ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Η ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των απαραίτητων προϋποθέσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος.

ΠΡΑΜΑΤΕΥΤΑΚΗ ΕΛΙΣΣΑΒΕΤ

Στους γονείς μου και στον Κωνσταντίνο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με την παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή φιλοδοξώ να παρουσιάσω αλλά και να αναλύσω τα πιο δημοφιλή υποδείγματα αποτίμησης των δικαιωμάτων. Αν και για τη συγγραφή της συμβουλεύτηκα αρκετά βιβλία και άρθρα που αναφέρονται στα παράγωγα και στην αποτίμηση τους, το μεγαλύτερο τμήμα αυτής της εργασίας είναι επηρεασμένο από το βιβλίο του Hull (1997) το οποίο παρέχει μια μοναδική μαθηματική προσέγγιση όσο αφορά την αποτίμηση των παραγώγων.

Σε αυτό το σημείο θεωρώ υποχρέωση μου να αναγνωρίσω και την πολύτιμη συμβολή του κ. Ευάγγελου Μαγείρου, καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών ο οποίος όχι μόνο με παρότρυνε να μελετήσω τα παράγωγα προϊόντα αλλά και με βοήθησε ουσιαστικά στη συγγραφή αυτής της εργασίας.

Πολλές ευχαριστίες επίσης οφείλω στους γονείς μου Νικόλαο και Ασπασία, στον αδελφό μου Γεώργιο και στον Κωνσταντίνο Κουκουναράκη για την αμέριστη συμπαράσταση τους τόσο κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος όσο και κατά τη διάρκεια της συγγραφής της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1998 Πραματευτάκη Ελισσάβετ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα παράγωγα προϊόντα (derivatives) εμφανίστηκαν για πρώτη φορά σε οργανωμένη αγορά στις αρχές του 1970. Αν και το ενδιαφέρον για αυτά τα προϊόντα το μονοπωλούσαν οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, την τελευταία δεκαετία έχουν παρουσιάσει ιδιαίτερη άνθιση τόσο στην Ευρώπη όσο και σε πολλές αναδυόμενες αγορές. Η ενδιαφέρουσα αυτή εξέλιξη δεν άφησε αδιάφορο τον Ελληνικό επιχειρηματικό κόσμο. Οι απαιτήσεις του οδήγησαν την Ελλάδα να δημιουργήσει την δικιά της οργανωμένη αγορά παραγώγων που θα λειτουργήσει στις αρχές του 1999.

Το ενδιαφέρον των επενδυτών για αυτά τα προϊόντα είναι πλήρως δικαιολογημένο αφού τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν είναι εξαιρετικά σημαντικά. Η κατανόηση της λειτουργίας τους όμως είναι δυσκολονόητη και για αυτό το λόγο πολλές φορές δημιουργούνται μεγάλες απώλειες στους επενδυτές των παραγώγων. Δεν είναι τυχαίο ότι μεγάλες εταιρείες έχουν ανακοινώσει σχέδια για την μείωση της χρήσης αυτών των προϊόντων.

Το κύριο χαρακτηριστικό των παράγωγων προϊόντων είναι ότι η τιμή τους εξαρτάται από την τιμή του περιουσιακού στοιχείου που αναφέρονται. Το γεγονός αυτό δίνει και την δυνατότητα στους επενδυτές να τα χρησιμοποιούν είτε για να μειώσουν το κίνδυνο μιας επικείμενης επένδυσης είτε για να κερδοσκοπήσουν. Η γνώση λοιπόν της λειτουργίας των παραγώγων, των στρατηγικών των συναλλαγών τους αλλά και η κατανόηση των τρόπων που αποτιμούνται είναι ιδιαίτερα απαραίτητη για να επιτευχθεί ο στόχος του κάθε επενδυτή.

Η ποικιλία τώρα που παρουσιάζουν τα παράγωγα προϊόντα είναι αρκετά μεγάλη. Τα προθεσμιακά όμως συμβόλαια (futures contracts) και τα συμβόλαια των δικαιωμάτων (option contracts) είναι τα είδη των παραγώγων που συναλλάσονται σε οργανωμένες αγορές. Άλλα είδη παραγώγων όπως τα ιδιωτικά προθεσμιακά συμβόλαια (forward contacts), τα συμβόλαια των ανταλλαγών (swap contracts) και μερικά είδη δικαιωμάτων όπως τα λεγόμενα *exotic* δικαιώματα συναλλάσονται σε ιδιωτικό επίπεδο.

Η παρούσα εργασία τώρα περιορίζεται στα συμβόλαια των δικαιωμάτων. Η λογική της λειτουργίας τους είναι απλή και γνωστή και συναντάται σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής χωρίς ίσως να γίνεται αντιληπτό. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα κουπόνια που προσφέρουν οι εφημερίδες. Με κάποιο αντίτιμο (την τιμή της εφημερίδας) ο αναγνώστης έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα συγκεκριμένο είδος σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε μια προκαθορισμένη ημερομηνία. Αν μάλιστα θέλουμε να αναφερθούμε σε χρηματοοικονομικά προϊόντα το τελευταίο προϊόν που εμφανίστηκε στην αγορά της Ελλάδας και περιείχε την έννοια του δικαιώματος ήταν τα Προμέτοχα. Στην λήξη αυτών των ομολόγων ο δικαιούχος έχει την δυνατότητα αγοράς μετοχών δημόσιων επιχειρήσεων.

Σκοπός τώρα αυτής της εργασίας είναι κατά κύριο λόγο η αποτίμηση των δικαιωμάτων. Βασικός παράγοντας για την άρτια λειτουργία της αγοράς των δικαιωμάτων. Η δομή δε της εργασίας είναι η ακόλουθη:

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια του δικαιώματος, στα είδη του όπως επίσης και στην ορολογία που συνηθίζει η αγορά να χρησιμοποιεί για αυτού τους είδους τα παράγωγα. Οι κανόνες της συναλλαγής έχουν πρωταρχικό λόγο σε αυτό το κεφάλαιο και πιστεύουμε ότι οι λόγοι είναι ευνόητοι. Τέλος παρουσιάζονται οι βασικές στρατηγικές συναλλαγών των δικαιωμάτων. Αν και όλα αυτά τα θέματα έχουν εξέχουσα σημασία, η αναφορά είναι όσο το δυνατόν πιο σύντομη. Γιατί σκοπός αυτής της αναφοράς είναι η κατανόηση των τρόπων αποτίμησης των δικαιωμάτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το διωνυμικό υπόδειγμα αποτίμησης των δικαιωμάτων. Περιοριζόμαστε δε στα δικαιώματα που αναφέρονται σε μετοχές αφού η κατανόηση αυτού του υποδείγματος αποτελεί τροχοπέδι για την αποτίμηση του δικαιώματος οποιουδήποτε άλλου περιουσιακού στοιχείου. Η γραφική απεικόνιση των διωνυμικών δέντρων και η παρουσίαση των δυνατών χαρτοφυλακίων χρησιμοποιούνται συνεχώς και όχι μόνο γιατί βοηθούν στην αποτίμηση των παραγώγων γενικότερα αλλά και γιατί δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στο πως η αξία του περιουσιακού στοιχείου επιδρά ουσιαστικά στην τιμή του παραγώγου.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πιο δημοφιλές υπόδειγμα της αποτίμησης των δικαιωμάτων των Black και Scholes. Σύμφωνα και με την άποψη των ιδίων εάν η αποτίμηση των δικαιωμάτων ήταν σωστή δεν θα ήταν δυνατόν να υπάρχουν βέβαια κέρδη από τη δημιουργία χαρτοφυλακίων κατά τα οποία ο επενδυτής παίρνει συγχρόνως θέση αγοράς και πώλησης τόσο όσο αφορά τα δικαιώματα όσο και το περιουσιακό στοιχείο που αναγράφουν αυτά. Βασισμένοι λοιπόν σε αυτήν την αρχή γίνεται η αποτίμηση των δικαιωμάτων των μετοχών.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγεται η υπόθεση της ύπαρξης του κόστους συναλλαγής. Αρχικά αποδεικνύεται ότι η ανάλυση Black-Scholes αποτυγχάνει κάτω από αυτήν την υπόθεση να φτάσει σε ένα κατάλληλο υπόδειγμα αποτίμησης. Η αποτυχία αυτή μας αναγκάζει να εισάγουμε δυναμικές μεθόδους σύνθεσης χαρτοφυλακίων. Η εργασία αυτή λοιπόν ολοκληρώνεται με την παρουσίαση του βέλτιστου δυναμικού χαρτοφυλακίου με την ύπαρξη κόστους συναλλαγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{0}

ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα συμβόλαια των δικαιωμάτων εισήχθησαν για πρώτη φορά στην αγορά το 1973 από το μεγαλύτερο και αρχαιότερο χρηματιστήριο προθεσμιακών συμβολαίων, το Chicago Board of Trade (CBOE). Από τότε μέχρι σήμερα η αγορά των δικαιώματων έχει αναπτυχθεί σημαντικά, σε πολλά χρηματιστήρια στον κόσμο. Από τον Απρίλιο του 1999 αναμένεται και η πρώτη συναλλαγή δικαιωμάτων από το Χρηματιστήριο Παραγώγων των Αθηνών.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστεί με συντομία η έννοια του δικαιώματος, οι ιδιότητες που παρουσιάζουν αυτού του είδους τα συμβόλαια, οι στρατηγικές συναλλαγών τους όπως επίσης και οι κανόνες που διέπουν τις συναλλαγές των δικαιωμάτων. Οι κανόνες συναλλαγής διαφέρουν από χώρα σε χώρα και για αυτό το λόγο στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το νομοθετικό πλαίσιο συναλλαγής παραγώγων που ισχύει στο χρηματιστήριο του Ελσίνκι (Helsinki Exchanges) πάνω στο οποίο θα κινηθεί και το νομοθετικό πλαίσιο συναλλαγής παραγώγων του Χρηματιστηρίου Παραγώγων των Αθηνών.

1.2 ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΚΑΙ ΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ

Ως *συμβόλαιο δικαιώματος* (*option contract*) ορίζουμε το συμβόλαιο εκείνο που δίνει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση στον κάτοχό του να αγοράσει ή να πουλήσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε μια συγκεκριμένη τιμή και σε μια ορισμένη χρονική στιγμή ή σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Το περιουσιακό στοιχείο στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα μπορεί να είναι χρυσός, ξένο νόμισμα, μια κοινή μετοχή, ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ή οποιοδήποτε άλλο περιουσιακό στοιχείο. Το συμβόλαιο δικαιώματος διευκρινίζει το ποσό του περιουσιακού στοιχείου που θα αγοραστεί ή θα πουληθεί. Για παράδειγμα ένα *δικαίωμα μετοχής* (stock option) καθορίζει την συναλλαγή εκατό στο πλήθος μετοχών. Η συγκεκριμένη τιμή που καθορίζεται η αγορά ή η πώληση του περιουσιακού στοιχείου ονομάζεται *τιμή εξασκήσεως* (exercise price) ενώ η χρονική στιγμή λήξεως της ζωής του δικαιώματος ονομάζεται *ημερομηνία λήξεως* (expiration date) ή *ημερομηνία εξασκήσεως* (exercise date).

Υπάρχουν δύο τύποι δικαιωμάτων, το *δικαίωμα αγοράς* (call option) και το *δικαίωμα πώλησης* (put option). Το δικαίωμα αγοράς δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχό του να αγοράσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε μια συγκεκριμένη τιμή, την τιμή εξασκήσεως, και σε μια ορισμένη χρονική στιγμή ή περίοδο. Το δικαίωμα πώλησης δίνει την δυνατότητα στον κάτοχό του να πουλήσει το περιουσιακό στοιχείο που αναγράφει το συμβόλαιο δικαιώματος σύμφωνα με την τιμή εξασκήσεως που έχει οριστεί, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή ή περίοδο.

Τα δικαιώματα τώρα που μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην λήξη τους ονομάζονται *Ευρωπαϊκά δικαιώματα* (European options) ενώ τα δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή πριν την προκαθορισμένη ημερομηνία λήξεώς τους ονομάζονται *Αμερικανικά δικαιώματα* (American options). Αν και τα Αμερικανικά δικαιώματα είναι πιο δημοφιλή στην αγορά, τα Ευρωπαϊκά αναλύονται πιο εύκολα και μας βοηθούν στην κατανόηση των Αμερικανικών δικαιωμάτων.

1.3 ΘΕΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ

Σε κάθε συμβόλαιο δικαιώματος υπάρχουν δύο επενδυτές με διαφορετική θέση. Από την μια υπάρχει αυτός που πουλάει ή εγγράφει το δικαίωμα και από την άλλη αυτός που το αγοράζει. Ο επενδυτής που εγγράφει το δικαίωμα λαμβάνει αρχικά την αξία του δικαιώματος και εν συνεχεία είναι υποχρεωμένος να καλύψει τις απαιτήσεις του αγοραστή. Το κέρδος ή η απώλεια της εγγραφής του δικαιώματος ισούται με την απώλεια ή το κέρδος αντίστοιχα του αγοραστή του δικαιώματος.

Αν θεωρήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα τότε η απώλεια ή το κέρδος P (payoff) που αποδίδει στην λήξη της ζωής του ανάλογα με την θέση του επενδυτή είναι:[1]

Αγορά ενός δικαιώματος αγοράς: $P = \max(S_T-E,0)$

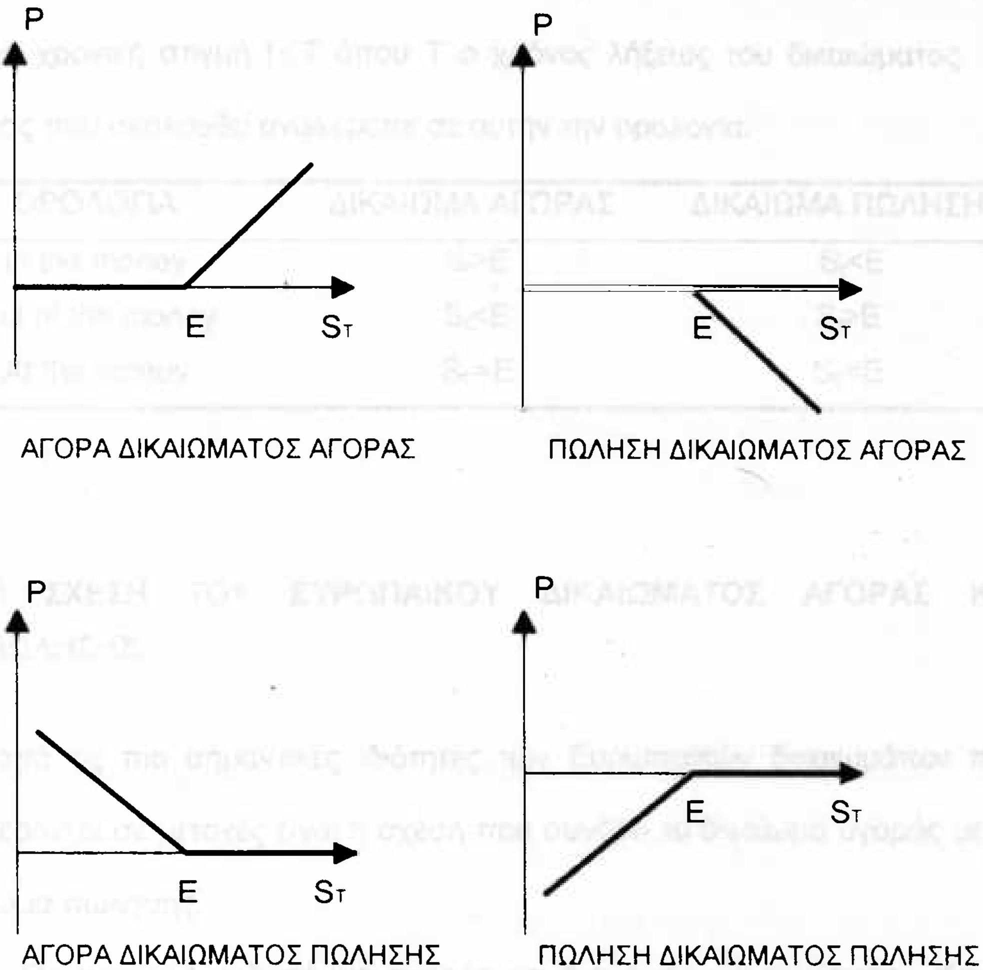
Αγορά ενός δικαιώματος πώλησης: $P = \max(E-S_T,0)$

Εγγραφή ενός δικαιώματος αγοράς: $P = -\max(S_T-E,0)=\min(E-S_T,0)$

Εγγραφή ενός δικαιώματος πώλησης: $P = -\max(E-S_T,0)=\min(S_T-E,0)$

Όπου ως S_T συμβολίζουμε την τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο τέλος

[1] Στην περίπτωση που έχουμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα οι απώλειες ή τα κέρδη των επενδυτών μπορούν να αποδοθούν και πριν την λήξη του δικαιώματος. Για παράδειγμα στο Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς ο κάτοχος αυτού, το χρόνο t ($t \leq T$), έχει κέρδος ίσο με το $\max(S_t-E,0)$.



Σχήμα 1.1

της ζωής του δικαιώματος και ως E την τιμή εξασκήσεως. Τα παραπάνω απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 1.1.

Σύμφωνα τώρα με την προηγούμενη ανάλυση είναι κατανοητό ότι ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς εξασκεί το συμβόλαιο του μόνο στην περίπτωση όπου $S_T>E$ ενώ ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης εξασκεί το συμβόλαιο του μόνο όταν $S_T<E$.

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε χρήσιμο να αναφερθούμε στην διεθνής ορολογία που χρησιμοποιείται για το δικαίωμα ανάλογα με την αξία που έχει σε μια χρονική στιγμή $t \leq T$ όπου T ο χρόνος λήξεως του δικαιώματος. Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται σε αυτήν την ορολογία.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ	ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ	ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ
In the money	$S_t>E$	$S_t<E$
Out of the money	$S_t<E$	$S_t>E$
At the money	$S_t=E$	$S_t=E$

1.4 Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗΣ.

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που αναφέρονται σε μετοχές είναι η σχέση που συνδέει το δικαίωμα αγοράς με το δικαίωμα πώλησης.

Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης. Και τα δύο αυτά συμβόλαια αναφέρονται στην ίδια μετοχή και έχουν την ίδια τιμή εξασκήσεως και την ίδια ημερομηνία λήξεως. Θεωρούμε επίσης ότι η εν λόγω μετοχή δεν δίνει μέρισμα. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις και με βάση αυτά τα περιουσιακά στοιχεία, συνθέτουμε στην αρχή της ζωής των δικαιωμάτων δύο χαρτοφυλάκια.[1]

Χαρτοφυλάκιο Α : αποτελείται από το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα χρηματικό ποσό ύψους Ee^{-rT}.

Χαρτοφυλάκιο Β : αποτελείται από το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και μια μετοχή.

Στο τέλος της ζωής των δικαιωμάτων, δηλαδή το χρόνο T, τα χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια αξία:

[1] Δες Hull (1997), "Options, Futures and other Derivatives", κεφάλαιο 7^0.

$$V_A = V_B = \max(S_T, E)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα χαρτοφυλάκια έχουν και την ίδια αξία στην αρχή της ζωής τους. Δηλαδή:

$$c + Ee^{-rt} = p + S \quad (1.1)$$

Σημειώνουμε δε ότι

c: η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην έναρξη της ζωής του.

p: η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην έναρξη της ζωής του.

E: η τιμή εξασκήσεως των δικαιωμάτων.

S: η τιμή της μετοχής στην έναρξη της ζωής των δικαιωμάτων.

S_T: η τιμή της μετοχής το χρόνο T.

r: το βέβαιο επιτόκιο.

Η σχέση (1.1) είναι γνωστή ως σχέση ισότητας δικαιώματος αγοράς και πώλησης (put-call parity). Είναι δε αρκετά χρήσιμη στην αποτίμηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αφού αποτιμώντας την τιμή του δικαιώματος αγοράς μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε και την τιμή του δικαιώματος πώλησης.

Στην περίπτωση τώρα των Αμερικανικών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης δεν ισχύει η εν λόγω ισότητα. Όπως αποδεικνύουμε και στο παράρτημα Π.2.1 στην έναρξη της ζωής των δικαιωμάτων ισχύει ότι c=C και ότι p<P όπου C είναι η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς ενώ P η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. Με βάση λοιπόν αυτές τις σχέσεις και την σχέση (1.1), στην περίπτωση των Αμερικανικών δικαιωμάτων έχουμε ότι:

$$C + Ee^{-rt} < P + S \quad (1.2)$$

1.5 Η ΣΥΝΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Βασικός παράγοντας για την σωστή λειτουργία μιας αγοράς είναι οι κανόνες που τη διέπουν. Σε αυτή λοιπόν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους κανόνες συναλλαγής των δικαιωμάτων. Πολλές φορές θα γίνουν αναφορές στο νομοθετικό πλαίσιο που ισχύει στη SOM (SOM Ltd. Finnish Securities and Derivatives Exchange, Clearing House) και αυτό γιατί όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου το Χρηματιστήριο Παραγώγων των Αθηνών θα κινηθεί στην ίδια βάση.

1.5.1 Τα μέλη του χρηματιστηρίου των παραγωγών

Καταρχήν για την πραγματοποίηση των συναλλαγών των παραγώγων απαιτείται η ίδρυση μιας εταιρείας (Clearing House) που να έχει τον ρόλο του μεσάζοντα στα συμβόλαια των δικαιωμάτων αλλά και να διασφαλίζει τη νόμιμη και ασφαλή λειτουργία των συναλλαγών αυτών. Όσο αφορά την Ελλάδα, τον ρόλο αυτό έχει αναλάβει η εταιρεία με την επωνυμία "Εταιρεία Εκκαθάρισης Συναλλαγών Επί Παραγώγων Ανώνυμη Εταιρεία".

Τα πιο συνηθισμένα μέλη τώρα ενός χρηματιστηρίου παραγώγων είναι οι χρηματιστηριακές εταιρείες (brokerage companies) και οι *διαμορφωτές αγοράς* (market makers). Αυτά είναι και τα μέλη που αποδέχεται η SOM. Οι χρηματιστηριακές εταιρίες κάνουν συναλλαγές τόσο για λογαριασμό τους όσο και για λογαριασμό των πελατών τους. Αντίθετα οι *διαμορφωτές αγοράς* συναλλάσονται μόνο για ίδιο συμφέρον. Η ύπαρξη των τελευταίων διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό τις συναλλαγές των δικαιωμάτων και αυτό γιατί είναι υπεύθυνοι να καλύπτουν τις απαιτήσεις των επενδυτών. Όταν για παράδειγμα υπάρχει ζήτηση για ένα δικαίωμα αγοράς και καμία προσφορά τότε ο *διαμορφωτής αγοράς* έρχεται να ολοκληρώσει αυτήν τη συναλλαγή. Το κέρδος του δε πραγματοποιείται αγοράζοντας ένα δικαίωμα σε μια τιμή και πουλώντας αυτό σε μια μεγαλύτερη. Η μεγαλύτερη τιμή ονομάζεται *τιμή προσφοράς* (bid price) ενώ η μικρότερη *τιμή ζήτησης* (ask price). Το χρηματιστήριο θέτει ένα ανώτατο όριο όσο αφορά τη διαφορά ανάμεσα στην τιμή προσφοράς και στην τιμή ζήτησης. Η διαφορά δε αυτή είναι γνωστή ως *άνοιγμα ζήτησης και προσφοράς* (bid-ask spread).

1.5.2 Λογαριασμός με περιθώριο και απαίτηση περιθωρίου

Όταν πραγματοποιείται μια συναλλαγή ενός παραγώγου υπάρχει ο κίνδυνος οι επενδυτές να αθετήσουν τους όρους του συμβολαίου. Για αυτό το λόγο το χρηματιστήριο θεωρεί αναγκαία την ύπαρξη του *λογαριασμού με περιθώριο* και της *απαίτησης περιθωρίου*, τα οποία διασφαλίζουν τους συμβαλλομένους. Τι είναι όμως ο *λογαριασμός με περιθώριο* και τι η *απαίτηση περιθωρίου*;

Κάθε επενδυτής, στην περίπτωση των δικαιωμάτων ο επενδυτής που εγγράφει ένα δικαίωμα, είναι υποχρεωμένος να έχει ένα λογαριασμό, γνωστός ως *λογαριασμός με περιθώριο* (margin account), στο ίδιο το χρηματιστήριο ή σε κάποια τράπεζα που συνεργάζεται με αυτό. Το αρχικό ύψος του λογαριασμού (initial margin) καθορίζεται από το χρηματιστή του επενδυτή και είναι ανάλογο με την αξία του περιουσιακού στοιχείου που αναφέρεται στο δικαίωμα. Για παράδειγμα στην περίπτωση των δικαιωμάτων των μετοχών συνήθως απαιτείται το 50% της αξίας των μετοχών. Εν συνεχεία στο τέλος κάθε ημέρας συναλλαγής, το ύψος αυτού του λογαριασμού προσαρμόζεται με το κέρδος ή την απώλεια του επενδυτή. Προκειμένου ο λογαριασμός αυτός να μην μηδενιστεί μέχρι να ολοκληρωθεί η συναλλαγή, υπάρχει ένα κατώτερο όριο (maintenance margin) στο ύψος του. Όταν ο λογαριασμός πέσει κάτω από αυτό το όριο, το χρηματιστήριο καλεί τον επενδυτή να δόσει μια επιπρόσθετη εγγύηση ώστε ο λογαριασμός του να βρίσκεται στα επιτρεπτά όρια. Η εγγύηση αυτή ονομάζεται *απαίτηση περιθωρίου* (margin requirement). Η διαδικασία δε καθημερινής εκκαθάρισης των λογαριασμών είναι γνωστή ως εκκαθάριση αγοράς (marking to market).

Όσο αφορά τώρα τη SOM, υπολογίζει την απαίτηση περιθωρίου το βράδυ κάθε συναλλασόμενης ημέρας. Το υπόδειγμα δε που χρησιμοποιεί είναι δυναμικό έτσι ώστε οι μεταβολές των αξιών εκείνων των περιουσιακών στοιχείων που αναγράφονται στα δικαιώματα όπως επίσης και οι διακυμάνσεις της αγοράς να επιδρούν αμέσως στις απατήσεις περιθωρίου. Την επόμενη εργάσιμη ημέρα πληροφορεί τους *διαμορφωτές αγοράς* και τις χρηματιστηριακές εταιρείες για το ύψος των λογαριασμών των πελατών τους. Στην συνέχεια οι χρηματιστηριακές εταιρείες είναι υποχρεωμένες να ενημερώσουν τους πελάτες τους. Στην περίπτωση που το ύψος του λογαριασμού έχει πέσει κάτω από το επιτρεπτό όριο, η επιπρόσθετη εγγύηση πρέπει να κατατεθεί μέχρι τις 11 π.μ της επόμενης εργάσιμης ημέρας. Οι χρηματιστηριακές εταιρείες εν συνεχεία είναι υποχρεωμένες να ενημερώσουν το χρηματιστήριο μέχρι τις 12 π.μ για το αν αποδόθηκε η απαίτηση περιθωρίου από τους πελάτες τους. Στην περίπτωση που κάποιος πελάτης τους δεν καταθέσει το απαιτούμενο χρηματικό ποσό στο λογαριασμό του τότε ζητείται από τη χρηματιστηριακή εταιρεία να καλύψει η ίδια την απαίτηση περιθωρίου μέχρι το βράδυ της ιδίας μέρας. Η εταιρεία σε αυτή την περίπτωση θα αποφασίσει εάν θα κλείσει τη θέση του πελάτη της ή όχι.

1.5.3 Τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις των συναλλασσόμενων μερών της SOM.

Όταν πραγματοποιείται μια αγοραπωλησία ενός δικαιώματος, ο επενδυτής που αγοράζει το δικαίωμα είναι υποχρεωμένος να πληρώσει την αξία του δικαιώματος στον επενδυτή που το εγγράφει αμέσως μετά τη συναλλαγή. Από την μεριά του ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να καταθέσει ένα *λογαριασμό με περιθώριο* στο ίδιο το χρηματιστήριο ή σε κάποια τράπεζα που συνεργάζεται με αυτό. Το ύψος αυτού του λογαριασμού προσδιορίζεται από το χρηματιστή του επενδυτή. Όσο αφορά την *απαίτηση περιθωρίου* αποδίδεται σε καθημερινή βάση.

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε δικαίωμα μετοχής, ο κάτοχος του δικαιώματος πρέπει να ζητήσει την εξάσκηση του συμβολαίου του την ημέρα εξασκήσεως ή πριν από αυτήν. Σε διαφορετική περίπτωση το δικαίωμα εξασκείται δίχως αξία. Επίσης ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης είναι υποχρεωμένος να καταθέσει στο χρηματιστήριο τις μετοχές που θέλει να πουλήσει πριν ζητήσει την εξάσκηση του δικαιώματός του. Στην περίπτωση τώρα που ένα δικαίωμα εξασκείται, ο πωλητής αυτού του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να τηρήσει τους όρους του συμβολαίου την επόμενη εργάσιμη μέρα. Όταν τώρα εξασκείται πρόωρα ένα δικαίωμα αγοράς, ο πωλητής ενός τέτοιου συμβολαίου επιλέγεται με τυχαία μέθοδο. Είναι δε υποχρεωμένος μέχρι τις 11 π.μ. της επόμενης ημέρας να καταθέσει στο χρηματιστήριο τις μετοχές που αναγράφει το συμβόλαιο δικαιώματος.

Στην περίπτωση τώρα του δικαιώματος νομισμάτων FRX (FRX Cyrrency Option) ο επενδυτής που εγγράφει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης είναι υποχρεωμένος να πουλήσει ή να αγοράσει αντίστοιχα ένα προθεσμιακό συμβόλαιο του FRX στην τιμή εξασκήσεως που έχει συμφωνηθεί όταν αυτό ζητηθεί από τον κάτοχο του δικαιώματος. Στην περίπτωση που το δικαίωμα δεν εξασκηθεί και στην λήξη του έχει θετική αξία τότε αποδίδεται αυτόματα στον κάτοχο του δικαιώματος χρηματικό ποσό αντίστοιχο της αξία του δικαιώματος. Σημειώνουμε ότι το δικαίωμα αυτό είναι Αμερικανικού τύπου δηλαδή μπορεί να εξασκηθεί και πριν τη λήξη της ζωής του.

Όσο αφορά τώρα την περίπτωση του δικαιώματος δείκτη FOX (FOX Index Option), ο επενδυτής που εγγράφει το δικαίωμα είναι υποχρεωμένος, την επομένη της ημέρα λήξεως του συμβολαίου, να αποδόσει στον κάτοχο του δικαιώματος ένα χρηματικό ποσό αντίστοιχο της αξίας του δικαιώματος, στην περίπτωση βέβαια που το δικαίωμα έχει θετική αξία. Σημειώνουμε ότι το δικαίωμα αυτό είναι Ευρωπαϊκού τύπου, δηλαδή εξασκείται μόνο στην λήξη της ζωής του. Επίσης η εξάσκησή του γίνεται αυτόματα από το χρηματιστήριο την ημέρα εξασκήσεως.

Τέλος τονίζουμε ότι στην περίπτωση που κλείνει μία θέση, ο κάτοχος του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πουλήσει ένα πανομοιότυπο δικαίωμα με αυτό που κατείχε ενώ ο πωλητής του δικαιώματος να αγοράσει ένα ταυτόσημο δικαίωμα με αυτό που είχε πουλήσει.

1.6 ΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων είναι η μεγάλη ποικιλία στρατηγικών συναλλαγών που μπορούν να δημιουργήσουν όταν συνδιάζονται με περιουσιακά στοιχεία ή άλλα δικαιώματα. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν με συντομία οι βασικές στρατηγικές συναλλαγών των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων των μετοχών.[1] Σημειώνουμε ότι οι ίδιοι τρόποι συναλλαγής προκύπτουν αν θεωρήσουμε δικαιώματα οποιονδήποτε άλλων περιουσιακών στοιχείων.

1.6.1 Χαρτοφυλάκια μιας μετοχής και ενός δικαιώματος

Τέσσερα διαφορετικά χαρτοφυλάκια μπορούν να δημιουργηθούν από ένα δικαίωμα και τη μετοχή που αναγράφεται στο δικαίωμα.

Το πρώτο χαρτοφυλάκιο δημιουργείται από την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς και την αγορά μιας μετοχής. Το χαρτοφυλάκιο αυτό προστατεύει τον επενδυτή που εγγράφει το συμβόλαιο δικαιώματος από μια ξαφνική άνοδο της τιμής της μετοχής.

Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και την πώληση μιας μετοχής. Με αυτή την στρατηγική προστατεύεται ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς από μια ξαφνική μείωση της τιμής της μετοχής.

Το τρίτο χαρτοφυλάκιο δημιουργείται από την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης και την πώληση μιας μετοχής. Με αυτό το χαρτοφυλάκιο προστατεύεται ο επενδυτής που εγγράφει το δικαίωμα από μια ξαφνική μείωση της τιμής της μετοχής.

Τέλος το τέταρτο χαρτοφυλάκιο δημιουργείται από την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης και την αγορά μιας μετοχής. Η στρατηγική αυτή προστατεύει τον επενδυτή που αγοράζει το δικαίωμα από μια ξαφνική άνοδο της τιμής της μετοχής.

[1] Για μια πιο ολοκληρωμένη παρουσίαση δες Hull (1997), "Options, Futures and other Derivatives", κεφάλαιο 8^{0}.

1.6.2 Χαρτοφυλάκια δύο ή περισσότερων δικαιωμάτων του ίδιου τύπου

Ως *άνοιγμα* (spread) ονομάζεται η επενδυτική στρατηγική κατά την οποία ο επενδυτής παίρνει θέση σε δύο ή περισσότερα δικαιώματα του ιδίου τύπου. Οι πιο γνωστές επενδυτικές στρατηγικές αυτής της μορφής είναι τρεις.

Κατά την πρώτη στρατηγική, η οποία ονομάζεται *bull spread*, ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς που αναφέρεται σε μια μετοχή και πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς της ίδιας μετοχής. Και τα δύο αυτά συμβόλαια δικαιώματος έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με την διαφορά όμως ότι το δεύτερο έχει υψηλότερη τιμή εξασκήσεως από ότι το πρώτο. Οι επενδυτές που επιλέγουν τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια προσδοκούν άνοδο της τιμής της μετοχής. Τα δυνατά κέρδη ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Αγοράς Δικ.Αγοράς	Κέρδος Πώλησης Δικ.Αγοράς	Συνολικό Κέρδος
$S_T \geq E_2$	S_T-E_1	E_2-S_T	E_2-E_1
E_1<S_T<E_2	S_T-E_1	0	S_T-E_1
$S_T \leq E_1$	0	0	0

Σημειώνουμε ότι ως E_1 συμβολίζουμε την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος αγοράς που ο επενδυτής αγοράζει, ως E_2 την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος αγοράς που ο επενδυτής πουλάει ενώ ως S_T την τιμή της μετοχής στη λήξη της ζωής του συμβολαίου.

Κατά την δεύτερη στρατηγική τώρα , η οποία ονομάζεται *bear spread*, ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς που αναφέρεται σε μια μετοχή και πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς της ίδιας μετοχής. Τα δύο αυτά συμβόλαια έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά εκτός από το ότι το πρώτο έχει μεγαλύτερη τιμή εξασκήσεως από ότι το δεύτερο. Σε αντίθεση με τους επενδυτές που επιλέγουν την στρατηγική του *bull spread*, οι επενδυτές που επιλέγουν τη στρατηγική του *bear spread* προσδοκούν πτώση της τιμής της μετοχής. Τα δυνατά κέρδη ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Αγοράς Δικ.Αγοράς	Κέρδος Πώλησης Δικ.Αγοράς	Συνολικό Κέρδος
$S_T \geq E_2$	$S_T - E_2$	$E_1 - S_T$	$E_1 - E_2$
$E_1 < S_T < E_2$	0	$E_1 - S_T$	$E_1 - S_T$
$S_T \leq E_1$	0	0	0

Σημειώνουμε ότι εδώ ως E_1 συμβολίζουμε την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος αγοράς που πουλάει ο επενδυτής ενώ ως E_2 την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος αγοράς που αγοράζει.

Τέλος κατά την τρίτη στρατηγική, η οποία ονομάζεται *butterfly*, ο επενδυτής παίρνει θέση σε τέσσερα δικαιώματα αγοράς. Και τα τέσσερα αυτά συμβόλαια έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά εκτός από το ότι διαφέρουν οι τιμές εξασκήσεώς τους. Πιο συγκεκριμένα ο επενδυτής αγοράζει δύο δικαίωματα αγοράς που αναφέρονται σε μια μετοχή, με τιμή εξασκήσεως E_1 και E_3 αντίστοιχα, όπου $E_3 > E_1$. Εν συνεχεία πουλάει δύο δικαιώματα αγοράς της ίδιας μετοχής με τιμή εξασκήσεως E_2 όπου $E_1 < E_2 < E_3$. Συνήθως η τιμή εξασκήσεως E_2 επιλέγεται κοντά στην τρέχουσα τιμή της μετοχής. Αυτή η στρατηγική επένδυσης οδηγεί σε θετική απόδοση μόνο στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής S_T, δηλαδή η τιμή της μετοχής στη λήξη της ζωής των δικαιωμάτων δεν έχει μεταβληθεί ουσιαστικά από την έναρξη των συμβολαίων των δικαιωμάτων. Όπως είναι κατανοητό τέτοιου είδους στρατηγικές επιλέγονται από τους επενδυτές που δεν προσδοκούν δραστικές μεταβολές στις τιμές της μετοχής. Τα δυνατά κέρδη ενός χαρτοφυλακίου που δημιουργείται με βάση αυτήν την στρατηγική παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Αγοράς Δικ.Αγοράς 1	Κέρδος Αγοράς Δικ.Αγοράς 2	Κέρδος Πώλησης Δικ.Αγοράς	Συνολικό Κέρδος
$S_T \leq E_1$	0	0	0	0
$E_1 < S_T \leq E_2$	S_T-E_1	0	0	S_T-E_1
$E_2 < S_T \leq E_3$	S_T-E_1	0	-2(S_T- E_2)	E_3-S_T
$S_T > E_3$	S_T-E_1	S_T- E_3	-2(S_T- E_2)	0

*Σημειώνουμε ότι τα κέρδη αυτά προκύπτουν αν υποθέσουμε ότι $E_2=(E_1+E_3)/2$

1.6.3 Χαρτοφυλάκια δύο ή περισσότερων δικαιωμάτων διαφορετικού τύπου

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε επενδυτικές στρατηγικές σύμφωνα με τις οποίες δημιουργούνται χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Τέσσερις είναι οι δυνατές στρατηγικές συναλλαγές που μπορούν να σχεδιαστούν.

Σύμφωνα με την πρώτη στρατηγική συναλλαγή, η οποία ονομάζεται *straddle*, δημιουργείται ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης. Και τα δύο συμβόλαια αναφέρονται στην ίδια μετοχή και έχουν την ίδια ημερομηνία λήξεως και την ίδια τιμή εξασκήσεως. Αυτή η επενδυτική στρατηγική επιλέγεται από επενδυτές οι οποίοι προσδοκούν μεγάλες μεταβολές στην τιμή της μετοχής αλλά χωρίς να είναι βέβαιοι ως προς ποια κατεύθυνση θα γίνουν αυτές οι μεταβολές. Τα δυνατά κέρδη μιας τέτοιας στρατηγικής συναλλαγής είναι τα ακόλουθα:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Δικ.Αγοράς	Κέρδος Δικ.Πώλησης	Συνολικό Κέρδος
$S_T \leq E$	0	$E\text{-}S_T$	$E\text{-}S_T$
$S_T > E$	$S_T\text{-}E$	0	$S_T\text{-}E$

Σημειώνουμε ότι ως Ε ορίζουμε την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος ενώ ως S_T την τιμή της μετοχής στη λήξη της ζωής του δικαιώματος.

Σύμφωνα με την δεύτερη στρατηγική συναλλαγή, η οποία ονομάζεται *strangle*, δημιουργείται ένα χαρτοφυλάκιο από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης. Και τα δύο συμβόλαια αναφέρονται στην ίδια μετοχή και έχουν την ίδια ημερομηνία λήξεως αλλά διαφορετικές τιμές εξασκήσεως. Η τιμή εξασκήσεως E_2 του δικαιώματος αγοράς είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξασκήσεως E_1 του δικαιώματος πώλησης. Όπως και στην επενδυτική συναλλαγή του *straddle* έτσι και σε αυτήν την περίπτωση οι επενδυτές που την επιλέγουν προσδοκούν μια μεγάλη μεταβολή της τιμής της μετοχής χωρίς όμως να γνωρίζουν την κατεύθυνση αυτής της μεταβολής. Αυτή η επενδυτική στρατηγική είναι προτιμότερη από την στρατηγική *staddle* όταν προσδοκούνται εξαιρετικά υψηλές μεταβολές στην τιμή της μετοχής. Μάλιστα όσο πιο μεγάλη μεταβολή αναμένεται τόσο πιο μεγάλη διαφορά έχουν οι δύο τιμές εξασκήσεως. Τα δυνατά κέρδη αυτής της στρατηγικής παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Δικ.Αγοράς	Κέρδος Δικ.Πώλησης	Συνολικό Κέρδος
$S_T \leq E_1$	0	$E_1\text{-}S_T$	$E_1\text{-}S_T$
$E_1 < S_T < E_2$	0	0	0
$S_T \geq E_2$	$S_T\text{-}E_2$	0	$S_T\text{-}E_2$

Η τρίτη στρατηγική τώρα, καλούμενη ως *strip*, συνιστά την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και δύο δικαιωμάτων πώλησης. Και τα τρία αυτά συμβόλαια αναφέρονται στην ίδια μετοχή και έχουν την ίδια ημερομηνία λήξεως και τιμή εξασκήσεως. Η στρατηγική αυτή προτιμάται όταν ο επενδυτής προσδοκεί μια μελλοντική υψηλή μεταβολή στην τιμή της μετοχής ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, θεωρώντας όμως ως πιο πιθανή την εκδοχή της πτώσης της τιμή της. Τα δυνατά κέρδη αυτής της στρατηγικής είναι τα ακόλουθα:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Δικ.Αγοράς	Κέρδος Δικ.Πώλησης	Συνολικό Κέρδος
$S_T \leq E$	0	$2(E-S_T)$	$2(E-S_T)$
$S_T > E$	S_T-E	0	S_T-E

Τέλος έχουμε την επενδυτική στρατηγική *strap* σύμφωνα με την οποία ο επενδυτής αγοράζει δύο δικαιώματα αγοράς και ένα πώλησης. Και τα τρία συμβόλαια αναφέρονται στην ίδια μετοχή και έχουν την ίδια ημερομηνία λήξεως και τιμή εξασκήσεως. Η στρατηγική αυτή προτιμάται όταν ο επενδυτής προσδοκεί υψηλή μεταβολή στην τιμή της μετοχής ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, θεωρώντας όμως πιο πιθανή την αύξηση της τιμής της. Τα δυνατά κέρδη της στρατηγικής αυτής είναι τα ακόλουθα:

Διακύμανση Τιμών Μετοχής	Κέρδος Δικ.Αγοράς	Κέρδος Δικ.Πώλησης	Συνολικό Κέρδος
$S_T \leq E$	0	$E-S_T$	$E-S_T$
$S_T > E$	$2(S_T-E)$	0	$2(S_T-E)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^0

ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

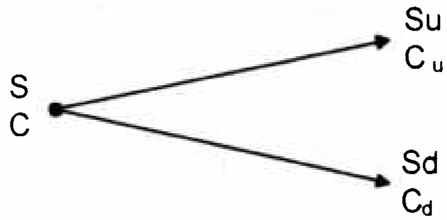
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το διωνυμικό υπόδειγμα είναι ένα μαθηματικό υπόδειγμα αποτίμησης των δικαιωμάτων αλλά και των παραγώγων γενικά. Αποτελεί μια ιδιαίτερα χρήσιμη και δημοφιλή τεχνική μετά την ανάλυση Black-Scholes. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι τα διωνυμικά δέντρα όπου τα κλαδιά τους καταλήγουν στις πιθανές μελλοντικές τιμές του περιουσιακού στοιχείου από τις οποίες εξαρτάται η τιμή του δικαιώματος.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η εισαγωγή αλλά και η ανάλυση του διωνυμικού υποδείγματος αποτίμησης των δικαιωμάτων των μετοχών. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό αρχικά παρουσιάζεται το διωνυμικό υπόδειγμα της μιας περιόδου, εν συνεχεία των δύο περιόδων και τελικά το διωνυμικό υπόδειγμα των πολλών περιόδων. Στο τέλος δε του κεφαλαίου παρουσιάζεται με την βοήθεια των διωνυμικών δέντρων η αποτίμηση του δικαιώματος μέσω της αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής.

2.2 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

Έστω ότι επιθυμούμε να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς που η αξία του εξαρτάται από μια μετοχή, με τρέχουσα τιμή S. Χωρίς βλάβη της γενικότητας



Σχημα 2.1

μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εν λόγω μετοχή δεν δίνει μερίσματα. Θεωρώντας ότι ο τρέχων χρόνος είναι μηδέν, υποθέτουμε ότι στο χρόνο T, δηλαδή στη λήξη της ζωής του δικαιώματος, η τιμή της μετοχής είτε θα κινηθεί ανοδικά και θα πάρει τιμή Su ($u>1$) είτε θα κινηθεί καθοδικά και θα πάρει τιμή Sd ($d<1$).[1]

Αν C η τιμή του δικαιώματος αγοράς τη χρονική στιγμή μηδέν, τότε ως C_u ορίζουμε την αξία του δικαιώματος όταν η μετοχή έχει τιμή Su, δηλαδή $C_u = \max(Su - E, 0)$ ενώ ως C_d ορίζουμε την αξία του δικαιώματος όταν η μετοχή έχει τιμή Sd, δηλαδή $C_d = \max(Sd - E, 0)$. Ως E συμβολίζουμε την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος. Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα 2.1.

Βασικός σκοπός τώρα αυτού του υποδείγματος είναι η εξαγωγή ενός τύπου που να αποτιμά το δικαίωμα με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η απουσία κερδοσκοπικών ευκαιριών . Η όλη λοιπόν διαδικασία ανάγεται στη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από το δικαίωμα και τη μετοχή και δεν εμπεριέχει αβεβαιότητα. Εφόσον αναφερόμαστε σε ένα χαρτοφυλάκιο με δύο τίτλους και δύο μόνο δυνατές αποδόσεις είναι πάντα δυνατή η δημιουργία ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου. Το γεγονός ότι δεν υπάρχουν κερδοσκοπικές ευκαιρίες, έχει ως αποτέλεσμα, το χωρίς κίνδυνο

[1] Καθ' όλη τη διάρκεια του παρόντος κεφαλαίου, ο τρέχων χρόνος θα θεωρείται μηδέν.

χαρτοφυλάκιο να έχει απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο (risk-free rate).[1] Με βάση την παραπάνω ανάλυση μας δίνεται η δυνατότητα να αποτιμήσουμε το χαρτοφυλάκιο και επομένως και το δικαίωμα.

Έστω λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο που δημιουργείται από την:

α) Αγορά πλήθους Δ μετοχών.

β) Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς.

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στην αρχή και στο τέλος της ζωής του δικαιώματος είναι:

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 0	ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ Τ	
	Su	Sd
SΔ-C	$Su\Delta\text{-}C_u$	$Sd\Delta\text{-}C_d$

Προκειμένου τώρα αυτό το χαρτοφυλάκιο να μην εμπεριέχει κίνδυνο και επομένως να δίνει απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο πρέπει η αξία του τη χρονική στιγμή Τ να είναι σταθερή και επομένως ανεξάρτητη από τη τιμή της μετοχής. Πρέπει δηλαδή

$$Su\Delta - C_u = Sd\Delta - C_d$$

ή

$$\Delta = (C_u - C_d)/(Su - Sd) \tag{2.1}$$

Αν με r συμβολίσουμε το βέβαιο επιτόκιο τότε η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου ισούται με το κόστος αυτού, δηλαδή

$$(Su\Delta - C_u)e^{-rT} = S\Delta - C$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το Δ σύμφωνα με τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι:

[1] Στην πράξη ως βέβαιο επιτόκιο χρησιμοποιούμε το επιτόκιο των κρατικών ομολόγων που έχουν διάρκεια ίση με τη ζωή του δικαιώματος.

$$C = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d] \qquad (2.2)$$

όπου

$$p = (e^{rT} - d)/(u - d) \qquad (2.3)$$

Σημειώνουμε ότι οι τύποι (2.1) εώς (2.3) ισχύουν και στη περίπτωση του δικαιώματος πώλησης αλλά και γενικότερα σε όλα τα παράγωγα, όπου βέβαια στη θέση C, C_u C_d έχουμε τις αντίστοιχες τιμές του παραγώγου.

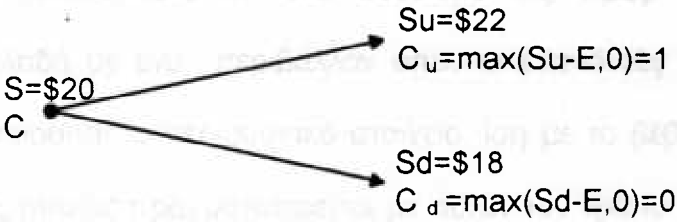
Από την ανάλυση που έχουμε κάνει εώς τώρα, παρατηρούμε ότι δεν έχουμε λάβει υπόψη μας τις πιθανότητες ανόδου ή καθόδου της τιμής της μετοχής. Η αξία όμως για παράδειγμα του δικαιώματος αγοράς, είναι η ίδια αν η πιθανότητα αύξησης της τιμής της μετοχής είναι 50% και ίδια αν είναι 90%; Σίγουρα όχι, αφού είναι κατανοητό ότι όσο μεγαλώνει η πιθανότητα αύξησης της τιμής της μετοχής τόσο μεγαλώνει και η αξία του δικαιώματος αγοράς ενώ ισχύει το αντίστροφο για το δικαίωμα πώλησης. Είναι λάθος λοιπόν η μέχρι τώρα ανάλυση και επομένως η σχέση (2.2); Η απάντηση είναι αρνητική και αυτό γιατί η τιμολόγηση του δικαιώματος γίνεται σε σχέση με την τιμή S της μετοχής. Η αποτίμηση όμως της μετοχής είναι ανεξάρτητη από το δικαίωμα και γίνεται βάση των πιθανοτήτων της μελλοντικής ανόδου ή καθόδου της τιμής της. Με λίγα λόγια μέσα στην τιμή S έχουμε συμπεριλάβει και τις προαναφερθείσες πιθανότητες άρα έμμεσα τις έχουμε συμπεριλάβει και στην αποτίμηση του δικαιώματος. Όπως θα δείξουμε και στο υπόδειγμα πολλών περιόδων, το p όπως ορίζεται στη σχέση (2.3), με κάποια επιπλέον συνθήκη, ερμηνεύει την πιθανότητα ανόδου της τιμής της μετοχής.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ο τρόπος που μπορεί να δημιουργηθεί ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο και η διαδικασία αποτίμησης του δικαιώματος.

Παράδειγμα 2.1

Έστω ότι η μετοχή μιας εταιρείας έχει τρέχουσα τιμή S=$20 και αναμένεται ότι σε έξι μήνες είτε θα έχει μια άνοδο κατά 10% δηλαδή u=1.1 είτε μια πτώση κατά 10%, δηλαδή d=0.9. Ζητάμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα αγοράς, διάρκειας έξι μηνών, που θέλουμε να εκδόσουμε για αυτή τη μετοχή αν η τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος είναι E=$21. Θεωρούμε ότι το ετήσιο βέβαιο επιτόκιο είναι r=12%.

Το δέντρο που απεικονίζει τις παραπάνω πληροφορίες είναι:



Το χαρτοφυλάκιο που σχεδιάζεται κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις είναι:

ΘΕΣΗ	ΑΡΧΗ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	
		Su=$22	Sd=$18
Εγγραφή 1 Δικ.Αγοράς	C	-1	0
Αγορά Δ μετοχών	-20Δ	22Δ	18Δ
Δανεισμός ύψους	y	$-e^{0.5x0.12}y$	$-e^{0.5x0.12}y$
Σύνολο	0	0	0

Προκειμένου τώρα το χαρτοφυλάκιο να έχει την ίδια απόδοση στο τέλος των έξι μηνών πρέπει

$$22\Delta-1=18\Delta-0$$

δηλαδή ο *λόγος εξασφάλισης* (hedge ratio) πρέπει να είναι

$$\Delta=0.25$$

Αγοράζω λοιπόν 0.25 της εν λόγου μετοχής και δανείζομαι

$$-1+22\times0.25-e^{0.5\times0.12}y=0 \quad \text{ή} \quad y=\$\ 4.238$$

Γνωρίζοντας τώρα το κόστος του χαρτοφυλακίου που δημιουργώ στην αρχή της περιόδου, μπορώ να υπολογίσω την τιμή του δικαιώματος αγοράς.

$$-C+20\times0.25=\$4.238 \text{ ή } C=\$0.762.$$

Ουδετερότητα ως προς τον κίνδυνο

Από την μέχρι τώρα ανάλυση, διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία αποτίμησης γίνεται σαν να βρισκόμαστε σε ένα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο περιβάλλον. Δηλαδή σε ένα περιβάλλον όπου οι επενδυτές προσδοκούν απόδοση, για οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο, ίση με το βέβαιο επιτόκιο. Η αρχή βάση της οποίας πραγματοποιείται με αυτόν τον τρόπο η αποτίμηση ονομάζεται αρχή του *ουδέτερου κινδύνου* (risk neutrality) και αποτελεί θεμελιώδη νόμο στην αποτίμηση των δικαιωμάτων αλλά και γενικά των παραγώγων. Η διαδικασία δε αποτίμησης που ακολουθούμε βασιζόμενοι σε αυτήν την αρχή είναι γνωστή ως *αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου* (risk-neutral valuation).

Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι η αρχή του *ουδέτερου κινδύνου* βασίζεται στο γεγονός ότι μπορώ πάντα να φτιάξω ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο από ένα δικαίωμα και μια μετοχή όταν η κίνηση των τιμών της μετοχής περιγράφεται από ένα διωνυμικό δέντρο.[1] Συγχρόνως η απουσία κερδοσκοπικών ευκαιριών μου εξασφαλίζει απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο. Είναι λοιπόν αποδεκτό όταν αποτιμώ ένα δικαίωμα να θεωρώ ότι

[1] Τονίζουμε ότι δεν είναι δυνατή η δημιουργία ενός ακίνδυνου χαρτοφυλακίου όταν η τιμή της μετοχής έχει τρεις ή περισσότερες πιθανές εκβάσεις σε κάθε περίοδο. Δηλαδή όταν η κίνηση των τιμών της μετοχής περιγράφεται από ένα δέντρο με τρία η περισσότερα κλαδιά.

βρίσκομαι σε ένα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο περιβάλλον ακόμα και αν στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει.

Τέλος πρέπει να επισημάνουμε ότι αν ερμηνεύσουμε τη μεταβλητή p ως την πιθανότητα ανόδου της τιμής της μετοχής ενώ ως 1-p την πιθανότητα καθόδου αυτής και κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την προσδοκώμενη τιμή της μετοχής στο χρόνο T θα έχουμε

$$E(S_T) = pSu+(1-p)Sd$$

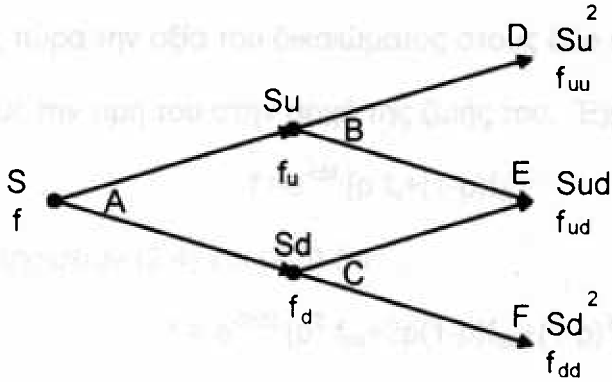
Αντικαθιστώντας το p από τη σχέση (2.3) προκύπτει ότι

$$E(S_T)=Se^{rt}$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η υϊοθέτηση της ερμηνείας της μεταβλητής p ως την πιθανότητα αύξησης της τιμής της μετοχής ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η προσδοκώμενη απόδοση της μετοχής είναι ίση με το βέβαιο επιτόκιο δηλαδή με την υπόθεση ότι βρισκόμαστε σε ένα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο περιβάλλον.

2.3 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΔΥΟ ΠΕΡΙΟΔΩΝ

Το διωνυμικό υπόδειγμα δύο περιόδων είναι μια επέκταση του προηγούμενου υποδείγματος. Σε αυτήν την περίπτωση χωρίζουμε το χρόνο T της ζωής του δικαιώματος σε δύο περιόδους, διάρκειας Δt=T/2. Σε κάθε περίοδο θεωρούμε ότι η τιμή της μετοχής είτε ανέρχεται κατά u φορές (u>1), είτε κατέρχεται κατά d φορές, (d<1). Τα παραπάνω όπως επίσης και ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για την αξία του δικαιώματος σε κάθε βήμα, απεικονίζονται στο δέντρο που ακολουθεί:



Ας υποθέσουμε αρχικά ότι επιθυμούμε να αποτιμήσουμε το Ευρωπαϊκό δικαίωμα της εν λόγου μετοχής όπου και σε αυτή τη περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι δεν δίνει μέρισμα. Πρέπει στη συγκεκριμένη περίπτωση να τονίσουμε ότι εμείς γνωρίζουμε μόνο τις τιμές της μετοχής σε κάθε κόμβο του δέντρου και την αξία του δικαιώματος στο τέλος της ζωής του. Υπενθυμίζουμε ότι στη περίπτωση του δικαιώματος αγοράς, η αξία του είναι $\max(S_T-E,0)$ ενώ στη περίπτωση του δικαιώματος πώλησης είναι $\max(E-S_T,0)$. Ως S_T συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή T, δηλαδή στη λήξη της ζωής του παραγώγου.

Προκειμένου λοιπόν τώρα να γίνει η αποτίμηση του δικαιώματος στην έναρξη της ζωής του, δηλαδή στον κόμβο A, πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η αξία του στους κόμβους B και C. Η αποτίμηση του δικαιώματος στους κόμβους αυτούς υπολογίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2) και (2.3) αφού στην ουσία αναφερόμαστε σε δύο διαφορετικά δέντρα μιας περιόδου. Επομένως θα έχουμε

$$f_u = e^{-r\Delta t}\,[p\, f_{uu} + (1-p) f_{ud}] \tag{2.4}$$

και

$$f_d = e^{-r\Delta t}\,[p\, f_{ud} + (1-p) f_{dd}] \tag{2.5}$$

Γνωρίζοντας τώρα την αξία του δικαιώματος στους δύο κόμβους μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του στην αρχή της ζωής του. Έχουμε λοιπόν ότι

$$f = e^{-r\Delta t} [p f_u + (1-p) f_d] \quad (2.6)$$

ή μέσω των σχέσεων (2.4) και (2.5) ότι

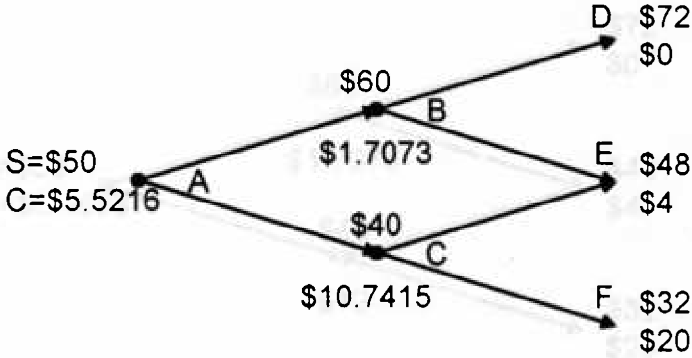
$$f = e^{-2r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p) f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \quad (2.7)$$

Στη περίπτωση τώρα που έχουμε Αμερικανικά δικαιώματα ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, ελέγχοντας όμως αν είναι βέλτιστη η εξάσκηση του δικαιώματος πριν τη λήξη της ζωής του. Βέλτιστη δε είναι όταν η πρόωρη εξάσκησή του δίνει όχι μόνο θετική απόδοση αλλά και μεγαλύτερη από ότι αν δεν το εξασκούσαμε. Σε αυτήν την περίπτωση η αξία του δικαιώματος είναι ίση με το κέρδος που προκύπτει από την πρόωρη εξάσκηση του. Πρέπει να σημειώσουμε επίσης ότι αυτό ισχύει μόνο στη περίπτωση του δικαιώματος πώλησης. Όπως αποδεικνύουμε στο παράρτημα (Π.2.1), η πρόωρη εξάσκηση του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς δεν είναι ποτέ βέλτιστη όπως ισχύει σε ορισμένες περιπτώσεις για το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται η διαδικασία αποτίμησης ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

<u>Παράδειγμα 4.2</u>

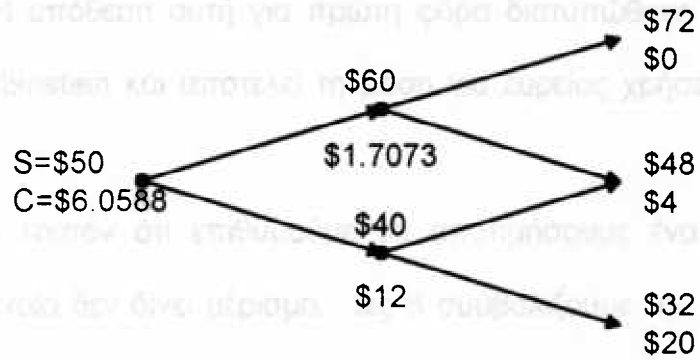
Έστω ότι επιθυμούμε να αποτιμήσουμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης διάρκειας έξι μηνών (T=0.5), με τιμή εξασκήσεως E=\$52, για μια μετοχή με τρέχουσα τιμή S=\$50. Υποθέτουμε ότι η μετοχή, ανά τρεις μήνες, κινείται είτε ανοδικά με ποσοστό 20% είτε καθοδικά με ποσοστό 20%. Επίσης θεωρούμε ότι το βέβαιο επιτόκιο είναι 10% ετησίως.



Σχήμα 2.2

Στο πρώτο στάδιο αποτιμούμε το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης σε κάθε κόμβο του δέντρου το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 2.2. Καταρχήν εφόσον u=1.2 και d=0.8, οι τελικές πιθανές τιμές της μετοχής είναι Su^2=\$72, Sud=\$48 και Sd^2=\$32. Επομένως και οι αντίστοιχες τελικές τιμές του δικαιώματος είναι $f_{uu}=0$, $f_{ud}=4$ και $f_{dd}=20$. Επίσης οι πιθανές τιμές της μετοχής το πρώτο τρίμηνο είναι Su=\$60 και Sd=\$40. Από τις σχέσεις τώρα (2.3), (2.4), (2.5) και (2.7) μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος στους ενδιάμεσους κόμβους και στον αρχικό. Οι τιμές της μετοχής και του δικαιώματος σε κάθε κόμβο του δέντρου, απεικονίζονται στο σχήμα 2.2.

Στο δεύτερο στάδιο τώρα, προκειμένου να αποτιμήσουμε το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης, εφόσον όπως γνωρίζουμε έχει την ίδια αξία με το Ευρωπαϊκό στο τέλος της ζωής του, αρκεί να μελετήσουμε σε ποιούς ενδιάμεσους κόμβους είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση του. Καταρχήν παρατηρούμε ότι στον κόμβο B η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος αποφέρει κόστος του ύψους των \$8 (αφού E=\$52 και Su=\$60). Συνεπώς δεν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του και επομένως η αξία του



Σχήμα 2.3

είναι όμοια με αυτή του Ευρωπαϊκού. Στον κόμβο όμως C παρατηρούμε ότι αν εξασκήσουμε το δικαίωμα που έχουμε για την πώληση της μετοχής έχουμε μια χρηματική εισροή μεγέθους ίση με το max(E-Sd,0)= max(52-40,0)=$12, δηλαδή μεγαλύτερο κέρδος από ότι αν δεν εξασκούσαμε το δικαίωμα. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης αποτιμάται στο ύψος των $12 και όχι στο ύψος των $10.7415 που αποτιμήθηκε το Ευρωπαϊκό. Γνωρίζοντας τώρα την τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης στους κόμβους B και C μπορούμε, μέσω της σχέσης (2.6), να το αποτιμήσουμε και στον κόμβο A. Το σχήμα 2.3 απεικονίζει το δέντρο που αντιστοιχεί στο Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης.

2.4 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ

Τα διωνυμικά υποδείγματα που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να θεωρηθούν ρεαλιστικά εφόσον κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος οι κινήσεις της τιμής της μετοχής περιγράφονται από διωνυμικά δέντρα μιας ή δύο περιόδων. Ένα πιο ρεαλιστικό υπόδειγμα είναι αυτό όπου οι τιμές της μετοχής περιγράφονται από ένα μεγάλο πλήθος μικρών διωνυμικών κινήσεων. Η υπόθεση αυτή για πρώτη φορά διατυπώθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein και αποτελεί τη βάση για ευρείας χρήσεως αριθμητικές μεθόδους.[1]

Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα μιας μετοχής η οποία δεν δίνει μέρισμα. Ως S συμβολίζουμε την αρχική τιμή της μετοχής. Χωρίζουμε τη ζωή του δικαιώματος σε μικρά χρονικά διαστήματα μήκους Δt. Σε κάθε χρονικό διάστημα θεωρούμε ότι η μετοχή **κινείται** είτε ανοδικά κατά u φορές (u>1) είτε πτωτικά κατά d φορές (d<1). Ορίζουμε δε ως p την πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής στο χρόνο Δt ενώ ως 1-p την πιθανότητα μιας καθοδικής κίνησής της στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Εφόσον τώρα οι τιμές της μετοχής αποτελούν τον κυριότερο παράγοντα στην αποτίμηση του δικαιώματος, βασικός σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός εκείνων των μεταβλητών που μας παρέχουν μια πλήρη εικόνα για την κίνηση των τιμών της μετοχής δηλαδή των παραμέτρων p, u και d. Και σε αυτό το σημείο σημαντικό ρόλο θα παίξει για άλλη μια φορά η αρχή του *ουδέτερου κινδύνου.*

Αν θεωρήσουμε λοιπόν ότι είμαστε στην αρχή της ζωής του δικαιώματος, τότε σε χρόνο Δt η αναμενόμενη τιμή της μετοχής θα είναι $Se^{r\Delta t}$ (βάση της αρχής του *ουδέτερου κινδύνου*). Και με βάση την ερμηνεία του p θα έχουμε ότι

$$Se^{r\Delta t}=pSu+(1-p)Sd$$

ή

$$e^{r\Delta t}=pu+(1-p)d \tag{2.8}$$

[1] Για μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση δες Cox, J., Ross, S. και Rubinstein, M., "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979), 229-63.

Από τον ορισμό τώρα της διασποράς έχουμε ότι

$$\mathrm{Var}(S_{\Delta t})=E(S_{\Delta t}^2)-[E(S_{\Delta t})]^2$$

ή

$$S^2e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t}-1)=pS^2u^2+(1-p)S^2d^2-S^2\,[pu+(1-p)d]^2$$

ή

$$e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t}=pu^2+(1-p)d^2 \qquad (2.9)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν θεωρείται αναγκαίο στην προκειμένη περίπτωση να αποδειχθεί πως εξάγεται η διασπορά της τιμής της μετοχής σε ένα μικρό διάστημα Δt. Μια πλήρης ανάλυση και απόδειξη παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο όπως επίσης και στο παράρτημα Π.3.1.

Υπενθυμίζουμε ότι ο βασικός σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός των μεταβλητών p, u και d. Αν εισάγουμε λοιπόν τώρα και την σχέση

$$u=1/d \qquad (2.10)$$

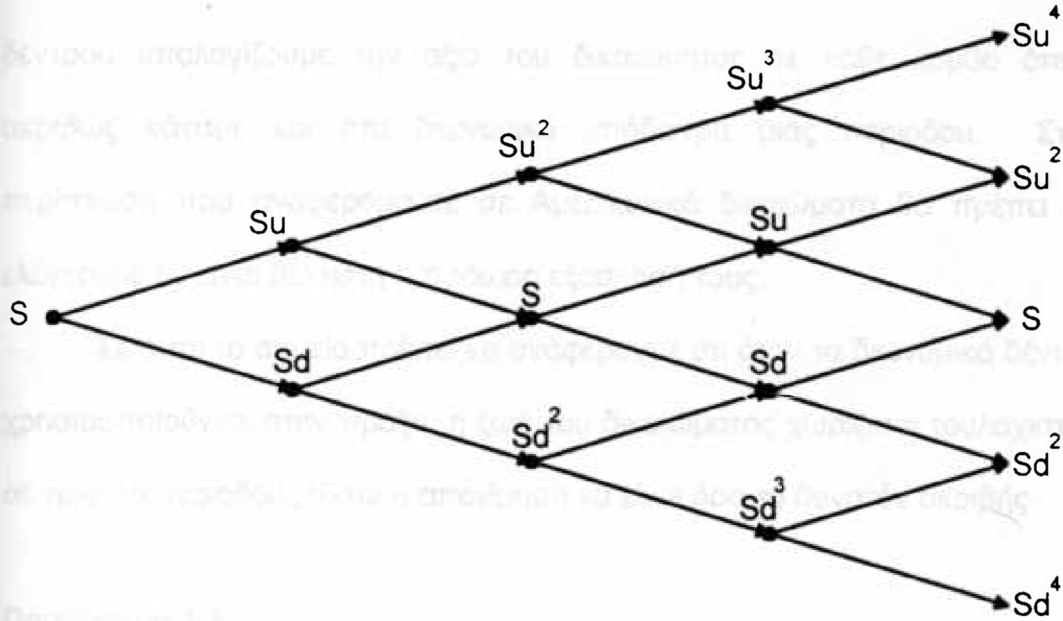
που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Cox, Ross και Rubinstein έχουμε τρεις συνθήκες που προσδιορίζουν πλήρως αυτές τις μεταβλητές. Κάνοντας πράξεις και αγνοώντας όρους που θεωρούνται αμελητέοι, δηλαδή όρους με βαθμό μεγαλύτερο του Δt, προκύπτουν από τις σχέσεις (2.8),(2.9) και (2.10) ότι

$$p=(e^{r\Delta t}-d)/u-d \qquad (2.11)$$

$$u=e^{\sigma\Delta t^{1/2}} \qquad (2.12)$$

$$d=e^{\sigma\Delta t^{-1/2}} \qquad (2.13)$$

Με τη βοήθεια τώρα των παραπάνω σχέσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της μετοχής σε κάθε κόμβο του δέντρου άρα και τις τιμές του δικαιώματος σε κάθε χρονικό διάστημα Δt. Την χρονική στιγμή μηδέν, δηλαδή στην αρχή της ζωής του δικαιώματος, η τιμή της μετοχής είναι S. Σε χρόνο Δt



Σχήμα 2.4

η τιμή της μετοχής γίνεται είτε Su είτε Sd. Σε χρόνο 2Δt γίνεται ή Su^2 ή Sud ή Sd^2. Και γενικά σε χρόνο iΔt γίνεται Su^jd^{j-1} όπου j=0(1)i. Στο σχήμα 2.4 παρουσιάζεται ένα τέτοιο δέντρο. Γνωρίζοντας τώρα την τρέχουσα τιμή S της μετοχής αλλά και μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ των τιμών της, έχουμε μια πλήρη εικόνα για την κίνηση των τιμών της μετοχής σε όλη τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.[1]

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έχουμε όλες τις πληροφορίες για να αποτιμήσουμε το δικαίωμα σε κάθε κόμβο του δέντρου. Ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου, υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος γνωρίζοντας ότι ένα δικαίωμα αγοράς στο τέλος της ζωής του έχει αξία ίση με το $\max(S_T-E,0)$ ενώ ένα δικαίωμα πώλησης έχει αξία ίση με το $\max(E-S_T,0)$. Ως E συμβολίζουμε την τιμή εξασκήσεώς του και ως S_T την τιμή της μετοχής στο τέλος της ζωής του δικαιώματος. Εν συνεχεία κινούμενοι προς την αρχή του

---

[1] Από τις ιστορικές τιμές της μετοχής μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση s^* της τυπικής απόκλισης σ που δίνεται από τη σχέση $s^*=s/\sqrt{\tau}$ όπου s η εκτίμηση του $\sigma\sqrt{\tau}$ και τ η χρονική διάρκεια που λαμβάνονται οι τιμές της μετοχής. Ο χρόνος δε τ μετριέται σε χρόνια.

δέντρου υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος σε κάθε κόμβο όπως ακριβώς κάναμε και στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου. Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε Αμερικανικά δικαιώματα θα πρέπει να ελέγχουμε αν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή τους.

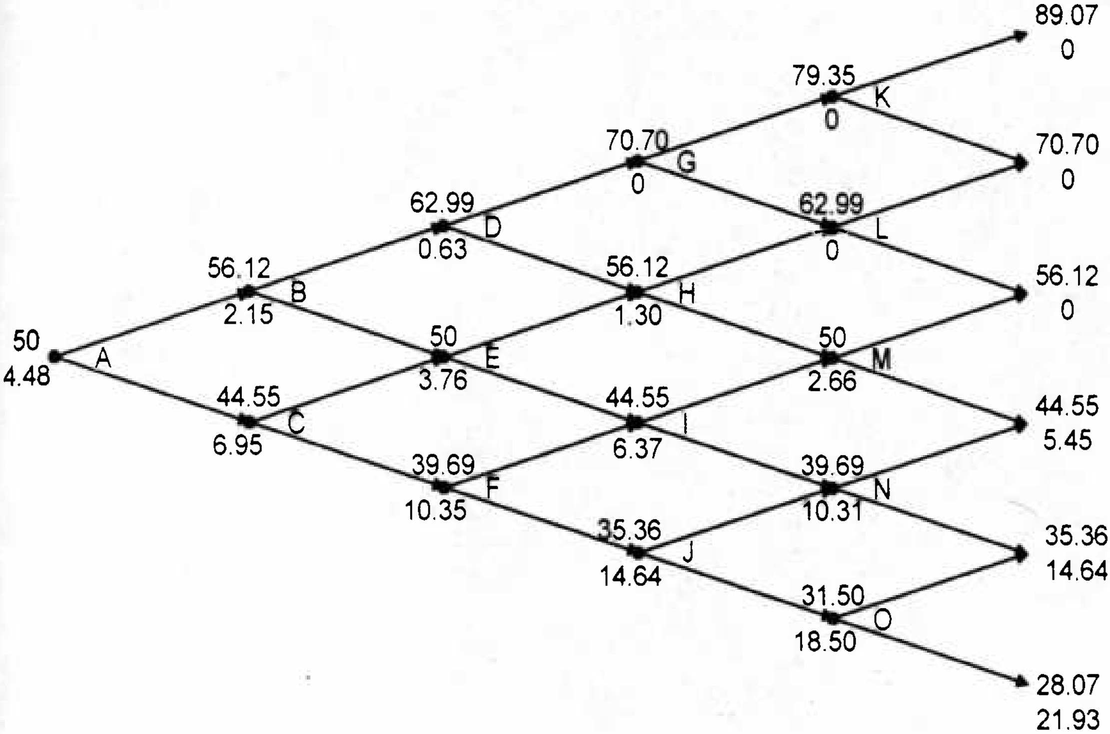
Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι όταν τα διωνυμικά δέντρα χρησιμοποιούνται στην πράξη, η ζωή του δικαιώματος χωρίζεται τουλάχιστον σε τριάντα περιόδους ώστε η αποτίμηση να είναι όσο το δυνατόν ακριβής.

Παράδειγμα 4.3

Έστω ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης χρονικής διάρκειας πέντε μηνών. Γνωρίζουμε δε ότι η μετοχή δεν δίνει μέρισμα ενώ τόσο η τρέχουσα τιμή της όσο και η τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος είναι \$50. Είναι γνωστό επίσης ότι το βέβαιο επιτόκιο είναι 10% ετησίως ενώ η τυπική απόκλιση της τιμής της μετοχής είναι 40%.

Προκειμένου τώρα να αποτιμήσουμε το δικαίωμα, χωρίζουμε τη ζωή αυτού σε πέντε χρονικές περιόδους (βλέπε σχήμα 2.5). Εφόσον η διάρκεια ζωής του είναι T=0.4176 (θεωρούμε 21 εργάσιμες μέρες το μήνα) έχουμε ότι Δt=0.0833. Με τη βοήθεια των τύπων (2.12) και (2.13) υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών σε κάθε κόμβο. Εν συνεχεία ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου και κινούμενοι προς την αρχή αυτού υπολογίζουμε μέσω της σχέσης (2.11) και (2.2) τις αντίστοιχες τιμές του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Επειδή όμως αναφερόμαστε σε Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης θα πρέπει σε κάθε κόμβο να ελέγχουμε αν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον κόμβο N του δέντρου που απεικονίζεται στο σχήμα 2.5. Ενώ σύμφωνα με τη σχέση (2.2) το δικαίωμα αποτιμάται

$$(0.5076 \times 5.45+0.4926 \times 14.64)\, e^{-0.10x0.0833} = \$9.90$$



Σχήμα 2.5

παρόλαυτα η τιμή του είναι στο ύψος των \$10.31 αφού τόσο κέρδος δίνει το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης αν εξασκηθεί. Η συνολική κίνηση τόσο των τιμών της μετοχής όσο και του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει αν θα θέλαμε να είμαστε πιο ακριβείς στην αποτίμηση του δικαιώματος στην αρχή της ζωής του, θα έπρεπε να είχαμε ένα δέντρο με τουλάχιστον τριάντα περιόδους.

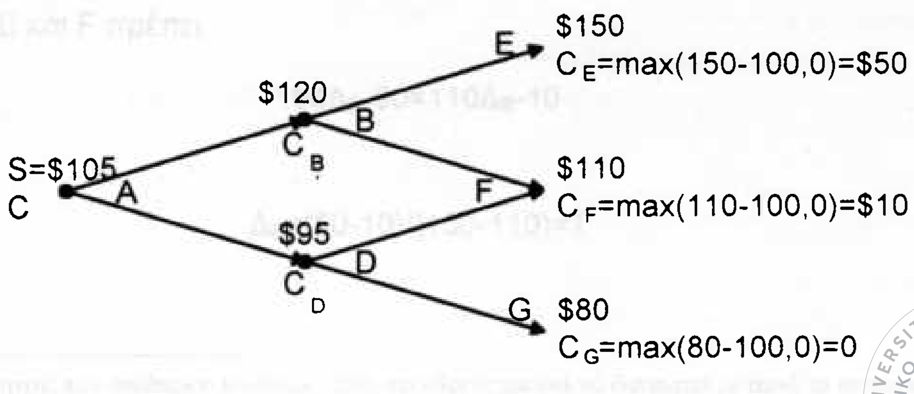
2.5 Η ΑΥΤΟΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΗ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε έναν αλγόριθμο αποτίμησης του δικαιώματος θεωρώντας ότι οι τιμές της μετοχής δεν μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσοστό σε κάθε περίοδο. Δηλαδή ανάλογα με την κίνηση της μετοχής στο παρελθόν και τις προσωπικές μας εκτιμήσεις θεωρούμε κάποιες μελλοντικές τιμές αυτής και προσπαθούμε βάση αυτών των τιμών να αποτιμήσουμε το δικαίωμα έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η απουσία κερδοσκοπικών ευκαιριών.

Η όλη διαδικασία ανάγεται στη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από το δικαίωμα και τη μετοχή, δεν εμπεριέχει αβεβαιότητα και δε χρειάζονται ιδία κεφάλαια για τη δημιουργία του. Όπως έχουμε αναφερεί και στην αρχή του κεφαλαίου είναι πάντα δυνατή η σύνθεση ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω και σε αυτή τη περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα περιβάλλον ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο.

<u>Παράδειγμα 2.4</u>

Έστω ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής, με τιμή εξασκήσεως E=$100 και διάρκειας έξι μηνών, δηλαδή T=0.4998 (θεωρούμε 21 εργάσιμες μέρες το μήνα). Οι πιθανές μελλοντικές τιμές της μετοχής, μέχρι τη χρονική στιγμή T, απεικονίζονται σε ένα δέντρο δύο περιόδων με διάρκεια περιόδου Δt=0.2499. Οι τιμές αυτές όπως και η αξία του δικαιώματος στο τέλος της ζωής του παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Υποθέτουμε τέλος ότι το ετήσιο βέβαιο επιτόκιο δανεισμού είναι 10%.[1]

Προκειμένου τώρα να αποτιμήσουμε το δικαίωμα στην αρχή της ζωής του, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή μηδέν (δηλαδή όταν βρισκόμαστε στον κόμβο A) που αποτελείται από την:

α) Αγορά πλήθους Δ_A μετοχών

β) Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς.

Το κόστος του χαρτοφυλακίου στην αρχή της ζωής του καλύπτεται με δανεισμό ύψους y_A.

Για να δημιουργήσουμε όμως ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο, το οποίο θέλουμε να μην εμπεριέχει αβεβαιότητα, ξεκινούμε από το τέλος της ζωής του και το συνθέτουμε κάτω από τις προϋποθέσεις που έχουμε ήδη αναφέρει.

Στο πρώτο στάδιο θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στον κόμβο B έχοντας το εξής χαρτοφυλάκιο:

ΘΕΣΗ	ΚΟΜΒΟΣ B	ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	
		S_E=\$150	S_F=\$110
Απόδοση Δικ.Αγοράς	$-C_B$	-50	-10
Απόδοση μετοχών πλήθους Δ_B	$120\Delta_B$	$150\Delta_B$	$110\Delta_B$
Συνολικό ύψος δανείου	y_B	$-e^{0.2499X0.1}\, y_B$	$-e^{0.2499x0.1} y_B$
Σύνολο	0	0	0

Προκειμένου τώρα αυτό το χαρτοφυλάκιο να δίνει ίδια απόδοση στους κόμβους E και F πρέπει

$$150\Delta_B-50=110\Delta_B-10$$

ή

$$\Delta_B=(50-10)/(150-110)=1$$

[1] Λόγω της αρχής του *ουδέτερου κινδύνου*, κάθε επενδυτής μπορεί να δανειστεί με αυτό το επιτόκιο.

Πρέπει δηλαδή στον κόμβο Β να κατέχω μία μετοχή ενώ το ύψος του δανείου μου να ανέρχεται στα

$$-50+150x1-e^{0.2499X0.1}\ y_B=0$$

ή

$$y_B=(150x1-50)\ e^{-0.2499X0.1}=\$97.532$$

Γνωρίζοντας τώρα το κόστος του χαρτοφυλακίου στον κόμβο Β μπορώ να υπολογίσω και την αξία του δικαιώματος αγοράς σε αυτόν. Έχουμε λοιπόν

$$C_B=120x1-97.532=\$22.468$$

Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στον κόμβο D έχοντας το εξής χαρτοφυλάκιο:

ΘΕΣΗ	ΚΟΜΒΟΣ D	ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	
		S_F=\$110	S_G=\$80
Απόδοση Δικ.Αγοράς	$-C_D$	-10	0
Απόδοση μετοχών πλήθους Δ_D	$95\Delta_D$	$110\Delta_D$	$80\Delta_D$
Συνολικό ύψος δανείου	y_D	$-e^{0.2499X0.1}\ y_D$	$e^{0.2499x0.1}y_D$
Σύνολο	0	0	0

Ακολουθώντας τώρα την ίδια στρατηγική που χρησιμοποιήσαμε στον κόμβο Β έχουμε ότι Δ_D= 1/3 και y_D=\$26.008 και τελικά ότι C_D=\$5.6586.

Τέλος θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στο κόμβο Α, δηλαδή στην αρχή της ζωής του δικαιώματος, έχοντας το επόμενο χαρτοφυλάκιο:

ΘΕΣΗ	ΚΟΜΒΟΣ Α	ΤΕΛΟΣ 1ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ	
		S_B=\$120	S_D=\$95
Εγγραφή 1 Δικ.Αγοράς	C	-22.468	-5.6586
Αγορά Δ_A μετοχών	$-105\Delta_A$	$120\Delta_A$	$95\Delta_A$
Ύψος αρχικού δανείου	y_A	$-e^{0.2499X0.1}\ y_A$	$e^{0.2499x0.1}y_A$
Σύνολο	0	0	

Ακολουθώντας την ίδια στρατηγική έχουμε ότι

$$\Delta_A = (22.468-5.6586)/(120-95)=0.672$$

$$y_A = (110x0.672)\, e^{-0.2499X0.1} = \$50.182$$

και τελικά

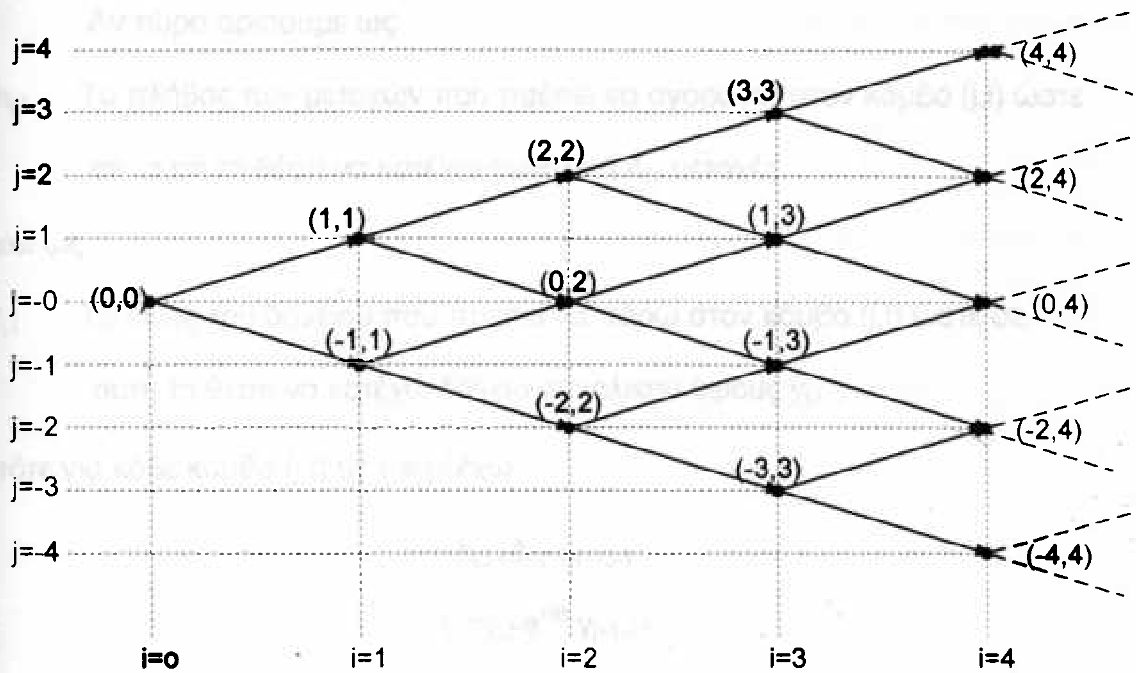
$$C=105x0.672-50.182=\$20.378.$$

Η αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική που μου εξασφαλίζει την κατάλληλη τιμή (fair price) του δικαιώματος ώστε να αποφεύγονται οι κερδοσκοπικές ευκαιρίες, παρουσιάζεται συνοπτικά στο σχήμα 2.7 στο τέλος του κεφαλαίου.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση αυτού του παραδείγματος πρέπει να σημειώσουμε ότι η αποτίμηση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, μέσω της αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής, δεν μπορεί να θεωρηθεί ρεαλιστική γιατί κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, οι κινήσεις της τιμής της μετοχής περιγράφονται από ένα διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων. Είναι αναγκαίο λοιπόν, προκειμένου οι εκτιμήσεις μας να προσεγγίζουν την πραγματικότητα, να ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία, θεωρώντας όμως ένα διωνυμικό δέντρο πολλών περιόδων. Σε αυτή τη περίπτωση, η εξαγωγή ενός αλγορίθμου που να περιγράφει πλήρως την αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική, μέσω της οποίας γίνεται η αποτίμηση του δικαιώματος, θεωρείται αναγκαία.

Αλγόριθμος αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής

Θεωρούμε ένα δέντρο ν περιόδων όπου κάθε κόμβος καθορίζεται από ένα ζεύγος συντεταγμένων (j,i). Ένα τέτοιο δέντρο απεικονίζεται στο σχήμα 2.6 που ακολουθεί.



Σχήμα 2.6

Γνωρίζοντας τις τιμές της μετοχής σε κάθε κόμβο όπως και την αξία του δικαιώματος στο τέλος της ζωής του, ο αλγόριθμος που μας παρέχει όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για την σύνθεση του χαρτοφυλακίου, άρα και για την αξία του Ευρωπαϊκού δικαιώματος, σε κάθε κόμβο (j,i) είναι ο παρακάτω:

$$\Delta_{j,i} = [f(S_{j+1,i+1})-f(S_{j-1,i+1})]/(S_{j+1,i+1}-S_{j-1,i+1}) \qquad (2.14)$$

$$y_{j,i} = [S_{j+1,i+1}\, \Delta_{j,i} - f(S_{j+1,i+1})]\, e^{-r\Delta t} = [S_{j-1,i+1}\, \Delta_{j,i}\; f(S_{j-1,i+1})]\, e^{-r\Delta t} \qquad (2.15)$$

$$f(S_{j,i})=S_{j,i}\Delta_{j,i}-y_{j,i} \qquad (2.16)$$

Όπου i=0(1)ν , j=-i(2)i και

$\Delta_{j,i}$: Το πλήθος των μετοχών που πρέπει να έχω στον κόμβο (j,i).

$y_{j,i}$: Το ύψος του δανείου που πρέπει να έχω στον κόμβο (j,i).

$f(S_{j,i})$: Η αξία του δικαιώματος στον κόμβο (j,i).

$S_{j,i}$: Η τιμή της μετοχής στον κόμβο (j,i).

r : Το ετήσιο βέβαιο επιτόκιο δανεισμού.

Αν τώρα ορίσουμε ως

$h_{j,i}$: Το πλήθος των μετοχών που πρέπει να αγοράσω στον κόμβο (j,i) ώστε σε αυτή τη θέση να κατέχω συνολικά $\Delta_{j,i}$ μετοχές

και ως

$l_{j,i}$: Το ύψος του δανείου που πρέπει να πάρω στον κόμβο (j,i) ώστε σε αυτή τη θέση να κατέχω δάνειο συνολικού ύψους $y_{j,i}$

τότε για κάθε κόμβο (j,i) με $i \neq |j|$ έχω

$$h_{j,i} = \Delta_{j,i} - \Delta_{j+1,i-1}$$

$$l_{j,i} = y_{j,i} - e^{r\Delta t}\, y_{j+1,i-1}$$

όταν οδηγούμαστε από τον κόμβο (j+1,i-1) στον κόμβο (j,i) και

$$h_{j,i} = \Delta_{j,i} - \Delta_{j-1,i-1}$$

$$l_{j,i} = y_{j,i} - e^{r\Delta t}\, y_{j-1,i-1}$$

όταν οδηγούμαστε από τον κόμβο (j-1,i-1) στον κόμβο (j,i).

Ενώ για τους κόμβους (j,i) με $i = j$ έχω

$$h_{j,i} = \Delta_{j,i} - \Delta_{j-1,i-1}$$

$$l_{j,i} = y_{j,i} - e^{r\Delta t}\, y_{j-1,i-1}$$

Και για τους κόμβους (j,i) με $i = -j$ έχω

$$h_{j,i} = \Delta_{j,i} - \Delta_{j+1,i-1}$$

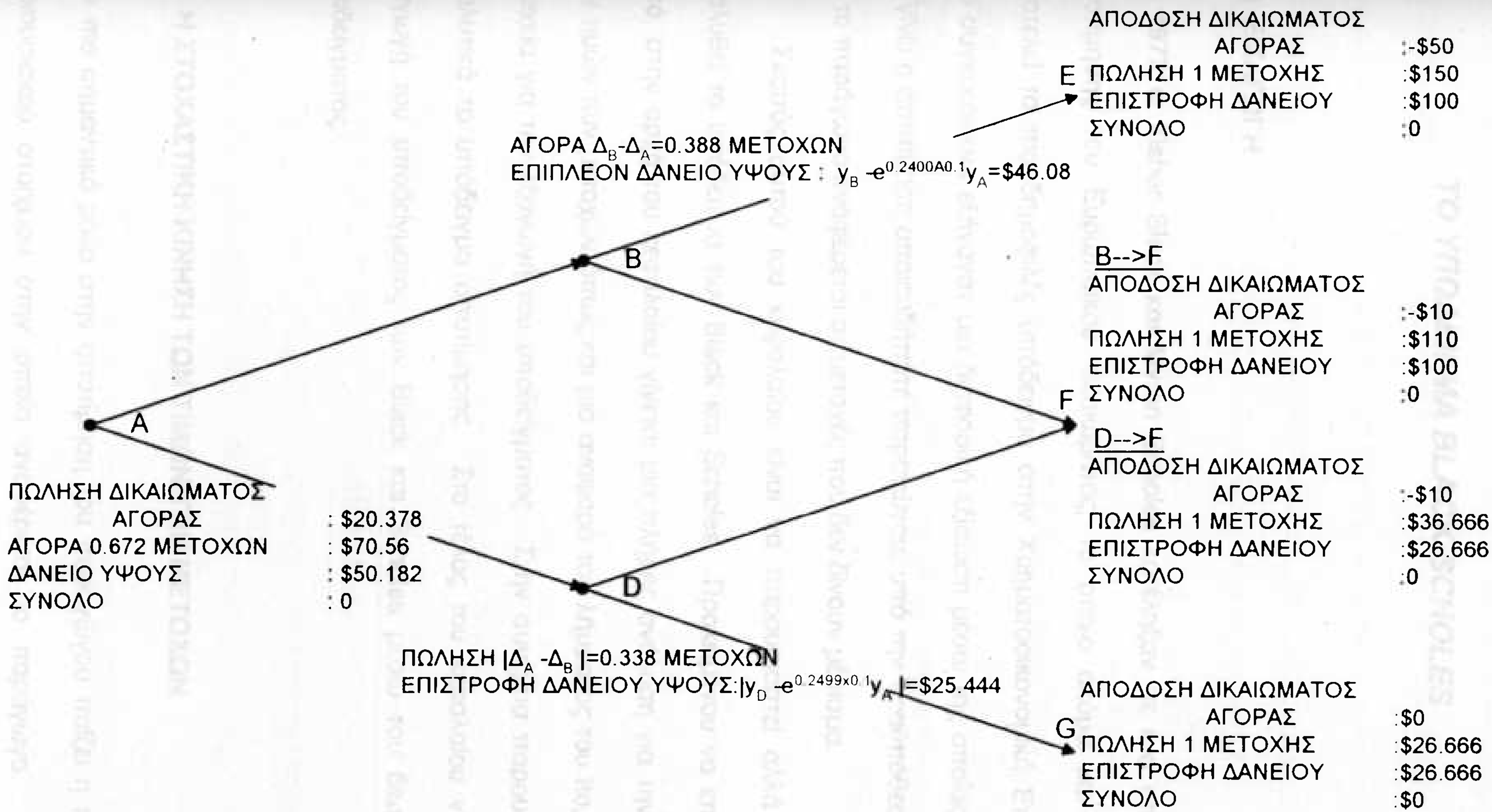
$$l_{j,i} = y_{j,i} - e^{r\Delta t}\, y_{j+1,i-1}$$

Εφόσον όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς δεν αποφέρει μεγαλύτερη απόδοση αν εξασκηθεί πρόωρα, ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση του.

Στην περίπτωση όμως του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης θα πρέπει σε κάθε κόμβο να ελέγχουμε αν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του. Δηλαδή ακολουθούμε τον παραπάνω αλγόριθμο αντικαθιστώντας όμως τη σχέση (2.16) με την παρακάτω σχέση:

$$P_A(S_{j,i}) = \max[P_E(S_{j,i}), E-S_{j,I}] \tag{2.17}$$

Όπου ως $P_A(S_{j,i})$ συμβολίζουμε την τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης στον κόμβο (j,i), ως $P_E(S_{j,i})$ συμβολίζουμε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης ενώ ως E την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος.


ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ :-$50
E
ΠΩΛΗΣΗ 1 ΜΕΤΟΧΗΣ :$150
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΔΑΝΕΙΟΥ :$100
ΣΥΝΟΛΟ :0
ΑΓΟΡΑ Δ_B-Δ_A=0.388 ΜΕΤΟΧΩΝ
ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΔΑΝΕΙΟ ΥΨΟΥΣ : $y_B - e^{0.2400A0.1} y_A$=$46.08
B
B-->F
ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ :-$10
ΠΩΛΗΣΗ 1 ΜΕΤΟΧΗΣ :$110
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΔΑΝΕΙΟΥ :$100
ΣΥΝΟΛΟ :0
F
A
D-->F
ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ :-$10
ΠΩΛΗΣΗ 1 ΜΕΤΟΧΗΣ :$36.666
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΔΑΝΕΙΟΥ :$26.666
ΣΥΝΟΛΟ :0
ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ : $20.378
ΑΓΟΡΑ 0.672 ΜΕΤΟΧΩΝ : $70.56
ΔΑΝΕΙΟ ΥΨΟΥΣ : $50.182
ΣΥΝΟΛΟ : 0
D
ΠΩΛΗΣΗ |Δ_A -Δ_B |=0.338 ΜΕΤΟΧΩΝ
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΔΑΝΕΙΟΥ ΥΨΟΥΣ:|$y_D - e^{0.2499x0.1} y_A$|=$25.444
ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ :$0
G
ΠΩΛΗΣΗ 1 ΜΕΤΟΧΗΣ :$26.666
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΔΑΝΕΙΟΥ :$26.666
ΣΥΝΟΛΟ :$0

Σχήμα 2.7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^0

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ BLACK-SCHOLES

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 1973 οι Fisher Black και Myron Scholes κατέληξαν σε ένα υπόδειγμα αποτίμησης του Ευρωπαϊκού δικαιώματος, το οποίο ακόμα και σήμερα αποτελεί το πιο δημοφιλές υπόδειγμα στην Χρηματοοικονομική Επιστήμη. Πιο συγκεκριμένα εξήγαγαν μια διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας μπορεί να γίνει η αποτίμηση οποιουδήποτε παραγώγου, υπό την προϋπόθεση όμως ότι το παράγωγο αναφέρεται σε μετοχές που δεν δίνουν μέρισμα.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστεί αλλά και να αναλυθεί το υπόδειγμα των Black και Scholes. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, στην αρχή του κεφαλαίου γίνεται μια πλήρης ανάλυση για την κίνηση των τιμών των μετοχών όπως και μια αναφορά του λήμματος του Ito, βασικά στοιχεία για την εξαγωγή του υποδείγματος. Στην συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το υπόδειγμα αποτίμησης. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται η εξαγωγή του υποδείγματος των Black και Scholes μέσω του διωνυμικού υποδείγματος.

3.2 Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ

Τον πιο σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση του παραγώγου παίζει η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στην οποία αναφέρεται το παράγωγο. Βασική προϋπόθεση λοιπόν για την εξαγωγή του υποδείγματος των Black και Scholes, είναι η κατανόηση της κίνησης των τιμών των μετοχών και η εξαγωγή μιας στοχαστικής διαδικασίας που να την περιγράφει πλήρως. Προκειμένου όμως να επιτευχθεί αυτό, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις στατιστικές ιδιότητες που παρουσιάζουν οι τιμές των μετοχών. Παρατηρώντας την κίνηση αυτών, πέντε είναι οι πιο σημαντικές ιδιότητες:[1]

α) Η τιμή της μετοχής είναι αβέβαιη. Αν και γνωρίζουμε την παρούσα τιμή της δεν μπορούμε να ξέρουμε πόσο θα αποτιμηθεί στο άμεσο μέλλον.

β) Οι μεταβολές στις τιμές της μετοχής είναι συνεχείς. Αν μάλιστα παρατηρήσουμε αυτές τις μεταβολές σε μικρά χρονικά διαστήματα βλέπουμε ότι τείνουν στο μηδέν. Βέβαια αυτή η παραδοχή αν και περιγράφει, τις περισσότερες φορές, ικανοποιητικά την πραγματικότητα δεν περικλείει τις λίγες περιπτώσεις όπου παρατηρούνται μεγάλες διακυμάνσεις στις τιμές των μετοχών σε μικρά χρονικά διαστήματα.

γ) Η τιμή της μετοχής δεν είναι ποτέ μηδέν, αποκλείοντας βέβαια τις μετοχές εκείνων των εταιριών που χρεωκοπούν.

δ) Η αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής τείνει να αυξηθεί με το χρόνο. Αυτό δεν σημαίνει ότι σίγουρα μια μετοχή θα αυξήσει την αποδοσή της μακροπρόθεσμα αλλά ότι εμείς προσδοκούμε για αυτό όταν κατέχουμε ένα αβέβαιο περιουσιακό στοιχείο για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

ε) Η αβεβαιότητα όσο αφορά την απόδοση μιας μετοχής αυξάνεται όσο αυξάνεται και ο χρόνος. Δηλαδή η διασπορά της τιμής μιας μετοχής είναι ανάλογη με το χρόνο.

Έχοντας υπόψη μας τις παραπάνω ιδιότητες, η στοχαστική διαδικασία

[1] Δες Simon Benning (1998), "Financial Modeling", Gambridge: MIT,. (Κεφ.12^0)

που περιγραφεί όσο το δυνατόν καλύτερα την κίνηση των τιμών των μετοχών είναι η γενικευμένη διαδικασία Wiener ή αλλιώς η γεωμετρική κίνηση του Brown. Η μεταβολή δηλαδή της τιμής της μετοχής στην μονάδα χρόνου dt, περιγράφεται από την σχέση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{3.1}$$

ή

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz \tag{3.2}$$

Όπου

dS/S : Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής στη μονάδα του χρόνου.

μ : Η μέση ετήσια απόδοση της μετοχής (θεωρείται σταθερή).

σ : Η ετήσια τυπική απόκλιση των τιμών της μετοχής (θεωρείται σταθερή).

Και

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \text{ με } \varepsilon \sim \varphi(0,1) \tag{3.3}$$

Όπου ως φ συμβολίζουμε την κανονική κατανομή. Σημειώνουμε επίσης ότι η τιμή του dz είναι ανεξάρτητη σε δύο διαφορετικές μονάδες του χρόνου.

Από την σχέση (3.2) προκύπτει ότι στη μονάδα του χρόνου η απόδοση της μετοχής είναι μdt ενώ η διασπορά αυτής της απόδοσης είναι $\sigma^2 dt$.

Τρία είναι τώρα τα πιο σημαντικά συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτήν την σχέση. Πρώτον ότι η προσδοκώμενη απόδοση μιας μετοχής, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, είναι ανεξάρτητη από την τιμή της. Δεύτερον ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα η αβεβαιότητα που διακατέχει τον επενδυτή, γύρω από την απόδοση της μετοχής είναι ανεξάρτητη από την τιμή της. Και τέλος ότι η διασπορά της απόδοσης της μετοχής είναι ανάλογη του χρόνου. Συμπέρασμα που το υπαγορεύει άλλωστε και η τελευταία στατιστική ιδιότητα των τιμών των μετοχών.

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι από τις σχέσεις (3.2) και (3.3) προκύπτει ότι:

$$dS/S \sim \varphi(\mu dt, \sigma\sqrt{dt}).$$

3.3 ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΙΤΟ

Το 1951 ο μαθηματικός Κ. Ito απέδειξε ένα λήμμα, γνωστό ως λήμμα του Ito, σύμφωνα με το οποίο αν μια μεταβλητή χ ακολουθεί την διαδικασία Ito τότε και η μεταβλητή G, η οποία είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ και του χρόνου t, ακολουθεί την ίδια διαδικασία.[1] Το λήμμα αυτό αποτέλεσε σημαντικό εργαλείο για την εξαγωγή του υποδείγματος Black-Scholes.

Έστω ότι ως G συμβολίζουμε την τιμή του παραγώγου και ως χ την τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο οποίο αναφέρεται το παράγωγο. Υποθέτουμε τώρα ότι η μεταβλητή χ ακολουθεί την διαδικασία Ito, δηλαδή ότι:

$$dx = \alpha(x,t)\, dt + b(x,t)\, dz$$

όπου

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \quad \text{με } \varepsilon \sim \varphi(0,1)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η μεταβλητή χ έχει ένα προσδοκώμενο ρυθμό αύξησης $\alpha(x,t)$ σε κάθε μονάδα του χρόνου. Μάλιστα αυτός ο ρυθμός αύξησης είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ και του χρόνου t. Η στιγμιαία απόκλιση από τον προσδοκώμενο ρυθμό αύξησης εκφράζεται

[1] Για μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση δες Ito, K., "On Stochastic Different Equations", Memoirs, American Mathematical Society, 4 (1951), 1-51.

μέσω του όρου b(x,t) dz όπου είναι και αυτός συνάρτηση της μεταβλητής χ και του χρόνου t.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, σύμφωνα με το λήμμα που παρουσιάσαμε, η τιμή του παραγώγου G η οποία είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ και του χρόνου t, ακολουθεί τη διαδικασία Ito. Δηλαδή

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz.$$

Στην προηγούμενη ενότητα τώρα αναφέραμε ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί την διαδικασία Ito, δηλαδή ότι:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

όπου όμως $a(x,t)=\mu S$ και $b(x,t)=\sigma S$.

Αν εφαρμόσουμε τώρα και πάλι το λήμμα του Ito λαμβάνοντας όμως υπόψη μας την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι η μεταβολή της τιμής του δικαιώματος μιας μετοχής θα ακολουθεί την εξής διαδικασία:

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \qquad (3.4)$$

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτής της ενότητας τα αποτελέσματα αυτού του λήμματος θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή του υποδείγματος αποτίμησης του δικαιώματος των Black και Scholes.

3.4 Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ

Έστω ότι η τιμή μιας μετοχής ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση του Brown, δηλαδή η τιμή S τον τρέχον χρόνο t, ακολουθεί την διαδικασία που περιγράφεται από την σχέση (3.1). Τότε από το λήμμα του Ito, θέτοντας ως G=lnS, προκύπτει ότι:

$$d\ln S = (\mu-\sigma^2/2)dt + \sigma dz$$

Εφόσον το μ και το σ είναι σταθερά, από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η lnS ακολουθεί την γενικευμένη διαδικασία Wiener με ένα σταθερό ρυθμό αύξησης $\mu-\sigma^2/2$ και σταθερή διακύμανση σ^2. Επομένως η μεταβολή του lnS μεταξύ του τρέχοντος χρόνου t και του τέλους της ζωής του δικαιώματος T, ακολουθεί την κανονική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα

$$\ln S_T-\ln S \sim \varphi[(\mu-\sigma^2/2)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\,] \qquad (3.5)$$

όπου ως φ(μ,σ) συμβολίζουμε την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ.

Από τις ιδιότητες τώρα της κανονικής κατανομής και από την σχέση (3.5) προκύπτει ότι:

$$\ln S_T \sim \varphi[\ln S + (\mu-\sigma^2/2)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\,]$$

Δηλαδή η $\ln S_T$ ακολουθεί την κανονική κατανομή και άρα η S_T ακολουθεί τη λογαριθμική κατανομή. Υπενθυμίζουμε ότι μια μεταβλητή ακολουθεί τη λογαριθμική κατανομή όταν ο λογάριθμος της ακολουθεί την κανονική.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι αρκετά σημαντικό και επιβεβαιώνει την επιλογή της γενικευμένης διαδικασίας Wiener για την περιγραφή της μεταβολής των τιμών των μετοχών. Όπως καταρχήν γνωρίζουμε η κανονική κατανομή κυριαρχεί στις μεταβλητές που εμφανίζονται στην χρηματοοικονομική αγορά. Στην περίπτωση όμως των τιμών των μετοχών ή των επιτοκίων είναι αδύνατον να θεωρήσουμε την κανονική κατανομή αφού η υπόθεση αυτή θα μας ανάγκαζε να αποδεχτούμε και αρνητικές τιμές στις παραπάνω μεταβλητές. Αντίθετα η λογαριθμική κατανομή παίρνει τιμές θετικές ή μηδέν. Με αυτό το τρόπο λοιπόν έχουμε τις τιμές των μετοχών να ακολουθούν την λογαριθμική κατανομή ενώ οι αποδόσεις αυτών να ακολουθούν την κανονική. Δηλαδή καταφέρνουμε να περιγράψουμε την κίνηση των τιμών των μεταβλητών σύμφωνα με τις στατιστικές τους ιδιότητες και επομένως να προσεγγίζουμε όσο το δυνατόν καλύτερα την πραγματικότητα.

3.5 ΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ BLACK-SCHOLES

Οι υποθέσεις που γίνονται για την εξαγωγή του υποδείγματος Black-Scholes και που καθιστούν ιδανική την αγορά μετοχών και δικαιωμάτων είναι οι ακόλουθες:

α) Η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την κίνηση των τιμών των μετοχών είναι η γενικευμένη διαδικασία Wiener που περιγράφτηκε στην ενότητα 3.2.

β) Επιτρέπεται ο δανεισμός και η πώληση (short selling) οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου.

γ) Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής και φόροι. Όλα τα περιουσιακά στοιχεία θεωρούνται διαιρεταία.

ε) Οι μετοχές δεν δίνουν μερίσματα κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.

στ) Η δομή της αγορά δεν επιτρέπει τη δημιουργία κερδοσκοπικών ευκαιριών.

ζ) Οι συναλλαγές των περιουσιακών στοιχείων πραγματοποιούνται σε συνεχή χρόνο.

η) Το βέβαιο επιτόκιο r είναι γνωστό και σταθερό μέσα στο χρόνο.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η αξία του δικαιώματος θα εξαρτάται μόνο από την τιμή της μετοχής και το χρόνο ζωής του. Επίσης γνωρίζουμε ότι σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα, η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς συσχετίζεται θετικά με την τιμή της αντίστοιχης μετοχής ενώ η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης συσχετίζεται αρνητικά. Και στις δύο λοιπόν περιπτώσεις είναι δυνατή η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από το δικαίωμα και την αντίστοιχη μετοχή έτσι ώστε να αντισταθμίζονται οι απώλειες ή τα κέρδη της μετοχής με αυτά του δικαιώματος. Το αποτέλεσμα θα είναι η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου να είναι βέβαιη σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι είναι πάντα δυνατή η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα δικαίωμα και την αντίστοιχη μετοχή και δεν εμπεριέχει κίνδυνο. Η απουσία συνάμα των κερδοσκοπικών ευκαιριών έχει ως αποτέλεσμα να αποδίδει το χαρτοφυλάκιο απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο που δημιουργείται, είναι βέβαιο μόνο στη μονάδα του χρόνου. Επομένως σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει να μεταβάλλεται η σύνθεσή του ώστε να διατηρείται σταθερή η απόδοσή του και ίση με το βέβαιο επιτόκιο. Αυτό είναι και το βασικό στοιχείο του υποδείγματος Black-Scholes.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι προφανές ότι και σε αυτό το υπόδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο περιβάλλον όπως κάναμε και στο διωνυμικό υπόδειγμα αποτίμησης των δικαιωμάτων.

3.6 Η ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BLACK-SCHOLES

Έστω ότι η τιμή S μιας μετοχής ακολουθεί τη γενικευμένη διαδικασία Wiener που περιγράψαμε στην ενότητα 3.2, δηλαδή ότι:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Αν ως f συμβολίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς που αναφέρεται στην παραπάνω μετοχή, με βάση το λήμμα του Ito, η μεταβλητή αυτή πρέπει να εξαρτάται από το S και από τον χρόνο t. Πιο συγκεκριμένα

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz$$

Σε διακριτό χρόνο οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \qquad (3.6)$$

Και

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \qquad (3.7)$$

Όπου τώρα $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ και ως ΔS και Δf συμβολίζουμε τις μεταβολές της τιμής της μετοχής και του δικαιώματος αντίστοιχα στο χρονικό διάστημα Δt.

Σκοπός μας τώρα είναι να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο δίχως κίνδυνο που να αποτελείται από το δικαίωμα αγοράς και τη μετοχή. Το χαρτοφυλάκιο αυτό δημιουργείται από την :

α) Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς.

β) Αγορά $\frac{\partial f}{\partial S}$ μετοχών.

Το κόστος του παραπάνω χαρτοφυλακίου είναι:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \qquad (3.8)$$

Μετά από χρόνο τώρα Δt, εφόσον μεταβάλλεται η τιμή της μετοχής άρα και του παραγώγου, θα μεταβληθεί και η αξία του χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \qquad (3.9)$$

Η σχέση (3.9), μέσω των σχέσεων (3.6) και (3.7), γίνεται:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad (3.10)$$

Στην τελευταία τώρα σχέση, επισημαίνουμε την απουσία της τυχαίας μεταβλητής $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ($\varepsilon \sim \varphi(0,1)$) η οποία ήταν και η μόνη μεταβλητή που προσέδιδε αβεβαιότητα στο χαρτοφυλάκιο. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το χαρτοφυλάκιο κατά τη χρονική διάρκεια Δt αποφέρει βέβαιη απόδοση. Και λόγω της απουσίας κερδοσκοπικών ευκαιριών η απόδοσή του είναι ίση με το βέβαιο επιτόκιο r. Επομένως

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Η σχέση αυτή τώρα, μέσω των σχέσεων (3.8) και (3.10), γίνεται:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

ή

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (3.11)$$

Οι λύσεις της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες του κάθε παραγώγου. Στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, η οριακή συνθήκη είναι:

$$f = \max(S_t - E, 0) \quad \text{όταν } t = T$$

ενώ στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, είναι:

$$f = \max(E-S_t,0) \quad \text{όταν } t=T$$

Σημειώνουμε ότι ως E συμβολίζουμε την τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος ενώ ως T τη χρονική στιγμή της λήξεως της ζωής του.

Τέλος θα πρέπει να επισημάνουμε για μια ακόμα φορά το βασικό σημείο της ανάλυσης των Black και Scholes. Δηλαδή ότι το χαρτοφυλάκιο έχει βέβαιη απόδοση για ένα πάρα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt. Καθώς το S και το t αλλάζουν πρέπει να αλλάζει και το πλήθος $\frac{\partial f}{\partial S}$ των μετοχών που κρατάμε στο χαρτοφυλάκιο μας, προκειμένου να διατηρούμε την απόδοσή του βέβαιη. Και επομένως έχουμε μια συνεχή μεταβολή της αναλογίας δικαιώματος και μετοχών σε κάθε μονάδα του χρόνου.

Ουδετερότητα ως προς τον κίνδυνο

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο ως *ουδετερότητα κινδύνου* (risk-neutrality) ορίζουμε την αρχή εκείνη, σύμφωνα με την οποία γίνεται η αποτίμηση ενός οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου, θεωρώντας όμως ότι βρισκόμαστε σε ένα περιβάλλον όπου οι επενδυτές είναι αδιάφοροι για το κίνδυνο της επένδυσής τους. Σε ένα όμως τέτοιο περιβάλλον όλα τα περιουσιακά στοιχεία θα δίνουν απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο. Διότι αν υπήρχε ένα περιουσιακό στοιχείο που υπόσχεται απόδοση μεγαλύτερη από το βέβαιο επιτόκιο τότε όλοι οι επενδυτές θα το αγόραζαν ανεξάρτητα από τον κίνδυνο που αποφέρει. Αυτό όμως, λόγω της προσφοράς και της ζήτησης, θα οδηγούσε στην αύξηση της τιμής του μέχρι η απόδοση του να εξισωνόταν με το βέβαιο επιτόκιο.

Πως όμως η αρχή αυτή υπεισέρχεται στην ανάλυση Black-Scholes;

Καταρχήν παρατηρούμε ότι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στη σχέση (3.10) είναι ανεξάρτητες από την προτίμηση των επενδυτών για τον κίνδυνο. Η μεταβλητή που εξαρτάται πλήρως από την προτίμηση των επενδυτών για τον κίνδυνο είναι η προσδοκώμενη απόδοση μ. Όσο αυξάνεται η αποστροφή για μια αβέβαιη επένδυση τόσο αυξάνεται η τιμή του μ και αντίστροφα. Αυτή όμως η μεταβλητή δεν εμφανίζεται στην σχέση (3.10). Είναι λοιπόν λογικό να υποθέσουμε ότι οι επενδυτές έχουν οποιαδήποτε προτίμηση γύρω από τον κίνδυνο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι είναι αδιάφοροι ως προς τον κίνδυνο δηλαδή ότι βρισκόμαστε σε ένα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο περιβάλλον.

Είναι σημαντικό όμως να τονίσουμε ότι αυτή η υπόθεση που βοηθά στην επίλυση της διαφορικής εξίσωση δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Οι λύσεις όμως που εξάγονται έχουν ισχύ στον πραγματικό κόσμο. Και αυτό γιατί όταν βρισκόμαστε σε ένα ρεαλιστικό οικονομικό περιβάλλον, ο προσδοκώμενος ρυθμός αύξησης της τιμής της μετοχής και το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση των παραγώγων, μεταβάλλονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματα αυτών των μεταβολών να αντισταθμίζονται.

Είναι προφανές από την μέχρι τώρα παρουσίαση ότι η αρχή του *ουδέτερου κινδύνου* παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στα υποδείγματα αποτίμησης των παραγώγων. Αυτός είναι και ο λόγος άλλωστε που αναλύουμε την αρχή αυτή σε τέτοιο βαθμό.

3.7 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ BLACK-SCHOLES

Το υπόδειγμα αποτίμησης των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων των Black και Scholes προκύπτει αν επιλυθεί η διαφορική εξίσωση (3.11) με βάση τις οριακές συνθήκες που ισχύουν στο είδος του δικαιώματος που θέλουμε να αποτιμήσουμε. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι λύσεις αυτής της διαφορικής εξίσωσης τόσο όσο αφορά το δικαίωμα αγοράς όσο και το δικαίωμα πώλησης.[1]

Το υπόδειγμα αποτίμησης του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$c = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (3.12)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma^2\sqrt{T-t}$$

και

N(x) : Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής.

S : Η τιμή της μετοχής τον τρέχον χρόνο t.

E : Η τιμή εξασκήσεως του δικαιώματος αγοράς.

r : Το βέβαιο επιτόκιο.

σ^2 : Η διασπορά των τιμών της μετοχής.

T : Ο χρόνος ζωής του δικαιώματος.

Από την σχέση (3.12) παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο λόγος της τρέχουσας τιμής της μετοχής και της τιμής εξασκήσεως του δικαιώματος

---

[1] Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης δες Black.F και Scholes.M, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81 (May-June 1973), 637-653.

τόσο πιο μεγάλη είναι η αξία του δικαιώματος. Λογικό συμπέρασμα άλλωστε αφού κάτω από αυτά τα δεδομένα αυξάνονται οι πιθανότητες για θετική απόδοση του δικαιώματος στη λήξη της ζωής του. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η ζωή του δικαιώματος τόσο πιο υψηλά αποτιμάται αυτό. Αναμενόμενο αποτέλεσμα και αυτό αφού όσο πιο μεγάλο είναι το χρονικό διάστημα εξασκήσεως του δικαιώματος τόσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα για υψηλές μεταβολές στην τιμής της μετοχής. Τέλος όσο πιο μεγάλο είναι το βέβαιο επιτόκιο τόσο πιο μεγάλη γίνεται η αξία του δικαιώματος. Λογικό συμπέρασμα αφού το υψηλό επιτόκιο οδηγεί σε μείωση της παρούσας αξίας του χρηματικού ποσού που απαιτείται για την εξάσκηση του δικαιώματος.

Σε αυτό το σημείο όμως πρέπει να σημειώσουμε ότι τόσο η τιμή της μετοχής S όσο και η προεξοφλημένη τιμή εξασκήσεως $Ee^{-r(T-t)}$ επιδρούν στην τιμή του δικαιώματος c ανάλογα με την βαρύτητα που τους προσδίδει η συνάρτησης πυκνότητας N(x) της κανονικής κατανομή. Ποιά είναι όμως η ποιοτική ερμηνεία αυτής της συνάρτησης πυκνότητας; Καταρχήν αν στην σχέση (3.12) πάρουμε την μερική παράγωγο ως προς την τιμή της μετοχής S προκύπτει ότι $\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$.[1] Επομένως στην αποτίμηση του δικαιώματος δεν επιδρά μόνο η τιμή της μετοχής S αλλά και το πλήθος των μετοχών που αγοράζει ο επενδυτής σε κάθε εγγραφή δικαιώματος αγοράς ώστε να εξασφαλίζει βέβαιη απόδοση στο χαρτοφυλάκιο του (δες στην ενότητα 3.6 πως δημιουργήσαμε το χαρτοφυλάκιο). Από την άλλη μεριά τώρα το $N(d_2)$ το οποίο επιδρά στην προεξοφλημένη τιμή εξασκήσεως (δες σχέση 3.12), μπορεί να ερμηνευτεί ως την πιθανότητα ότι το δικαίωμα, στη λήξη της ζωής

[1] Δες Galai,D. και Masulis, R., "The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock", *Journal of Financial Economics*, January-March 1976, 53-82.

του, θα έχει θετική απόδοση. Όσο πιο μεγάλη μάλιστα είναι αυτή η πιθανότητα τόσο πιο μεγάλη γίνεται η τιμή του δικαιώματος.

Εφόσον όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα κεφάλαια, ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς δεν αποφέρει μεγαλύτερη απόδοση αν εξασκηθεί πρόωρα, το παραπάνω υπόδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αποτίμηση αυτού.

Το υπόδειγμα αποτίμησης τώρα του δικαιώματος πώλησης είναι:

$$p = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1) \qquad (3.13)$$

όπου τα d_1 και d_2 ορίζονται όπως στη σχέση (3.12).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι η σχέση (3.13) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης εφόσον υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του. Υπενθυμίζουμε ότι η ανάλυση Black-Scholes αναφέρεται σε Ευρωπαϊκά δικαιώματα τα οποία εξασκούνται πάντα στο τέλος της ζωής τους. Δυστυχώς στην μέχρι τώρα βιβλιογραφία δεν υπάρχει κάποιος ακριβής, αναλυτικός τύπος αποτίμησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

3.8 Η ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ

Προκειμένου τώρα να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα μέσω του υποδείγματος Black-Scholes, πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται σε αυτό. Καταρχήν η τρέχουσα τιμή S της μετοχής, η τιμή εξασκήσεως E του δικαιώματος και ο χρόνος ζωής του T, είναι γνωστά. Όσο αφορά τώρα το βέβαιο επιτόκιο, χρησιμοποιούμε εκείνο το επιτόκιο των κρατικών ομολόγων τα οποία έχουν διάρκεια ζωής ίση με αυτή του δικαιώματος. Το πιο δύσκολο είναι ο υπολογισμός της διασποράς σ^2 των τιμών της μετοχής. Δύο είναι οι πιο δημοφιλείς εκτιμήσεις της τυπικής απόκλισης των τιμών της μετοχής, τις οποίες παρουσιάζουμε με συντομία παρακάτω.

Historical Volatility: Μια αρκετά καλή εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των τιμών της μετοχής προκύπτει από τις ιστορικές τιμές αυτής. Πιο συγκεκριμένα επιλέγουμε πρώτα το μήκος Δt των χρονικών διαστημάτων που θα συλλέξουμε τις παρατηρήσεις μας. Συνήθως συλλέγουμε εξήντα εως διακόσιες καθημερινές παρατηρήσεις ή σαράντα εως εξήντα εβδομαδιαίες ή τριάντα εώς πενήντα μηνιαίες. Γνωρίζοντας εν συνεχεία ότι η ανάλυση Black-Scholes υποθέτει ότι οι τιμές της μετοχής ακολουθούν τη λογαριθμική κατανομή και άρα ότι $E(S_T) = S\, e^{\mu(T-t)}$ (μια πλήρης απόδειξη για τη μέση τιμή και την διασπορά της λογαριθμικής κατανομής παρουσιάζεται στο παράρτημα Π.3.1) υπολογίζουμε το επιτόκιο για το χρονικό διάστημα Δt που έχουμε επιλέξει. Πιο συγκεκριμένα εφόσον $S_t = S_{t-1}\, e^{r_t}$ έχουμε:

$$r_t = \ln (S_t/S_{t-1}) \quad \text{με} \quad t = 1(1)n.$$

Εν συνεχεία υπολογίζουμε το μέσο όρο αυτών των αποδόσεων:

$$\bar{r} = 1/n \sum_{t=1}^{n} r_t$$

Και τέλος υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση αυτών:

$$s = [1/(n-1) \sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^2]^{1/2}$$

Αν τώρα ως τ συμβολίσουμε τη χρονική διάρκεια σε έτη του διαστήματος Δt, τότε από τη σχέση (3.5) προκύπτει ότι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής είναι $\sigma\sqrt{\tau}$. Το s λοιπόν είναι μια εκτίμηση του $\sigma\sqrt{\tau}$ και επομένως ως μια εκτίμηση του σ μπορεί να θεωρηθεί το s^* όπου

$$s^* = s/\sqrt{\tau}$$

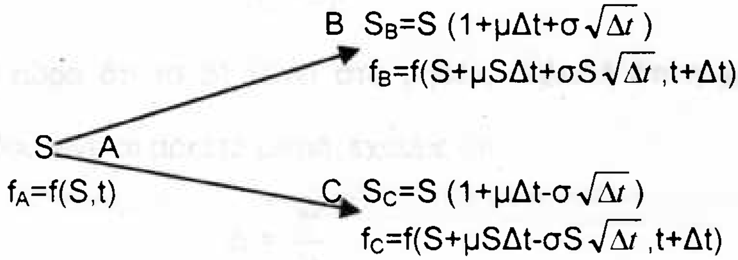
Implied Volatility: Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα των Black και Scholes και τις τιμές του δικαιώματος όπως διαμορφώνονται στην αγορά. Πιο συγκεκριμένα καταγράφουμε την τιμή του δικαιώματος που μελετούμε, όπως ορίζεται μέσα από την αγορά. Έχοντας έτσι δεδομένη την τιμή του δικαιώματος αναζητούμε την τιμή του σ μέσω του υποδείγματος Black-Scholes. Την τιμή του σ που θα υπολογίσω με αυτόν τον τρόπο θα τη χρησιμοποιήσω για να εκτιμήσω, μέσω του ίδιου υποδείγματος, την τιμή του δικαιώματος την επόμενη μέρα.

Πρέπει να επισημάνουμε σε αυτό το σημείο ότι ο υπολογισμός του σ δεν μπορεί να γίνει απευθείας από το υπόδειγμα Black-Scholes αφού δεν είναι δυνατόν τη σχέση (3.12) ή (3.13) να την εκφράσουμε ως προς σ. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σε δοκιμές, αναζητώντας εκείνη την τιμή του σ που ικανοποιεί το υπόδειγμα με δεδομένη την τιμή του δικαιώματος.

Τέλος σημειώνουμε ότι η εκτίμηση της διασποράς με αυτόν τον τρόπο, μας βοηθά να έχουμε μια συνολική εικόνα για την γνώμη της αγοράς γύρω από τη διακύμανση των τιμών μιας συγκεκριμένης μετοχής αλλά και να εκτιμούμε ένα δικαίωμα με βάση την τιμή ενός άλλου, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι και τα δύο αναφέρονται στην ίδια μετοχή.

3.9 Η ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ BLACK-SCHOLES ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε μια μετοχή όπου η τιμή της S κινείται στο χρόνο Δt είται ανοδικά κατά $u=e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$ φορές είται καθοδικά κατά $d=e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ φορές. Αν πάρουμε τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος του $e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$ και του $e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ (οι υπόλοιποι θεωρούνται αμελητέοι) τότε η κίνηση της τιμή της μετοχής περιγράφεται σύμφωνα με το παρακάτω διωνυμικό δέντρο:



Όπου ως f συμβολίζουμε την αξία του δικαιώματος της μετοχής.

Στην συνέχεια θεωρούμε την ίδια μετοχή με την διαφορά όμως ότι οι τιμές της ακολουθούν τη γενικευμένη διαδικασία Wiener. Δηλαδή ότι:

$$\Delta S/S=\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon \qquad \text{με} \quad \varepsilon\sim\varphi(0,1)$$

Θα δείξουμε ότι η αξία του δικαιώματος ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση (όταν το Δt θεωρείται αρκετά μικρό) είτε οι τιμές της μετοχής κινούνται σύμφωνα με το διωνυμικό δέντρο είτε σύμφωνα με την γενικευμένη διαδικασία Wiener.

Καταρχήν για να αποτιμήσουμε το δικαίωμα σύμφωνα με το διωνυμικό δέντρο θεωρούμε το παρακάτω χαρτοφυλάκιο:

ΘΕΣΗ	ΚΟΜΒΟΣ Α	ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	
		ΚΟΜΒΟΣ Β	ΚΟΜΒΟΣ C
Εγγραφή 1 Δικ.Αγοράς	f_A	$-f_B$	f_C
Αγορά Δ μετοχών	$-\Delta S$	ΔS_B	ΔS_C
Δανεισμός ύψους	y	$-e^{r\Delta t}y$	$-e^{r\Delta t}y$
Σύνολο	0	0	0

Προκειμένου τώρα το χαρτοφυλάκιο αυτό να μου δίνει την ίδια απόδοση στο τέλος της περιόδου πρέπει:

$$\Delta = \frac{f_B - f_C}{S_B - S_C}$$

Θεωρώντας τώρα ότι το Δt τείνει στο μηδέν, δηλαδή ότι η χρονική διάρκεια της περιόδου γίνεται αρκετά μικρή, έχουμε ότι:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Επίσης από τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου προκύπτει ότι:

$$y = (\frac{\partial f}{\partial S} S_B - f_B)e^{-r\Delta t}$$

Και επομένως ότι:

$$f_A = \frac{\partial f}{\partial S} S - y \Rightarrow f_A = \frac{\partial f}{\partial S} S - (\frac{\partial f}{\partial S} S_B - f_B)e^{-r\Delta t}$$

ή

$$f(S,t) = S\frac{\partial f}{\partial S} - [(S + \mu S\Delta t - \sigma S\sqrt{\Delta t})\frac{\partial f}{\partial S} - f(S + \mu S\Delta t - \sigma S\sqrt{\Delta t}, t + \Delta t)]e^{-r\Delta t}$$

Αν αναπτύξουμε τώρα την αξία του δικαιώματος σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο (S,t) παραλείποντας όρους που τείνουν στο μηδέν, δηλαδή όρους με βαθμό μεγαλύτερου του Δt, και πάρουμε τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος του $e^{-r\Delta t}$ (οι υπόλοιποι θεωρούνται αμελητέοι) τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$f(S,t) = S\frac{\partial f}{\partial S} - (1 - r\Delta t)[(S + \mu S\Delta t - \sigma S\sqrt{\Delta t})\frac{\partial f}{\partial S} - f(S,t) - (\mu S\Delta t - \sigma S\sqrt{\Delta t})\frac{\partial f}{\partial S} -$$
$$- \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \Delta t]$$

Κάνοντας πράξεις και παραλείποντας όρους με βαθμό μεγαλύτερο του Δt καταλήγουμε στη γνωστή διαφορική εξίσωση των Black-Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι καθώς διαιρούμε το χρόνο ζωής του δικαιώματος όλο και σε πιο μικρά χρονικά διαστήματα και επομένως οι μεταβολές στις τιμές της μετοχής γίνονται όλο και πιο μικρές, το διωνυμικό υπόδειγμα προσεγγίζει το υπόδειγμα αποτίμησης συνεχούς χρόνου των Black και Scholes.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^0

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΗΣ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις υποθέσεις του υποδείγματος Black-Scholes. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις δημιουργήσαμε ένα βέβαιο χαρτοφυλάκιο που περιείχε το δικαίωμα και την αντίστοιχη μετοχή και με τη βοήθεια αυτού του χαρτοφυλακίου αποτιμήθηκε το δικαίωμα μέσω της διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes. Τονίσαμε όμως ότι το χαρτοφυλάκιο είναι βέβαιο μόνο στιγμιαία και επομένως σε κάθε χρονική στιγμή είναι απαραίτητη η μεταβολή της σύνθεσής του ώστε η απόδοσή του να διατηρείται σταθερή και ίση με το βέβαιο επιτόκιο.

Στην πραγματικότητα όμως ο επενδυτής δεν κινείται σε μια ιδανική αγορά όπως την ορίζουν οι υποθέσεις του υποδείγματος Black-Scholes. Υπάρχουν κόστη συναλλαγής και τίθεται το ερώτημα κατά πόσο ένας επενδυτής μπορεί να μεταβάλλει κάθε χρονική στιγμή τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου του χωρίς να έχει υπερβολικό συνολικό κόστος. Το σίγουρο είναι ότι αυτό θα συμβαίνει μόνο όταν το κέρδος από μια τέτοια μεταβολή θα είναι μεγαλύτερο από το κόστος συναλλαγής.

Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν εισάγουμε την ύπαρξη του κόστους συναλλαγής και μελετάμε αρχικά την επίδραση του στη διαφορική εξίσωση Black-Scholes. Στο υπόλοιπο τμήμα του κεφαλαίου παρουσιάζεται ο τρόπος που μπορεί να δημιουργηθεί ένα βέλτιστο δυναμικό χαρτοφυλάκιο με την παρουσία κόστων συναλλαγής.[1]

4.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΗΣ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

Διατηρώντας τις υποθέσεις του υποδείγματος Black-Scholes εκτός από αυτήν που αναφέρεται στην ανυπαρξία των κόστων συναλλαγής, ακολουθούμε την διαδικασία που περιγράψαμε στην ενότητα 3.6 για να εξάγουμε την νέα μορφή της διαφορικής εξίσωσης.[2]

Δημιουργούμε λοιπόν ένα βέβαιο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από το δικαίωμα αγοράς και την αντίστοιχη μετοχή. Πιο συγκεκριμένα το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελείται από την:

α) Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς.

β) Αγορά h μετοχών.

Το κόστος του παραπάνω χαρτοφυλακίου είναι:

$$\Pi = -f+hS+a(f+hS) \tag{4.1}$$

Όπου ως a ορίζουμε το ποσοστιαίο κόστος αγοράς ή πώλησης οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου.

Μετά από χρόνο Δt η αξία του θα μεταβληθεί σύμφωνα με τη σχέση που ακολουθεί:

$$\Delta\Pi = -\Delta f+h\Delta S-a(f+hS) \tag{4.2}$$

Η σχέση τώρα (4.2) μέσω των σχέσεων (3.6) και (3.7) γίνεται:

[1] Για την ανάλυση που θα παρουσιάσουμε δες Korn, R. (1997), "Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time", (3^0και 5^0 κεφ. και παράρτημα C)

[2] Σημειώνουμε ότι οι συμβολισμοί των μεταβλητών που χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα 3.6 διατηρούνται και στην παρούσα ενότητα.

$$\Delta\Pi = -(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z + h(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta z) - a(f + hS) \quad (4.3)$$

Για να είναι βέβαιο όμως το χαρτοφυλάκιο που δημιουργήσαμε πρέπει:

$$-\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z + h\sigma S\Delta z = 0 \quad \text{ή} \quad h = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Οπότε η σχέση (4.3) για $h=\frac{\partial f}{\partial S}$ γίνεται:

$$\Delta\Pi = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t - af - a\frac{\partial f}{\partial S}S \quad (4.4)$$

Λόγω τώρα της απουσίας κερδοσκοπικών ευκαιριών, το ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο σε χρόνο Δt θα αποφέρει απόδοση ίση με το βέβαιο επιτόκιο. Επομένως

$$\Delta\Pi = r[\Pi - a(f + \frac{\partial f}{\partial S}S)]\Delta t$$

Η σχέση αυτή μέσω των σχέσεων (4.1) και (4.4) γίνεται:

$$-(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t - af - a\frac{\partial f}{\partial S}S = r(-f + + \frac{\partial f}{\partial S}S)\Delta t$$

ή

$$\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + (a + r\Delta t)rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\Delta t = (r\Delta t - a)f \quad (4.5)$$

Το βασικό χαρακτηριστικό τώρα της παραπάνω σχέσης είναι ότι εκτός από την παρουσία του σταθερού ποσοστού κόστους συναλλαγής εμφανίζεται και η μεταβολή του χρόνου Δt σε κάθε όρο της. Έτσι εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής με το Δt εμφανίζεται ως συντελεστής ένα μεγάλο ύψος κόστους συναλλαγής. Μάλιστα όσο πιο μικρό είναι το χρονικό αυτό διάστημα τόσο πιο μεγάλο γίνεται το κόστος συναλλαγής. Αν επίσης λάβουμε υπόψη μας ότι η μεταβολή της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου λαμβάνει χώρα σε κάθε μονάδα του χρόνου τότε το κόστος συναλλαγής γίνεται άπειρο. Το γεγονός αυτό, όπως είναι λογικό, δημιουργεί την ανάγκη μιας άλλης προσέγγισης όσο αφορά την σύνθεση του δυναμικού χαρτοφυλακίου σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να προσαρμοστεί και η αποτίμηση των δικαιωμάτων.

4.3 ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΥΠΟ ΤΗΝ ΑΠΟΥΣΙΑ ΚΟΣΤΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΗΣ

Το πρόβλημα του βέλτιστου χαρτοφυλακίου επικεντρώνεται στην μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης συνάρτησης χρησιμότητας. Με βάση αυτήν τη μεγιστοποίηση εξάγεται η σύνθεση του χαρτοφυλακίου αλλά και η μεταβολή της σύνθεσής του σε κάθε μονάδα του χρόνου προκειμένου να παραμένει βέλτιστο σε όλη τη διάρκεια της ζωής του.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής. Θεωρούμε δε ότι η αγορά προσφέρει δύο μόνο περιουσιακά στοιχεία, ένα ομόλογο και μια μετοχή. Ο επενδυτής, κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, επιθυμεί να βρει το ζεύγος (π,c), δηλαδή το ποσοστό της αξία π του χαρτοφυλακίου που θέλει να συνθέσει και της αξία c της κατανάλωσής του, ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητάς του. Δηλαδή επιθυμεί να επιλύσει το επόμενο πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{(\pi,c)} E\left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t}(c(t))^{\gamma}\,dt\right)$$

υπό τους περιορισμούς:[1]

$$dP_0 = P_0(t)r\,dt \quad \text{με } P_0(0)=1$$

$$dP_1 = bP_1(t)dt + P_1(t)\sigma\, dz \quad \text{με } P_1(0)= p$$

[1] Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν την δυναμική κίνηση των τιμών του ομολόγου και της μετοχής.

Όπου

$c(t)^{\gamma}$: Η συνάρτηση χρησιμότητας ($0<\gamma<1$)

δ : Το προεξοφλητικό επιτόκιο ($\delta>0$)

$P_0(t)$: Η αξία του ομολόγου τη χρονική στιγμή t.

r : Η απόδοση του βέβαιου περιουσιακού στοιχείου.

$P_1(t)$: Η αξία της μετοχής τη χρονική στιγμή t.

b : Η προσδοκώμενη απόδοση της μετοχής (θεωρείται σταθερή).

σ : Η τυπική απόκλιση της απόδοσης της μετοχής ($\sigma>0$ και σταθερό).

$z(t)$: Στοχαστική μεταβλητή που ακολουθεί την διαδικασία Wiener.

Ενώ ως Ε συμβολίζουμε την προσδοκία του επενδυτή.

Η λύση (π,c) του παραπάνω πρόβλημα είναι:[1]

$$c^*(t) = \frac{1}{1-\gamma}[\delta - r\gamma - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(\frac{b-r}{\sigma})^2]X(t)$$

και

$$\pi^*(t) = \frac{b-r}{(1-\gamma)\sigma^2}$$

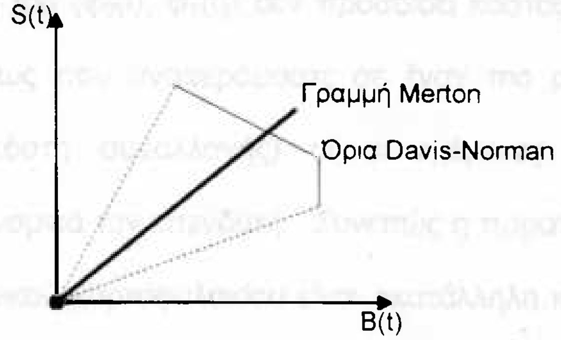
υπό την προϋπόθεση όμως ότι:

$$\delta > r\gamma + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(\frac{b-r}{\sigma})^2$$

Σημειώνουμε δε ότι ως X(t) συμβολίζουμε το τρέχον συνολικό πλούτο του επενδυτή.

Σύμφωνα λοιπόν με την λύση του παραπάνω προβλήματος η βέλτιστη στρατηγική για έναν επενδυτή, ώστε να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητάς του, είναι να καταναλώνει κάθε χρονική στιγμή ένα ποσοστό του συνολικού πλούτου του το οποίο ποσοστό είναι ανάλογο του τρέχοντος

[1] Για την εξαγωγή της λύσης δες Korn, R. (1997), "Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time", σελ.48-53.



Σχήμα 4.1

πλούτου του. Επίσης να επενδύει κάθε χρονική στιγμή ένα σταθερό ποσοστό π^* του συνολικού πλούτου του σε μετοχές.

Αν τώρα θέσουμε ως B(t) και ως S(t) το συνολικό ποσό που επενδύει ο επενδυτής σε ομόλογα και μετοχές αντίστοιχα το χρόνο t και ως $\varphi_0(t)$ και $\varphi_1(t)$ το πλήθος των ομολόγων και των μετοχών αντίστοιχα που κατέχει ο επενδυτής τον ίδιο χρόνο, τότε θα έχουμε ότι:

$$B(t)=\varphi_0(t)P_0(t) \quad \text{και} \quad S(t)=\varphi_1(t)P_1(t)$$

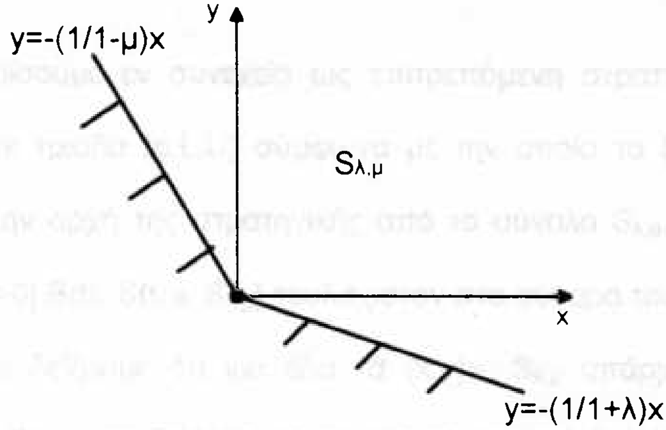
όπου το $(\varphi_0(t), \varphi_1(t))$ καθορίζεται πλήρως από το ζεύγος $(\pi^*(t), c^*(t))$. Το γεγονός τώρα ότι το $\pi^*(t)$ είναι σταθερό σε κάθε χρονική στιγμή t έχει ως αποτέλεσμα το σύνολο των σημείων (B(t),S(t)), που ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις, να απεικονίζουν γραφικά μια ευθεία γραμμή με κλίση $\pi^*/(1-\pi^*)$. Η γραμμή αυτή που είναι γνωστή ως γραμμή του Merton απεικονίζεται στο σχήμα 4.1.

Σύμφωνα λοιπόν με την προηγούμενη ανάλυση, ο επενδυτής που επιθυμεί να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητάς του κάθε χρονική στιγμή, πρέπει να επιλέγει το ζεύγος (B(t),S(t)) ώστε αυτό να κείται στην γραμμή του Merton. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής, η συνεχής μεταβολή του ($\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$) δεν προσδίδει κόστος στον επενδυτή. Στην περίπτωση όμως που αναφερόμαστε σε έναν πιο ρεαλιστικό κόσμο (όπου υπάρχουν κόστη συναλλαγής) οι συνεχόμενες συναλλαγές θα αποδυνάμωναν οικονομικά τον επενδυτή. Συνεπώς η παραπάνω στρατηγική σύνθεσης του δυναμικού χαρτοφυλακίου είναι ακατάλληλη και χρειάζεται μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση του προβλήματος. Αναμενόμενο αποτέλεσμα άλλωστε σύμφωνα και με την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας.

Πριν παρουσιάσουμε τώρα την νέα αυτή προσέγγιση που βασίζεται στην εργασία των Davis-Norman σημειώνουμε ότι η βασική ιδέα της είναι η δημιουργία ενός χωρίου γύρω από την γραμμή του Merton. Με βάση αυτό το χωρίο και όχι την γραμμή του Merton θα αποφασίζεται η μεταβολή της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου (βλέπε σχήμα 4.1).

4.4 ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΚΟΣΤΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΗΣ

Υποθέτουμε και σε αυτή την περίπτωση ότι οι επενδυτές βρίσκονται σε μία αγορά όπου υπάρχουν δύο μόνο περιουσιακά στοιχεία, ένα ομόλογο και μια μετοχή. Θεωρούμε όμως ότι κατά την αγοραπωλησία του αβέβαιου περιουσιακού στοιχείου υπάρχουν κόστη συναλλαγής. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι ο εκάστοτε επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πληρώνει ένα σταθερό ποσοστό $\lambda>0$ επί της συνολικής αξίας των μετοχών που πουλάει ενώ ένα σταθερό ποσοστό $\mu>0$ επί της συνολικής αξίας των μετοχών που αγοράζει. Υπενθυμίζουμε δε ότι τα κόστη συναλλαγής και η κατανάλωση του επενδυτή χρηματοδοτούνται από τα ομόλογα που κατέχει.



Σχήμα 4.2

Με βάση τώρα τις παραπάνω υποθέσεις, οι τιμές τόσο του ομολόγου όσο και της μετοχής περιγράφονται δυναμικά σύμφωνα με τις εξισώσεις που ακολουθούν:

$$dB(t)= [B(t)r-c(t)]dt-(1+\lambda)dL_t+(1-\mu)dU_t \quad \text{με} \quad B(0)=x \qquad (4.6)$$

$$dS(t)= bS(t)dt+\sigma S(t)dz+dL_t-dU_t \quad \text{με} \quad S(0)=y \qquad (4.7)$$

Όπου ως L_t ορίζουμε το συνολικό ποσό που έχει δαπανήσει ο επενδυτής για την αγορά μετοχών μέχρι τη χρονική στιγμή t ενώ ως U_t το συνολικό ποσό που έχει λάβει από την πώληση μετοχών μέχρι τη χρονική στιγμή t. Επίσης ως x συμβολίζουμε το αρχικό χρηματικό ποσό που ο επενδυτής δίνει για την αγορά ομολόγων ενώ ως y συμβολίζουμε το αρχικό ποσό που δίνει για την αγορά μετοχών. Όσο αφορά τις υπόλοιπες μεταβλητές που εμφανίζονται στις δύο αυτές εξισώσεις έχουν οριστεί στην προηγούμενη ενότητα.

Θεωρούμε τώρα το χωρίο $S_{\lambda,\mu}$ που ορίζεται ως εξής:

$$S_{\lambda,\mu}:= \{(x,y)\in \Re^2 \,|\, x+(1-\mu)y \geq 0\,,\ x+(1+\lambda)y \geq 0\}$$

Το χωρίο αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από την *περιοχή αξιοπιστίας* του επενδυτή. Είναι δηλαδή η περιοχή όπου η συνολική αξία της περιουσίας του (ομόλογα και μετοχές) δεν είναι αρνητική. Το χωρίο $S_{\lambda,\mu}$ όπως και τα όρια του παρουσιάζονται γραφικά στο σχήμα 4.2.

Αν ορίσουμε εν συνεχεία ως επιτρεπόμενη στρατηγική (admissible strategy) κάθε τριάδα (c,L,U) σύμφωνα με την οποία το ζεύγος (x,y), που επιλέγεται στην αρχή της στρατηγικής από το σύνολο $S_{\lambda,\mu}$, βρίσκεται και το χρόνο $\tau=\inf\{t>0 \mid B(t), S(t)\notin S_{\lambda,\mu}\}$ τουλάχιστον στα σύνορα του χωρίου $S_{\lambda,\mu}$ τότε μπορούμε να δείξουμε ότι για όλα τα $(x,y)\in S_{\lambda,\mu}$ υπάρχει μια επιτρεπτή στρατηγική. Πράγματι διάλεξε μια τυχαία στρατηγική (c,L,U) από το σύνολο $S_{\lambda,\mu}$ και ολοκλήρωσε αυτήν (πουλώντας όλες τις μετοχές και σταματώντας την κατανάλωση) τη στιγμή που για πρώτη φορά το ζεύγος (x,y) θα βρέθει στα σύνορα του $S_{\lambda,\mu}$.

Έχοντας λοιπόν υπόψη μας την παραπάνω ανάλυση, θα αναζητήσουμε το βέλτιστο δυναμικό χαρτοφυλάκιο του επενδυτή μεγιστοποιώντας τη αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητάς του. Δηλαδή μεγιστοποιώντας το

$$J_{x,y}(c,L,U) := E^{x,y}\left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\frac{1}{\gamma}(c(t))^{\gamma}\,dt\right)$$

Σημειώνουμε ότι το $(x,y)\in S_{\lambda,\mu}$ ενώ το $E^{x,y}$ συμβολίζει την προσδοκία ως προς την τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας δεδομένου το αρχικό ποσό x και y που προσφέρει ο επενδυτής για την αγορά ομολόγων και μετοχών αντίστοιχα. Όσο αφορά τις υπόλοιπες μεταβλητές έχουν οριστεί στην ενότητα 4.3.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα του βέλτιστου χαρτοφυλακίου με την παρουσία κόστων συναλλαγής πρέπει να γνωρίζουμε όχι μόνο τον αρχικό πλούτο x+y του επενδυτή αλλά και τον πλούτο του σε κάθε χρονική στιγμή. Για αυτό το λόγο ορίζουμε την συνάρτηση v(x,y) ως εξής:

$$v(x,y) := \sup_{(c,L,U)\in V(x,y)} J_{x,y}(c,L,U) \qquad (4.8)$$

όπου η $V(x,y)$ δηλώνει το σύνολο των επιτρεπόμενων στρατηγικών που ξεκινούν από το $(x,y)\in S_{\lambda,\mu}$.

Βασισμένοι στην παραπάνω ανάλυση αλλά και στην εργασία των Davis και Norman (1990) θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε τώρα τα βασικά σημεία της επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης (4.8). Τονίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η βασική ιδέα της μεθόδου των Davis και Norman είναι ο διαχωρισμός του χωρίου $S_{\lambda,\mu}$ σε τρεις διαφορετικές περιοχές. Ανάλογα με την περιοχή που θα βρίσκεται το ζεύγος (B(t), S(t)) κάθε χρονική στιγμή t, επιλέγεται η αγορά ή η πώληση μετοχών ή η παύση των συναλλαγών για εκείνη την χρονική στιγμή.

Σύμφωνα λοιπόν με τους Davis και Norman επιλύουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.8) υποθέτοντας συναλλαγές συνεχούς χρόνου της μορφής:

$$L_t=\int_0^t l(s)ds \quad \text{και} \quad U_t=\int_0^t u(s)ds \tag{4.9}$$

όπου $l(s)$ και $u(s)$ είναι οι παράγωγοι των L_t και U_t αντίστοιχα για τους οποίους ισχύουν οι περιορισμοί: $l(s)\geq 0$ και $u(s)\leq \kappa$ (όπου κ είναι η κατάληλη σταθερά η οποία περιορίζει το ζεύγος (x,y) την χρονική στιγμή s στο χωρίο $S_{\lambda,\mu}$).

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, οι εξισώσεις (4.6) και (4.7) μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν ένα διάνυσμα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.8) υπό τους περιορισμούς (4.9) αντιστοιχεί στην εξίσωση HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman). Δηλαδή στην εξίσωση:

$$\max_{c\geq 0, l\geq 0, u\leq\kappa}\{\frac{1}{2}\sigma^2 v_{yy}+byv_y+rxv_x+\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}-cv_x+(v_y-(1+\lambda)v_x)l+((1-\mu)v_x-v_y)u-\delta v\}=0$$

Σημειώνουμε ότι ως $v_{ij}\{i,j \in \{x,y\}\}$ συμβολίζουμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης $v(x,y)$ ως προς τη μεταβλητή i και τη μεταβλητή j.

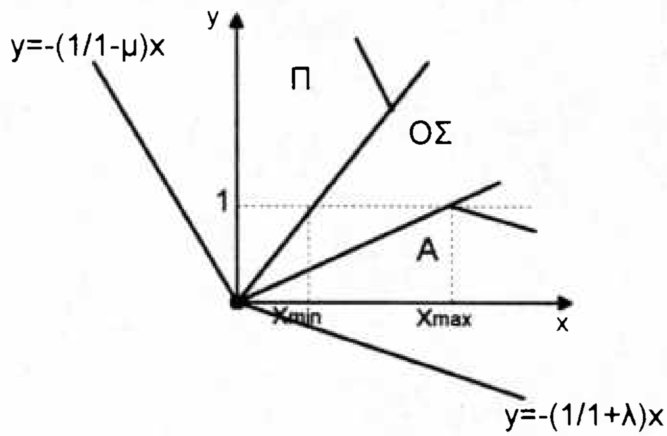
Επισημαίνοντας ότι πρέπει v_x>0 και v_y>0 εφόσον η τάση για μελλοντική κατανάλωση θα αυξήσει το αρχικό ποσό που θα διατεθεί για ομόλογα και μετοχές, μέσω της εξίσωσης HJB, προκύπτει η τριάδα (c,l,u) που επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.8) υπό τους περιορισμούς (4.9). Συγκεκριμένα έχουμε:

$$c = (v_x)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$l = \kappa \text{ όταν } v_y - (1+\lambda)v_x \geq 0 \text{ ενώ } l = 0 \text{ όταν } v_y - (1+\lambda)v_x < 0$$

$$u = 0 \text{ όταν } (1-\mu)v_x - v_y < 0 \text{ ενώ } u = \kappa \text{ όταν } (1-\mu)v_x - v_y \geq 0$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η βασική ιδέα αυτής της εργασίας είναι να χωριστεί το χωρίο $S_{\lambda,\mu}$ σε τρεις διαφορετικές περιοχές. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται με βάση την τιμή των συντελεστών των l και u (δες εξίσωση HJB). Υπενθυμίζουμε ότι l(s) είναι το ποσό που δαπανά ο επενδυτής την χρονική στιγμή s για την αγορά μετοχών ενώ u(s) είναι το ποσό που λαμβάνει ο επενδυτής την χρονική στιγμή s από την πώληση μετοχών. Όταν λοιπόν ο συντελεστής του u δεν είναι αρνητικός δηλαδή όταν $(1-\mu)v_x - v_y \geq 0$, σημαίνει ότι βρισκόμαστε στην περιοχή πώλησης Π. Δηλαδή στην περιοχή όπου ο επενδυτής πουλάει όσο το δυνατόν περισσότερες μετοχές ώστε να βρεθεί ακαριαία στα όρια των περιοχών Π και ΟΣ (ως ΟΣ ορίζουμε την περιοχή που δεν γίνονται συναλλαγές). Όταν ο συντελεστής του l δεν είναι αρνητικός δηλαδή $v_y - (1+\lambda)v_x \geq 0$, σημαίνει ότι βρισκόμαστε στην περιοχή αγοράς Α. Δηλαδή στην περιοχή όπου ο



Σχήμα 4.3

Επενδυτής αγοράζει όσο το δυνατόν περισσότερες μετοχές ώστε να βρεθεί ακαριαία στα όρια των περιοχών Α και ΟΣ. Τέλος όταν οι συντελεστές των u και l είναι αρνητικοί δηλαδή $(1-\mu)v_x - v_y < 0$ και $v_y - (1+\lambda)v_x < 0$ σημαίνει ότι βρισκόμαστε στην περιοχή ΟΣ. Οι παραπάνω περιοχές απεικονίζονται στο σχήμα 4.3.

Από την ομοθετική ιδιότητα τώρα της συνάρτησης v(x,y) προκύπτει ότι[1]:

$$v_x(\rho x,\rho y)=\rho^{\gamma-1}v_x(x,y) \text{ και } v_y=\rho^{\gamma-1}v_y(x,y)$$

Αν λοιπόν υπάρχει κάποιο ζεύγος (x,y) το οποίο να ικανοποιεί τις εξισώσεις $v_y=(1+\lambda)\, v_x$ και $v_y=(1-\mu)\, v_x$ τότε τα σημεία της ευθείας που ορίζει η αρχή των αξόνων και το ζεύγος (x,y) θα ικανοποιούν εξίσου τις παραπάνω εξισώσεις. Με βάση αυτό αποδεικνύεται ότι και τα όρια των περιοχών Π,Α και ΟΣ είναι ευθείες γραμμές (βλέπε σχήμα 4.3). Το επόμενο βήμα λοιπόν είναι να προσδιορίσουμε τα όρια αυτά.

[1] Υπόδειξη: Για ρ>0 και $(x,y)\in S_{\lambda,\mu}$ δείξε ότι $U(\rho x,\rho y)=\{(\rho c,\rho L,\rho U)|(c,L,U)\in U(x,y)\}$. Τότε

$$v(\rho x,\rho y)=\sup_{(c,L,U)\in U(x,y)} E^{x,y}\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{1}{\gamma}(\rho c(t))^\gamma\, dt\right)=\rho^\gamma v(x,y)$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε στην αρχή της ενότητας για το κόστος πώλησης και αγοράς του αβέβαιου περιουσιακού στοιχείου προκύπτει ότι κάθε συναλλαγή που θα γίνεται στην περιοχή πώλησης Π θα κινεί το ζεύγος (B(t),S(t)) στα όρια της περιοχής ΟΣ κατά μήκος μιας ευθείας με κλίση -1/(1-μ). Αντίστοιχα κάθε συναλλαγή που θα πραγματοποιείται στην περιοχή αγοράς Α θα μεταφέρει το ζεύγος (B(t),S(t)) στα όρια της περιοχής ΟΣ κατά μήκος μιας ευθείας με κλίση -1/(1+λ) (βλέπε σχήμα 4.3). Υπενθυμίζουμε ότι η βασική ιδέα της όλης διαδικασίας είναι ο επενδυτής να καταναλώνει ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού του πλούτου και να μην πραγματοποιεί συναλλαγές όσο το (B(t),S(t)) βρίσκεται μέσα στην περιοχή ΟΣ ενώ να εισέρχεται σε αγοραπωλησίες μετοχών όταν το (B(t),S(t)) φθάνει στα όρια της ΟΣ ώστε να επιστρέφει στο εσωτερικό αυτής της περιοχής. Έτσι λοιπόν αναμένουμε ότι από τη στιγμή που το (B(t),S(t)) θα βρεθεί μέσα στην περιοχή ΟΣ οι συναλλαγές που θα λαμβάνουν χώρα θα είναι μόνο στα όρια αυτής. Συνεπώς ενδιάμεσα των συνόρων της ΟΣ όπου έχουμε $u=l=0$, η συνάρτηση $v(x,y)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση HJB. Δηλαδή

$$0=\max\{\frac{1}{2}(\sigma y)^2 v_{yy}+(rx-c)v_x+byv_y+\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}-\delta v\}=$$
$$=\frac{1}{2}(\sigma y)^2 v_{yy}+rxv_x+byv_y+\frac{1}{1-\gamma}(v_x)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}-\delta v \qquad (4.10)$$

Προκειμένου τώρα να προσδιορίσουμε τη μορφή της συνάρτησης v(x,y) και επομένως τα όρια της περιοχής ΟΣ, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση ψ(x) ως εξής:

$$\psi(x):=v(x,1)$$

Από τον ορισμό της ψ(x) προκύπτει ότι:

$v(x,y)=y^{\gamma}\psi(x/y)$, $v_x(x,1)=\psi'(x)$, $v_y(x,1)=\gamma\psi(x)-x\psi'(x)$, και

$$v_{yy}(x,1)=-\gamma(1-\gamma)\psi(x)+2(1-\gamma)\psi'(x)+x^2\psi''(x)$$

Μέσω των παραπάνω σχέσεων η μερική διαφορική εξίσωση (4.10) γίνεται:

$$\beta_3 x^2\psi(x)'' + \beta_2 x\psi'(x) + \beta_1\psi(x) + \frac{1-\gamma}{\gamma}(\psi'(x)) = 0 \;,\quad x\in[x_{\min}, x_{\max}] \qquad (4.11)$$

όπου

$$\beta_1=(1/2)\sigma^2\gamma(1-\gamma)+b\gamma-\delta,\;\; \beta_2=\sigma^2(1-\gamma)+r-b,\;\; \beta_3=(1/2)\sigma^2$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης ψ(x) και από τη σχέση (4.10) προκύπτει ότι το x_{min} και το x_{max} είναι τα σημεία τομής της ευθείας y=1 και των ορίων των περιοχών Π και Α αντίστοιχα (δες σχήμα 4.3). Δηλαδή το 1/ x_{min} και το 1/ x_{max} δεν είναι τίποτα άλλο από τις κλίσεις των ορίων της περιοχής ΟΣ τις οποίες και θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Επισημαίνοντας ότι στην περιοχή Π η συνάρτηση v(x,y) είναι σταθερή κατά μήκος της ευθείας με κλίση -(1/1-μ) και ότι η ίδια συνάρτηση στην περιοχή Α είναι σταθερή κατά μήκος της ευθείας με κλίση -(1/1+λ) (εφόσον η v(x,y) είναι σταθερή στα σύνορα του χωρίου $S_{\lambda,\mu}$), προκύπτει μέσω της ομοθετικής ιδιότητας της v(x,y) ότι:

$$\psi(x)=(1/\gamma)P_1(x+1-\mu)^{\gamma},\;\; x\le x_{\min} \qquad (4.12)$$

και

$$\psi(x)=(1/\gamma)P_2(x+1+\lambda)^{\gamma},\;\; x\ge x_{\max} \qquad (4.13)$$

όπου P_1 και P_2 σταθερές.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση ψ(x) και επομένως την v(x,y) αρκεί να βρούμε τις σταθερές P_1 και P_2 και τις κλίσεις x_{min} και x_{max} που ικανοποιούν τις σχέσεις (4.11), (4.12) και (4.13). Συγκεκριμένα βρίσκουμε το x^* για το οποίο υπάρχει μια μοναδική σταθερά $P_1(x^*)$ ώστε η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του ψ(x) στο x^* να ικανοποιεί τις σχέσεις (4.11) και (4.12).

Με αυτό το τρόπο προσδιορίζουμε το $x_{min}= x^*$ και την σταθερά $P_1= P_1(x^*)$. Ομοίως υπολογίζουμε το x_{max} και το P_2.

Σύμφωνα λοιπόν με την ανάλυση που παρουσιάσαμε, το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό την παρουσία κόστων συναλλαγής ανάγεται στην εύρεση των σταθερών P_1 και P_2 όπως και στην εύρεση των κλίσεων $1/ x_{min}$ και $1/ x_{max}$ των συνόρων της περιοχής ΟΣ. Μάλιστα το πρόβλημα αυτό καλείται και ως *πρόβλημα ελεύθερων ορίων* λόγω του γεγονότος ότι τα όρια της περιοχής ΟΣ αποτελούν μέρος της συνολικής λύσης του προβλήματος.

4.5 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Αν και η παρούσα εργασία ολοκληρώθηκε με την παρουσίαση του βέλτιστου δυναμικού χαρτοφυλακίου υπό την ύπαρξη κόστων συναλλαγής δεν ολοκληρώθηκε το θέμα της αποτίμησης των δικαιωμάτων και των παραγώγων γενικά. Η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου επιβεβαιώνει την ανάγκη ενός νέου υποδείγματος αποτίμησης δικαιωμάτων το οποίο θα περιλαμβάνει την υπόθεση της ύπαρξης κόστων συναλλαγής. Πώς όμως θα μπορούσαμε να σκιαγραφήσουμε ένα τέτοιο υπόδειγμα;

Η βασική ιδέα τόσο στο διωνυμικό υπόδειγμα όσο και στο υπόδειγμα Black-Scholes ήταν η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων και μετοχών όπου η αξία του κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχούσε στην αξία του δικαιώματος. Αν λοιπόν επιθυμούμε να σκιαγραφήσουμε ένα υπόδειγμα αποτίμησης δικαιώματος υπό την παρουσία κόστων συναλλαγής θα πρέπει καταρχήν να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου. Εν συνεχεία θα πρέπει να θεωρήσουμε το βέλτιστο δυναμικό χαρτοφυλάκιο που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα υποθέτοντας όμως ότι η κατανάλωση c είναι μηδενική. Με βάση αυτήν την υπόθεση δημιουργούμε στην αρχή της ζωής του δικαιώματος, ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο (B(t),S(t)) από ομόλογα και μετοχές και μεταβάλλουμε την σύνθεση του ώστε κάθε χρονική στιγμή να βρίσκεται μέσα ή στα όρια της περιοχής ΟΣ. Γνωρίζοντας την αξία του δικαιώματος (και άρα και του χαρτοφυλακίου) στο τέλος της ζωής του, το όλο πρόβλημα έγκειται στην αποτίμηση του χαρτοφυλακίου στην αρχή της σύνθεσής του.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2.1 : Η ΠΡΟΩΡΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΤΟΥ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ.

Α. Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς

Θεωρούμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς που αναφέρεται σε μια μετοχή που δεν δίνει μέρισμα. Θα αποδείξουμε ότι δεν είναι ποτέ βέλτιστο να εξασκούμε πρόωρα ένα τέτοιο δικαίωμα.[1]

Έστω λοιπόν ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξασκήσεως Ε και χρόνο ζωής Τ. Με γνώμονα αυτά τα δεδομένα, το χρόνο μηδέν, δηλαδή στην αρχή της ζωής του δικαιώματος συνθέτουμε δύο χαρτοφυλάκια.

Χαρτοφυλάκιο Α : αποτελείται από ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς και ένα χρηματικό ποσό ύψους Ee^{-rT}.

Χαρτοφυλάκιο Β : αποτελείται από την μετοχή που αναγράφει το δικαίωμα.

Εάν υποθέσουμε ότι το δικαίωμα αγοράς εξασκείται το χρόνο Τ τότε η αξία του χαρτοφυλακίου Α είναι:

$$V_A = \max(S_T, E)$$

Ενώ η αξία του χαρτοφυλακίου Β το χρόνο Τ είναι:

$$V_B = S_T$$

όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής το χρόνο Τ.

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή τ ($\tau \leq T$) εξασκούμε το δικαίωμα αγοράς, το χαρτοφυλάκιο Α έχει αξία :

$$V_A = S_\tau - E + Ee^{-r(T-\tau)}$$

Ενώ το χαρτοφυλάκιο Β την ίδια χρονική στιγμή έχει αξία:

$$V_B = S_\tau$$

[1] Δες Hull (1997), "Options, Futures and other Derivatives", σελ. 162-165.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το χαρτοφυλάκιο Α έχει τουλάχιστον την ίδια αξία με το χαρτοφυλάκιο Β τη χρονική στιγμή Τ ενώ έχει μικρότερη αξία τη χρονική στιγμή τ ($\tau \leq T$). Αποδείξαμε δηλαδή ότι δεν είναι ποτέ βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς.

Β. Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης

Θεωρούμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης το οποίο αναφέρεται σε μια μετοχή που δεν δίνει μέρισμα. Το δικαίωμα αυτό έχει χρόνο ζωής Τ και τιμή εξασκήσεως Ε. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του.[1]

Έστω δύο χαρτοφυλάκια Γ και Δ τα οποία συνθέτουμε στην έναρξη της ζωής του δικαιώματος.

Χαρτοφυλάκιο Γ : αποτελείται από ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης και την μετοχή που αναγράφει το δικαίωμα.

Χαρτοφυλάκιο Δ : αποτελείται από ένα χρηματικό ποσό ύψους Ee^{-rT}.

Εάν εξασκήσουμε το δικαίωμα πώλησης το χρόνο Τ το χαρτοφυλάκιο Γ θα εχεί αξία:

$$V_\Gamma = \max(S_T, E)$$

Ενώ το χαρτοφυλάκιο Δ, την ίδια χρονική στιγμή έχει αξία:

$$V_\Delta = E$$

Εάν εξασκήσουμε το δικαίωμα πώλησης τη χρονική στιγμή τ ($\tau \leq T$) τότε το χαρτοφυλάκιο Γ θα έχει αξία:

$$V_\Gamma = E$$

[1] Δες Hull (1997), "Options, Futures and other Derivatives", σελ.165-166.

Ενώ το χαρτοφυλάκιο Δ την ίδια χρονική στιγμή έχει αξία:

$$V_\Delta = Ee^{-r(T-t)}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο Γ, σε όλη τη διάρκεια της ζωής του, έχει **τουλάχιστον** την ίδια αξία με το χαρτοφυλάκιο Δ. Αποδείξαμε δηλαδή ότι είναι πιθανόν να υπάρξουν κάποιες στιγμές όπου μπορεί να είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3.1 : Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ Η ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ. Τότε

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

όπου f(x) η συνάρτηση πυκνότητας της μεταβλητής Χ.

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνεχής τυχαία μεταβλητή Ζ η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή Ζ~φ(0,1), τότε

$$E(e^{tz}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz$$

θέτοντας u=z-t (οπότε du=dz) το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$E(e^{tz}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{t^2/2}$$

Γνωρίζουμε τώρα ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί την κανονική κατανομή δηλαδή Χ~φ(μ,σ^2), γράφεται ως Χ= σΖ+μ (Ζ~φ(0,1)). Οπότε

$$E(e^{tX}) = E(e^{t(\sigma Z+\mu)}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu} e^{t^2\sigma^2/2} \quad (1)$$

Εφαρμογή : θεωρώ την $\ln S_T$~φ[lnS+(μ-σ^2/2)(T-t), σ^2(T-t)] και θέτω $\ln S_T$=Y. Από την σχέση (1) για t=1 έχουμε:

$$E(S_T) = E(e^Y) = e^{\ln S+(\mu-\sigma^2/2)(T-t)} e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} = Se^{\mu(T-t)} \quad (2)$$

Ενώ για t=2 έχουμε:

$$E(S_T^2) = E(e^{2Y}) = S^2 e^{2\mu(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

Οπότε

$$Var(S_T) = E(S_T^2) - [E(S_T)]^2$$

ή

$$Var(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} - S^2 e^{2\mu(T-t)} = S^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1] \quad (3)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Benning, S. (1998), "Financial Modeling", Cambridge Mass., MIT Press.

Black, F., and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

Bodie, Z., and Merton, R. (1998), "Finance", Prentice-Hall, Preliminary Edition.

Bookstaber, R. (1981), "Option Pricing and Stradegies in Investing", Addisonand Wesley.

Caplan, D. (1995), "The New Options Advantage", McGraw-Hill.

Cottle, C. (1996), "Options: Perception and Deception", Irwin.

Cox, J., Ross, S., and Rubinstein, M. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 229-263.

Chance, D. (1995), "An Introduction to Derivatives", Dryden Press, Third Edition.

Cox, D., and Miller, H. (1965), "The theory of Stochastic Processes", Chapman and Hall.

Cox, J., and Rubinstein, M. (1985), "Options Markets", Prentice and Hall.

Copeland, T., and Wenston, F. (1998), "Financial Theory and Corporate Policy", Addison-Wesley.

Daigler, R. (1994), "Advanced Options Trading", Probus.

Davis, M.H.A, and Norman, A.R (1990), "Portfolio Selection with Transaction Cost", *Mathematics of Operations Recearch*, 676-713.

Dubofsky, D. (1992), "Options and Financial Futures Valuation and Uses", McGraw-Hill.

Elton, E., and Gruber, M. (1995), "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Wiley and Sons, Fifth Edition.

Feeney, F. (1991), "A Guide to Financial Derivatives", Woodhead-Faulkner.

Galai, D., and Masulis, R. (1976), "The Option Pricing Model and the Risk Factor of stock", *Journal of Financial Economics*, 53-82.

Hull, J. (1997), "Options, Futures, and other Derivatives", Prentice-Hall, Third Edition.

Ito, K. (1951), "On Stochastic Differential Equations", *American Mathematical Society*, 1-51.

Kamien, M., and Schwartz, N. (1981), " Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management", Elsevier Science.

Korn, R. (1997), "Optimal Portfolio: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time", World Scientific.

Merton, R. (1973), "Theory of Rational Options Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.

Pliska, S. (1997), "Introduction to Mathematical Finance", Blackwell.

Redhead, K. (1997), "Financial Derivatives", Hall.

Smith, C. (1976), "Option Pricing: A Review", *Journal of Financial Economics*, 3-51.

Tompkins, R. (1994), "Option Analysis", Macmillian Press.

Tucker, A., Becker, K., Isimbambi, M., and Ogden, J. (1994), "Contemporary Portfolio Theory and Risk Management", West.