλύτερη υποδειγματοποίηση για τη δεσμευμένη διακύμανση, οι Higgins και Bera (1992) πρότειναν ένα μη-γραμμικό ARCH (Non linear ARCH ή NARCH), το οποίο αν και χρειάζεται να επιβάλλουμε ανισοτικούς περιορισμούς, συμπεριλαμβάνει το λογαριθμικό και γραμμικό ARCH (linear ARCH) ως ειδικές περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, η δεσμευμένη διακύμανση έχει την εξής μορφή:



$$h_t = [\Phi_0 (\sigma^2)^\delta + \Phi_1 (\varepsilon_{t-1}^2)^\delta + \dots + \Phi_q (\varepsilon_{t-q}^2)^\delta]^{1/\delta} \quad (2.4.2)$$

όπου $\Phi_i \geq 0$, $\sigma^2 > 0$, $\delta > 0$ και τα Φ_i είναι τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^q \Phi_i = 1$

Μετασχηματίζοντας τη (2.4.2) προκύπτει:

$$(h_t^\delta - 1)/\delta = \Phi_0 [(\sigma^2)^\delta - 1]/\delta + \Phi_1 [(\varepsilon_{t-1}^2)^\delta - 1]/\delta + \dots + \Phi_q [(\varepsilon_{t-q}^2)^\delta - 1]/\delta \quad (2.4.3)$$

η οποία δείχνει ότι το NARCH είναι μια Box-Cox power transformation και στις δύο πλευρές του γραμμικού ARCH:

- α) $\delta=1$ NARCH \rightarrow γραμμικό ARCH
- β) $\delta \rightarrow 0$ NARCH \rightarrow λογαριθμικό ARCH

Οι Higgins και Bera (1992) εκτίμησαν την (2.4.2) για εβδομαδιαίες τιμές συναλλάγματος και βρήκαν το δ σημαντικό μικρότερο της μονάδας και κοντά στο μηδέν, δείχνοντας ότι στα δεδομένα ταιριάζει περισσότερο το γραμμικό ARCH. Οι προεκτάσεις των παραπάνω σχέσεων είναι ευθέως ανάλογες και για τα GARCH. Ένας περιορισμός στην συγκεκριμένη δομή των υποδειγμάτων που εξετάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, είναι η συμμετρία της συνάρτησης δεσμευμένης διακύμανσης με τις χρονικές υστερήσεις των σφαλμάτων ε_t . Ο Nelson (1991) υποστήριξε ότι αυτή η συμμετρία είναι ακατάλληλη για την υποδειματοποίηση της μεταβλητότητας των αποδόσεων των μετοχών, διότι δεν μπορεί να αναπαραστήσει το γνωστό «αποτέλεσμα αναμόχλευσης» (leverage effect). Σε ένα συμμετρικό ARCH η h_t δεν επηρεάζεται από το πρόσημο του ε_{t-1} και επομένως, είναι ασυσχέτιστη με τα παρελθόντα σφάλματα. Για να βελτιώσει το υπόδειγμα ο Nelson ξεκίνησε από την απλή υπόθεση:

$$\varepsilon_t = \eta_t h_t^{1/2}$$

όπου η_t είναι *i.i.d* $(0, 1)$ και στη γενική μορφή ARCH:

$$h_t = h(\eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-q}, h_{t-1}, \dots, h_{t-p}) \quad (2.4.3)$$

όπου h_t είναι μια στοχαστική ακολουθία στην οποία το η_t είναι η μεταβλητή που προσδιορίζει τη δεσμευμένη διακύμανση και τα κατάλοιπα. Στην επιλογή της $h(\cdot)$ προτιμήθηκε η λογαριθμική μορφή, λόγω της έλλειψης περιορισμών μη-αρνητικότητας στις παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q a_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \log(h_{t-i}) \quad (2.4.4)$$

$$\text{όπου } g(\eta_t) = \theta \eta_t + \gamma [|\eta_t| - E|\eta_t|] \quad (2.4.5)$$

Οι σχέσεις (2.4.4) και (2.4.5) είναι γνωστές ως εκθετικό GARCH (Exponential GARCH ή EGARCH). Είναι φανερό ότι η ακολουθία $g(\eta_t)$ είναι ανεξάρτητη με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση (αν είναι πεπερασμένη). Επομένως, η (2.4.4) παριστάνει ένα γραμμικό ARMA για την $\log(h_t)$ με διαταρακτικό όρο $g(\eta_t)$. Οι ιδιότητες του EGARCH καθορίζονται από την προσεκτική κατασκευή της συνάρτησης (2.4.5). Αυτές οι ιδιότητες είναι οι εξής:

- (1) Η $g(\eta_t)$ στη δεσμευμένη διακύμανση είναι «μία προς μία γραμμική» (piecewise linear) στην η_t με κλίσεις $a_i(\theta + \gamma)$ όταν $\eta_t > 0$ και $a_i(\theta - \gamma)$ όταν $\eta_t < 0$. Το γεγονός αυτό είναι που προκαλεί την ασυμμετρία στη δεσμευμένη διακύμανση.
- (2) Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος επιτρέπει την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των σφαλμάτων και των μελλοντικών δεσμευμένων διακυμάνσεων. Για παράδειγμα, αν $\gamma = 0$ και $\theta < 0$ τότε ένα αρνητικό η_t θα προκαλέσει αρνητικό σφάλμα και θετική τρέχουσα μεταβολή στη διακύμανση.
- (3) Ο δεύτερος όρος είναι η επίδραση του ARCH. Για παράδειγμα, αν $\gamma > 0$ και $\theta = 0$ τότε αν το μέγεθος του η_t ξεπερνά την προσδοκώμενη τιμή του, η $g(\eta_t)$ είναι θετική. Συνεπώς, μεγάλες ξαφνικές διαταραχές (shocks) αυξάνουν τη δεσμευμένη διακύμανση.



2.4.2 Μη-κανονική δεσμευμένη κατανομή

Όπως περιγράφηκε στην υπο-ενότητα 2.2.3 ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό των ARCH είναι ότι ενώ η δεσμευμένη κατανομή του σφάλματος είναι κανονική, η μη-δεσμευμένη είναι μη-κανονική με ουρές παχύτερες από της κανονικής κατανομής. Σε αντίθεση με την ιδιότητα αυτή, τελευταίες εμπειρικές μελέτες με μοντέλα ARCH στις καθημερινές συναλλαγματικές ισοτιμίες, έδειξαν ότι οι μη-δεσμευμένες κατανομές των εκτιμημένων υποδειγμάτων δεν ήταν ικανοποιητικά λεπτόκυρτες (leptokurtic).

Στο γραμμικό οικονομετρικό υπόδειγμα με κανονικά κατάλοιπα ARCH, ας υποθέσουμε ότι ε_t και h_t είναι οι εκτιμητές των σφαλμάτων και της δεσμευμένης διακύμανσης, αντίστοιχα. Τότε τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα $\varepsilon_t / h_t^{1/2}$ πρέπει να είναι περίπου $N(0, 1)$. Οι McCurdy και Morgan (1988), Milhoj (1987b) και Hsieh (1988, 1989) όμως έδειξαν πως για ένα διευρυμένο σύνολο συναλλαγματικών ισοτιμιών, ο συντελεστής κύρτωσης του δείγματος των κανονικοποιημένων καταλοίπων συνήθως υπερβαίνει το 3. Η συχνή ανικανότητα του «μη-δεσμευμένου κανονικού» υποδείγματος ARCH να περάσει τον απλό αυτό διαγνωστικό έλεγχο, οδήγησε στην χρήση πιο γενικευμένων μορφών δεσμευμένων κατανομών από την κανονική κατανομή. Τα κανονικοποιημένα σφάλματα ορίζονται ως εξής:

$$\eta_t = \varepsilon_t / h_t^{1/2} = (y_t - x_t' \xi) / h_t^{1/2}$$

Σε αυτή την προσέγγιση η δεσμευμένη κατανομή του η_t εξειδικεύεται ως εξής:

$$\eta_t / \Psi_{t-1} \sim f(\eta, \theta) \quad (2.4.6)$$

όπου θ είναι ένα παραμετρικό διάνυσμα μικρών διαστάσεων, του οποίου η τιμή καθορίζει το σχήμα της δεσμευμένης διακύμανσης η_t . Στο «δεσμευμένο κανονικό» υπόδειγμα ARCH το θ δεν υπάρχει και η $f(\eta)$ είναι η $N(0, 1)$ συνάρτηση πυκνότητας. Ο Bollerslev (1987) ήταν ο πρώτος που ενσωμάτωσε στην έρευνά του την παραπάνω προσέγγιση και εξειδίκευσε την $f(\eta, \theta)$ σαν μια δεσμευμένη κατανομή t , όπου το θ είναι οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής. Η δεσμευμένη κατανομή t επιτρέπει για



παχύτερες ουρές από την κανονική κατανομή και καθώς $\theta \rightarrow \infty$, η κανονική κατανομή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της. Ο Bollerslev πρότεινε για έλεγχο της δεσμευμένης κανονικότητας τον έλεγχο του αν ο αντίστροφος των βαθμών ελευθερίας ισούται με το μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τις καθημερινές αποδόσεις στην αγορά spot του μάρκου και της στερλίνας από τον Μάρτιο του 1980 έως τον Ιανουάριο του 1985, ο Bollerslev εκτίμησε υποδείγματα GARCH (1, 1) με δεσμευμένες κατανομές t και απέρριψε την υπόθεση της δεσμευμένης κανονικότητας. Επιπρόσθετα, οι συντελεστές κύρτωσης των κανονικοποιημένων καταλοίπων του δείγματος ήταν πολύ κοντά στους συντελεστές της κατανομής t , υπολογισμένοι στις εκτιμημένες παραμέτρους.

2.5 Προβλέψεις με υποδείγματα ARCH

Μια πολύ χρήσιμη λειτουργία των ARCH είναι η αξιολόγηση της ακρίβειας των προβλέψεων. Στη συνηθισμένη μεθοδολογία των χρονολογικών σειρών, η οποία χρησιμοποιεί δεσμευμένη ομοσκεδαστική διαδικασία ARMA, η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης (forecast error) δεν εξαρτάται από το τρέχον σύνολο πληροφοριών. Αν η σειρά που χρησιμοποιείται παρουσιάζει το φαινόμενο ARCH, το τρέχον σύνολο πληροφοριών δείχνει την αξιοπιστία με την οποία μπορεί να γίνει η πρόβλεψη. Στην συνέχεια της ενότητας θα δείξουμε πως αυτό είναι δυνατόν. Οι Engle και Kraft (1983) πρώτοι επισήμαναν την επίδραση των ARCH στις προβλέψεις. Οι Baillie και Bollerslev (1992) επέκτειναν τα ευρήματα των προηγούμενων σε μεγάλο βαθμό.

2.5.1 Μέτρηση της αβεβαιότητας της πρόβλεψης

Θα παραθέσουμε την επίδραση των ARCH στη μέτρηση της αβεβαιότητας της πρόβλεψης στις μονομεταβλητές γραμμικές χρονολογικές σειρές. Ας εξετάσουμε μια ακολουθία ARMA (k, l):

$$\varphi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (2.5.1)$$



$$\text{όπου: } \varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_k B^k, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_l B^l \quad (2.5.1)$$

B είναι ο τελεστής υστέρησης (backshift operator)

ε_t είναι μια διαδικασία GARCH (p, q)

Θα εξετάσουμε την πρόβλεψη της συγκεκριμένης διαδικασίας, s περιόδους μπροστά από ένα αρχικό σημείο t , η οποία είναι:

$$y_{t+s} = \sum_{i=1}^k \varphi_i y_{t+s-i} + \sum_{i=1}^l \theta_i \varepsilon_{t+s-i} + \varepsilon_{t+s} \quad (2.5.4)$$

Η άριστη πρόβλεψη είναι ο μέσος της y_{t-s} δεσμευμένος στη διαθέσιμη έως την περίοδο t , Ψ_t . Επειδή, $E(\varepsilon_{t+s} / \Psi_t) = 0$, η άριστη πρόβλεψη είναι:

$$E(y_{t+s} / \Psi_t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i E(y_{t+s-i} / \Psi_t) + \sum_{i=1}^l \theta_i E(\varepsilon_{t+s-i} / \Psi_t) \quad (2.5.2)$$

όπου:

$E(y_{t+s-i} / \Psi_t)$, για $i < s$, προκύπτει από την (2.5.2) με διαδοχικές αντικαταστάσεις

$$E(y_{t+s-i} / \Psi_t) = y_{t+s-i} \quad \text{για } i \geq s$$

$$E(\varepsilon_{t+s-i} / \Psi_t) = 0 \quad \text{για } i < s$$

$$E(\varepsilon_{t+s-i} / \Psi_t) = \varepsilon_{t+s-i} \quad \text{για } i \geq s$$

Η σχέση (2.5.2) είναι η συνήθης έκφραση για την άριστη πρόβλεψη σημείου μιας συμβατικής ακολουθίας ARMA, η οποία δίδεται από τους Box-Jenkins (1976). Επομένως, η παρουσία των ARCH δεν επιδρά στον τρόπο που κατασκευάζεται η πρόβλεψη σημείου (point forecast). Αυτό συμβαίνει γιατί το ARCH εισάγει εξάρτηση σε μεγαλύτερου βαθμού ροπές και επιδρά μόνο στην αβεβαιότητα της πρόβλεψης σημείου. Για να κατανοήσουμε την επίδραση του ARCH στην αβεβαιότητα στην πρόβλεψη σημείου, χρειαζόμαστε μια σχέση για το σφάλμα πρόβλεψης. Υποθέτοντας ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_k B^k$ βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο, η διαδικασία ARMA (2.5.1) μπορεί να αντιστραφεί ως ακολούθως:



$$y_{t+s} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t-s-i} \quad (2.5.3)$$

όπου γ_i είναι ο συντελεστής του B^i στο ανάπτυγμα του $\varphi(B)^{-1} \theta(B)$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του κινητού μέσου όρου (moving average representation), η βέλτιστη πρόβλεψη γίνεται:

$$E(y_{t+s} / \Psi_t) = \sum_{i=s}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t-s-i} \quad (2.5.4)$$

Ορίζουμε ως $e_{t,s}$ το σφάλμα πρόβλεψης από ένα αρχικό σημείο t , με ορίζοντα πρόβλεψης s . Αφαιρώντας την σχέση (2.5.4) από την (2.5.3), το σφάλμα πρόβλεψης ισούται με:

$$e_{t,s} = y_{t+s} - E(y_{t+s} / \Psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i \varepsilon_{t+s-i} \quad (2.5.5)$$

και είναι ένας γραμμικός συνδυασμός σφαλμάτων στον χρονικό ορίζοντα από $t+1$ έως $t+s$. Η αβεβαιότητα στην πρόβλεψη μπορεί να μετρηθεί από τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, δεσμευμένης στο σύνολο πληροφοριών Ψ_t , που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της πρόβλεψης. Από την (2.5.5), η δεσμευμένη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι:

$$\text{Var}(e_{t,s} / \Psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i^2 E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t) \quad (2.5.6)$$

Η σχέση (2.5.6) αποκαλύπτει πως το ARCH επηρεάζει την δεσμευμένη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης. Όταν έχουμε ARCH, η $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t)$ επηρεάζεται από τα στοιχεία του Ψ_t και συνήθως μεταβάλλεται διαχρονικά. Αντίθετα, σε ένα δεσμευμένο ομοσκεδαστικό υπόδειγμα, $E(\varepsilon_{t-s-i}^2 / \Psi_t) = \sigma_\varepsilon^2$, η διακύμανση του σφάλματος περιορίζεται σε :

$$\text{Var}(e_{t,s} / \Psi_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i^2$$

Σε αυτή την περίπτωση, η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης δεν εξαρτάται από στοιχεία του συνόλου πληροφοριών (Ψ_t), αλλά μόνο από το μήκος του χρονικού ορίζοντα πρόβλεψης.

Για να γίνει η σχέση (5.5.5) πρακτικά χρήσιμη -στην κατασκευή διαστημάτων πρόβλεψης, για παράδειγμα - πρέπει να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη τιμή της $E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t)$. Αυτό μπορεί να γίνει με την χρήση μιας παράστασης ARMA (m, p) του τετραγώνου μιας διαδικασίας GARCH (p, q):

$$\varepsilon_{t-s}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_i) \varepsilon_{t-s-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t+s-i} + v_{t+s}$$

της οποίας η δεσμευμένη προσδοκία ισούται με:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_i) E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t) - \sum_{i=1}^p \beta_i E(v_{t+s-i} / \Psi_t) \quad (2.5.7)$$

όπου:

$$E(\varepsilon_{t-s-i}^2 / \Psi_t), \quad \text{για } i < s, \text{ εξάγεται από την (2.5.7)}$$

$$E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t) = \varepsilon_{t+s-i}^2, \quad \text{για } i \geq s$$

$$E(v_{t+s-i} / \Psi_t) = 0, \quad \text{για } i < s$$

$$E(v_{t+s-i} / \Psi_t) = v_{t+s-i}, \quad \text{για } i \geq s$$

Η σχέση (2.5.7) για την $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t)$, είναι απολύτως ανάλογη με την άριστη πρόβλεψη $E(y_{t-s} / \Psi_t)$ στην (2.5.2). Σαν παράδειγμα κατασκευής εκτιμητών της διακύμανσης των προβλέψεων, ας ξεκινήσουμε από μια στάσιμη διαδικασία AR (1):

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varphi_1 < 1$$



όπου ε_t είναι μια διαδικασία GARCH (1, 1). Οι άριστες προβλέψεις σημείου ακολουθούν τη σχέση:

$$E(y_{t+s} / \Psi_t) = \varphi_1 E(y_{t+s-1} / \Psi_{t-1})$$

όπου η πρόβλεψη της πρώτης περιόδου είναι $E(y_{t+1} / \Psi_t) = \varphi_1 y_t$. Αντιστρέφοντας την AR (1), οι συντελεστές στην (2.5.4) είναι $\gamma_i = \varphi_1^i$. Επομένως, από την (2.5.6) η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι:

$$Var(e_{t,s} / \Psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_1^{2i} E(\varepsilon_{t-s-i}^2 / \Psi_t), \quad s \geq 1$$

όπου οι προσδοκώμενες τιμές μπορούν να υπολογισθούν με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_1 + \beta_1) E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t), \quad s > 1$$

με την αρχική προσδοκώμενη τιμή να ισούται με $E(\varepsilon_{t+1}^2 / \Psi_t) = a_0 + a_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t$.

Αν και αρχικά φαίνεται λογικό ότι η ακρίβεια μιας πρόβλεψης μειώνεται καθώς προχωράμε μπροστά στο μέλλον, το φαινόμενο αυτό είναι αληθοφανές και όχι αληθές για τα υποδείγματα ARCH. Αν η πρόβλεψη έχει κατασκευασθεί σε περίοδο υψηλής μεταβλητότητας, ένα ARCH συνηγορεί στην συνέχεια της κατάστασης αυτής για αρκετές περιόδους μπροστά. Αλλά καθώς ο ορίζοντας της πρόβλεψης εκτείνεται περαιτέρω, είναι πιθανό η μεταβλητότητα να επανέλθει στο κανονικό της επίπεδο, με αποτέλεσμα η προσδοκώμενη ακρίβεια της πρόβλεψης σημείου να αυξάνεται όταν προβλέπουμε μακρύτερα στο μέλλον.

2.5.2 Εμμονή στη διακύμανση (*persistence in variance*)

Όταν υπάρχει ARCH, η τρέχουσα πληροφόρηση είναι χρήσιμη για να αξιολογήσουμε την ακρίβεια με την οποία μια διαδικασία μπορεί να προβλεφθεί. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε πως η διαθέσιμη πληροφόρηση (Ψ_t) επηρεάζει την αβεβαιότητα πρόβλεψης, καθώς ο ορίζοντας της πρόβλεψης (s) μεγαλώνει. Για $s > p$ η δεσμευμένη διακύμανση της (2.5.7) στο σφάλμα πρόβλεψης μειώνεται σε:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_i) E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t) \quad (2.5.8)$$

η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση διαφορών. Αν οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - (a_1 + \beta_1)Z - \dots - (a_m + \beta_m)Z^m = 1 - \alpha(Z) - \beta(Z)$ βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, η λύση της (2.5.8) συγκλίνει στο:

$$\lim E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = a_0 / (1 - a_1 - \dots - a_q - \beta_1 - \dots - \beta_p)$$

η οποία είναι η μη-δεσμευμένη διακύμανση του διαταρακτικού όρου. Σε αυτή την περίπτωση, καθώς ο ορίζοντας της πρόβλεψης γίνεται πολύ μεγάλος, το σύνολο πληροφοριών δεν προσφέρει πληροφόρηση για τη διακύμανση του ε_{t-s} . Αν αντίθετα, οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - \alpha(Z) - \beta(Z)$ βρίσκονται πάνω ή μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε ένα GARCH (1, 1) με το $1 - \alpha(Z) - \beta(Z)$ να παρουσιάζει μοναδιαία ρίζα (unit root), δηλαδή $a_1 + \beta_1 = 1$. Τότε η (2.5.8) περιορίζεται σε:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = a_0 + E(\varepsilon_{t+s-i}^2 / \Psi_t)$$

η οποία έχει λύση:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 / \Psi_t) = sa_0 + E(\varepsilon_t^2 / \Psi_t)$$

Επομένως, όταν $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ η δεσμευμένη διακύμανση αυξάνεται γραμμικά με τον ορίζοντα της πρόβλεψης και η εξάρτηση στο σύνολο πληροφοριών εμμένει δια μέσου του $E(\varepsilon_t^2 / \Psi)$. Οι Engle και Bollerslev (1986) ήταν οι πρώτοι που εξέτασαν διαδικασίες GARCH με $\alpha(1) + \beta(1) = 1$ ως μια ξεχωριστή κατηγορία υποδειγμάτων την οποία ονόμασαν ολοκληρωμένο GARCH (Integrated GARCH ή IGARCH). Σημείωσαν το συσχετισμό μεταξύ ενός IGARCH και ενός υποδείγματος που είναι ολοκληρωμένο στο μέσο. Για μια διαδικασία που είναι ολοκληρωμένη στο μέσο - δηλαδή μια διαδικασία που απαιτείται να πάρουμε τις πρώτες διαφορές (αν είναι I [1]) για να την κάνουμε στάσιμη- μια διαταραχή στην τρέχουσα περίοδο επηρεάζει το επίπεδο της σειράς στο αόριστο (άπειρο) μέλλον. Σε μια διαδικασία IGARCH, μια διαταραχή στην τρέχουσα περίοδο εμμένει απείρως στη «δέσμευση» των μελλοντικών διακυμάνσεων. Τα υποδείγματα IGARCH είναι πολύ σημαντικά γιατί στην εμπειρική έρευνα, συνήθως, το άθροισμα των εκτιμημένων συντελεστών ισούται (στατιστικά) με την μονάδα. Οι Bollerslev και Engle (1989) ανέλυσαν πολυπαραμετρικές διαδικασίες IGARCH και όρισαν την συνολοκλήρωση (co-integration) στη διακύμανση, την οποία ονόμασαν συνεμμονή (co-persistence). Ένα σύνολο από μονοπαραμετρικά IGARCH παρουσιάζουν συνεμμονή, αν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός των διαδικασιών που δεν είναι ολοκληρωμένος στην διακύμανση.

2.6 Πολυπαραμετρικά υποδείγματα

Φαίνεται πολύ πιθανό ότι η δεσμευμένη διακύμανση της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου συσχετίζεται όχι μόνο με τις παρελθούσες αποδόσεις του, αλλά και με παρελθούσες αποδόσεις άλλων περιουσιακών στοιχείων. Πράγματι, αν κάποιος υπολογίσει μη-παραμετρικά τη διακύμανση της απόδοσης των μετοχών, δεσμευμένη στην ιστορία των αποδόσεων και του όγκου συναλλαγών, η ασυμμετρία που τονίσαμε προωτέρω εξαφανίζεται. Το γεγονός αυτό κάνει επιτακτική την στροφή μας προς εκφράσεις που θα αναπαριστάνουν πολυπαραμετρικές σχέσεις μεταξύ των διακυμάνσεων των σειρών.



Μια πρώτη προσέγγιση είναι να επεκτείνουμε την ιδέα που περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες σε πολυπαραμετρικό περιβάλλον. Ας εξετάσουμε ένα σύστημα με n εξισώσεις παλινδρόμησης της μορφής:

$$y_t = \Pi' x_t + \varepsilon_t$$

$(n \times 1) \quad (n \times k) \quad (k \times 1) \quad (n \times 1)$

όπου: x_t διάνυσμα ερμηνευτικών μεταβλητών
 ε_t διάνυσμα καταλοίπων (λευκός θόρυβος)

Ορίζουμε ως H_t την $n \times n$ μήτρα δεσμευμένης διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων:

$$H_t = E (\varepsilon_t \varepsilon_t' / y_{t-1}, y_{t-2} \dots x_t, x_{t-1} \dots)$$

Οι Engle και Kroner (1993) πρότειναν την παρακάτω διανυσματική γενίκευση μιας εξειδίκευσης GARCH (r, m):

$$H_t = K + \Delta_1 H_{t-1} \Delta_1' + \Delta_2 H_{t-2} \Delta_2' + \dots + \Delta_r H_{t-r} \Delta_r' +$$

$$+ A_1 u_{t-1} A_1' + A_2 u_{t-2} A_2' + \dots + A_m u_{t-m} A_m'$$

όπου K, Δ_s, A_s για $s = 1, 2$ συμβολίζουν $(n \times n)$ μήτρες με παραμέτρους. Το πλεονέκτημα της παραμετροποίησης αυτής είναι ότι η H_t είναι σίγουρα θετικά ορισμένη αν και η K είναι θετικά ορισμένη, το οποίο μπορεί να εξασφαλισθεί αριθμητικά αν ορίσουμε την K ως PP' , όπου P είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα. Στην εμπειρική διερεύνηση είναι απαραίτητο ένα λογικό μέγεθος του n , συνεπώς, οφείλουμε να περιορίσουμε επιπλέον την H_t για να βρούμε μια αριθμητικά εύχρηστη λύση. Μια χρήσιμη ειδική περίπτωση είναι να περιορίσουμε τις Δ_s και A_s ως διαγώνιες μήτρες ($s = 1, 2 \dots$). Σε ένα τέτοιο υπόδειγμα, η δεσμευμένη συνδιακύμανση μεταξύ των ε_{it} και ε_{jt} εξαρτάται μόνο από τις παρελθούσες τιμές των ε_{it-s} και ε_{jt-s} αντίστοιχα, και όχι από τα γινόμενα ή τα τετράγωνα των άλλων καταλοίπων.



Μια άλλη δημοφιλής προσέγγιση προτάθηκε από τον Bollerslev (1990), η οποία εφαρμόζεται στο εμπειρικό μέρος της μελέτης, και υποθέτει ότι οι δεσμευμένες συσχετίσεις μεταξύ των στοιχείων του ε_t είναι διαχρονικά σταθερές. Ορίζουμε $h_{ii}^{(t)}$ το στοιχείο της i -σειράς και i -στήλης της μήτρας H_t . Επομένως, $h_{ii}^{(t)}$ είναι η δεσμευμένη διακύμανση του i -ιστού στοιχείου του ε_t :

$$h_{ii}^{(t)} = E (\varepsilon_{it}^2 \mid y_{t-1}, y_{t-2} \dots x_t, x_{t-1} \dots)$$

Αυτή η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να υποδειγματοποιηθεί με ένα GARCH (1, 1) ως ακολούθως:

$$h_{ii}^{(t)} = \kappa_i + \delta_i h_{ii}^{(t-1)} + \alpha_i \varepsilon_{it-1}^2$$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε n τέτοιες εξειδικεύσεις GARCH ($i = 1, 2, \dots, n$), μια για κάθε στοιχείο του ε_t . Η δεσμευμένη συνδιακύμανση μεταξύ των ε_{it} και ε_{jt} , ή του στοιχείου της i στήλης και j σειράς της H_t , λαμβάνεται να είναι μια σταθερή συσχέτιση ρ_j επί τις δεσμευμένες τυπικές αποκλίσεις των ε_{it} και ε_{jt} :

$$h_{ij}^{(t)} = E (\varepsilon_{it} \varepsilon_{jt} \mid y_{t-1}, y_{t-2} \dots x_t, x_{t-1} \dots) = \rho_j [h_{ii}^{(t)} h_{jj}^{(t)}]^{1/2}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η εκτίμηση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας είναι πιο εύκολη (βλέπε Bollerslev, 1990). Άλλα πολυμεταβλητά υποδείγματα έχουν προταθεί από τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988), τους Diebold και Nerlove (1989) και Engle, Ng και Rothschild (1990).

2.7 Τα μοντέλα GARCH -in-the-mean

Όταν υποδειγματοποιούμε αποδόσεις είναι προτιμότερο να τις υπολογίζουμε ως μια διαφορά από την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, δηλαδή να χρησιμοποιούμε την έννοια του risk premium. Ομοίως, η διαφορά μεταξύ spot και forward rate είναι ένα risk premium. Τα θεωρητικά μοντέλα που αναλύσαμε στο

πρώτο κεφάλαιο λαμβάνουν την απόδοση της αγοράς ως συνάρτηση της μεταβλητότητας, δηλαδή το risk premium πρέπει να είναι μεγαλύτερο όταν η απόδοση παρουσιάζει υψηλότερες μεταβολές. Συνεπώς, οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση, η οποία συνδέει τις πρώτες δύο ροπές:

$$y_t = \delta g(h_t) + \varepsilon_t \quad (2.7.1)$$

Σύμφωνα με τον Merton (1973) η $g(h_t)$ είναι γραμμική, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τους Gennote και Marsh (1992). Αν συμπληρώσουμε στην (2.7.1) ένα μοντέλο ARCH για τη h_t θα προκύψει:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.7.2)$$

Οι σχέσεις (2.7.1) και (2.7.2) συνιστούν ένα ARCH στο μέσο (ARCH-in-the-mean ή ARCH-M) και επεκτείνεται με πλήρη αντιστοιχία σε όλες τις εναλλακτικές μορφές των ARCH που αναλύσαμε στις προηγούμενες ενότητες (για παράδειγμα, GARCH-M, EGARCH-M, πολυπαραμετρικό ARCH-M κ.λ.π).

Από την άλλη πλευρά, τα απλά υποδείγματα ARCH διαφέρουν από τα ARCH στο μέσο. Πρώτον, ενώ στα απλά υποδείγματα υπάρχει ευελιξία στην επιλογή της μεθοδολογίας εκτίμησης (βλέπε ενότητα 2.8), στα υποδείγματα στο μέσο στην συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας. Δεύτερον, όπως αναλύσαμε σε προηγούμενες ενότητες, μπορούμε να εξειδικεύσουμε ένα απλό υπόδειγμα ARCH μελετώντας την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των καταλοίπων, κατά αντιστοιχία με την μεθοδολογία των Box-Jenkins. Αντίθετα, στα ARCH στο μέσο είναι αδύνατο να εκτιμήσουμε τα κατάλοιπα, εάν πρωτύτερα δεν έχουμε εξειδικεύσει ένα σωστό υπόδειγμα για τη δεσμευμένη διακύμανση και την συνάρτηση που την συνδέει με το μέσο. Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση δεν λειτουργεί αυτή η μέθοδος εξειδίκευσης.



2.8 Εκτίμηση

Στη βιβλιογραφία της χρηματοοικονομικής οικονομετρίας (financial econometrics) συναντάμε πέντε βασικές μεθόδους για την εκτίμηση των υποδειγμάτων ARCH. Συγκεκριμένα, αυτές είναι:

- ◆ Γενικευμένη μέθοδος ροπών (Generalized Method of Moments ή GMM)
- ◆ Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood ή ML)
- ◆ Μέθοδος οιονεί μέγιστης πιθανοφάνειας (Quasi-Maximum Likelihood ή QML)
- ◆ Έμμεση μέθοδος εκτίμησης (Indirect estimation ή IM)
- ◆ Εκτίμηση κατά Bayes (Bayesian estimation ή BM)

Εξαιτίας της μείωσης του υπολογιστικού κόστους, παρατηρείται μια στροφή στις δύο τελευταίες, παρ' ότι το λογισμικό των προσωπικών υπολογιστών υποστηρίζει περισσότερο τις τρεις πρώτες.

Οι εκτιμητές της μεθόδου GMM δεν φαίνεται να έχουν μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με τους εκτιμητές της ML, αντίθετα, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες παρουσιάζονται δυσκολίες στον υπολογισμό τους. Η μέθοδος IM γνωρίζει μεγάλη διάδοση τα τελευταία χρόνια, διότι μας βοηθάει σε περιπτώσεις που είναι δύσκολο να υπολογιστούν οι εκτιμητές του α με τη ML. Από την άλλη πλευρά όμως είναι μια μέθοδος με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Οι μέθοδοι εκτίμησης κατά Bayes κερδίζουν συνεχώς έδαφος στη χρηματοοικονομική οικονομετρία γιατί όλο και συχνότερα οι παράμετροι λαμβάνονται ως τυχαίες μεταβλητές.

2.8.1 Μέγιστη πιθανοφάνεια (ML)

Η κλασικότερη μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων ενός υποδείγματος ARCH είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας. Η μελέτη των υπόλοιπων - πολύ σημαντικών- μεθόδων ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της εργασίας. Μια αξιολογη επισκόπηση σε αυτό το θέμα παρουσιάζει ο Pagan (1996).

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μιας παλινδρόμησης με ARCH διαταρακτικό όρο. Η εξίσωση της παλινδρόμησης είναι:

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \quad (2.8.1)$$

όπου x_t είναι προκαθορισμένες ερμηνευτικές μεταβλητές, οι οποίες μπορούν να περιλαμβάνουν και παρελθούσες τιμές του y . Ο διαταρακτικός όρος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} v_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 \end{aligned}$$

Είναι χρήσιμο να θέσουμε υπό συνθήκη τις πρώτες m παρατηρήσεις ($t = -m+1, -m+2, \dots, 0$) και να χρησιμοποιήσουμε τις $t = 1, 2, \dots, T$ παρατηρήσεις για εκτίμηση. Ας συμβολίσουμε με Y_t το διάνυσμα των παρατηρήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t :

$$Y_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-m+1}, \mathbf{x}_t', \mathbf{x}_{t-1}', \dots, \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_0', \dots, \mathbf{x}_{-m+1}')$$

Αν $v_t \sim i.i.d. N(0, 1)$ με v_t ανεξάρτητο από Y_t και \mathbf{x}_t , τότε η δεσμευμένη διακύμανση του y_t είναι Gaussian με μέσο $\mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}$ και διακύμανση h_t :

$$f(y_t / \mathbf{x}_t, Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ - (y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2 / 2 h_t \right\} \quad (2.8.2)$$

όπου:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \boldsymbol{\beta})^2 + \alpha_2 (y_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2}' \boldsymbol{\beta})^2 + \dots + \alpha_m (y_{t-m} - \mathbf{x}_{t-m}' \boldsymbol{\beta})^2 \quad (2.8.3)$$

$$= [\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta})]' \boldsymbol{\delta}$$

για $\boldsymbol{\delta} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)'$

$$[\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta})]' = [1, (y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \boldsymbol{\beta})^2, (y_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2}' \boldsymbol{\beta})^2 + \dots + (y_{t-m} - \mathbf{x}_{t-m}' \boldsymbol{\beta})^2]$$



Ορίζουμε το $(\alpha \times 1)$ θ διάνυσμα με τις παραμέτρους που θα εκτιμηθούν:

$$\theta = (\beta', \delta')$$

Τότε η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (log likelihood function) του δείγματος, δεσμευμένη στις πρώτες m παρατηρήσεις, ισούται με :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^T \log f(y_i / \mathbf{x}_i, Y_{i-1}; \theta) = \\ &= -(T/2)\log(2\pi) - (1/2) \sum_{i=1}^T \log(h_i) - (1/2) \sum_{i=1}^T (y_{i-1} - \mathbf{x}_{i-1}' \beta)^2 / h_i \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Για μια δεδομένη τιμή του διανύσματος των παραμέτρων θ , η ακολουθία των δεσμευμένων διακυμάνσεων υπολογίζεται από την (2.8.3) και χρησιμοποιούνται για να αξιολογήσουμε την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (2.8.4). Η προηγούμενη ανάλυση στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι ο διαταρακτικός όρος v_i είναι Gaussian, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις που η μη-δεσμευμένη κατανομή μερικών χρονολογικών έχει παχύτερες ουρές από αυτές που επιτρέπει η κατηγορία των Gaussian. Όμοια με την προηγούμενη προσέγγιση -στα βασικότερα σημεία- ακολουθείται για τον non-Gaussian διαταρακτικό όρο, αλλά και σε περιπτώσεις διαφορετικών κατανομών οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί σε υποδείγματα ARCH. Σε αυτές περιλαμβάνονται η normal-poisson mixture (Jorion, 1988), η power-exponential (Baillie και Bollerslev, 1989), η normal-log mixture (Hsieh, 1989), η generalized exponential (Nelson, 1991), η serially dependent mixture of normals (Cai, 1996) και η t-variables (Hamilton και Susmel, 1996).

2.8.2 Μέθοδοι ολικής μεγιστοποίησης

Η εκτίμηση μη-γραμμικών παραμέτρων μας επιβάλλει σημαντικές υπολογιστικές αντιξοότητες. Οι παραδοσιακές τεχνικές είναι δυνατόν να αποτυγχάνουν να συγκλίνουν. Όταν συγκλίνουν κανείς δεν μας εγγυάται ότι το αποτέλεσμα αφορά ένα ολικό και όχι τοπικό ακρότατο. Η έρευνα πάνω στο ζήτημα αυτό, τα τελευταία



χρόνια, έχει να προτείνει τρεις υποσχόμενες μεθόδους. Δύο από αυτές, οι αλγόριθμοι simulated annealing και genetic algorithms, περιγράφονται ως πιθανοτικές μέθοδοι. Η πρώτη αναπαριστά την πήξη ενός υγρού σε στερεό και η δεύτερη την λειτουργία της επιβίωσης του ισχυρότερου είδους σε ένα γένος. Το κοινό στοιχείο τους είναι ότι ψάχνουν στις περιοχές του καλύτερου τρέχοντος βέλτιστου. Πλεονεκτούν διότι αποφεύγουν να παγιδεύονται κοντά σε τοπικά βέλτιστα, ψάχνοντας έξω από την τρέχουσα περιοχή με μια ορισμένη πιθανότητα. Παρ' ότι απαιτούν υψηλό υπολογιστικό χρόνο, έχουν μεγάλη πιθανότητα να καταλήξουν σε ολικό βέλτιστο (βλέπε Chu και Beasley, 1997).

Η Τρίτη μέθοδος, η interval arithmetic, είναι μια επικαλυπτική μέθοδος (covering method). Γενικότερα, οι μέθοδοι διαστημάτων (interval methods) μας επιτρέπουν να εξετάσουμε το μέγεθος μιας συνάρτησης σε μια περιοχή του παραμετρικού χώρου, αντί της συνηθισμένης αξιολόγησης σε ένα σημείο. Αναφερόμαστε σε έναν έλεγχο που απορρίπτει περιοχές του χώρου όπου μπορούμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Αυτή η μέθοδος εξασφαλίζει ότι κάθε σημείο του χώρου έχει ελεγχθεί, χωρίς να έχουμε αξιολογήσει τη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της. Επιπρόσθετα, ο συνδυασμός των μεθόδων διαστημάτων με τις κλασικές μεθόδους εκτίμησης σημείου, οδηγεί σε μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας τους.

Τέλος, ενώ οι παραπάνω τεχνικές υπόσχονται πολλά στην επίλυση χρόνιων προβλημάτων -και στην κλασική οικονομική θεωρία- παραμένουν γνωστές σε ελάχιστους ερευνητές και έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος.

2.9 Έλεγχοι Εξειδίκευσης για ARCH

Υπάρχουν δύο φιλοσοφίες όταν αναφερόμαστε στην καταλληλότητα ενός υποδείγματος. Η πρώτη έγκειται στο να αντιστοιχίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά (stylized facts) της χρονολογικής σειράς με τις ιδιότητες που διέπουν το στατιστικό μας υπόδειγμα (Data Generating Process ή DGP). Για παράδειγμα, όταν παρατηρείται συγκέντρωση (clustering) στις δεσμευμένες διακυμάνσεις μιας σειράς, το πιο κατάλληλο υπόδειγμα για να ερμηνεύσει το χαρακτηριστικό αυτό είναι το ARCH.

Μια πιο πειστική προσέγγιση του προβλήματος της εξειδίκευσης είναι η κατασκευή ενός στατιστικού ελέγχου του πολλαπλασιαστή Lagrange (LM test). Σε



αυτή τη περίπτωση το κύριο πρόβλημα μας είναι ο καθορισμός του κατάλληλου εναλλακτικού υποδείγματος. Στην πλειοψηφία τους οι προτάσεις που γίνονται αφορούν διαφορετικές υποδειματοποιήσεις για τη δεσμευμένη διακύμανση. Οι Engle και Ng (1993), προτείνουν ως επιπλέον όρους ψευδομεταβλητές σε αθροιστική ή πολλαπλασιαστική μορφή. Οι Pagan και Schwert (1990) υποστηρίζουν μια μη-παραμετρική προσέγγιση, προσεγγίζοντας την δεσμευμένη διακύμανση με ένα GARCH με Fourier όρους στο οποίο ελέγχουν την σημαντικότητα αυτών των όρων. Πράγματι, υπάρχουν πολλοί τρόποι κατασκευής διαγνωστικών ελέγχων, ανάλογα με τους όρους που προσθέτουμε. Πέρα όμως από αυτό το ερώτημα, μας απασχολεί επίσης, αν οι συντελεστές της δεσμευμένης διακύμανσης είναι διαχρονικά σταθεροί (stable). Οι Lamoureux και Lastrapes (1990) υποστήριξαν ότι η συχνή εύρεση παραμέτρων που αθροίζουν κοντά στη μονάδα (IGARCH) μπορεί να είναι απλά ένα σύμπτωμα της αστάθειας τους. Οι Lee και Hansen (1991) δημιούργησαν ένα στατιστικό κριτήριο που ελέγχει τη σταθερότητα των GARCH παραμέτρων, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Nyblom (1989). Η περίπτωση αυτή μπορεί να ελεγχθεί με ένα LM test, στο οποίο ελέγχουμε την υπόθεση αν οι συντελεστές ακολουθούν ένα τυχαίο περίπατο (random walk), έναντι της εναλλακτικής ότι είναι σταθεροί. Ο Chu (1995) κατασκεύασε έναν έλεγχο με τον ίδιο στόχο, ο οποίος βασίζεται στην άθροιση των scores σε επιμέρους τμήματα του δείγματος.

2.10 Επίλογος

Η έρευνα στην υποδειματοποίηση του δεσμευμένου μέσου παρ' ότι έχει ξεκινήσει αρκετές δεκαετίες πριν, συνεχίζει να ενδιαφέρει τους ερευνητές. Τα σχετικά θέματα που μελετώνται σήμερα είναι η συνολοκλήρωση, οι δομικές αλλαγές, οι διαφορετικές μορφές μη-γραμμικότητας, οι έλεγχοι υποθέσεων και οι ιδιότητες των εκτιμητών του δείγματος. Είναι σίγουρο πως τα προβλήματα της υποδειματοποίησης του δεσμευμένου μέσου κληρονομούνται και στα υποδείγματα ARCH, δηλαδή στην προσπάθεια μας να υποδειματοποιήσουμε τη δεσμευμένη διακύμανση. Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρήσαμε μια σύντομη προσέγγιση των προβλημάτων αυτών, μέσα από την ανάλυση των πιο σημαντικών εναλλακτικών μορφών των υποδειγμάτων ARCH. Εκτός όμως από αυτά, τα υποδείγματα ARCH παρουσιάζουν και προβλήματα τα



οποία δεν συναντώνται στα υποδείγματα της δεσμευμένης πρώτης ροπής. Για παράδειγμα, μέχρι σήμερα, δεν γνωρίζουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών του ARCH. Η σημερινή βιβλιογραφία προσπαθεί να δώσει απαντήσεις σε τέτοιου είδους θέματα, αλλά παράλληλα επεκτείνει τις υπάρχουσες εναλλακτικές μορφές και χρήσεις τους. Βέβαια, δεν είναι ίδια η ένταση όπως την πρώτη δεκαετία δημιουργίας τους, παρ' όλα αυτά παραμένει μια θεματική ενότητα με πολλές εφαρμογές στην οικονομική επιστήμη.

Η επιτυχία των ARCH είναι πιθανό να οδηγήσει τους ερευνητές στην χρήση της τρίτης και τέταρτης ροπής με έναν πιο συστηματικό τρόπο. Το γεγονός αυτό ίσως μας βοηθήσει στην προσπάθειά μας να γνωρίσουμε καλύτερα την συμπεριφορά των οικονομικών μεταβλητών εν γένει, μια προσπάθεια που ξεκίνησε έναν αιώνα πριν από τον Luis Bachelier.

2.11 Πίνακας Συντομογραφιών

<i>AARCH:</i>	Augmented autoregressive conditional heteroskedasticity
<i>ARCH</i>	Autoregressive conditional heteroskedasticity
<i>ARCH-M</i>	Autoregressive conditional heteroskedasticity in the mean
<i>APT</i>	Arbitrage pricing theory
<i>CAPM</i>	Capital asset price model
<i>CCAPM</i>	Consumption capital asset price model
<i>EARCH</i>	Exponential autoregressive conditional heteroskedasticity
<i>EMH</i>	Efficient market hypothesis
<i>ICAPM</i>	International capital asset price model
<i>NARCH</i>	Nonlinear autoregressive conditional heteroskedasticity
<i>QARCH</i>	Quadratic autoregressive conditional heteroskedasticity

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Περιγραφική Ανάλυση Δεδομένων

3.1 Η πορεία του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών

Για την εμπειρική διερεύνηση του θέματος χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση για τον Γενικό Δείκτη Τιμών και τον Τραπεζικό Δείκτη Τιμών. Η περίοδος την οποία καλύπτουν τα επιμέρους δεδομένα σε ημερήσια βάση παρουσιάζονται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1

Παρουσίαση των στοιχείων του δείγματος

<i>Πηγή</i>	<i>Περίοδος</i>	<i>Μέγεθος δείγματος</i>
Γενικός Δείκτης Τιμών	2.1.1985 - 7.11.1997	3200
Τραπεζικός Δείκτης Τιμών	2.1.1985 - 7.11.1997	3200

Τα εβδομαδιαία δεδομένα είναι με βάση κάθε διαδοχική Τετάρτη, από το ευρύτερο δείγμα των ημερήσιων στοιχείων.

Η Ελληνική Χρηματιστηριακή Αγορά εκπροσωπείται από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών (στο εξής Χ.Α.Α.), στο οποίο τον Νοέμβριο 1997 διαπραγματεύονταν 280 κοινές και προνομιούχες μετοχές. Έως τις αρχές του 1987, το ενδιαφέρον για το Χ.Α.Α. περιοριζόταν σε ένα μικρό αριθμό ιδιωτών. Στη συνέχεια η κυβέρνηση κατάργησε τους ελέγχους στην επένδυση μετοχών, με αποτέλεσμα την μεγάλη αύξηση στις αποδόσεις των μετοχών και τον καθημερινό όγκο συναλλαγών. Η θετική αυτή εξέλιξη ενδυναμώθηκε από το αυξημένο ενδιαφέρον της Ευρωπαϊκής Ένωσης και των επενδυτών από τρίτες χώρες, καθώς επίσης και από το κυβερνητικό

σταθεροποιητικό πρόγραμμα της περιόδου 1985-87. Κατά την διάρκεια των πρώτων εννέα μηνών του 1987 ξεκίνησε μια κούρσα ανόδου των τιμών των μετοχών, της τάξης του 1068.27% στον Γενικό Δείκτη. Παρ' όλη τη σημαντική κάμψη που προκάλεσε η διεθνής χρηματιστηριακή κρίση τους τελευταίους τρεις μήνες του ίδιου έτους, η ετήσια απόδοση ανήλθε στο 250%. Η Ελληνική χρηματαγορά δεν κατάφερε να ξεπεράσει την κρίση του Οκτωβρίου του 1987 και τον επόμενο χρόνο σημείωσε απώλειες σε επίπεδο 18.04%. Στα μέσα του 1989, εξαιτίας των θετικών εξελίξεων σε πολλές χώρες - μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης, καθώς επίσης και οι προσδοκίες ότι η συντηρητική παράταξη θα επανέλθει στη διακυβέρνηση, ώθησε ξένους επενδυτές είτε να επανέλθουν είτε να πρωτο-εισαχθούν στο Χ.Α.Α. Το 1990, με την εκλογή της συντηρητικής παράταξης και της προσδοκίας φιλελευθεροποίησης της αγοράς, ήταν ένα έτος ανόδου των τιμών και αύξησης του όγκου των συναλλαγών σε επίπεδα ρεκόρ. Από τον Ιούλιο του 1987 έως τον Ιούλιο του 1988, ο Γενικός δείκτης σημείωσε αύξηση 613.20%. Η κούρσα ανόδου έληξε τον Ιούλιο του 1990 με την κρίση στην Μέση Ανατολή (Ιρακινή εισβολή στο Κουβέιτ). Πάνω σε αυτό το αρνητικό γεγονός ήρθε να προστεθεί και η αποτυχία ανάληψης της Ολυμπιάδας του 1996, με αποτέλεσμα από τον Ιούλιο έως Δεκέμβριο του 1990 να σημειωθεί πτώση της τάξης του 41.68%. Την επόμενη διετία η πτώση συνεχίστηκε - 14.84% το 1991 και 16.20% το 1992 - ως αποτέλεσμα των αρνητικών επιδράσεων από τα διεθνή χρηματιστήρια, αλλά και του αρνητικού πολιτικού κλίματος που δημιούργησε η διαμάχη μεταξύ κυβέρνησης και κοινωνικών εταίρων. Το 1993 παρατηρήθηκε μια σημαντική άνοδος των τιμών (42.70%), εξαιτίας κυρίως της ευνοϊκής διεθνούς συγκυρίας αλλά και της εισροής νέων κεφαλαίων στο Χ.Α.Α. Η επόμενη τριετία χαρακτηρίζεται από μικρές διακυμάνσεις - θετικές ή αρνητικές - ενώ το 1997 είναι μια χρονιά υψηλής ανόδου. Έως τις αρχές του Νοεμβρίου, η άνοδος του Γενικού δείκτη για το έτος 1997 ανέρχεται στο 61.88%, ως συνέπεια της σταθερής αποκλιμάκωσης του εγχώριου πληθωρισμού και του αυξανόμενου επενδυτικού ενδιαφέροντος για τις αναδυόμενες αγορές (emerging markets).

Όπως παρατηρούμε στο Διάγραμμα 1, η εξέλιξη του Γενικού δείκτη τιμών του Χ.Α.Α. παρουσιάζει μια περιορισμένη διαχρονικά ανοδική τάση με έντονες όμως διακυμάνσεις. Το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για το Χ.Α.Α. οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν περιορισθεί σημαντικά οι πραγματικές αποδόσεις των επενδύσεων με χαμηλό κίνδυνο (έντοκα γραμμάτια, ομόλογα, καταθέσεις), πράγμα που στρέφει τα



επενδυτικά κεφάλαια στη χρηματιστηριακή αγορά. Άλλοι λόγοι που οδήγησαν στην ανάπτυξη του Χ.Α.Α είναι η πολιτική σταθερότητα, η εισαγωγή του ηλεκτρονικού συστήματος συναλλαγών, η απο-υλοποίηση των μετοχών με την παράλληλη δημιουργία ενός σύγχρονου αποθετηρίου τίτλων και η διαπραγμάτευση χρηματιστηριακών παραγώγων (options, futures, warrants).



Από την άλλη πλευρά, παρ' όλη τη σημαντική αύξηση της κεφαλαιοποίησης και του καθημερινού όγκου των συναλλαγών, το Χ.Α.Α. παραμένει ένα «ρηχό», περιφερειακό χρηματιστήριο, ευάλωτο σε βραχυπρόθεσμες κερδοσκοπικές κινήσεις. Για το 1998, σχεδιάζεται η εισαγωγή δύο φόρων, οι οποίοι ευελπιστούν να εξομαλύνουν την ελληνική χρηματαγορά. Ο πρώτος αφορά την πώληση των μετοχών και ο δεύτερος επιβάλλεται - ως φόρος εισοδήματος - στην υπεραξία από την πώληση μετοχών που δεν έχουν διακρατηθεί παραπάνω από ένα χρόνο. Σκοπός των δύο αυτών φόρων είναι η μείωση της βραχυχρόνιας πώλησης μετοχών (short-selling) και η αντικατάστασή της από την μακροχρόνια επένδυση σε μετοχές, η οποία στηρίζεται στα βασικά μεγέθη (fundamentals) της συγκεκριμένης εταιρείας (κερδοφορία, δανεισμός, μακροχρόνια επενδυτικά σχέδια κ.λ.π) και της οικονομίας ως σύνολο. Είναι χαρακτηριστικό ότι στις αναπτυγμένες διεθνείς χρηματιστηριακές αγορές οι πιο κρίσιμες συνεδριάσεις διεξάγονται όταν γίνονται ανακοινώσεις αποτελεσμάτων που αφορούν τις μεγάλες επιχειρήσεις και τα μακροοικονομικά μεγέθη της οικονομίας.

Παρόμοια συμπεριφορά -σε αδρές γραμμές - παρουσιάζει ο κλαδικός δείκτης των Τραπεζών όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2, διότι αφ' ενός συμμετέχει με το μεγαλύτερο ποσοστό στην διαμόρφωση του Γενικού Δείκτη και αφ' ετέρου αποτελεί το βαρόμετρο των εξελίξεων στο σύνολο της αγοράς. Μια πιο προσεκτική ανάλυση, όμως, δείχνει πως ο Τραπεζικός Δείκτης έχει μικρότερες διακυμάνσεις από το Γενικό. Αυτό το γεγονός οφείλεται στο ότι ο Γενικός Δείκτης αποτελείται και από μετοχές κλάδων με υψηλή διακύμανση, όπως ο κλάδος κατασκευαστικών εταιρειών.



3.2 Ανάλυση Αποδόσεων

Οι συνεχώς ανατοκιζόμενες αποδόσεις ορίζονται ως η διαφορά των λογαρίθμων δύο διαδοχικών τιμών του δείκτη που εξετάζουμε. Για λεπτομέρειες βλέπε Παράρτημα 1.

Στο Διάγραμμα 3 παρουσιάζονται οι συνεχώς ανατοκιζόμενες αποδόσεις του Γενικού δείκτη σε ημερήσια βάση και είναι φανερό ότι η πλειοψηφία των τιμών συγκεντρώνεται γύρω από το μηδέν με την υψηλότερη μεταβολή να παρουσιάζεται στο τέλος του 1987 μετά το «κραχ» στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης. Υψηλές αποκλίσεις - θετικές ή αρνητικές - παρουσιάζονται το 1989 εξαιτίας της πολιτικής αστάθειας και τον Σεπτέμβριο του 1990 μετά την αποτυχία ανάληψης από τη χώρα μας της χρυσής Ολυμπιάδας του 1996. Στην συνέχεια ακολούθησε μια περίοδος

σχετικής σταθερότητας, η οποία διαταράχθηκε από μία νέα διεθνή χρηματιστηριακή κρίση (Νοέμβριος 1997).



Ο Τραπεζικός τομέας, από την άλλη πλευρά, στις περιόδους υψηλής αβεβαιότητας των αποδόσεων λειτουργήσε σαν ασφαλές καταφύγιο για τους επενδυτές. Όπως εμφανίζεται στο Διάγραμμα 4, σε όλες τις περιόδους με ασυνήθιστα μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων του Γενικού δείκτη, οι τραπεζικές μετοχές απορρόφησαν ένα σημαντικό μέρος της διαταραχής. Μόνη εξαίρεση αποτελεί η αρχή του 1986, όπου η προαναφερόμενη διαδικασία λειτουργήσε προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Η συγκέντρωση μεταβλητότητας (volatility clustering) είναι ένα φαινόμενο που παρουσιάζεται ανάγλυφα όταν σχεδιάσουμε τις αποδόσεις διαχρονικά. Τα Διαγράμματα 3 και 4 χαρακτηρίζονται από το γνώρισμα που πρώτος παρατήρησε ο Mandelbrot (1963), «μεγάλες μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες μεταβολές, οποιουδήποτε πρόσημου, και μικρές μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές μεταβολές, οποιουδήποτε πρόσημου». Επιπρόσθετα, όποιο λογικό έλεγχο και αν χρησιμοποιήσουμε οι αποδόσεις δεν είναι ανεξάρτητες διαχρονικά. Από την απλή οπτική ανάλυση του Διαγράμματος 3, φαίνεται ότι η μεταβλητότητα του 1988 είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του 1995.



Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα βασικά περιγραφικά στατιστικά στοιχεία (summary statistics) των συνεχώς ανατοκιζόμενων αποδόσεων του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση. Ο Γενικός Δείκτης έχει μεγαλύτερη απόδοση αλλά και μεγαλύτερη τυπική απόκλιση (ρίσκο), σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση, από τον Τραπεζικό Δείκτη. Σημαντικό χαρακτηριστικό και των δύο δεικτών είναι ότι μεταβαίνοντας από τα ημερήσια στα εβδομαδιαία στοιχεία, παρατηρείται μια αισθητή μείωση της απόδοσης και της τυπικής απόκλισης. Το γεγονός αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στην πληροφόρηση που συσσωρεύεται τις ημέρες που δεν λειτουργεί η αγορά (Σαββατοκύριακο) και εκδηλώνεται αθροιστικά την Δευτέρα. Το φαινόμενο ονομάζεται «αποτέλεσμα του Σαββατοκύριακου» (weekend effect). Το ερώτημα που εύλογα τίθεται είναι μια ποιο ρυθμό συσσωρεύεται η πληροφόρηση. Αν, για παράδειγμα, ο ρυθμός είναι σταθερός κατά την διάρκεια του ημερολογιακού έτους, τότε η διακύμανση των αποδόσεων από το κλείσιμο της Παρασκευής έως το κλείσιμο της Δευτέρας πρέπει να είναι τρεις φορές η διακύμανση από το κλείσιμο της Δευτέρας έως το κλείσιμο της Τρίτης. Αντίθετα, ο Fama (1965) και οι French και Roll (1986) έχουν βρει ότι η πληροφόρηση συσσωρεύεται με μικρότερο ρυθμό όταν η αγορά είναι κλειστή, παρά όταν είναι ανοιχτή. Ενδεικτικά, οι French και Roll (1986) χρησιμοποιώντας ημερήσιες αποδόσεις για όλες τις μετοχές του New York Stock Exchange (N.Y.S.E.) από το 1963 έως το 1982, βρήκαν ότι η μεταβλητότητα είναι 70 φορές μεγαλύτερη ανά ώρα κατά μέσο όρο όταν η αγορά είναι ανοιχτή, σε σχέση με το αν η αγορά είναι κλειστή.

Πίνακας 2

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Συνεχώς Ανατοκιζόμενων Αποδόσεων
του Γενικού και Τραπεζικού δείκτη σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία βάση
(02/01/85 - 07/11/97)

	Γενικός Δείκτης (Ημερήσιος)	Γενικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)	Τραπεζικός Δείκτης (Ημερήσιος)	Τραπεζικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)
Μέσος (×100)	4.90	1.03	5.53	2.30
Διάμεσος (×100)	2.63	1.81	2.42	2.54
Τυπ. Αποκλ. (×100)	79.07	72.99	101.13	91.28
Συμμετρία	0.50	-1.02	0.58	0.37
Κύρτωση	22.17	12.06	62.69	14.10

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα στοιχεία για τις συνεχώς ανατοκιζόμενες αποδόσεις των Τρίμηνων Έντοκων Γραμματίων του Ελληνικού Δημοσίου (Ε.Γ.Ε.Δ) σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση. Η χρήση των ονομαστικών επιτοκίων στα υποδείγματα δεσμευμένης διακύμανσης εξυπηρετεί ένα σημαντικό σκοπό. Ο Fischer (1981) έχει δείξει ότι η διακύμανση του πληθωρισμού αυξάνεται με την αύξηση του επιπέδου του. Εφόσον τα βραχυπρόθεσμα ονομαστικά επιτόκια ενσωματώνουν προσδοκίες για τον πληθωρισμό, τότε μπορεί να είναι καλές προβλέψεις της μεταβλητότητας στις υπερβάλλουσες αποδόσεις (excess returns). Οι Fama και Schwert (1977), ο Campbell (1987) και οι Breen, Glosten και Jaganathan (1989), χρησιμοποιώντας την πληροφόρηση που περιέχουν τα επιτόκια έδειξαν ότι είναι πιθανόν να προβλέψεις χρονικές περιόδους όπου οι υπερβάλλουσες αποδόσεις των μετοχών είναι σχετικά μεγάλες και με σημαντικά μικρή μεταβλητότητα.

Στα στοιχεία της εργασίας αυτής ο μέσος είναι αρκετά υψηλός διότι για μεγάλη χρονική περίοδο (1983-89) τα επιτόκια κυμαίνονταν από 19% έως 25.5%. Εκείνη την εποχή, εξαιτίας των υπερόγκων αυτών αποδόσεων οι οικονομολόγοι είχαν μιλήσει για μια τάξη νεόπλουτων, οι οποίοι δεν έκαναν τίποτε άλλο παρά να ανανεώνουν τα έντοκα γραμμάτια τους και να αποκομίζουν τους τόκους. Η τυπική απόκλιση είναι



πολύ χαμηλή διότι τα επιτόκια για μεγάλες χρονικές περιόδους παρέμειναν σταθερά - μόνο τα τελευταία δύο χρόνια με την εφαρμογή της μεθόδου της δημοπρασίας εμφανίζουν αισθητές μεταβολές - διότι ήταν διοικητικά καθορισμένα χωρίς αμιγώς ιδιωτικοοικονομικά κριτήρια.

Πίνακας 3

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Συνεχώς Ανατοκιζόμενων Αποδόσεων των Τρίμηνων Έντοκων Γραμματίων του Ελληνικού Δημοσίου (Ε.Γ.Ε.Δ) σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία βάση¹ (02/01/85 - 07/11/97)

	Ε.Γ.Ε.Δ (Ημερήσια)	Ε.Γ.Ε.Δ (Εβδομαδιαία)
Μέσος (×100)	1.96	1.96
Διάμεσος (×100)	2.05	2.05
Τυπ. Αποκλ. (×100)	0.34	0.34
Συμμετρία	-0.99	-0.96
Κύρτωση	4.82	4.91

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα στατιστικά στοιχεία των Υπερβάλλουσων αποδόσεων (excess returns) του Γενικού και Τραπεζικού δείκτη πάνω από την απόδοση των Τρίμηνων Ε.Γ.Ε.Δ. σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία βάση. Στην περίπτωση του Γενικού Δείκτη σε εβδομαδιαία βάση το αρνητικό νούμερο του μέσου σημαίνει ότι ένας επενδυτής θα είχε μεγαλύτερο όφελος αν επένδυε τα χρήματα του στο περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, παρά στην χρηματιστηριακή αγορά κάθε Τετάρτη. Το συμπέρασμα αυτό με την πρώτη ματιά φαίνεται περίεργο, αλλά αν αναλογιστούμε ότι στο Χ.Α.Α. αυτό που καθορίζει την κίνηση του δείκτη - σε μικρότερο βαθμό τα τελευταία δύο χρόνια - είναι η φημολογία και τα κερδοσκοπικά παιχνίδια που ως επί το πλείστον εκδηλώνονται την Δευτέρα.

¹ Τα επιτόκια των Τρίμηνων Ε.Γ.Ε.Δ είναι σε μηνιαία βάση, αλλά εξαιτίας της έλλειψης αναπτυγμένης δευτερογενούς αγοράς, η οποία θα μας παρέχει την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο (risk free rate) χρησιμοποιούμε τα μηνιαία δεδομένα των τρίμηνων Ε.Γ.Ε.Δ.

Πίνακας 4

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Υπερβάλλουσων Αποδόσεων του
Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη πάνω από την απόδοση των Τρίμηνων
Ε.Γ.Ε.Δ. σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία βάση (02/01/85 - 07/11/97)

	Γενικός Δείκτης (Ημερήσιος)	Γενικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)	Τραπεζικός Δείκτης (Ημερήσιος)	Τραπεζικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)
Μέσος (×100)	2.94	-0.92	3.57	0.34
Διάμεσος (×100)	0.62	0.00	0.59	0.73
Τυπ. Αποκλ. (×100)	79.07	72.98	101.13	91.26
Συμμετρία	0.49	-1.03	0.58	0.36
Κύρτωση	22.16	12.07	62.67	14.11

Από τους Πίνακες 2, 3 και 4 φαίνεται ότι οι αποδόσεις - όπως αναμένεται - είναι λεπτόκυρτες (leptokurtic). Πιο συγκεκριμένα, εκτός από την περίπτωση των τρίμηνων Ε.Γ.Ε.Δ. όπου η κύρτωση είναι σχετικά κοντά στο 3 (4.82), στις υπόλοιπες αποδόσεις είναι πολύ μεγαλύτερη από την κύρτωση της κανονικής κατανομής. Η επιβεβαίωση του εμπειρικού αυτού στοιχείου από τους Mandelbrot (1963), Fama (1965) και άλλους, οδήγησε στην δημιουργία μιας μεγάλης βιβλιογραφίας που θεωρεί τις αποδόσεις των μετοχών ως τιμές ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών προερχόμενες από κατανομές με χοντρές ουρές (thick - tailed).

3.3 Έλεγχοι Μοναδιαίας ρίζας

Όπως είναι γνωστό, πριν από οποιαδήποτε οικονομετρική εκτίμηση στην οποία γίνεται χρήση χρονολογικών σειρών είναι αναγκαία η εξέταση των σειρών ως προς τη στασιμότητα ή μη αυτών και ως προς την ύπαρξη μακροχρόνιας σχέσης, σχέσης συνολοκλήρωσης, εφόσον οι σειρές είναι μη στάσιμες ορισμένου βαθμού. Η ανάγκη εξέτασης της συμπεριφοράς των χρονολογικών σειρών προκύπτει από το γεγονός ότι η χρήση σε κάποια οικονομετρική εκτίμηση σειρών που παρουσιάζουν μη

στασιμότητα ή σε επόμενο στάδιο μη συνολοκλήρωση, οδηγεί σε πλασματικά (spurious) αποτελέσματα που μπορεί να μας παρασύρουν σε λάθος συμπεράσματα (Davidson και MacKinnon, 1993).

Για την εξέταση της ύπαρξης στασιμότητας των σειρών γίνεται χρήση της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε από τους Dickey και Fuller (1979), η οποία βασίζεται στους γνωστούς ελέγχους μοναδιαίας ρίζας. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης εργασίας εφαρμόζεται η μεθοδολογία των Augmented Dickey Fuller (ADF) ελέγχων για μη στασιμότητα η οποία λαμβάνει υπ' όψη την πιθανή ύπαρξη αυτοσυσχέτισης στα κατάλοιπα της εξίσωσης παλινδρόμησης. Για όλους τους ελέγχους χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις (4) χρονικές υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής στην εξίσωση καθώς και η μεταβλητή της τάσης, όπως εξηγείται και στην υποσημείωση του Πίνακα 5 παρακάτω, ο οποίος παρουσιάζει τα αποτελέσματα των ελέγχων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η δύναμη αυτών των ελέγχων δεν εξαρτάται από το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι διαθέσιμες αλλά από το εύρος των ετών που καλύπτουν (Shiller και Perron, 1985).

Πίνακας 5

Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας (Unit Root Tests) Δεικτών Χ.Α.Α.

Μεταβλητή	Επίπεδα ADF statistic	D.W statistic	Πρώτες Διαφορές ADF statistic	D.W statistic	Συμπέρασμα
G	-1.89	1.99	-24.69	1.99	I(1)
B	-1.27	1.99	-25.34	1.99	I(1)
GW	-2.66	2.00	-10.37	1.99	I(1)
BW	-2.07	1.99	-10.29	1.99	I(1)

Παρατηρήσεις:

(1) Η παλινδρόμηση ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε είναι η εξής:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\gamma - 1) y_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \Delta y_{t-i}$$

(2) Η παραπάνω σχέση ελέγχει την υπόθεση $H_0: \gamma - 1 = 0$, δηλαδή $\gamma = 1$.

(3) Η κριτική τιμή του ελέγχου ADF σε επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι -3.1318.

(4) Ο συμβολισμός των μεταβλητών: *G*: Γενικός δείκτης τιμών του Χ.Α.Α σε ημερήσια βάση, *B*: Κλαδικός δείκτης τιμών τραπεζών σε ημερήσια βάση, *GW*: Γενικός δείκτης τιμών του Χ.Α.Α σε εβδομαδιαία βάση, *BW*: Κλαδικός δείκτης τιμών τραπεζών σε εβδομαδιαία βάση

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής:

- Στα επίπεδα των χρονολογικών σειρών δεν απορρίπτεται η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, άρα οι σειρές είναι μη στάσιμες.



- Οι σειρές στις πρώτες διαφορές παρουσιάζονται στάσιμες και επομένως χαρακτηρίζονται ως $I(1)$.
- Το γεγονός ότι οι σειρές είναι $I(1)$ οδηγεί στο επόμενο στάδιο της εξέτασης της πιθανής ύπαρξης μακροχρόνιας σχέσης ή σχέσης συνολοκλήρωσης μεταξύ των χρονολογικών σειρών.

3.4 Έλεγχοι συνολοκλήρωσης

Όπως διαπιστώσαμε παραπάνω, οι σειρές που εξετάζουμε δεν είναι στάσιμες στα επίπεδα, άρα η χρησιμοποίησή τους σε μια οικονομετρική εκτίμηση πιθανόν να δημιουργούσε πλασματικά αποτελέσματα. Όμως η οικονομική θεωρία συχνά προτείνει ότι συγκεκριμένα ζεύγη μεταβλητών παρ' όλο που δεν είναι στάσιμα μπορεί να συνδέονται με κάποια μακροχρόνια σχέση ισορροπίας, δηλαδή οι μεταβλητές αυτές μπορεί να απομακρύνονται από την ισορροπία για κάποια χρονική στιγμή ή περίοδο, αναμένεται όμως ότι οι οικονομικές δυνάμεις θα λειτουργήσουν έτσι ώστε να αποκατασταθεί η ισορροπία. Για να καθορίσουμε με σχετική ακρίβεια το τι θα συμβεί στο μέλλον θα πρέπει να προχωρήσουμε σε μια σειρά ελέγχων.

Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο Πίνακα 5, οι μεταβλητές στις οποίες έγινε αναφορά χαρακτηρίζονται ως $I(1)$. Γνωρίζουμε ότι αυτές οι μεταβλητές τείνουν να αποκλίνουν καθώς το $n \rightarrow \infty$ διότι οι μη δεσμευμένες διακυμάνσεις τους είναι συνάρτηση του n . Επομένως, φαινομενικά διαπιστώνουμε ότι αυτές οι μεταβλητές δεν μπορεί να έχουν κάποια μακροχρόνια σχέση ισορροπίας που να τις συνδέει. Όμως, στην πραγματικότητα είναι δυνατόν για δύο ή περισσότερες μεταβλητές οι οποίες είναι $I(1)$ να υπάρχει ένας δεδομένος γραμμικός συνδυασμός αυτών που να τις καθιστά $I(0)$. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί με το κριτήριο των Engle και Granger, (1987) ή *EG Test* το οποίο περιλαμβάνει αρχικά την εκτίμηση μιας εξίσωσης συνολοκλήρωσης της μορφής $y_t = \alpha + \beta t + \gamma x_{it} + u_t$ και στη συνέχεια, τον έλεγχο των Dickey και Fuller στα εκτιμημένα κατάλοιπα της εξίσωσης αυτής. Τα αποτελέσματα των παραπάνω ελέγχων παρουσιάζονται στους Πίνακες 6 και 7 που ακολουθούν.

Πίνακας 6

Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης (cointegration tests) κατά Engle-Granger μεταξύ του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη τιμών του Χ.Α.Α. σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση.

Παράμετρος	Εξίσωση Συνολοκλήρωσης μεταξύ <i>G</i> και <i>B</i>	Εξίσωση Συνολοκλήρωσης μεταξύ <i>GW</i> και <i>BW</i>
α	92.99 (20.51)	91.01 (10.61)
β	0.07 (17.40)	0.29 (7.11)
γ	0.53 (84.34)	0.55 (47.01)
R^2 adj.	0.91	0.93
<i>D.W</i>	0.022	0.012

Παρατηρήσεις:

- (1) Η μορφή της εξίσωσης συνολοκλήρωσης που χρησιμοποιήθηκε είναι η εξής:
 $y_t = \alpha + \beta t + x_{it} + \gamma u_t$, όπου: $y_t = G, GW$ και $x_{it} = B, BW$.
- (2) Η κανονικοποίηση της εξίσωσης έγινε στη σειρά του Γενικού δείκτη τιμών του Χ.Α.Α.
- (3) Οι αριθμοί στις παρενθέσεις δείχνουν τις τιμές του στατιστικού t .

Πίνακας 7

Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας (Unit Root tests) των Καταλοίπων των Εξισώσεων Συνολοκλήρωσης.

Μεταβλητή	Επίπεδα (<i>ADF statistic</i>)	<i>D.W</i> <i>statistic</i>	Συμπέρασμα
Κατάλοιπα εξίσωσης συνολοκλήρωσης <i>G-B</i>	-4.00	2.00	$I(0)$
Κατάλοιπα εξίσωσης συνολοκλήρωσης <i>GW-BW</i>	-1.41	2.00	$I(1)$

Παρατηρήσεις:

- (1) Η τεχνητή παλινδρόμηση ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε είναι η εξής:

$$\Delta u_t = (\gamma - 1) u_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \Delta u_{t-i}$$

- (2) Η παραπάνω σχέση ελέγχει την υπόθεση $H_0: \gamma - 1 = 0$.
- (3) Η κριτική τιμή του ελέγχου *ADF* για την ύπαρξη σχέσης συνολοκλήρωσης σε επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι -2.76.



Από τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώνεται η ύπαρξη σχέσης συνολοκλήρωσης μεταξύ του Γενικού Δείκτη τιμών του Χ.Α.Α. και του Κλαδικού Δείκτη των Τραπεζών μόνο στα Ημερήσια στοιχεία.

Βέβαια, θα πρέπει να τονισθεί ότι οι έλεγχοι για συνολοκλήρωση που βασίζονται στα κατάλοιπα της εξίσωσης συνολοκλήρωσης παρουσιάζουν αρκετά μεθοδολογικά προβλήματα (Davidson και MacKinnon, 1993). Αρχικά, οι εκτιμήσεις του διανύσματος συνολοκλήρωσης εξαρτώνται από το ποια μεταβλητή χρησιμοποιείται ως εξαρτημένη, πράγμα που σημαίνει ότι σε πεπερασμένα δείγματα θα επηρεάζονται και τα εκτιμημένα κατάλοιπα, επομένως, και οι κριτικές τιμές ελέγχου συνολοκλήρωσης που βασίζονται σε αυτά τα κατάλοιπα. Επίσης, όλα τα προβλήματα που παρουσιάζονται στους ελέγχους μοναδιαίας ρίζας αντιστοιχούν και στους ελέγχους συνολοκλήρωσης που βασίζονται στα κατάλοιπα της παλινδρόμησης συνολοκλήρωσης και τέλος, για πεπερασμένα δείγματα οι κριτικές τιμές των ελέγχων βασίζονται στην φύση της διαδικασίας που παράγει τα δεδομένα κάθε χρονολογικής σειράς (Data Generating Process ή DGP).

Έτσι για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα ο Johansen (1991), ανέπτυξε μια μεθοδολογία που βασίζεται στα υποδείγματα VAR και η οποία, με εκτιμήσεις συστημάτων με την χρήση της μεθόδου της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood), προσπαθούν να προσδιορίσουν όλες τις δυνατές μακροχρόνιες σχέσεις συνολοκλήρωσης μεταξύ χρονολογικών σειρών καθώς και να ελέγξουν το πραγματικό πλήθος σχέσεων συνολοκλήρωσης (με την χρήση του στατιστικού του λόγου πιθανοφανειών, LR). Ο λόγος πιθανοφανειών δεν λαμβάνει υπ' όψη το ποια μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί ως εξαρτημένη.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με τη χρήση της μεθοδολογίας του Johansen για τον υπολογισμό των σχέσεων συνολοκλήρωσης του Γενικού και του Τραπεζικού δείκτη σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση. Για τον υπολογισμό των διανυσμάτων συνολοκλήρωσης γίνεται χρήση μιας βασικής υπόθεσης. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία που παράγει τα δεδομένα μας περιλαμβάνει και μη στοχαστική γραμμική τάση. Με βάση αυτή την βασική υπόθεση έχουμε δύο άλλες υποπεριπτώσεις. Η πρώτη περιλαμβάνει στην εξίσωση συνολοκλήρωσης σταθερό όρο και η δεύτερη περιλαμβάνει σταθερό όρο και γραμμική τάση.



Στο πρώτο τμήμα του Πίνακα 8 παρουσιάζονται οι έλεγχοι LR του λόγου πιθανοφανειών για τον προσδιορισμό του αριθμού των πιθανών σχέσεων συνολοκλήρωσης. Σύμφωνα με αυτά τα αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μία σαφής σχέση συνολοκλήρωσης μεταξύ του Γενικού Δείκτη τιμών και του Κλαδικού Δείκτη των Τραπεζών στα Ημερήσια στοιχεία και για τις δύο υποθέσεις στην εξίσωση συνολοκλήρωσης, πράγμα που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.

Από την άλλη πλευρά, διαπιστώνουμε ότι και με αυτή την μεθοδολογία δεν βρίσκουμε σχέση συνολοκλήρωσης μεταξύ του Γενικού Δείκτη και του Τραπεζικού Δείκτη για τα εβδομαδιαία στοιχεία. Το ίδιο συμπέρασμα συνάγεται και για τις δύο διαφορετικές υποθέσεις σχετικά με την εξίσωση συνολοκλήρωσης. Τέλος, στο δεύτερο τμήμα του Πίνακα 8 παρουσιάζονται τα διανύσματα συνολοκλήρωσης με βάση τους ελέγχους που προηγήθηκαν. Παρατηρώντας συγχρόνως τα αποτελέσματα του Πίνακα 8 και του Πίνακα 6, όσον αφορά τους εκτιμημένους συντελεστές παρατηρούμε σημαντικές διαφορές που βασικά οφείλονται στη μεθοδολογία εκτίμησης και προσδιορισμού των πιθανών σχέσεων. Η μεθοδολογία του Johansen είναι θεωρητικά περισσότερο πλήρης.

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει - στο οποίο συμφωνούν και οι δύο μεθοδολογίες - είναι ότι υπάρχει μια αντιστοιχία *1 προς 1* στη σχέση Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη μόνο στα ημερήσια στοιχεία και όχι στα εβδομαδιαία.



Πίνακας 8

Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης (cointegration tests) κατά Johansen μεταξύ του Γενικού και του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α. σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση.

(α) Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης

(Υπόθεση: Υπαρξη γραμμικής τάσης στη χρονολογική σειρά και σταθερού όρου στην Ε.Σ*)

H ₀ : Αριθμός Διανυσμάτων Συνολοκλήρωσης (r)	Γενικός -Τραπεζικός (Ημερήσια στοιχεία)		Γενικός -Τραπεζικός (Εβδομαδιαία στοιχεία)	
	LR statistic	Critical value 5%	LR statistic	Critical value 5%
r=0	63.90	15.41	12.94	25.32
r≤1	3.40	3.76	4.25	12.25
(Υπόθεση: Υπαρξη γραμμικής τάσης στη χρονολογική σειρά και σταθερού όρου και γραμμικής τάσης στην Ε.Σ*)				
	LR statistic	Critical value 5%	LR statistic	Critical value 5%
r=0	70.35	25.32	12.94	25.32
r≤1	9.81	12.25	4.25	12.25

(β) Εκτιμημένα κανονικοποιημένα διανύσματα συνολοκλήρωσης

(Υπόθεση: Υπαρξη γραμμικής τάσης στη χρονολογική σειρά και σταθερού όρου στην Ε.Σ*)

Γενικός -Τραπεζικός (Ημερήσια στοιχεία)	(1.000, -0.62, -141.54)
Γενικός -Τραπεζικός (Εβδομαδιαία στοιχεία)	Δεν υπάρχει διάνυσμα συνολοκλήρωσης
(Υπόθεση: Υπαρξη γραμμικής τάσης στη χρονολογική σειρά και σταθερού όρου και γραμμικής τάσης στην Ε.Σ*)	
Γενικός -Τραπεζικός (Ημερήσια στοιχεία)	(1.000, -0.61, -0.007, -137.69)
Γενικός -Τραπεζικός (Εβδομαδιαία στοιχεία)	Δεν υπάρχει διάνυσμα συνολοκλήρωσης

Παρατηρήσεις:

- (1) Το πρώτο τμήμα του πίνακα παρουσιάζει τους ελέγχους του μέγιστου πλήθους των σχέσεων συνολοκλήρωσης μεταξύ των ζευγών των χρονολογικών σειρών με τη χρήση του ελέγχου LR.
- (2) Το δεύτερο τμήμα του πίνακα παρουσιάζει τα κανονικοποιημένα εκτιμημένα διανύσματα συνολοκλήρωσης ανάλογα με τις υποθέσεις που γίνονται δεκτές για τη μορφή των εξισώσεων.
- (3) Τα διανύσματα είναι κατασκευασμένα ως εξής: (B ή BW, Σταθερά) και (B, Τάση, Σταθερά), για τις δύο υποπεριπτώσεις που εξετάζονται αντίστοιχα.
- (4) Οι κριτικές τιμές ελέγχου προκύπτουν από την κατανομή χ^2 ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας και το πλήθος των παρατηρήσεων.
- (5) Ε.Σ* αναφέρεται στην Εξίσωση Συνολοκλήρωσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εναλλακτικές μορφές απόδοσης

Αν ορίσουμε ως P_t την τιμή μιας μετοχής την χρονική περίοδο t , τότε η απλή καθαρή απόδοση (simple net return) $[R_t]$ της μετοχής αυτής ανάμεσα σε δύο διαχρονικές περιόδους $t-1$ και t είναι ίση με :

$$R_t = (P_t / P_{t-1}) - 1$$

Η απλή μεικτή απόδοση (simple gross return) ισούται με την καθαρή απόδοση συν ένα $[1 + R_t]$. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η μεικτή απόδοση της μετοχής για τις πρόσφατες k περιόδους, από την περίοδο $t-k$ έως την περίοδο t $[1 + R_t(k)]$, είναι απλά ίση με το γινόμενο των αποδόσεων των k περιόδων από την $t-k+1$ έως την t :

$$\begin{aligned} 1 + R_t(k) &\equiv (1 + R_t) (1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= (P_t / P_{t-1}) (P_{t-1} / P_{t-2}) \dots (P_{t-k+1} / P_{t-k}) \\ &= (P_t / P_{t-k}) \end{aligned}$$

Αυτές οι αποδόσεις πολλών περιόδων ονομάζονται ανατοκιζόμενες αποδόσεις (compound returns). Παρ' ότι οι αποδόσεις δεν βασίζονται σε μια κλίμακα (scale-free), είναι εκφρασμένες σε μονάδες και ορισμένες σε ένα χρονικό διάστημα.

Μια εναλλακτική και πιο πρακτική μορφή είναι οι συνεχώς ανατοκιζόμενες ή λογαριθμικές αποδόσεις (r_t) οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$r_t = \log(1 + R_t) \times 100 = \log(P_t / P_{t-1}) \times 100$$

Όπου είναι ο φυσικός λογάριθμος της απλής μεικτής απόδοσης εκφρασμένης σε ποσοστό. Τα πλεονεκτήματα των συνεχώς ανατοκιζόμενων αποδόσεων γίνονται φανερά αν εξετάσουμε τις αποδόσεις πολλών περιόδων:



$$\begin{aligned}
r_t(k) &= \log [1 + R_t(k)] = \log [(1 + R_t) (1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})] \\
&= \log (1 + R_t) + \log (1 + R_{t-1}) + \dots + \log(1 + R_{t-k+1}) \\
&= r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}
\end{aligned}$$

και επομένως, η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση πολλών περιόδων είναι το άθροισμα των αποδόσεων κάθε περιόδου ξεχωριστά. Με αυτό τον τρόπο ο ανατοκισμός, μια διαδικασία με πολλαπλασιαστική μορφή μετατρέπεται σε αθροιστική μέσω των λογαρίθμων. Το βασικό πλεονέκτημα της εν λόγω μεθοδολογίας έγκειται στο γεγονός η υποδειματοποίηση των χρονολογικών σειρών των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου γίνεται πιο απλή. Αυτό συμβαίνει διότι, συνήθως, διέπονται από τις επιθυμητές ιδιότητες της στασιμότητας και της εργοτικότητας.

Εμπειρικές Εφαρμογές των Υποδειγμάτων ARCH

4.1 Εισαγωγή

Η υποκατάσταση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης αποτελεί για πολλές δεκαετίες μια σημαντική παράμετρο στην έρευνα της αποτίμησης των περιουσιακών στοιχείων. Η πλειοψηφία της έρευνας αυτής αφορά την υποκατάσταση κινδύνου-απόδοσης μεταξύ διαφορετικών μετοχών για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (συγκριτική στατική ανάλυση).

Η διαχρονική αλληλεξάρτηση κινδύνου-απόδοσης έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές, ενδεικτικά αναφέρουμε τους Fama και Schwert (1977), French, Schwert και Stambaugh (1987), Chou (1988), Harvey (1989), Campbell και Hentschel (1992), Nelson (1991) και Glosten, Jagannathan και Runkle (1993).

Είναι κοινή διαπίστωση ότι για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα οι επενδυτές απαιτούν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από μια μετοχή που εμπεριέχει μεγαλύτερο κίνδυνο. Αντίθετα, δεν υπάρχει ομοφωνία για τη διαχρονική σχέση κινδύνου-απόδοσης. Δηλαδή, στο ερώτημα αν οι επενδυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδότηση κινδύνου (risk premium), κατά μέσο όρο, για μια επένδυση με μεγαλύτερο κίνδυνο διαχρονικά, δίνονται διαφορετικές απαντήσεις.

Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι οι ορθολογικοί επενδυτές (rational risk-averse) επιθυμούν υψηλότερη επιδότηση κινδύνου όταν η αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής είναι περισσότερο αβέβαιη. Υπάρχει όμως η περίπτωση να συνυπάρχουν περίοδοι υψηλού κινδύνου με περιόδους κατά τις οποίες οι επενδυτές μπορούν να ανεχθούν μεγαλύτερο κίνδυνο, με αποτέλεσμα να μην απαιτείται μεγαλύτερη επιδότηση κινδύνου. Επιπλέον, αυτό μπορεί να συμβεί και όταν οι επενδυτές επιθυμούν να αποταμιεύσουν σχετικά περισσότερο, διότι προβλέπουν ότι το μέλλον θα είναι πιο αβέβαιο. Στη προκειμένη περίπτωση, αν είναι διαθέσιμα όλα τα

περιουσιακά στοιχεία που μας βοηθούν να μεταφέρουμε τρέχοντα εισοδήματα στο μέλλον, τότε είναι πιθανόν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο να μειωθεί και ως εκ τούτου να μειωθεί και η επιδότηση κινδύνου. Επιπρόσθετα, οι Abel (1988) και Gennotte και Marsh (1993) έδειξαν ότι η επιδότηση κινδύνου του χαρτοφυλακίου της αγοράς δύναται, στην ισορροπία, να είναι χαμηλότερη κατά τη διάρκεια περιόδων που χαρακτηρίζονται από υψηλότερο κίνδυνο. Επομένως, ένα θετικό ή αρνητικό πρόσημο στη συνδιακύμανση μεταξύ του δεσμευμένου μέσου και της δεσμευμένης διακύμανσης των υπερβάλλουσων αποδόσεων των μετοχών, είναι συνεπές με τη θεωρία. Από τη στιγμή, λοιπόν, που υπάρχουν διαφορετικές προβλέψεις για τη διαχρονική σχέση κινδύνου-απόδοσης, γίνεται πολύ σημαντική η εμπειρική διερεύνηση του θέματος.

Η εμπειρική βιβλιογραφία που ασχολείται με εν λόγω θέμα προσπαθεί να χαρακτηρίσει τη φύση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ δεσμευμένου μέσου και δεσμευμένης διακύμανσης (ή τυπικής απόκλισης) των υπερβάλλουσων αποδόσεων των μετοχών. Τα συμπεράσματα που εξάγονται έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, οι Campbell και Hentschel (1992), ο Chou (1988) και οι French, Schwert και Stambaugh (1987) συμπεραίνουν ότι τα δεδομένα είναι συνεπή με μια θετική σχέση μεταξύ των δεσμευμένων αναμενόμενων αποδόσεων και της δεσμευμένης διακύμανσης. Από την άλλη πλευρά, οι Fama και Schwert (1977), ο Campbell (1987), ο Nelson (1991), οι Pagan και Hong (1991) και οι Breen, Glosten και Jagannathan (1989) βρήκαν μια αρνητική σχέση. Η διερεύνηση της διαχρονικής σχέσης κινδύνου-απόδοσης μπορεί να γίνει με τα υποδείγματα ARCH διότι μας παρέχουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε τις δεσμευμένες ροπές των αναμενόμενων αποδόσεων.

Η πιο διαδεδομένη εφαρμογή της κλασικής θεωρίας χαρτοφυλακίου την οποία ανέπτυξε πρώτος ο Harry Markowitz (1959), είναι ο συντελεστής συστηματικού κινδύνου β (beta coefficient). Ο υπολογισμός του είναι πολύ εύκολος διότι προκύπτει από ένα απλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης, το οποίο επεκτείνεται σε δυναμική μορφή με τεχνητό τρόπο (βλέπε Κεφάλαιο 1). Με την ανάπτυξη των πολυπαραμετρικών υποδειγμάτων ARCH είναι εφικτή η εξαγωγή του δυναμικού συντελεστή β , ο οποίος υπολογίζεται με βάση τις διαχρονικά μεταβαλλόμενες δεσμευμένες δευτερες ροπές. Συνεπώς, δεν είμαστε αναγκασμένοι πλέον να



επιβάλλουμε τη μη-ρεαλιστική υπόθεση του ομοιόμορφου συνόλου πληροφοριών σε όλη τη διάρκεια του δείγματος.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τα εξής. Στην ενότητα 4.2.1 παρουσιάζονται η μεθοδολογία και τα εμπειρικά αποτελέσματα της εκτίμησης ενός υποδείγματος EGARCH-M. Τα εμπειρικά αποτελέσματα της έρευνας συμπληρώνονται με την εκτίμηση ενός πολυπαραμετρικού υποδείγματος GARCH-M στην ενότητα 4.2.2. Η ενότητα 4.3 περιλαμβάνει τα συμπεράσματα και τις τελικές διαπιστώσεις από την εφαρμογή των υποδειγμάτων ARCH στα υποδείγματα αποτίμησης των περιουσιακών στοιχείων.

4.2 Μεθοδολογία και εμπειρικά αποτελέσματα

4.2.1 Μονοπαραμετρικά υποδείγματα

Η μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς των αποδόσεων των μετοχών είχε βασιστεί στις υποθέσεις της σταθερότητας της διακύμανσης και της κανονικότητας. Αναφορικά με την πρώτη υπόθεση, οι Mandelbrot (1963a) και Fielitz (1971) ήταν οι πρώτοι που έδειξαν τη διαχρονική μεταβλητότητα της διακύμανσης. Ενώ σχετικά με τη δεύτερη, οι Mandelbrot (1963) και Fama (1965) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εμπειρική κατανομή των αποδόσεων είναι λεπτόκυρτη και συνεπώς, δεν μπορεί να είναι κανονική.

Πρόσφατες μελέτες έχουν βρει ότι οι αποδόσεις των μετοχών δεν είναι διαχρονικά ανεξάρτητες. Πιο συγκεκριμένα, ο Akgiray (1989) διαπίστωσε ότι οι δεύτερες ροπές των αποδόσεων των αμερικάνικων μετοχών έχουν σημαντικές διαχρονικές εξαρτήσεις και επίσης, ότι το GARCH (1, 1) περιγράφει με τον καλύτερο τρόπο τη στοχαστική ακολουθία των αποδόσεων. Ο Nelson (1991) εισήγαγε το υπόδειγμα EGARCH-M, με το οποίο εκτίμησε την επιδότηση κινδύνου της χρηματιστηριακής αγοράς των Η.Π.Α. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά του, η δεσμευμένη μεταβλητότητα είναι μη-συμμετρική συνάρτηση των περασμένων διαταραχών και η επιδότηση κινδύνου είναι στατιστικά ασήμαντη. Οι Pagan και Schwert (1990) συνέκριναν διαφορετικά υποδείγματα μεταβλητότητας των αποδόσεων και κατέληξαν στο



συμπέρασμα πως το υπόδειγμα του Nelson αποτελεί καλύτερη ερμηνεία των δεδομένων σε σχέση με τα υποδείγματα GARCH.

Ένας πολύ μεγάλος αριθμός ερευνών έχει αφιερωθεί στη μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων στις αναπτυγμένες αγορές. Από την άλλη πλευρά, δεν έχει δοθεί ανάλογη σημασία στις μικρότερες αγορές. Πιο συγκεκριμένα, για την ελληνική χρηματιστηριακή αγορά έχει γίνει περιορισμένος αριθμός σχετικών μελετών. Ο Παραϊοαννου (1982) ανέλυσε τις εξαρτήσεις των τιμών και των αποδόσεων των μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για μια περίοδο τουλάχιστον έξι χρόνων. Ο Panas (1990) θεμελίωσε την ύπαρξη ασθενούς μορφής αποτελεσματικότητας για δέκα μεγάλες ελληνικές επιχειρήσεις, ενώ οι Koutmos, Negakis και Theodosiou (1993) βρήκαν ότι η πιο κατάλληλη υποδειγματοποίηση για τις αποδόσεις της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς είναι το εκθετικό γενικευμένο υπόδειγμα ARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Επίσης, η διαχρονική σχέση μεταξύ του ελληνικού και του αμερικάνικου χρηματιστηρίου εξετάζεται από τους Theodosiou, Koutmos και Negakis (1993). Τέλος, οι Barkoulas και Travlos (1996) έλεγξαν την ύπαρξη ντερμιονιστικής μη-γραμμικής δομής (χάος) στην συμπεριφορά των αποδόσεων των ελληνικών μετοχών και οι Barkoulas, Baum και Travlos (1997) έκαναν κλασματική δυναμική ανάλυση (fractional dynamics) στη χρονολογική σειρά των αποδόσεων των ελληνικών μετοχών.

Η γενική μορφή του υποδείγματος που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη εργασία είναι το εξής:

$$R_t = E(R_t / I_{t-1}) + \varepsilon_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}(R_t / I_{t-1}) \quad (4.2.2)$$

όπου ε_t είναι ένα μη-αυτοσυσχετιζόμενο σφάλμα με μέσο μηδέν, ενώ μ_t και σ_t^2 είναι ο δεσμευμένος μέσος και η δεσμευμένη διακύμανση, αντίστοιχα, με βάση το σύνολο πληροφοριών I_{t-1} . Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, μ_t και σ_t^2 είναι συναρτήσεις των περασμένων αποδόσεων, σφαλμάτων και δεσμευμένων διακυμάνσεων. Ορίζουμε επίσης, $z_t \equiv \varepsilon_t / \sigma_t$ όπου z_t είναι μια διαχρονικά ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία με

μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα [$E(z_t / I_{t-1}) = 0$, $var(z_t / I_{t-1}) = 1$ για $t = 1, 2, \dots, T$]. Συμβολίζουμε με $f(z_t / \theta)$ την συνάρτηση πυκνότητας του z_t , όπου θ είναι διάνυσμα παραμέτρων ενός άγνωστου υποδείγματος, σχετικού όμως με την εξειδίκευση των μ_t και σ_t^2 . Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(\cdot)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή (Engle, 1982). Εναλλακτικές εξειδικεύσεις είναι η κατανομή t-student (Bollerslev, 1987) και η γενικευμένη εκθετική (Nelson, 1991). Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος των αποδόσεων, R_1, \dots, R_T , ή $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$, υπολογίζεται εύκολα από τη συνδυασμένη κατανομή των z_1, \dots, z_T , αν αντικαταστήσουμε $z_t \equiv \varepsilon_t / \sigma_t$ και λάβουμε υπ' όψη μας τον όρο της Ιακωβιανής ορίζουσας,¹ $dz_t / d\varepsilon_t = 1 / \sigma_t$,

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \{-\log(\sigma_t) + \log(\varepsilon_t / \sigma_t | \theta)\} \quad (4.2.3)$$

Αν μεγιστοποιήσουμε την σχέση (4.2.3) θα προκύψουν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ .

Ο δεσμευμένος μέσος εξειδικεύεται ως μια γραμμική συνάρτηση των αποδόσεων στο παρελθόν και της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης:

$$\mu_t = \beta_0 + \sum_{s=1}^k \beta_s R_{t-s} + c\sigma_t \quad (4.2.4)$$

Μια στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ των τρεχουσών και περασμένων αποδόσεων σημαίνει ότι οι τιμές των μετοχών μπορούν να προβλεφθούν χρησιμοποιώντας πληροφόρηση από το παρελθόν και συνεπώς, δεν ισχύει η υπόθεση του martingale. Ο δεσμευμένος μέσος είναι επίσης, συνάρτηση της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης σ_t (αποτέλεσμα EGARCH-M). Η μορφή αυτή είναι σύμφωνη με την σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία.² Όπως αναλύσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, τα κλασικά

¹ Οι συναρτήσεις πυκνότητας των σειρών R_1, \dots, R_T και $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ είναι όμοιες γιατί ο Ιακωβιανός όρος της μετατροπής του ε_t σε R_t είναι ίσος με την μονάδα. Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να εκφραστεί, για πρακτικούς λόγους σε όρους σφαλμάτων.

² Πιο συγκεκριμένα, ο Merton (1973) κατέληξε στη γραμμική σχέση μεταξύ των δύο πρώτων δεσμευμένων ροπών κάνοντας την υπόθεση της λογαριθμικής συνάρτησης αναμενόμενης χρησιμότητας στο διαχρονικό πρόβλημα του νοικοκυριού.

υποδείγματα GARCH ορίζουν τη δεσμευμένη διακύμανση ως μια γραμμική συνάρτηση των τετραγωνικών σφαλμάτων και των διακυμάνσεων των περασμένων περιόδων. Η βασική κριτική στη μορφή των υποδειγμάτων αυτών προέρχεται από τον Nelson (1991) και εστιάζεται στο γεγονός ότι οι περασμένες διαταραχές επιδρούν με τον ίδιο τρόπο στη μεταβλητότητα, ασχέτως από το πρόσημό τους. Ειδικότερα, μια αρνητική διαταραχή αναμένεται να έχει την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα όπως και μια θετική διαταραχή ίσου μεγέθους. Από την άλλη πλευρά, έχει βρεθεί ότι οι αρνητικές διαταραχές επιδρούν με διαφορετικό τρόπο απ' ότι οι θετικές. Πιο συγκεκριμένα, ο Nelson (1991) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι αρνητικές διαταραχές αυξάνουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη μεταβλητότητα των μετοχών της χρηματιστηριακής αγοράς των Η.Π.Α. Η κριτική του Nelson (1991) περιλαμβάνει και την επιβολή των περιορισμών μη-αρνητικότητας στις παραμέτρους της δεσμευμένης διακύμανσης και την ερμηνεία της εμμονής στη μεταβλητότητα.

Για να ξεπεραστούν τα προαναφερόμενα προβλήματα των κλασικών υποδειγμάτων GARCH, ο Nelson (1991) χρησιμοποίησε τη λογαριθμική συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης (βλέπε επίσης, Pagan και Schwert, 1990). Συνεπώς, η δεσμευμένη διακύμανση έχει την εξής γενική μορφή:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{s=1}^p \alpha_s h(z_{t-s}) + \sum_{s=1}^q \varphi_s \log(\sigma_{t-1}^2) \quad (4.2.5)$$

όπου $h(z_t) = |z_t| - E(|z_t|) + \delta z_t$ και $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$. Η διαδικασία $\{h(z_t)\}$ έχει μέσο μηδέν και είναι διαχρονικά ανεξάρτητη³. Για αρνητικές τιμές του z_t η κλίση της $h(z_t)$ ισούται με $\delta-1$, ενώ για θετικές τιμές του z_t ισούται με $\delta+1$.

Το υπόδειγμα EGARCH (p, q) που δίνεται από την σχέση (4.2.5) είναι μια μη-συμμετρική συνάρτηση των κανονικοποιημένων καταλοίπων, $z_t \equiv \varepsilon_t / \sigma_t$ και γι' αυτό το λόγο μπορεί να ερμηνεύσει μη-συμμετρικές επιδράσεις μιας διαταραχής στη μεταβλητότητα. Αν για παράδειγμα, το δ είναι αρνητικό σημαίνει πως οι αρνητικές διαταραχές έχουν μεγαλύτερη επίδραση από τις θετικές στη μεταβλητότητα, ή ισοδύναμα, ότι η μεταβλητότητα είναι υψηλότερη κατά την διάρκεια των πτώσεων

³ Η μόνη διαφορά του υποδείγματος που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη εργασία για εκτιμήσεις από το ακριβές υπόδειγμα του Nelson (1991) είναι ότι στη διαδικασία $h(z_t)$ δεν περιλαμβάνεται ο σταθερός όρος $\sqrt{2/\pi}$. Τα υπόλοιπα συμπεράσματα και αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα.



της αγοράς. Το αντίθετο συμβαίνει αν το δ είναι θετικό. Εκτός όμως, από τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα που περιγράψαμε, το υπόδειγμα EGARCH παρουσιάζει και μερικά μειονεκτήματα, τα οποία όμως δεν μειώνουν τη σημαντική συνεισφορά του στη βελτίωση του κλασικού υποδείγματος ARCH. Η εμπειρική εφαρμογή έχει δείξει ότι επειδή η επίδραση των πιο πρόσφατων διαταραχών είναι πλέον εκθετική και όχι τετραγωνική, αυξάνεται υπερβολικά -η επίδραση αυτή- σε περιπτώσεις μεγάλων διαταραχών. Επιπρόσθετα, υπάρχουν δυσκολίες στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας και στην κατασκευή προβλέψεων.

Το υπόδειγμα EGARCH-M (όπως και όλες οι εναλλακτικές μορφές των υποδειγμάτων ARCH) εκτιμάται με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, υποθέτοντας πως τα κατάλοιπα κατανέμονται (δεσμευμένα) κανονικά. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η διακύμανση εμφανίζεται σε μη-γραμμική μορφή στη συνάρτηση πιθανοφάνειας, είναι αναγκαία η χρήση αλγορίθμων για τη μεγιστοποίηση της. Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Marquant.

Η υπόθεση της κανονικής κατανομής των καταλοίπων δεν ισχύει συνήθως για τις χρηματοοικονομικές σειρές. Όταν συμβαίνει αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε την συνάρτηση της οιονεί μέγιστης πιθανοφάνειας (quasi maximum likelihood ή QML), δηλαδή τη μέγιστη πιθανοφάνεια με βάση μια υπόθεση που δεν ισχύει. Οι εκτιμητές του υποδείγματος ARCH που προκύπτουν με την παραπάνω μέθοδο είναι συνεπείς, αλλά δεν ισχύει το ίδιο και για τα σφάλματα. Το πρόβλημα των σφαλμάτων διορθώνεται με τη χρήση των «ισχυρών» σφαλμάτων (robust errors), τα οποία πρότειναν οι Bollerslev και Wooldridge (1992). Η μέθοδος QML χρησιμοποιείται και στην εκτίμηση του EGARCH-M (2, 1) με τα Ημερήσια δεδομένα της οποίας τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Πίνακα 9. Οι τάξεις $p=2$ και $q=1$ καθορίστηκαν με βάση το κριτήριο του Schwarz (SC)⁴ και το μέγεθός τους διαφέρει από τα αποτελέσματα των περισσότερων μελετών για τις αναπτυσσόμενες χρηματαγορές (Bollerslev *et al.*, 1992) αλλά και τις αναδυόμενες (Koutmos *et al.*, 1993), οι οποίες χρησιμοποιούν υποδείγματα χαμηλότερης τάξης.

⁴ Το κριτήριο Schwarz που χρησιμοποιήθηκε ορίζεται ως εξής: $SC = -(\max L(\theta) - (1/2) K \log(T) / T)$, όπου $L(\theta)$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος υπολογισμένη στο μέγιστο, K είναι ο αριθμός των εκτιμημένων παραμέτρων (μέγεθος του θ) και T είναι το μέγεθος του δείγματος. Αυτή η μορφή του SC δεν εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος. Το καλύτερο υπόδειγμα πρέπει να ελαχιστοποιεί το SC. Το SC επιλέχθηκε αντί του κριτηρίου του Akaike (AIC), διότι στις περιπτώσεις διανυσματικών αυτοπαλινδρομικών διαδικασιών (VAR), το SC είναι καταλληλότερο από AIC (βλέπε Lutkepohl, 1985).



Στο Πίνακα 10 παρουσιάζεται η στατιστική περιγραφή των κανονικοποιημένων καταλοίπων που προκύπτουν από την εκτίμηση του EGARCH-M (2, 1) για τα ημερήσια δεδομένα. Από τις τιμές του στατιστικού ελέγχου Ljung-Box (1978) συνάγεται πως τα κατάλοιπα είναι αυτοσυσχετιζόμενα. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση της αυτοσυσχέτισης στα ημερήσια δεδομένα της χρηματιστηριακής αγοράς των Η.Π.Α (βλέπε Chou 1988).

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης θα χρησιμοποιήσουμε τις συνεχώς ανατοκίζόμενες αποδόσεις σε εβδομαδιαία βάση. Επιπρόσθετα, με τη χρήση των εβδομαδιαίων στοιχείων δεν θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα που προκαλεί το «αποτέλεσμα του Σαββατοκύριακου» στα ημερήσια στοιχεία.

Στο Πίνακα 11 παρουσιάζονται οι εκτιμημένοι συντελεστές του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τις εβδομαδιαίες υπερβάλλουσες αποδόσεις του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α.

Πίνακας 9

Εκτιμήσεις του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τις Ημερήσιες Υπερβάλλουσες Αποδόσεις του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α

$$R_t^i = \beta_0 + \beta_1 R_{t-1}^i + c\sigma_t + \varepsilon_t$$

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \{|z_{t-1}| + \delta_1 z_{t-1}\} + \alpha_2 \{|z_{t-2}| + \delta_2 z_{t-2}\} + \varphi \log(\sigma_{t-1}^2)$$

	Μέγεθος δείγματος	β_0	β_1	c	α_0	α_1	α_2	δ_1	δ_2	φ	Log L
Γενικός Δείκτης (Ημερήσιος)	3200	0.008 (0.48)	0.017 (0.38)	0.276 (7.53)	-0.304 (10.92)	0.627 (11.06)	-0.255 (4.59)	0.066 (1.75)	-0.044 (1.35)	0.973 (117.51)	-2595
Τραπεζικός Δείκτης (Ημερήσιος)	3200	-0.005 (0.15)	0.175 (3.04)	0.011 (0.18)	-0.286 (6.08)	0.695 (8.73)	-0.341 (3.38)	0.014 (0.20)	0.021 (0.33)	0.953 (64.76)	-3345

Παρατηρήσεις:

- (1) Οι αριθμοί στις παρενθέσεις δείχνουν τις τιμές της κατανομής t .
- (2) Με R_t^i συμβολίζονται οι συνεχώς ανατοκίζόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις του Γενικού και του Τραπεζικού Δείκτη πάνω από την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, i = Γενικός, Τραπεζικός.
- (3) Log L είναι η τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας.



Πίνακας 10

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Ημερήσια Στοιχεία

	$E(z_t)$	$E(z_t^2)$	Συμμετρία	Κύρτωση	LB(6)	LB(12)	LB(24)	LB ² (6)	LB ² (12)	LB ² (24)
Γενικός Δείκτης	0.005	1.000	0.330	5.994	22.168	37.378	56.847	2.375	8.407	17.897
Τραπεζικός Δείκτης	0.040	0.996	0.407	10.796	20.484	27.466	41.999	10.128	11.640	17.330

Παρατηρήσεις:

- (1) z_t, z_t^2 είναι οι σειρές των κανονικοποιημένων καταλοίπων και των τετραγώνων τους, αντίστοιχα.
- (2) $LB(n)$ και $LB^2(n)$ είναι ο στατιστικός έλεγχος Ljung-Box για n χρονικές υστερήσεις των z_t και z_t^2 , αντίστοιχα. Το $LB(n)$ ακολουθεί τη κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας.
- (3) Οι κριτικές τιμές του $LB(n)$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% για $n = 6, 12, 24$ είναι 12.6, 21.1 και 36.5, αντίστοιχα.

Ο σταθερός όρος, β_0 , είναι θετικός στην περίπτωση του Γενικού Δείκτη. Το γεγονός αυτό αντανακλά είτε την διαφορετική φορολογική μεταχείριση των περιουσιακών στοιχείων είτε μια μορφή συνήθειας στις επιλογές των επενδυτών (Bollerslev *et al.* 1988). Για το Τραπεζικό Δείκτη ο σταθερός όρος γίνεται αρνητικός. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις είναι αρνητικές μέσα στα χρονικά όρια που καλύπτει το δείγμα μας. Απλά, υποδηλώνει πως οι αναμενόμενες αποδόσεις στο βραχυχρόνιο ορίζοντα μεταβάλλονται με το πέρασμα του χρόνου (time-varying). Σε αντίθεση με την μελέτη των Koutmos, Negakis και Theodosiou (1993)⁵, ο συντελεστής β_1 για το Γενικό Δείκτη είναι αρνητικός και στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο 5%. Γεγονός που συνεπάγεται πως οι αποδόσεις της προηγούμενης περιόδου επηρεάζουν αρνητικά τις τρέχουσες. Αναφορικά με το Τραπεζικό Δείκτη παρατηρούμε ότι ενώ οι αποδόσεις της προηγούμενης περιόδου επηρεάζουν θετικά τις τρέχουσες -σε αντίθεση με το Γενικό Δείκτη-, οι αποδόσεις των δύο προηγούμενων περιόδων έχουν αρνητική επίδραση.

⁵ Στη μελέτη αυτή χρησιμοποιούνται στοιχεία του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α για τη χρονική περίοδο από 3. 8. 81 έως 30. 9. 90 και ερμηνεύονται με τη χρήση ενός EGARCH-M (1, 1) με δομική αλλαγή για το έτος 1987.



Πίνακας 11

Εκτιμήσεις του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τις Εβδομαδιαίες
Υπερβάλλουσες Αποδόσεις του Γενικού και Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α

$$R'_t = \beta_0 + \beta_1 R'_{t-1} + \beta_2 R'_{t-2} + c\sigma_t + \varepsilon_t$$

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \{|z_{t-1}| + \delta_1 z_{t-1}\} + \alpha_2 \{|z_{t-2}| + \delta_2 z_{t-2}\} + \varphi \log(\sigma_{t-1}^2)$$

	Μέγεθος Δείγματος	β_0	β_1	$\beta_2^{(4)}$	c	α_0	α_1	α_2	δ_1	δ_2	φ	Log L
Γενικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)	651	0.082 (1.21)	-0.182 (1.94)	—	-0.144 (1.18)	-0.216 (3.77)	0.465 (4.81)	-0.214 (1.62)	-0.158 (1.51)	0.277 (2.77)	0.953 (38.89)	-612
Τραπεζικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)	651	-0.028 (0.50)	0.228 (3.15)	-0.019 (0.41)	0.079 (0.84)	-0.153 (2.56)	0.890 (8.44)	-0.683 (6.05)	0.018 (0.30)	0.098 (1.66)	0.979 (50.16)	-721

Παρατηρήσεις:

- (1) Οι αριθμοί στις παρενθέσεις δείχνουν τις τιμές της κατανομής t . Η κριτική τιμή της κατανομής t σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% είναι 1.96.
- (2) Με R'_t συμβολίζονται οι συνεχώς ανατοκιζόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις του Γενικού και του Τραπεζικού Δείκτη πάνω από την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, i = Γενικός, Τραπεζικός.
- (3) Log L είναι η τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας.
- (4) Η δεύτερη χρονική υστέρηση της ενδογενούς μεταβλητής χρησιμοποιείται μόνο για το Τραπεζικό Δείκτη.

Από τη στιγμή που η ετεροχρονισμένη αγοροπωλησία μετοχών (non-synchronous trading⁶) συνεπάγεται θετική αυτοσυσχέτιση των αποδόσεων, αναμένουμε τον αυτοπαλινδρομικό συντελεστής β_1 να είναι υπερεκτιμημένος (upward biased), παρ' ότι η χρήση του σταθμικού μέσου δείκτη και των συνεχώς ανατοκιζόμενων αποδόσεων ελαχιστοποιεί την μεροληψία αυτή (Blume και Stambaugh, 1983).

⁶ Το non-synchronous trading ή non-trading συμβαίνει στις χρονολογικές σειρές των τιμών των περιουσιακών στοιχείων όταν σχηματίζονται αυθαίρετα σε χρονικά διαστήματα ενός συγκεκριμένου μήκους, ενώ στην πραγματικότητα δημιουργούνται από χρονικά διαστήματα διαφορετικού (μη-κανονικού) μήκους. Για παράδειγμα, οι τιμές των μετοχών που δημοσιεύονται καθημερινά αφορούν τις τιμές κλεισίματος. Οι τιμές αυτές δεν σχηματίζονται κάθε μέρα την ίδια ώρα και συνεπώς, αν τις χαρακτηρίσουμε ως «ημερήσιες» τιμές έχουμε επιβάλλει την εσφαλμένη υπόθεση ότι χωρίζονται μεταξύ τους με το χρονικό κενό των 24 ωρών. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε αρχικά από το Fischer (1966). Τα πιο σύγχρονα υποδείγματα που λαμβάνουν υπ' όψη τους το non-trading έχουν αναπτυχθεί από τους Atchison, Butler και Simonds (1987) και τους Lo και MacKinlay (1988, 1990a, 1990b).



Επομένως, δεν είναι δυνατό να συμπεράνουμε ποια είναι η επίδραση του non-trading στους εκτιμητές της δεσμευμένης διακύμανσης.

Ο συντελεστής της σχετικής αποστροφής του κινδύνου ή εναλλακτικά το αποτέλεσμα του EGARCH-M (c) για το Γενικό Δείκτη είναι στατιστικά ασήμαντος σε επίπεδο 5% και αρνητικός. Το συμπέρασμα αυτό συμπίπτει με τα αποτελέσματα που εξήγαγε ο Nelson (1991) για τα χρηματοοικονομικά δεδομένα των Η.Π.Α στο θεμελιακό άρθρο των υποδειγμάτων EGARCH. Την ύπαρξη αρνητικής σχέσης μεταξύ της δεσμευμένης απόδοσης και της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης έχουν επιβεβαιώσει και οι Fama και Schwert (1977), Campbell (1987), Pagan και Hong (1991) και Breen, Glosten και Jagannathan (1989). Στην περίπτωση της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς η αρνητική αυτή σχέση πιστεύω ότι οφείλεται στη σημαντική έλλειψη «βάθους»⁷ και αποτελεσματικών θεσμικών ελέγχων στο Χ.Α.Α.. Οι ελλείψεις αυτές έχουν ως συνέπεια το γεγονός ότι οι επενδυτές ενεργούν με βάση το βραχυχρόνιο κέρδος και όχι τις μακροχρόνιες ορθολογικές επιλογές.

Ο συντελεστής ϕ εκτιμά το βαθμό εμμονής της μεταβλητότητας. Για το Γενικό Δείκτη είναι 0.953, ενώ για το Τραπεζικό 0.979. Ο στατιστικός έλεγχος ADF που παρουσιάζεται στο Πίνακα 12 απορρίπτει την ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας στη δεσμευμένη διακύμανση σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και για τα δύο δείγματα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τη διαπίστωση του Hsieh (1989) ότι τα υποδείγματα EGARCH έχουν μικρή πιθανότητα να παράγουν μη-στάσιμη διακύμανση. Η μη-ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας στο λογάριθμο της δεσμευμένης διακύμανσης έχει δύο σημαντικές συνέπειες:

- ◆ Οι διαταραχές στη μεταβλητότητα έχουν πεπερασμένη διάρκεια
- ◆ Η μη-δεσμευμένη διακύμανση είναι πεπερασμένη

Η συνάρτηση αντίδρασης (response function) της μεταβλητότητας στις διαταραχές, η οποία μετριέται από το ϕ , φθίνει με αργό ρυθμό. Πιο συγκεκριμένα, για το Τραπεζικό Δείκτη είναι 0.979 σε εβδομαδιαία βάση και συνεπώς, μετά από ένα μήνα η επίδραση εμμένει στο $0.979^{4.3}$ ή 0.912. Ακόμα και μετά το πέρασμα ενός χρόνου από την εκδήλωση της διαταραχής παραμένει το ένα τρίτο από την αρχική

⁷ Με τον όρο «βάθος» εννοούμε χαρακτηριστικά μιας χρηματιστηριακής αγοράς, όπως το ύψος των επενδεδυμένων κεφαλαίων, τον καθημερινό όγκο συναλλαγών, τη διεθνοποίηση της αγοράς και την οργάνωση της καθημερινής λειτουργίας της (εκκαθάριση συναλλαγών, αποθετήριο τίτλων κ. λ. π)



επίδραση (0.979⁵² ή 0.331). Αντίθετα, για το Γενικό Δείκτη η επίδραση της αρχικής διαταραχής μετά από ένα χρόνο έχει περιορισθεί στο 8% (0.953⁵²=0.081).

Πίνακας 12

Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας της $\log(\sigma_t^2)$

	<i>ADF statistic</i>	<i>Συμπέρασμα</i>
<i>Γενικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)</i>	-3.694	<i>I(0)</i>
<i>Τραπεζικός Δείκτης (Εβδομαδιαίος)</i>	-3.881	<i>I(0)</i>

Παρατηρήσεις:

(1) Η παλινδρόμηση ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε ήταν η εξής:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \Delta y_{t-i}$$

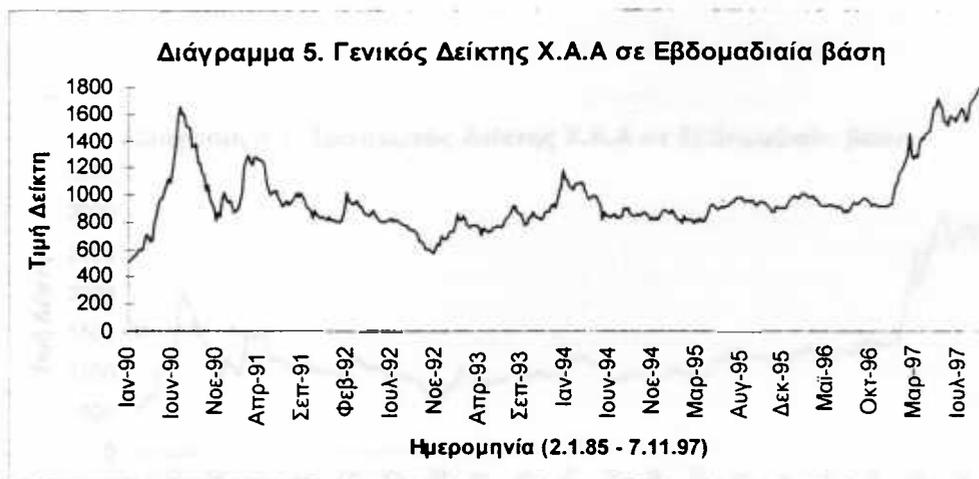
(2) Η παραπάνω σχέση ελέγχει την υπόθεση $H_0: \varphi = 0$.

(3) Η κριτική τιμή του ελέγχου ADF σε επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι -3.1318.

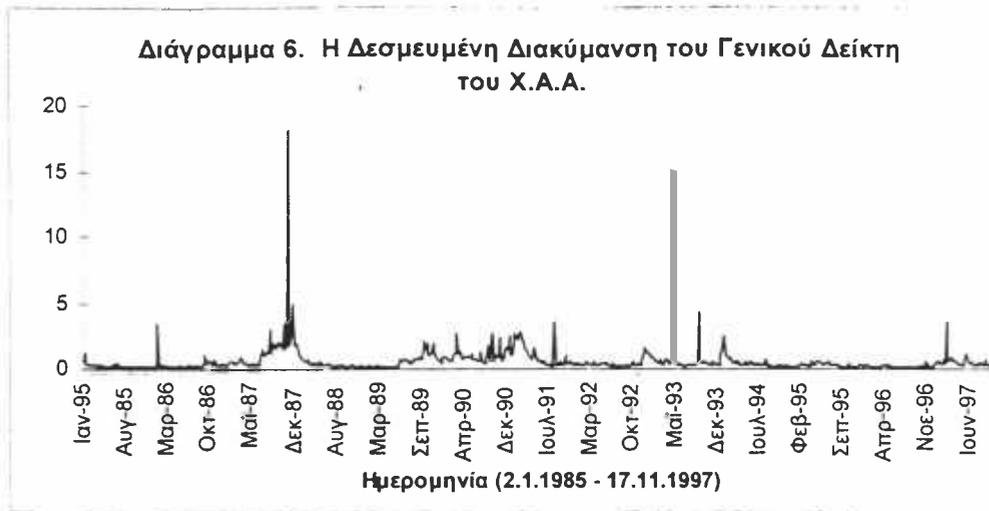
Ο αρνητικός συντελεστής ασυμμετρίας δ_1 του Γενικού Δείκτη στον Πίνακα 11 σημαίνει ότι οι αρνητικές διαταραχές που συμβαίνουν την προηγούμενη περίοδο αυξάνουν περισσότερο τη δεσμευμένη μεταβλητότητα, απ' ό,τι οι θετικές διαταραχές. Το γεγονός αυτό είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα του Nelson (1991) και των Pagan και Schwert (1990) για τη χρηματιστηριακή αγορά των Η.Π.Α. Αντίθετα, ο συντελεστής ασυμμετρίας δ_2 του Γενικού Δείκτη στον Πίνακα 11 είναι θετικός και ίσος με το συντελεστή ασυμμετρίας που βρίσκουν οι Koutmos, Negakis και Theodosiou (1993) για τα δεδομένα του Χ.Α.Α. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στο συγκεκριμένο υπόδειγμα ο συντελεστής ασυμμετρίας αφορά διαταραχές που συμβαίνουν δύο περιόδους πριν, ενώ ο συντελεστής που υπολογίζουν οι προαναφερόμενοι ερευνητές περιγράφει τη συμπεριφορά των διαταραχών που συμβαίνουν την αμέσως προηγούμενη περίοδο. Ειδικότερα, οι θετικές διαταραχές που συμβαίνουν δύο περιόδους πριν, αυξάνουν περισσότερο τη δεσμευμένη μεταβλητότητα, απ' ό,τι οι αρνητικές. Για το Τραπεζικό Δείκτη ισχύει το τελευταίο συμπέρασμα, με τη παρατήρηση ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας δ_2 επιδρά σε τριπλάσιο βαθμό πάνω στη μεταβλητότητα από τον αντίστοιχο συντελεστή του Γενικού Δείκτη. Συνεπώς, είναι σημαντικά μεγαλύτερη η επίδραση των διαταραχών

που συμβαίνουν δύο περιόδους πριν, πάνω στη δεσμευμένη μεταβλητότητα του Τραπεζικού Δείκτη, σε σχέση με αυτή του Γενικού. Τα παρατηρούμενα αυτά χαρακτηριστικά ενδέχεται να οφείλονται σε θεσμικούς παράγοντες του Χ.Α.Α. ή να αποτελούν γενικά γνώρισμα των αναδυόμενων αγορών.

Το Διάγραμμα 6 παρουσιάζει τη δεσμευμένη διακύμανση του Γενικού Δείκτη από τον Ιανουάριο του 1985 έως το Νοέμβριο του 1997. Αν παρατηρήσουμε ταυτόχρονα τη πορεία της τιμής και της δεσμευμένης διακύμανσης του Γενικού Δείκτη, όπως περιγράφονται από τα Διαγράμματα 5 και 6 αντίστοιχα, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με αυτό που μας υπαγορεύει και η ποιοτική αξιολόγηση του συντελεστή ασυμμετρίας (δ_2). Πιο συγκεκριμένα, όταν έχουμε ανοδική πορεία αυξάνεται με ταχύτερο ρυθμό η μεταβλητότητα. Η διαπίστωση αυτή επιβεβαιώθηκε στις μεγάλες ανόδους των ετών 1987, 1990 και 1997. Το ίδιο χαρακτηριστικό γνώρισμα παρατηρείται και στα Διαγράμματα 7 και 8, τα οποία αφορούν τα αντίστοιχα μεγέθη για το Τραπεζικό Δείκτη. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι οι θετικές διαταραχές έχουν τη τριπλάσια αύξηση της μεταβλητότητας, σε σχέση με το αντίστοιχο φαινόμενο στο Γενικό Δείκτη.⁸



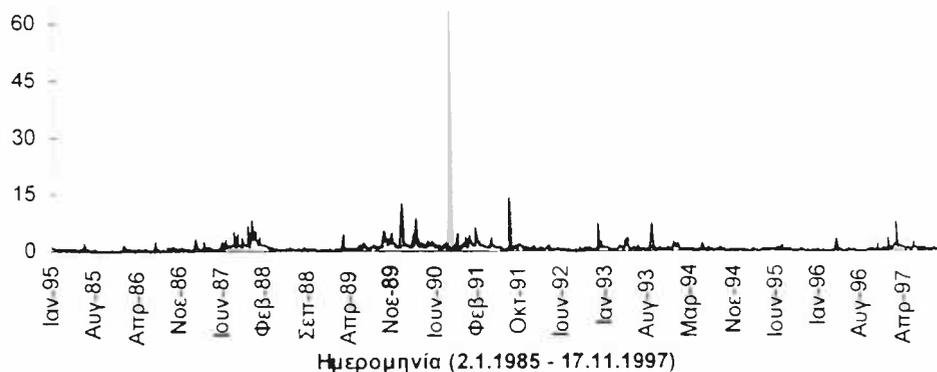
⁸ Παρατηρώντας προσεκτικά το κάθετο άξονα των Διαγραμμάτων 6 και 8 διαπιστώνουμε ότι η δεσμευμένη διακύμανση του Τραπεζικού Δείκτη μετρείται σε τριπλάσιες μονάδες, σε σχέση με αυτές του Γενικού.



Οι διαγνωστικοί έλεγχοι των κανονικοποιημένων καταλοίπων παρουσιάζονται στους Πίνακες 13 και 14. Η σωστή εξειδίκευση των υποδειγμάτων GARCH προϋποθέτει ότι τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα έχουν μέσο μηδέν, διακύμανση ίση με τη μονάδα και είναι διαχρονικά ανεξάρτητα. Ο στατιστικός έλεγχος Ljung-Box (1978) υπολογίζεται για 6, 12, 24 χρονικές υστερήσεις και αποδέχεται την υπόθεση της ανεξαρτησίας των κανονικοποιημένων καταλοίπων σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 0.05 για το Γενικό Δείκτη ενώ για το Τραπεζικό σε επίπεδο 0.005.



Διάγραμμα 8. Η Δεσμευμένη Διακύμανση του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α.



Πίνακας 13

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Εβδομαδιαία Στοιχεία

	$E(z_t)$	$E(z_t^2)$	Συμμετρία	Κύρτωση	$LB(6)$	$LB(12)$	$LB(24)$	$LB^2(6)$	$LB^2(12)$	$LB^2(24)$
Γενικός Δείκτης	0.014	0.992	-0.183	8.028	12.418	20.896	27.153	1.128	2.277	16.189
Τραπεζικός Δείκτης	-0.04	0.985	-0.274	6.413	18.783	27.436	35.950	2.349	4.650	9.534

Παρατηρήσεις:

- (1) z_t, z_t^2 είναι οι σειρές των κανονικοποιημένων καταλοίπων και των τετραγώνων τους, αντίστοιχα.
- (2) $LB(n)$ και $LB^2(n)$ είναι ο στατιστικός έλεγχος Ljung-Box για n χρονικές υστερήσεις των z_t και z_t^2 , αντίστοιχα. Το $LB(n)$ ακολουθεί τη κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας.
- (3) Οι κριτικές τιμές του $LB(n)$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 0.05 (0.005) για $n = 6, 12$ και 24 είναι 12.6 (18.55), 21.1 (28.3) και 36.5 (45.6), αντίστοιχα.



Πίνακας 14

Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας των Κανονικοποιημένων Καταλοίπων του υποδείγματος EGARCH-M (2, 1) για τα Εβδομαδιαία Στοιχεία

	<i>ADF statistic</i>	<i>Συμπέρασμα</i>
<i>Γενικός Δείκτης</i> <i>(Εβδομαδιαίος)</i>	-10.449	<i>I (0)</i>
<i>Τραπεζικός Δείκτης</i> <i>(Εβδομαδιαίος)</i>	-11.275	<i>I (0)</i>

Παρατηρήσεις:

(1) Η παλινδρόμηση ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε ήταν η εξής:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\gamma - 1) y_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \Delta y_{t-i}$$

(2) Η παραπάνω σχέση ελέγχει την υπόθεση $H_0: \gamma - 1 = 0$.

(3) Η κριτική τιμή του ελέγχου ADF σε επίπεδο σημαντικότητας 1% είναι -3.977.

Επιπρόσθετα, οι έλεγχοι μοναδιαίας ρίζας, που παρουσιάζονται στο Πίνακα 14, απορρίπτουν την ύπαρξη μοναδιαίας και για τις δύο περιπτώσεις. Επομένως, το υπόδειγμα EGARCH-M (2, 1) μπορούμε να πούμε ότι ερμηνεύει ικανοποιητικά τις εξαρτήσεις που παρατηρούνται στις πρώτες και δεύτερες ροπές των αποδόσεων των μετοχών.

4.2.2 Πολυπαραμετρικά υποδείγματα

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύσαμε το κλασικό CAPM, το CCAPM και το διαχρονικό CAPM. Παράλληλα, εξαιτίας της αδυναμίας των παραπάνω υποδειγμάτων να εξηγήσουν τη παρατηρούμενη επιδότηση κινδύνου, αναπτύξαμε μια εναλλακτική μορφή του CAPM που επιτρέπει στις δεύτερες ροπές να μεταβάλλονται διαχρονικά. Μέσα από την σύντομη ανάπτυξη της εναλλακτικής μορφής του CAPM αλλά και του εμπειρικού υποδείγματος που εκτιμάται στη συνέχεια του κεφαλαίου, υποστηρίζεται ότι οι επενδυτές αν έχουν κοινές προσδοκίες για τις ροπές των μελλοντικών αποδόσεων, αυτές είναι δεσμευμένες προσδοκίες, και επομένως, τυχαίες μεταβλητές και όχι σταθερές.

Το κατάλληλο στατιστικό υπόδειγμα για την εκτίμηση της διαχρονικά μεταβαλλόμενης μήτρας δεσμευμένης συνδιακύμανσης είναι το πολυπαραμετρικό



GARCH στο μέσο (multivariate GARCH-M). Ορίζουμε ως y_t το διάνυσμα των υπερβάλλουσων αποδόσεων όλων των περιουσιακών στοιχείων της αγοράς. Οι υπερβάλλουσες αποδόσεις ορίζονται ως η διαφορά της ονομαστικής απόδοσης των στοιχείων με κίνδυνο και της ονομαστικής απόδοσης του στοιχείου χωρίς κίνδυνο, κατά την διάρκεια της περιόδου t . Επίσης, θέτουμε H_t να είναι η μήτρα της δεσμευμένης συνδιακύμανσης των αποδόσεων, με δεδομένη την πληροφόρηση την περίοδο $t - 1$. Με ω_{t-1} συμβολίζεται το διάνυσμα των μεριδίων κάθε στοιχείου στο χαρτοφυλάκιο στο τέλος της προηγούμενης περιόδου. Για το $N \times 1$ διάνυσμα y_t , το υπόδειγμα GARCH (p, q)-M στη γενική μορφή του είναι ως εξής:

$$y_t = b + \delta H_t \omega_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.2.6)$$

$$\text{vech}(H_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i \text{vech}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + \sum_{j=1}^p B_j \text{vech}(H_{t-j}), \quad (4.2.7)$$

$$\varepsilon_t / \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

όπου: b $N \times 1$ διάνυσμα σταθερών

ε_t $N \times 1$ διάνυσμα σφαλμάτων

C $\frac{1}{2} N(N+1) \times 1$ διάνυσμα σταθερών

A_i $\frac{1}{2} N(N+1) \times \frac{1}{2} N(N+1)$ μήτρα συντελεστών για $i = 1, \dots, q$.

B_j $\frac{1}{2} N(N+1) \times \frac{1}{2} N(N+1)$ μήτρα συντελεστών για $j = 1, \dots, p$.

Η μεθοδολογία των υποδειγμάτων GARCH δεν προκύπτει απ' ευθείας από την οικονομική θεωρία, αλλά με ανάλογο τρόπο όπως και η μεθοδολογία των Box-Jenkins προσφέρει μια συνοπτική ερμηνεία της ετεροσκεδαστικότητας που παρατηρούμε στις οικονομικές χρονολογικές σειρές.

Η δεσμευμένη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας που προκύπτει για τη σχέση (4.2.7) είναι ίση με:

$$L_t(\theta) = -(N/2) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |H_t(\theta)| - \frac{1}{2} \varepsilon_t(\theta)' H_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t(\theta) \quad (4.2.8)$$

όπου όλοι οι παράμετροι συμπεριλαμβάνονται σε ένα $m \times 1$ διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\theta}' = (\mathbf{b}', \delta, \mathbf{C}', \text{vec}(\mathbf{A}_1)', \dots, \text{vec}(\mathbf{A}_q)', \dots, \text{vec}(\mathbf{B}_p)')$$

Επομένως, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για το πεπερασμένο δείγμα από $1, \dots, T$ -δεσμευμένη στις αρχικές τιμές- δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T L_t(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.2.9)$$

Όπως είναι φανερό από τις σχέσεις (4.2.7), (4.2.8) και (4.2.9) η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\boldsymbol{\theta})$ εξαρτάται από τις παραμέτρους $\boldsymbol{\theta}$ με έναν έντονα μη γραμμικό τρόπο. Συνεπώς, για τη μεγιστοποίηση της $L(\boldsymbol{\theta})$ απαιτείται η χρήση εξειδικευμένων αλγόριθμων. Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος BFGS και η μεθοδολογία QML για τους λόγους που αναλύθηκαν στην ενότητα 4.2.1. Εξαιτίας της γενικής μορφής της σχέσης (4.2.7) είμαστε αναγκασμένοι να εκτιμήσουμε συνολικά $\{(N+1) + \frac{1}{2} N(N+1) + \frac{1}{4} N^2(N+1)^2 (p+q)\}$ παραμέτρους. Για να ξεπεράσει τη πρακτική αυτή δυσκολία, ο Bollerslev (1990) πρόσθεσε στο υπόδειγμα που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.2.6) και (4.2.7) την παρακάτω σχέση:

$$h_{ijt} = \rho_{ij} (h_{iit} h_{jjt})^{1/2} \quad j=1, \dots, N, \quad i=j+1, \dots, N \quad (4.2.10)$$

όπου: h_{ijt} είναι το ij -οστό στοιχείο της \mathbf{H}_t ή η συνδιακύμανση μεταξύ των στοιχείων i και j

h_{iit} είναι το ii -οστό στοιχείο της \mathbf{H}_t ή η διακύμανση του στοιχείου i

h_{jjt} είναι το jj -οστό στοιχείο της \mathbf{H}_t ή η διακύμανση του στοιχείου j

Στο υπόδειγμα με τις σταθερές δεσμευμένες συσχετίσεις (4.2.10) οι διαχρονικά μεταβαλλόμενες δεσμευμένες διακυμάνσεις ορίζονται ως ένα ποσοστό του γινομένου των δεσμευμένων τυπικών αποκλίσεων που σχετίζονται με αυτές. Η πρόσθετη αυτή υπόθεση απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς που απαιτούνται στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας και επιπλέον, είναι πιο εύκολο να

επιβάλλουμε περιορισμούς έτσι ώστε η μήτρα Ω_t να είναι θετικά ορισμένη. Πιο συγκεκριμένα, ας συμβολίσουμε με D_t μια $N \times N$ διαγώνια μήτρα που στη κύρια διαγώνιο περιλαμβάνει τις δεσμευμένες διακυμάνσεις, δηλαδή $\{D_t\}_{ii} = \{\Omega_t\}_{ii}$ και $\{D_t\}_{ij} \equiv 0$ για $i \neq j$, για $i, j = 1, \dots, N$. Επίσης, συμβολίζουμε με Γ_t τη μήτρα των σταθερών δεσμευμένων συσχετίσεων, δηλαδή $\{\Gamma_t\}_{ij} \equiv \{\Omega_t\}_{ij} [\{\Omega_t\}_{ii}\{\Omega_t\}_{jj}]^{-1/2}$ για $i, j = 1, \dots, N$. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η μήτρα των συσχετίσεων είναι διαχρονικά σταθερή ($\Gamma_t = \Gamma$) και επομένως, οι μεταβολές στην $\{\Omega_t\}$ προκαλούνται από τη μεταβολή στις δεσμευμένες τυπικές αποκλίσεις:

$$\Omega_t = D_t^{1/2} \Gamma D_t^{1/2}$$

Αν οι δεσμευμένες διακυμάνσεις στην κύρια διαγώνιο των μητρών D_t είναι όλες θετικές και η μήτρα Γ είναι θετικά ορισμένη, τότε η ακολουθία των μητρών των δεσμευμένων διακυμάνσεων, $\{\Omega_t\}$, είναι θετικά ορισμένη για κάθε t . Επιπρόσθετα, η αντίστροφη της Ω_t ισούται με $\Omega_t^{-1} = D_t^{-1/2} \Gamma^{-1} D_t^{-1/2}$. Συνεπώς, όταν υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας απαιτείται μόνο μια αντιστροφή μήτρας σε κάθε εκτίμηση. Οι υπολογισμοί απλοποιούνται επίσης, αν εξάγουμε από τη συνάρτηση πιθανοφάνειας τη σταθερή μήτρα Γ , πράττοντας σε απόλυτη αναλογία με τη μεθοδολογία SURE.

Βέβαια, η αξία της υπόθεσης των σταθερών δεσμευμένων συσχετίσεων (constant conditional correlations) παραμένει ένα ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί μόνο στη πράξη. Παρ' όλα αυτά, η εν λόγω μορφή έχει εφαρμοσθεί με επιτυχία από ένα μεγάλο αριθμό ερευνητών, συμπεριλαμβανομένων των Baillie και Bollerslev (1990), Bekaert και Hodrick (1993), Bollerslev (1990), Kroner και Sultan (1991), Kroner και Claessens (1991) και Schwert και Seguin (1990).

Στο Πίνακα 15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του Bivariate GARCH(1,1)-M για το Γενικό και Τραπεζικό Δείκτη του Χ.Α.Α σε ημερήσια και εβδομαδιαία βάση. Η εκτιμημένη τιμή του συντελεστή λ είναι θετική και στατιστικά σημαντική για τα ημερήσια στοιχεία, ενώ αντίθετα για τα εβδομαδιαία στοιχεία εμφανίζεται αρνητική και στατιστικά ασήμαντη. Επομένως, οδηγούμαστε στα ίδια συμπεράσματα με τη μονοπαραμετρική μορφή των υποδειγμάτων GARCH, με την διαφορά ότι οι συντελεστές δεν ταυτίζονται ποσοτικά.



Πίνακας 15

Εκτιμήσεις του Bivariate GARCH-M (1,1) για το Γενικό και Τραπεζικό Δείκτη του Χ.Α.Α σε Ημερήσια και Εβδομαδιαία Βάση

$$R_t = \alpha_0 + \lambda \text{Cov}_t(R_i, R_M) + u_t \quad (4.2.11)$$

$$R_M = \beta_0 + \lambda \text{Var}_t(R_M) + v_t \quad (4.2.12)$$

$$\sigma_{ii}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 u_{i-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{ii-1}^2 \quad (4.2.13)$$

$$\sigma_{M_t}^2 = \delta_0 + \delta_1 v_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{M_{t-1}}^2 \quad (4.2.14)$$

$$\text{Cov}_t(R_i, R_M) = \rho_0 \sigma_{ii-1} \sigma_{M_{t-1}} \quad (4.2.15)$$

όπου: i = Τραπεζικός Δείκτης και M = Γενικός Δείκτης

Συντελεστής	Ημερήσια δεδομένα	Εβδομαδιαία δεδομένα
α_0	-0.060 (3.33)	-0.042 (0.83)
λ	0.083 (2.29)	-0.080 (0.73)
β_0	-0.117 (3.40)	0.729 (0.93)
γ_0	0.077 (4.97)	0.164 (4.18)
γ_1	0.234 (6.51)	0.249 (3.16)
γ_2	0.578 (10.37)	0.437 (5.15)
$\gamma_1 + \gamma_2$	0.812 (23.49)	0.686 (33.89)
δ_0	0.292 (1.85)	0.446 (2.01)
δ_1	0.222 (7.07)	0.230 (2.47)
δ_2	0.423 (3.16)	0.250 (1.24)
$\delta_1 + \delta_2$	0.645 (38.11)	0.480 (40.66)
ρ_0	0.839 (13.26)	0.908 (32.94)

Παρατηρήσεις:

- (1) Μέσα στη παρένθεση παρατίθενται οι τιμές της κατανομής t του εκάστοτε συντελεστή (κριτική τιμή 1.96 σε $\alpha = 5\%$), ενώ στα αθροίσματα των συντελεστών οι τιμές του έλεγχου Wald.



- (2) Το Wald -test ελέγχει την υπόθεση ότι οι συντελεστές $(\gamma_1 + \gamma_2)$ και $(\delta_1 + \delta_2)$ αθροίζουν στη μονάδα. Ο έλεγχος αυτός ακολουθεί μια κατανομή χ^2 (π) [όπου $\pi = 1$, ο αριθμός των περιορισμών που ελέγχουμε] με κριτική τιμή 7.88 σε επίπεδο 5%.

Ο συντελεστής λ της σχέσης (4.2.11) συμβολίζει το πως αντιλαμβάνεται ο κάτοχος του περιουσιακού στοιχείου i τη τιμή του αγοραίου κινδύνου μέσα από τη συσχέτιση του στοιχείου i με την αγορά (Market ή M). Από την άλλη πλευρά, ο συντελεστής λ της σχέσης (4.2.12) συμβολίζει τη τιμή αγοραίου κινδύνου. Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, οι συντελεστές αυτοί είναι ίσοι⁹, πράγμα που σημαίνει πως η εκτίμηση του συστηματικού¹⁰ κινδύνου της αγοράς από τους κατόχους του στοιχείου i συμπίπτει με την εκτίμηση που έχει κάνει και η αγορά στο σύνολό της.

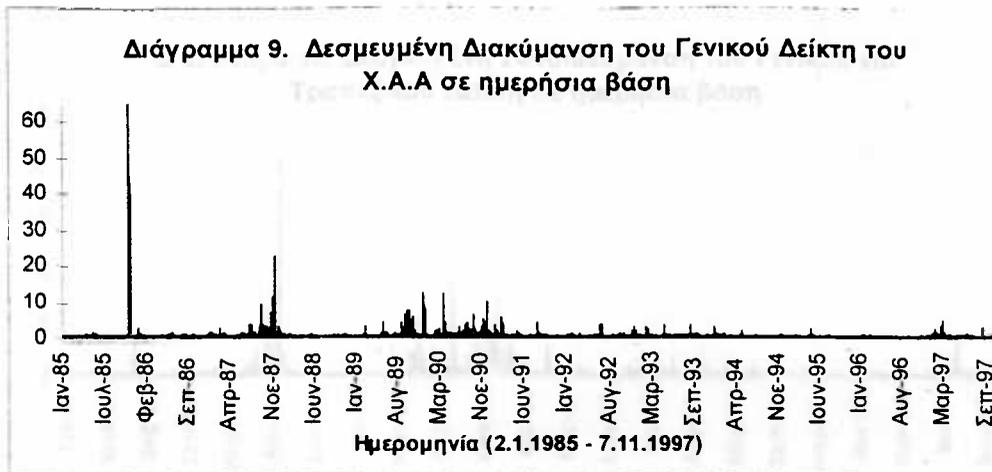
Οι μη-μηδενικοί σταθεροί όροι του υποδείγματος αντανakλούν πιθανή διαφορετική φορολογική μεταχείριση των περιουσιακών στοιχείων ή φαινόμενα συνήθειας στις αντιδράσεις των επενδυτών. Παρ' ότι το θεωρητικό υπόδειγμα δεν περιλαμβάνει σταθερούς όρους, οι επιδράσεις που περιγράφουν είναι αξιόλογες. Οι αρνητικοί σταθεροί όροι στις σχέσεις (4.2.11) και (4.2.12) είναι λογικοί από τη στιγμή που μακροχρόνια μειώνεται το ποσοστό της φορολογίας εισοδήματος και του κόστους συναλλαγών στη συνολική επένδυση, με αποτέλεσμα να υπάρχει κίνητρο διακράτησης των μετοχών και σε ένα μη-επιθυμητό επίπεδο αποδόσεων.

Στο Διάγραμμα 9 παρουσιάζεται η δεσμευμένη διακύμανση του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α σε ημερήσια βάση. Η συμπεριφορά της είναι όμοια με αυτή των εβδομαδιαίων στοιχείων (Διάγραμμα 5), με μόνη διαφορά το έτος 1985 όπου αυξάνεται υπερβολικά η μεταβλητότητα στα ημερήσια στοιχεία.

⁹ Η τιμή του έλεγχου Wald υπολογίστηκε σε 0.705, γεγονός που σημαίνει πως δεχόμαστε την υπόθεση ότι οι συντελεστές είναι ίσοι ($H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$).

¹⁰ Ως συστηματικός κίνδυνος ορίζεται ο κίνδυνος που δεν μπορεί να εξαλειφθεί με την περαιτέρω διαφοροποίηση, δηλαδή πρόσθεση νέων μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο. Υπάρχει πάντα ένα μη μηδενικό κίνδυνο σε ένα σωστά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο εξαιτίας των συνδιακυμάνσεων. Ο αριθμός των συνδιακυμάνσεων σε ένα χαρτοφυλάκιο αυξάνεται γρηγορότερα από τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων και των διακυμάνσεων.



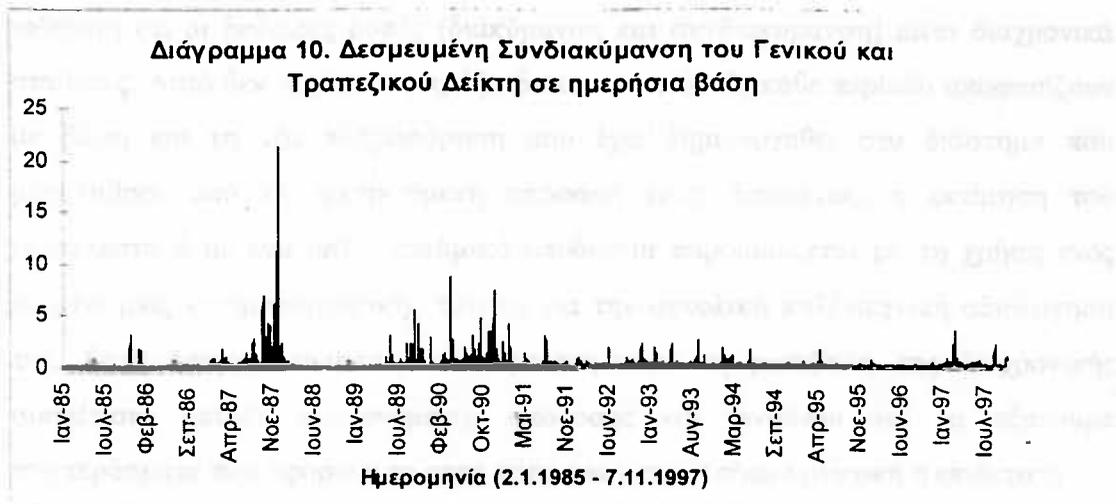


Η μεγάλη συνεισφορά της πολυπαραμετρικής εξειδίκευσης εστιάζεται στη δυνατότητα υπολογισμού της διαχρονικά μεταβαλλόμενης συνδιακύμανσης μεταξύ ενός περιουσιακού στοιχείου -ή ενός συνόλου περιουσιακών στοιχείων- και της αγοράς, καθώς και του υπολογισμού του διαχρονικά μεταβαλλόμενου συντελεστή β (beta coefficient). Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής β ορίζεται ως εξής:

$$\frac{Cov_i(R_M, R_{i,t})}{Var_i(R_M)} = \beta_i \quad \text{και μετρά το συστηματικό κίνδυνο μιας μετοχής ή ενός συνόλου}$$

μετοχών, δηλαδή την ευαισθησία της συγκεκριμένης μετοχής (*i*) στις κινήσεις της αγοράς (*M*). Το μέτρο του κινδύνου της αγοράς ισούται εξ' ορισμού με τη μονάδα. Έτσι, μια μετοχή με $\beta = 2.01$ θα μεταβάλλεται κατά μέσο όρο 2.01% για κάθε μεταβολή 1% της αγοράς προς την ίδια κατεύθυνση. Ένα χαρτοφυλάκιο με τον ίδιο συντελεστή β θα είναι 2.01 φορές πιο μεταβλητό (προς τα πάνω ή προς τα κάτω) από το αντιπροσωπευτικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς και χαρακτηρίζεται ως επιθετικό διότι πολλαπλασιάζει τα κέρδη ή τις ζημιές σε περιόδους ανόδου ή κάμψης των τιμών, αντίστοιχα. Αντίθετα, μια μετοχή ή ένα χαρτοφυλάκιο με συντελεστή $\beta = 0.3$ χαρακτηρίζεται ως αμυντικό διότι σε περιόδους πτώσεως μειώνει τις ζημιές και σε περιόδους ανόδου δεν αποκομίζει τα οφέλη σε πλήρη βαθμό.

Στο Διάγραμμα 10 παρουσιάζεται η δεσμευμένη συνδιακύμανση του Γενικού και του Τραπεζικού Δείκτη σε ημερήσια βάση. Οι δύο Δείκτες εμφανίζουν έντονη συνδιακύμανση κατά τις περιόδους υψηλής μεταβλητότητας (1987, 1990 και 1997).



Στο Διάγραμμα 11 εμφανίζεται ο διαχρονικά μεταβαλλόμενος συντελεστής β του Τραπεζικού Δείκτη σε ημερήσια βάση. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι ο συντελεστής β του πιο παραδοσιακού κλάδου του Χ.Α.Α σε ελάχιστες περιπτώσεις ξεπερνά την μονάδα, γεγονός που σημαίνει ότι αποτελεί μια επενδυτική επιλογή με αμυντικά γνωρίσματα.



Τις τελευταίες δεκαετίες χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων από αναλυτές και επενδυτές ο συντελεστής β . Ο υπολογισμός του στατικού β με βάση το κλασικό CAPM του Sharpe (1964) βασίζεται στην ηρωική

υπόθεση ότι οι δεύτερες ροπές (διακύμανση και συνδιακύμανση) είναι διαχρονικά σταθερές. Αυτό δεν ισχύει στη πράξη διότι οι επενδυτές κάθε περίοδο αποφασίζουν με βάση και τη νέα πληροφόρηση που έχει δημιουργηθεί στο διάστημα που μεσολάβησε από τη προηγούμενη απόφαση τους. Επομένως, η εκτίμηση του συντελεστή β με ένα απλό γραμμικό υπόδειγμα παρομοιάζεται με τη χρήση ενός πλάνου μιας κινηματογραφικής ταινίας για την συνολική καλλιτεχνική αξιολόγηση της. Είναι λοιπόν, απαραίτητο να μελετήσουμε τη μεταβολή της διαχρονικής συσχέτισης μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου για να εξάγουμε συμπεράσματα που αφορούν το κατά πόσο μια μετοχή είναι αμυντική ή επιθετική.

Στο Πίνακα 16 παρουσιάζεται η στατιστική περιγραφή του συντελεστή β του Τραπεζικού Δείκτη για τη περίοδο από 2 Ιανουαρίου 1985 έως 7 Νοεμβρίου 1997 σε ημερήσια, εβδομαδιαία και δεκαπενθήμερη βάση. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 16 έρχονται σε αντίθεση με την έρευνα των Θωμαδάκη, Μόσχου, Λαζαρίδη και Μπαρμπούδη (1997) όπου παρουσιάζονται οι στατικοί συντελεστές β για όλες τις μετοχές και κλάδους του Χ.Α.Α¹¹.

Ειδικότερα, για το Κλάδο των Τραπεζών ο στατικός β ισούται με 1.15. Αντίθετα, ο μέσος του δυναμικού συντελεστή β ίσος με 0.72. δηλαδή, η κλασική στατική μεθοδολογία χαρακτηρίζει το καλάθι των Τραπεζικών μετοχών ως επιθετικό, ενώ η δυναμική ως αμυντικό.

Ο στατιστικός έλεγχος Ljung-Box (1978) δείχνει ότι ο συντελεστής β είναι αυτοσυσχετιζόμενος και στις τρεις περιπτώσεις του δείγματος, γεγονός που σημαίνει ότι οι χρονικές υστερήσεις του β βοηθούν στη ερμηνεία της τρέχουσας τιμής του.

Με βάση τη μεθοδολογία των πολυπαραμετρικών υποδειγμάτων GARCH-M μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή β για όλες τις μετοχές και τους κλάδους του Χ.Α.Α. Το βασικό πλεονέκτημα του στατικού β είναι η ευκολία υπολογισμού του και η έλλειψη εναλλακτικού τρόπου μέτρησης του επενδυτικού κινδύνου. Με τη ραγδαία ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών και της οικονομετρίας είναι πλέον εξίσου εύκολο να εκτιμήσουμε υποδείγματα με υψηλό βαθμό μη-γραμμικότητας. Επομένως, σήμερα πρέπει να θεωρούμε τους στατικούς συντελεστές β όχι μόνο έναν

¹¹ Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιείται το απλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης που περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο (κλασικό CAPM). Τα δεδομένα της εκτίμησης είναι σε δεκαπενθήμερη βάση και αποτελούνται από 83 παρατηρήσεις, χωρίς να δίνονται πληροφορίες για το χρονικό διάστημα που καλύπτει το δείγμα.



εύκολο τρόπο μέτρησης του συστηματικού κινδύνου, αλλά και μια μεθοδολογία με πολύ περιορισμένες ερμηνευτικές ικανότητες.

Πίνακας 16

Περιγραφικά Στατιστικά Στοιχεία του συντελεστή β του Τραπεζικού Δείκτη του Χ.Α.Α. για διαφορετικά δείγματα

Περίοδος	Δείγμα	Μέσος	Μέγιστο	Ελάχιστο	Τυπική Απόκλιση	LB (6)	LB (24)
2.1.85 - 7.11.97	Ημερήσιο	0.61	1.79	0.05	0.11	10791	23154
2.1.85 - 7.11.97	Εβδομαδιαίο	0.69	1.21	0.26	0.09	964.1	1420.6
2.1.85 - 7.11.97	Δεκαπενθήμερο	0.72	1.02	0.23	0.12	1055	1463

Παρατηρήσεις:

- (1) $LB(n)$ είναι ο στατιστικός έλεγχος Ljung-Box για n χρονικές υστερήσεις και ακολουθεί τη κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας.
- (2) Οι κριτικές τιμές του $LB(n)$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% για $n = 6$ και 24 είναι 12.6 και 36.5, αντίστοιχα.

4.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο διερευνήθηκαν οι στοχαστικές ιδιότητες των αποδόσεων των μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Παράλληλα, εκτιμήθηκε ο δυναμικός συντελεστής β του Κλάδου των Τραπεζών. Τα στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τα μονοπαραμετρικά και πολυπαραμετρικά υποδείγματα ARCH.

Αρχικά, με την εξειδίκευση ενός EGARCH-M (2, 1) βρέθηκε ότι η πρώτη και η δεύτερη ροπή των αποδόσεων δεν είναι διαχρονικά ανεξάρτητες. Πιο συγκεκριμένα, οι αποδόσεις είναι δεσμευμένα ετεροσκεδαστικές και η τρέχουσα μεταβλητότητα συσχετίζεται αρνητικά με τις τρέχουσες αποδόσεις. Επιπρόσθετα, οι παρελθούσες αποδόσεις συσχετίζονται με τις τρέχουσες, με αποτέλεσμα να παραβιάζεται η υπόθεση του martigale. Το υπόδειγμα EGARCH-M ερμηνεύει αποτελεσματικά την

μη-συμμετρική επίδραση των διαταραχών στη μεταβλητότητα. Για τα εβδομαδιαία στοιχεία του Γενικού Δείκτη οι αρνητικές διαταραχές της προηγούμενης περιόδου επηρεάζουν τη μεταβλητότητα περισσότερο από τις θετικές, ενώ συμβαίνει το αντίθετο για τις διαταραχές που συμβαίνουν δύο περιόδους πριν. Για τα εβδομαδιαία στοιχεία του Τραπεζικού Δείκτη οι θετικές διαταραχές είναι αυτές που επιδρούν σε μεγαλύτερο βαθμό στη μεταβλητότητα, σε όλες τις περιόδους.

Παρ' ότι η εμμονή της μεταβλητότητας είναι υψηλή, απορρίπτεται η υπόθεση της ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας στη διακύμανση. Είναι επίσης, πιθανό τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας να αντιπροσωπεύουν τη συμπεριφορά και άλλων αναδυόμενων αγορών οι οποίες χαρακτηρίζονται από μικρό μέγεθος και εσωτερική πληροφόρηση (inside trading), η οποία οδηγεί σε βραχυχρόνιες αγοραπωλησίες (short-selling).

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εκτίμηση του bivariate GARCH-M(1, 1) μας οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα. Πρώτον, η μήτρα της δεσμευμένης συνδιακύμανσης χαρακτηρίζεται ως αυτοπαλινδρομική. Δεύτερον, η αρνητική συσχέτιση μεταξύ της δεσμευμένης απόδοσης και της δεσμευμένης διακύμανσης που βρέθηκε στο EGARCH-M, επιβεβαιώνεται και στη περίπτωση της πολυπαραμετρικής εξειδίκευσης.

Η σημαντική συνεισφορά του πολυπαραμετρικού GARCH έγκειται στη δυνατότητα που μας παρέχει να υπολογίσουμε την δεσμευμένη συνδιακύμανση της απόδοσης μιας μετοχής με την απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Επιπρόσθετα, αν διαιρέσουμε τη συνδιακύμανση αυτή με τη δεσμευμένη διακύμανση του χαρτοφυλακίου της αγοράς προκύπτει ο συντελεστής συστηματικού κινδύνου β για τη συγκεκριμένη μετοχή. Ο δυναμικός αυτός συντελεστής είναι απαλλαγμένος από τη μυωπικότητα και τη περιορισμένη ερμηνευτική ικανότητα που χαρακτηρίζει το στατικό συντελεστή β . Ειδικότερα, λαμβάνει υπ' όψη του τη μεταβολή που προκαλείται στις διαχρονικές εξαρτήσεις των δεσμευμένων πρώτων και δεύτερων ροών εξαιτίας της μεταβολής του συνόλου των διαθέσιμων πληροφοριών κάθε χρονική περίοδο.

Η ανάπτυξη διαγνωστικών ελέγχων για τα πολυπαραμετρικά υποδείγματα GARCH είναι ένα σημαντικό θέμα προς διερεύνηση. Επίσης, άλλα ενδιαφέροντα ερωτήματα που μένουν αναπάντητα είναι η επίδραση του non-trading και του inside trading στις αναδυόμενες αγορές.



BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

- AKGIRAY, V., (1989), 'Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecast', *Journal of Business*, 62, 55 - 80.
- BACHELIER, L. (1900), 'Theory of Speculation', in COOTNER, P.(ed), *The Random Character of Stock Market Prices*, M.I.T Press, Cambridge, MA, (1964); Reprint.
- BAILLIE, R. and BOLLERSLEV, T., (1992), 'Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances', *Journal of Econometrics*, 25, 91 - 113.
- BARKOULAS, J. and TRAVLOS, N., (1996), 'Chaos in an Emerging Capital Market? The Case of the Athens Stock Exchange', *Applied Financial Economics*, Forthcoming.
- BARKOULAS, J., BAUM, C. and TRAVLOS, N., (1997), 'Long Memory in the Greek Stock Market', *Journal of Financial Abstracts* (electronic edition).
- BEKAERT, G. and HODRICK, R., (1993), 'On Biases in the Measurement of the Foreign Exchange Risk Premiums', *Journal of International Money and Finance*, 12, 115 - 138.
- BERA, A. and HIGGINS, M., (1993), 'ARCH Models: Properties, Estimation and Testing', *Journal of Economic Surveys*, 7, 305 - 362.
- BERA, A., HIGGINS, M. and LEE, S., (1990), 'On the Formulation of a General Structure for Conditional Heteroskedasticity', *Mimeo*, Department of Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- BERA, A., HIGGINS, M. and LEE, S., (1992), 'Interaction between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity: A Random Coefficient Approach', *Journal of Business and Economics Statistics*, 10, 133 - 142.
- BLACK, F., (1972), 'Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing', *Journal of Business*, 45, July, 444 - 454.



- BLACK, F., JENSEN and M., SCHOLES, M., (1972), 'The Capital Pricing Asset Model: Some Empirical Tests', in JENSEN, M., (ed.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, New York.
- BLUME, M. and STAMBAYGH, R., (1983), 'Biases in Computed Returns: An Application to the Size Effect', *Journal of Financial Economics*, 12, 387 - 404.
- BODIE, Z., KANE, A., and MCDONALD, R., (1983), 'Why Are Real Interests Rates So High?', Working Paper no. 1141. Cambridge, Mass.: NBER.
- BOLLERSLEV, T. and WOOLDRIDGE, J., (1992), 'Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances', *Econometric Reviews*, 11, 143 - 172.
- BOLLERSLEV, T. and ENGLE, R. (1989), 'Common Persistence in Conditional Variances', *Econometrica*, 61, 167 - 186.
- BOLLERSLEV, T., (1987), 'A Conditional Heteroskedasticity Time Series Model for Speculative Prices and Rate of Returns', *Review of Economics and Statistics*, 69, 542 - 547.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. and WOOLDRIDGE, J., (1988), 'A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances', *Journal of Political Economy*, 96, 116 - 131.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. and NELSON, D., (1994), 'ARCH Models'. in R., ENGLE and D., MCFADDEN (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol IV, Elsevier, Amsterdam.
- BOLLERSLEV, T., (1990), 'Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach'. *Review of Economics and Statistics*, 72, 498 - 505.
- BOLLERSLEV, T., CHOU, R. and KRONER, K., (1992), 'ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence', *Journal of Econometrics*, 52, 5 - 59.
- BOLLERSLEV, T., (1986), 'Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity', *Journal of Econometrics*, 31, 307 - 327.
- BOX, G. and JENKINS, G., (1976), *Time Series Analysis. Forecasting and Control*, revised edition, Holden-Day, San Francisco.



- BREEN, W., GLOSTEN, L. and JAGANNATHAN, R., (1989), 'Economic Significance of Predictable Variations in Stock Index Returns'. *Journal of Finance*, 44, 1177 - 1189.
- CAI, J., (1994), 'A Markov Model of Unconditional Variance in ARCH', *Journal of Business and Economics Statistics*, 5, 199 - 203.
- CAMPBELL, J. and HENTSCHEL, L., (1992), 'No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns', *Journal of Financial Economics*, 31, 281 - 318.
- CAMPBELL, J., (1987), 'Stock Returns and the Term Structure', *Journal of Financial Economics*, 18, 373 - 399.
- CHOU, R. Y. (1988), 'Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH' *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 3, 279-294.
- CHU, P. and BEASLEY, J., (1997), 'A Genetic Algorithm for the Generalized Assignment Problem', *Computers Ops Res.*, 24, 17-23.
- DAVIDSON, R, and MACKINNON, J.G., (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press, Oxford, New York, pp. 701-715.
- DICKEY, D.A., and FULLER, W.A., (1979), "Distributions of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of American Statistical Association*, 74, 427-431.
- DIEBOLD, F. and NERLOVE, M., (1989), 'The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model', *Journal of Applied Econometrics*, 4, 1 - 21.
- ENGLE, R. and GRANGER, C., (1987), 'Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing', *Econometrica*, 55, 251 - 276.
- ENGLE, R. and KRAFT, D., (1983). 'Multiperiod Forecast Error Variances of Inflation Estimated from ARCH Models', in A.ZELLNER (ed.). *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, Bureau of the Census, Washington, D.C.
- ENGLE, R. and NG, V., (1993), 'Measuring and Testing the Impact of News in Volatility', *Journal of Finance*, 48, 1749 - 1778.
- ENGLE, R. F. and BOLLERSLEV, T. M. (1986), 'Modeling the Persistence of Conditional Variances' *Econometrics Reviews* 5, 1-50.



- ENGLE, R., LILIEN, D. and ROBINS, R., (1987), 'Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model', *Econometrica*, 55, 391 - 407.
- ENGLE, R., (1982), 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K Inflation', *Econometrica*, 50, 987 - 1008.
- ENGLE, R., (1983), 'Estimates of the Variance of U.S Inflation based upon the ARCH Model', *Journal of Money, Credit and Banking*, 15, 286 - 301.
- ENGLE, R., NG, V. and ROTHSCCHILD, M., (1990), 'Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills', *Journal of Econometrics*, 45, 213 - 238.
- FAMA, E. and SCHWERT, W., (1977), 'Asset Returns and Inflation'. *Journal of Financial Economics*, 5, 115 - 146.
- FAMA, E., (1965), 'The Behaviour of Stock Market Prices', *Journal of Business*, 38, 34 - 105.
- FISCHER, S., (1991), 'Relative Shocks, Relative Price Variability, and Inflation', *Brookings Papers in Economic Activity*, 5, 381 - 431.
- FRANKEL, J., (1985), 'Portfolio Crowding - out, Empirically Estimated', *Quarterly Journal of Economics*, 100, no. 5, 1041 - 1065.
- FRENCH, K. and ROLL, R., (1986), 'Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders', *Journal of Financial Economics*, 17, 5 - 26.
- FRENCH, K., SCHWERT, W. and STAMBAYGH, R., (1987), 'Expected Stock Returns and Volatility', *Journal of Financial Economics*, 19, 3 - 30.
- GEWEKE, J., (1986), 'Modelling the Persistence of Conditional Variances: Comment', *Econometric Review*, 5, 57 - 61.
- GLOSTEN, L., JAGANNATHAN, R. and RUNKLE, D., (1993), 'On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks', *Journal of Finance*, 48, 1779 - 1801.
- GRANGER, C. and TERASVIRTA, T., (1993), *Modeling Nonlinear Economic Relations*, Ch. 1, 4, 6, Oxford University Press.
- GROSSMAN, S. and SHILLER, R., (1982), 'Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-Traded Assets and Heterogeneous Information', *Journal of Financial Economics*, 10, 195 - 210.



- GUTHBERTSON, K., (1996), *Quantitative Financial Economics*, Ch. 2, 3, 20. John Wiley and Sons.
- HAMILTON, J. and SUSMEL, R., (1994), 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime', *Journal of Econometrics*, 45, 213 - 222.
- HAMILTON, J., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- HARVEY, C., (1989), 'Time Varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models', *Journal of Financial Economics*, 24, 289 - 317.
- HIGGINS, M. and BERA, A. (1991), 'ARCH and Bilinearity as Competing Models for Non-Linear Dependence', *Mimeo*, Department of Economics, University of Wisconsin-Milwaukee.
- HIGGINS, M. and BERA, A. (1992), 'A Class of Non-Linear ARCH Models', *International Economic Review*, 33, 137 - 158.
- HSIEH, D., (1988), 'The Statistical Properties of Daily Foreign Exchange Rates: 1974 - 1983', *Journal of International Economics*, 24, 129 - 145.
- HSIEH, D., (1989), 'Testing for Non-Linear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates Changes', *Journal of Business*, 62, 339 - 368.
- JENSEN, M., (1972), 'Capital Markets: Theory and Evidence', *Bell Journal Economics and Management Science*, 3, 357 - 398.
- JOHANSEN, S. (1991). " Estimation and hypothesis testing of cointegration in Gaussian vector autoregressive models," *Econometrica*, 59, 1551-1580.
- JORION, P., (1988), 'On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets', *Review of Financial Studies*, 1, 427 - 445.
- KLIEN, B., (1977), 'The demand for Quality-Adjusted Cash Balances: price Uncertainty in the U.S Demand for Money Function', *Journal of Political Economy*, 85, 692 - 715.
- KOUTMOS, G., NEGAKIS, C. and THEODOSIOU, P., (1993), 'Stochastic Behaviour of the Athens Stock Exchange', *Applied Financial Economics*, 3, 119 - 126.
- KRONER, L. and CLAESSENS, S., (1991), 'Optimal Dynamic Hedging Portfolios and the Compositions of External Debt', *Journal of International Money and Finance*, 10, 131 - 148.



- KRONER, L. and SULTAN, J., (1991), 'Exchange Rate Volatility and Time Varying Hedge Ratios', in S. RHEE and R. CHANG (eds.), *Pacific-Basin Capital Markets Research, Vol II*, North Holland, Amsterdam.
- LAMOUREUX, C. G. and LASTRAPES, W. D. (1990), 'Heteroscedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects' *Journal of Finance, Vol.45*, 221-229.
- LINTNER, J., (1965), 'The Valuation of Risky Assets and the Selections of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets', *Review of Economics and Statistics*, 47, 13 - 37.
- LJUNG, G. and BOX, G., (1978), 'On a Measure of lack of Fit in Time Series Models', *Biometrika*, 66, 67 - 72.
- MANDELBROT, B., (1963a), 'The Variation of Certain Speculative Prices', *Journal of Business*, 36, 394 - 419.
- MANDELBROT, B., (1963b), 'New Methods in Statistical Economics', *Journal of Political Economy*, 71,421 - 440.
- MANDELBROT, B., (1967), 'The Variation of Certain Speculative Prices', *Journal of Political Economy*, 36, 394 - 419.
- MANKIW, G. and SHAPIRO, G., (1986), 'Do We Reject Too Often? Small Sample Properties of Tests of Rational Expectations Models', *Economics Letters*, 20, 139 - 145.
- MARKOWITZ, H., (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.
- MCCURDY, T. and MORGAN, I., (1988), 'Testing the Martigale Hypothesis in Deutsche Mark Futures with Models Specifying the Form of the Heteroskedasticity', *Journal of Applied Econometrics*, 3, 187 - 202.
- MERTON, R. C. (1969), 'Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case ', *Review if Economics and Statistics*, 51, 247 - 257.
- MERTON, R. C. (1973), 'An Intertemporal Capital Asset Pricing Model' *Econometrica, Vol. 41*, 867-887.
- MILHOJ, A., (1985), 'The Moment Structure of ARCH Process'. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 281 - 292.
- MILHOJ, A., (1987a), 'A Multiplicative Parameterazation of ARCH Models'. *Research Report, No. 101*, Institute of Statistics, University of Copenhagen.



- MILHOJ, A., (1987b), 'A Conditional Variance Model for Daily Observations of An Exchange Rate', *Journal of Business and Economics Statistics*, 5, 199 - 203.
- NELSON, D. and CAO, C., (1992), 'Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model', *Journal of Business and Economics Statistics*, 10, 229 - 235.
- NELSON, D. (1990), 'Stationarity and Persistence in the GARCH (1, 1) Model', *Econometric Theory*, 6, 318 - 334.
- NELSON, D. (1991), 'Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach', *Econometrica*, 59, 347 - 370.
- PAGAN, A. and HONG, Y., (1991), 'Nonparametric Estimation and the Risk Premium', W. BARNETT, J. POWEELL and G. TAUCHEN (eds.), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, 51 - 75, Cambridge University Press, Cambridge.
- PAGAN, A. and SCHWERT, W., (1990), 'Alternative Models for Conditional Stock Volatility', *Journal of Econometrics*, 45, 267 - 290.
- PAGAN, A. (1996). "The Econometrics of Financial Markets," *Journal of Empirical Finance*, 3, 15-102.
- PANAS, E., (1982), 'The Behavior of the Athens Stock Prices', *Applied Economics*, 22, 1715-1727.
- PAPAIOANNOU, G., (1982), 'Thinness and Short-Run Price Dependence in the Athens Stock Exchange', *Greek Economic Review*, 315 - 333.
- ROLL, R., (1977), 'A Critique of The Asset Pricing Theory's Tests: Part I', *Journal of Financial Economics*, 4, 129 - 176.
- SAMUELSON, P., (1969), 'Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming', *Review of Economics and Statistics*, 51, 239 - 246.
- SCHWERT, W. and SEGUIN, P., (1990), 'Heteroskedasticity in Stock Returns', *Journal of Finance*, 45, 1129 - 1155.
- SCHWERT, W., (1983), 'Size and Stocks Returns, and other Empirical Regularities', *Journal of Financial Economics*, 12, 3 - 12.
- SENTANA, E., (1991). 'Quadratic ARCH Models: A Potential Reinterpretation of ARCH Models as Second-Order Taylor Approximations', *unpublished paper*, London School of Economics.



- SHARPE, W., (1964), 'Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk', *Journal of Finance*, 19, 425 - 442.
- SHILLER, R.J., and PERRON, P., (1985), "Testing the random walk hypothesis: power versus frequency of observations", *Economics Letters*, 18, 381-386.
- TAYLOR, S., (1986), *Modelling Financial Time Series*, John Wiley and Sons, London.
- THEODOSIOU, P., KOUTMOS, G. and NEGAKIS, C. (1993), 'The Intertemporal Relation between the U.S. and Greek Stock Markets: A Conditional Tale Analysis', *International Journal of Finance*, 6, 492 - 508.
- TONG, H., (1990), *Non-Linear Time Series: A Dynamic System Approach*. Oxford University Press, Oxford.

Ελληνική

- ΘΩΜΑΔΑΚΗΣ, Σ., ΜΟΣΧΟΣ, Δ., ΛΑΖΑΡΙΔΗΣ, Σ. και ΜΠΑΡΜΠΟΥΔΗΣ, Σ., (1997), 'Συντελεστές κινδύνου για τις Εισηγμένες στο Χ.Α.Α. Μετοχές', *Ελληνική Τράπεζα Βιομηχανικής Ανάπτυξης*.



