ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΕΤΟΣ 2008

Διπλωματική εργασία

# ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΣΕ ΚΑΘΕΣΤΩΣ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ



ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΡΒΑΝΙΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

*Στην οικογένειά μου που είναι με κάθε τρόπο*
*Δίπλα μου...*
*Σε όλους τους δικούς μου ανθρώπους*
*Που με κάνουν τόσο τυχερή*
*Δίνοντάς μου την αγάπη τους...*
*Σας ευχαριστώ!*

Εγκρίνεται

Στυλιανός Αρβανίτης:

[illegible]

Ευχαριστώ πολύ τον κ.Αρβανίτη για την ευκαιρία που μου έδωσε να καταπιαστώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, και ιδιαίτερα για την πολύτιμη βοήθειά του.

## Εισαγωγή

Στα χρηματοοικονομικά παρουσιάζεται συχνά η ανάγκη μέτρησης του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου. Μέχρι τώρα ο κυριότερος τρόπος υπολογισμού του κινδύνου αυτού γινόταν βάση εκτίμησης της οριακής κατανομής των αποδόσεων. Ωστόσο, με τον τρόπο αυτό δεν εκμεταλλευόμαστε όλη την πληροφορία που έχουμε και δε λαμβάνεται υπόψη η πιθανή χρονική εξάρτηση των αποδόσεων αυτών. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιώντας το EGARCH(1,1) υπόδειγμα είχαμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου βάση της δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων.

Η εργασία αυτή χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη. Το πρώτο έχει να κάνει με μια θεωρητική επισκόπηση πάνω στα μέτρα κινδύνου με περισσότερη έμφαση στο VaR και στο CvaR, και πάνω στο GARCH και στο EGARCH υπόδειγμα, προκειμένου να «αιτιολογηθεί» και η προτίμησή μας στο τελευταίο. Το δεύτερο μέρος έχει να κάνει με το σχεδιασμό προγράμματος για την εκτίμηση των βέλτιστων βαρών ενός χαρτοφυλακίου που απαρτίζεται από δύο μετοχές.

Αναλυτικότερα, η εργασία απαρτίζεται από τα εξής κεφάλαια:

1. Κίνδυνος και μέτρα κινδύνου
2. Τα GARCH και EGARCH υποδείγματα
3. Ασυμμετρία στην κατανομή και τί δηλώνει
4. Coherent μέτρα κινδύνου
5. Value-at-Risk
6. Conditional Value-at-Risk
7. Σύγκριση των μέτρων κινδύνου ( VaR και CvaR)
8. Επεξήγηση του προγράμματος
9. Αποτελέσματα
10. Επίλογος
11. Παράρτημα

## Κίνδυνος και μέτρα κινδύνου

Ο κίνδυνος είναι ένας όρος που συναντάμε συχνά στα χρηματοοικονομικά. Αλλά ποιά είναι η έννοια του κινδύνου; Όταν μιλάμε για κίνδυνο εννοούμε, σύμφωνα με τον καθηγητή Knight τη λήψη απόφασης με επαρκή γνώση του παρελθόντος, ώστε να διαμορφώσει τις πιθανότητες (σχετική συχνότητα) των διάφορων αποτελεσμάτων. Σε αντίθετη περίπτωση οριζόταν η αβεβαιότητα (δηλαδή στη μη γνώση του δειγματοχώρου). Έτσι σήμερα για παράδειγμα, για έναν επενδυτή, ως κίνδυνος, νοείται ο συνδυασμός των δυνατών αποδόσεων με τις αντίστοιχες πιθανότητες (υποκειμενικές ή αντικειμενικές). Συνηθέστερο μέτρο κινδύνου είναι η τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεως της σχηματιζόμενης κατανομής που μετράει τη διασπορά των παρατηρήσεων (αποδόσεις) γύρω από την αναμενόμενη (μέση) τιμή. Μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί σε κατάσταση μεγαλύτερου κινδύνου. Η διακύμανση (variance) ωστόσο μας δίνει μια σωστή αποτίμηση του κινδύνου μόνο κάτω από ορισμένες συνθήκες όπως η κανονικότητα της δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων και η σταθερή absolute risk aversion των επενδυτών.

Υπάρχουν βέβαια και άλλα μέτρα κινδύνου τα οποία είναι πολύ πιο αποτελεσματικά από τη διακύμανση. Έχει όμως σημασία να διατυπώσουμε ξεκάθαρα τι εννοούμε όταν μιλάμε για μέτρα κινδύνου. Προκειμένου να ορίσουμε τί είναι ένα μέτρο κινδύνου πρέπει πρώτα να ορίσουμε τί είναι ένα σύνολο αποδοχής (το σύνολο των μελλοντικών net worths που είναι αποδεκτά από έναν ρυθμιστή[1]) κι έπειτα να ορίσουμε το μέτρο κινδύνου με βάση την "απόσταση" ενός συγκεκριμένου σημείου από το σύνολο αποδοχής. Αυτή η απόσταση, μετρούμενη σε χρηματικές μονάδες, είναι το ελάχιστο απαιτούμενο επιπλέον κεφάλαιο προκειμένου να γίνει η θέση αυτή αποδεκτή από τον ρυθμιστή.

---

[1] Όταν μιλάμε για ρυθμιστή στη συγκεκριμένη περίπτωση εννοούμε κάποιον ο οποίος έχει αναλάβει το ρόλο του να εξασφαλίζει πως οι συναλλαγές γίνονται με τρόπο που δεν εγκυμονούν κίνδυνο.

Το σύνολο αποδοχής Α έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Μία θέση με τελική καθαρή αξία η οποία είναι πάντα θετική δεν απαιτεί επιπλέον κεφάλαιο κι επομένως ανήκει στο Α.
2. Μια θέση με τελική καθαρή αξία η οποία είναι πάντα αυστηρά αρνητική απαιτεί βεβαίως επιπλέον κεφάλαιο κι επομένως δεν ανήκει στο Α.
3. Το σύνολο αποδοχής Α είναι κυρτό, δηλαδή αν οι θέσεις α και β ανήκουν στο Α τότε και η θέση λα+(1-λ)β , ∀λ ανήκει (0,1), ανήκει επίσης στο Α.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε το μέτρο κινδύνου:
Ένα μέτρο κινδύνου είναι μια βαθμωτή πραγματική συνάρτηση ρ:Χ->R που απεικονίζει το διάστημα Χ των τυχαίων μεταβλητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R. Σε οικονομικούς όρους ορίζουμε το ρ(Χ) να είναι το μέγεθος του κεφαλαίου που θα πρέπει να προστεθεί σαν εξασφάλιση σε ένα χαρτοφυλάκιο με κατανομή αποδόσεων Χ, προκειμένου το χαρτοφυλάκιο αυτό να γίνει αποδεκτό από τον ρυθμιστή του κινδύνου.

**Τα GARCH και EGARCH υποδείγματα**

Ο κίνδυνος που βασίζεται στη μεταβλητότητα (volatility) αποτελεί τη βάση των κανόνων της διαχείρησης του mean-variance χαρτοφυλακίου και δικαιολογεί τη χρήση του γενικευμενου αυτοπαλίνδρομου δεσμευμένου ετεροσκεδαστικού υποδείγματος (generalized autoregressive conditionally heteroskedastic (GARCH)) και των μοντέλων στοχαστικής μεταβλητότητας για την πρόβλεψη μελλοντικών κινδύνων. Κι αυτό γιατί ενώ οι συμβατές χρονολογικές σειρές και οικονομετρικά μοντέλα λειτουργούν κάτω από την υπόθεση της σταθερής διακύμανσης, το ARCH υπόδειγμα (κατά συνέπεια και το GARCH σα γενίκευση του προηγούμενου) που εισήχθη από τον Engle (1982) επιτρέπει στη δεσμευμένη διακύμανση να αλλάζει χρονικά συναρτήσει των προηγούμενων σφαλμάτων, αφήνοντας παράλληλα την αδέσμευτη διακύμανση σταθερή.

Ο D.Nelson στη διπλωματική του στο MIT πρότεινε μια νέα τάξη υποδειγμάτων μεταβλητότητας, τα εκθετικά GARCH ή EGARCH υποδείγματα. Αυτά τα μοντέλα διαφέρουν από τα GARCH υποδείγματα σε αρκετά σημεία, αλλά η μεγαλύτερη διαφορά είναι μάλλον η παρατήρηση πως οι αρνητικές αποδόσεις προέβλεπαν μεγαλύτερη μεταβλητότητα απ' ότι οι θετικές αποδόσεις του ίδιου μεγέθους. Αυτή η ασυμμετρία έχει συχνά αποδοθεί στην χρηματοοικονομική μόχλευση[2] και ονομάζεται leverage effect. Ένα άλλο σημείο στο οποίο διαφοροποιείται το EGARCH είναι στο ότι διατυπώνεται σε όρους λογαρίθμου της δεσμευμένης διακύμανσης κι αυτό είναι κάτι που διευκολύνει την αρκετά την πρόβλεψη.Έχει ωστόσο το μειονέκτημα ότι για τις προβλέψεις της διακύμανσης πρέπει να έχουμε μια αριθμητική προσομοίωση ή τουλάχιστον μια υπόθεση για την κατανομή που ακολουθούν, κάτι το οποίο δε χρειάζεται στα γραμμικά μοντέλα.

Το EGARCH υπόδειγμα που πρότεινε ο Nelson είναι το εξής:

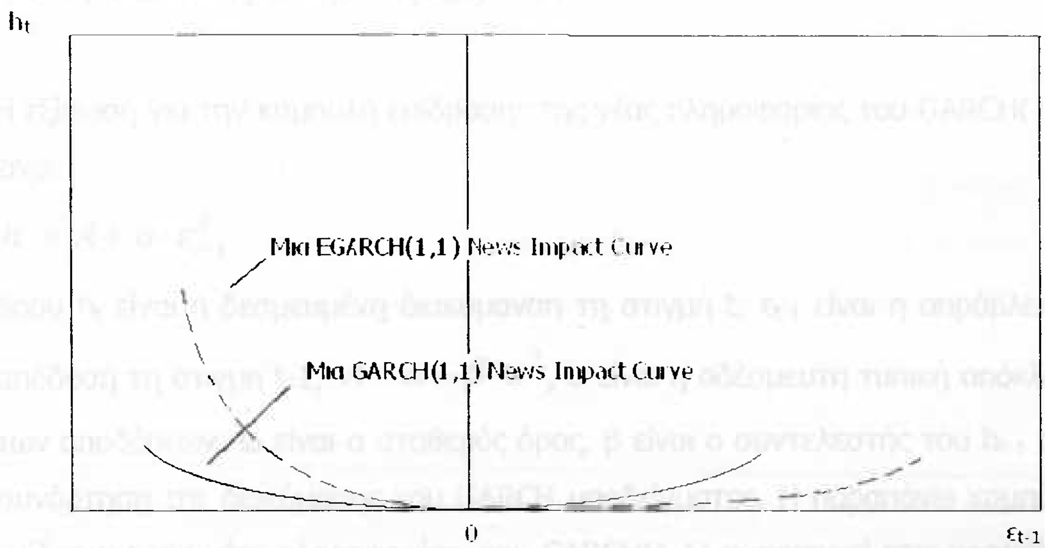
$$\log(h_t) = \omega + \beta \cdot \log(h_{t-1}) + \gamma \cdot \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha \cdot \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

Όπου τα ω, α, β και γ είναι σταθερές παράμετροι. Το EGARCH υπόδειγμα είναι ασυμμετρικό επειδή ο όρος $\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$ περιλαμβάνεται στον τύπο με τον συντελεστή γ μπροστά. Αφού ο συντελεστής αυτός είναι τυπικά αρνητικός, τα

[2] Η χρηματοοικονομική μόχλευση ή μόχλευση δευτέρου βαθμού (second-stage leverage) ουσιαστικά δείχνει την εξάρτηση της επιχείρησης από τον εξωτερικό δανεισμό (και ειδικότερα τα μακροπρόθεσμα δάνεια, long-term debt). Η εξάρτηση αυτή εκφράζεται ως η ποσοστιαία σχέση των Ξένων (εξω-επιχειρηματικών) Κεφαλαίων (δάνεια) προς τα Ίδια Κεφάλαια της εταιρίας (equity). Η σχέση αυτή αποτελεί το βασικό χρηματοοικονομικό δείκτη Δανειακής Επιβάρυνσης (debt-to-equity ratio). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η μεγάλη εξάρτηση από μακροπρόθεσμο δανεισμό συνεπάγεται υψηλή Χρηματοοικονομική Μόχλευση και το αντίστροφο.

θετικά shocks των αποδόσεων δημιουργούν μικρότερη μεταβλητότητα, απ' ότι τα αρνητικά shocks των αποδόσεων, κρατώντας όλα τα άλλα μεγέθη σταθερά.

Έχει ενδιαφέρον επίσης να κάνουμε μια σύγκριση μεταξύ των GARCH(1,1) και EGARCH(1,1) όσον αφορά την επίδραση των shocks στην δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα, κάτι το οποίο αποτελεί και λόγο για τον οποίο επιλέξαμε το EGARCH(1,1) για τη μελέτη μας. Κρατώντας σταθερές τις πληροφορίες που έχουμε από την t-2 περίοδο κ πρίν, μπορούμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των $\varepsilon_{t-1}$ και $h_t$. Την καμπύλη που προκύπτει, με τις lagged δεσμευμένες διακυμάνσεις εκτιμημένες στο επίπεδο της αδέσμευτης διακύμανσης των αποδόσεων, την ονομάζουμε news impact curve, κι αυτό γιατί συσχετίζει τα παρελθοντικά shocks (news) των αποδόσεων με την τρέχουσα μεταβλητότητα. Η καμπύλη αυτή μετράει πώς η καινούρια πληροφορία εισχωρεί στις εκτιμήσεις της μεταβλητότητας. Αυτή η σχέση αντικατοπτρίζεται στο παρακάτω γράφημα που περιέχεται στους Pagan και Scwert (1990).




**Γράφημα 1:** Οι news impact curve των EGARCH(1,1) και GARCH(1,1) υποδειγμάτων

Στο GARCH , η καμπύλη αυτή είναι τετραγωνικής μορφής με κέντρο το $\varepsilon_{t-1}=0$. Στο EGARCH, η καμπύλη αυτή έχει ελάχιστο στο $\varepsilon_{t-1}=0$, και αυξάνει εκθετικά και προς τις δύο κατευθύνσεις αλλά με διαφορετικές παραμέτρους. Ειδικότερα, η καμπύλη επίδρασης της νέας πληροφορίας (news impact curve) στο EGARCH υπόδειγμα όταν εκτιμηθεί η lagged δεσμευμένη διακύμανση στο αδεσμευτό της επίπεδο, $\sigma^2$, δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$h_t = A \cdot \exp[\frac{\gamma+\alpha}{\sigma} \cdot \varepsilon_{t-1}]$, για $\varepsilon_{t-1} > 0$ και

$h_t = A \cdot \exp[\frac{\gamma-\alpha}{\sigma} \cdot \varepsilon_{t-1}]$, για $\varepsilon_{t-1} < 0$

όπου $A \equiv \sigma^{2\beta} \cdot \exp[\omega - \alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}]$ και σ είναι η αδέσμευτη τυπική απόκλιση των αποδόσεων, ω είναι ο σταθερός όρος, β είναι ο συντελεστής του $\log(h_{t-1})$, α είναι ο συντελεστής του $\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}}$, και γ είναι ο συντελεστής του $\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$ στην EGARCH εξίσωση του λογαρίθμου της διακύμανσης.Η παραπάνω news impact curve είναι ενδεικτική για τις εξής τιμές των παραμέτρων: $\omega > 0$, $0 \le \beta < 1$, $\sigma > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $\alpha + \beta < 1$, και $\gamma < 0$.

Η εξίσωση για την καμπύλη επίδρασης της νέας πληροφορίας του GARCH(1,1) είναι:

$h_t = A + a \cdot \varepsilon_{t-1}^2$

όπου $h_t$ είναι η δεσμευμένη διακύμανση τη στιγμή t, $\varepsilon_{t-1}$ είναι η απρόβλεπτη απόδοση τη στιγμη t-1, $A = \omega + \beta \cdot \sigma^2$, σ είναι η αδέσμευτη τυπική απόκλιση των αποδόσεων, ω είναι ο σταθερός όρος, β είναι ο συντελεστής του $h_{t-1}$ στη συνάρτηση της διακύμασης του GARCH υποδείγματος. Η παραπάνω καμπύλη επίδρασης της νέας πληροφορίας του GARCH(1,1) αντιστοιχεί στις παρακάτω τιμές των παραμέτρων: $\omega > 0$, $0 \le \beta < 1$, $\sigma > 0$, $0 \le \alpha < 1$, και $\alpha + \beta < 1$.

Στο παραπάνω γράφημα, η καμπύλη επίδρασης της νέας πληροφορίας του EGARCH(1,1) συγκρίνεται με τη news impact curve του GARCH(1,1) για γ < 0, και α+γ > 0. Αυτό που μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε από τις καμπύλες αυτές, είναι πως το EGARCH θα έχει τελικά μεγαλύτερες διακυμάνσεις και στις δύο κατευθύνσεις κι αυτό γιατί η εκθετική καμπύλη θα είναι τελικά «ψηλότερα» από την τετραγωνική στα «άκρα». Επομένως γίνεται σαφές από τις καμπύλες επίδρασης της νέας πληροφορίας πως το EGARCH υπόδειγμα διαφέρει από το GARCH σε δύο διαφορετικά σημεία:

1. Το EGARCH υπόδειγμα επιτρέπει στα «άσχημα» και στα «καλά» νέα να έχουν διαφορετική επίδραση στη μεταβλητότητα, ενώ το GARCH όχι.
2. Το EGARCH υπόδειγμα επιτρέπει στα ακραία ( με την έννοια του μεγέθους) γεγονότα να έχουν μεγαλύτερη επίδραση στη μεταβλητότητα σε σχέση με το GARCH

**<u>Ασυμμετρία στην κατανομή και τι δηλώνει</u>**

Ο κίνδυνος της αγοράς είναι στενά συνδεδεμένος με την πιθανότητα της παρουσίας των ακραίων γεγονότων δηλαδή των πολύ μεγάλων αρνητικών ή θετικών αποδόσεων. Για κάθε τυχαία μεταβλητή αποδόσεων, η πιθανότητα των παρατηρήσεων με πολύ μεγάλη αξία αντανακλάται στο μέγεθος των ουρών της κατανομής.

Τα δεδομένα που είναι κανονικά κατανεμημένα χαρακτηρίζονται από σχετικά χαμηλή πιθανότητα εμφάνισης ακραίων γεγονότων, και οι ουρές των κατανομών τους λεπταίνουν γρήγορα.

Πως όμως «μετράμε» την ασυμμετρία μιας κατανομής; Η τρίτη ροπή μας δίνει μια ένδειξή για την ασυμμετρία (skewness) της κατανομής και δίνεται από τον τύπο:

$$Skew = \frac{E(\chi-\mu)^3}{\sigma^3}$$

Ο συντελεστής της ασυμμετρίας είναι μηδέν για μια συμμετρική κατανομή, ενώ το πρόσημο αυτής μας δείχνει την κατεύθυνση της ασυμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα εαν το πρόσημο του skew είναι θετικό σημαίνει πως υπάρχει κοντή ουρά στα αριστερά και μεγάλη ουρά στα δεξιά, ενώ αν είναι αρνητικό συμβαίνει το αντίθετο.

Η τέταρτη ροπή, η κύρτωση, μας δείνει μια ένδειξη για το flatness της κατανομής κι ακόμα πιο συγκεκριμένα για τις ουρές αυτής. Η κύρτωση δίνεται από τον τύπο

$$K = \frac{E(\chi-\mu)^4}{\sigma^4}$$

Αν K>3, τότε είναι πιο πιθανόν να συμβούν ακραία γεγονότα,και πιο πιθανό αυτά να είναι μεγάλα, σε σχέση με αυτά της κανονικής κατανομής

**Coherent μέτρα κινδύνου**

Έστω $R_t[W]$ το απαιτούμενο αποθεματικό ποσό για το μελλοντικό χαρτοφυλάκιο αξίας ίσης με W. Οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί το αποθεματικό ποσό αυτο και κατά συνένεια κι ένα μέτρο κινδύνου για να είναι Coherent είναι η μονοτονικότητα, η ομογένεια, η invariance with respect to drift και η subadditivity.

• <u>Μονοτονικότητα</u>

Εαν το W είναι περισσότερο επικύνδυνο από το W* με την έννοια της στοχαστικής κυριαρχίας 1ης τάξης, τότε $R_t[W] \geq R_t[W^*]$.

• <u>Αναλλοίωση ως προς τις μεταθέσεις</u>

$R_t[W + c] = R_t[W] - c$, $\forall$ c,W

Η ιδιότητα της αναλλοίωσης ως προς τις μεταθέσεις σημαίνει ότι το απαιτούμενο αποθεματικό πρέπει να συμπεριλαμβάνει το αποθεματικό ποσό που έχει ήδη κρατηθεί από τον επενδυτή.

• <u>Ομογένεια</u>

$R_t[\lambda \cdot W] = \lambda \cdot R_t[W]$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall$ W.

Η ομογένεια είναι η ιδιότητα των σταθερών αποδόσεων κλίμακας.

• <u>Υποπροσθετικότητα</u>

$R_t[W + W^*] \leq R_t[W] + R_t[W^*]$, $\forall W, W^*$

Η υποπροσθετικότητα, αποτελεί πλεονέκτημα του portfolio merging αφού μειώνει το ελάχιστο απαιτούμενο κεφάλαιο.

Η ομογένεια και η υποπροσθετικότητα συνεπάγονται την κυρτότητα της R συνάρτησης. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το απαιτούμενο αποθεματικό που σχετίζεται με το VaR δεν ικανοποιεί αυτή την συνθήκη. Οι Artzner et al. (1997) ονόμασαν τις συναρτήσεις R που ικανοποιούν τισ παραπάνω συνθήκες coherent risk measures.

## Value-at-Risk

Το Value-at-Risk (VaR) είναι ένα μέτρο του κινδύνου της αγοράς, και ένας μεγάλος καθοριστής του ελάχιστου κεφαλαίου που οι τράπεζες χρειάζεται να παρακρατήσουν προκειμένου να καλύψουν το πιθανό κόστος που μπορεί να προκύψει από τους κινδύνους της αγοράς. Πιο συγκεκριμένα, το VaR ισούται με την απώλεια σε χρηματικές μονάδες ενός χαρτοφυλακίου, η οποία δε δύναται να ξεπεραστεί για δεδομένη χρονική περίοδο και για δεδομένη πιθανότητα.

Χρησιμοποιείται από τους ελεγκτές των τραπεζών προκειμένου να ορίσουν το ελάχιστο κεφάλαιο που οι τράπεζες πρέπει να κατακρατήσουν προκειμένου να αντισταθμιστεί ο κίνδυνος της αγοράς στα χαρτοφυλάκια.

Για να είναι πιο σαφής όμως η εννοια του Value-at-Risk θα την εξηγήσουμε και με τον παρακάτω τρόπο: Έστω χαρτοφυλάκιο με n τίτλους και fixed allocation $a=(a_1,a_2,...,a_n)'$ μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t+h. Τη χρονική στιγμή t, ο επενδυτής έχει την χρηματοδότηση $W_t(a)=a'\cdot \rho_t$ που είναι σχεδιασμένη για την αγορά του χαρτοφυλακίου αυτού και ένα επιπλέον αποθεματικό ποσό $R_t$ το οποίο υπάρχει για να αντισταθμίσει πιθανές αλλαγές στις τιμές που θα επιφέρουν κόστος.

Ο επενδυτής διαλέγει ένα αποθεματικό ποσό τέτοιο ώστε η συνολική θέση (δηλ. Η αξία του χαρτοφυλακίου συν το αποθεματικό ποσό) μπορεί να δεχτεί απώλειες με μια προκαθορισμένη μικρή πιθανότητα α τη στιγμή t+h, δηλαδή είναι $P_t[W_{t+h}(a)+R_t<0]=a$, όπου $P_t$ είναι η δεσμευμένη κατανομή των μελλοντικών τιμών και $R_t$ είναι το α-τεταρτημόριο της δεσμευμένης κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου, το οποίο καλούμε profit and loss (P&L) κατανομή.

Το απαιτούμενο κεφάλαιο τη στιγμή t είναι το άθροισμα της αρχικής χρηματοδότησης συν το αποθεματικό:

$$VaR_t = W_t(a) + R_t$$

και ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$P_t[W_{t+h}(a) - W_t(a) + VaR_t < 0] = a \Rightarrow$$

$$P_t[a' \cdot (\rho_{t+h} - \rho_t) < -VaR_t] = a$$

Οπότε το -$VaR_t$ είναι ένα άνω α-τεταρτημόριο της κατανομής της αλλαγής στην αξία του χαρτοφυλακίου.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του Value-at-Risk.

**Ορισμός:** Έστω S η ημερήσια τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου κι έστω $\Delta S_{[1]}$ η αλλαγή στην τιμή ανάμεσα σε δύο ημέρες. Η μιας ημέρας Value-at-Risk του τίτλου με 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι ο αριθμός $VaR_{[1],a}$ για τον οποίο ισχύει $P(\Delta S_{[1]} \geq -VaR_{[1],a}) = a$ .

Για να υπολογίσουμε την VaR στις διάφορες εφαρμογές χρειάζεται πρώτα να εκτιμήσουμε την κατανομή του $\Delta S_{[N]}$. Αυτό που υποθέτουμε συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πως το $\Delta S_{[N]}$ ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή με μέση αλλαγή τιμής (N-day mean value change) της N-οστής ημέρας $\mu_{[N]}$ και διασπορά της N-οστής ημέρας $\sigma^2_{[N]}$ , δηλαδή $\Delta S_{[N]} \sim N(\mu_{[N]}, \sigma^2_{[N]})$.

Βάση της υπόθεσης αυτής, το N-οστής ημέρας VaR με 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης δίνεται από

$$VaR_{[N],a} = z_a \cdot \sigma_{[N]} - \mu_{[N]}$$

όπου $z_a$ είναι ο αριθμός για τον οποίο η πιθανότητα μια μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή να είναι μικρότερο του $z_a$, είναι α.

Η VaR ωστόσο έχει κάποια ελλατώματα σαν μέτρο κινδύνου:

- Δε μας δίνει πληροφορίες για τις απώλειες που συμβαίνουν στις ουρές. Αυτό σημαίνει πως όταν συμβεί ένα γεγονός στην ουρά, ναι μεν περιμένουμε να χάσουμε ένα ποσό που θα είναι μεγαλύτερο από το VaR, αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πόσο μεγάλο θα είναι αυτό το ποσό.
- Το VaR δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας. Όταν οι κίνδυνοι δεν είναι υποπροσθετικοί, όταν προστεθούν μεταξύ τους ο συνολικός κίνδυνος που θα έχουμε υπολογίζει θα είναι υποτιμημένος. Ωστόσο το VaR μπορεί να γίνει υποπροσθετικό μέτρο κινδύνου μόνο αν έχουμε κάνει την υπόθεση ότι οι αποδόσεις κατανέμονται κανονικά

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η VaR όπως και η διακύμανση δεν είναι coherent μέτρα κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα η VaR δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας και η διακύμανση δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της μονοτονικότητας. Ωστόσο υπάρχει ένα άλλο μέτρο κινδύνου που είναι coherent και είναι η (CvaR) Conditional Value at Risk 'η αλλιώς γνωστή σαν (TCE) Tail Conditional Expectation.

## Conditional Value-at-Risk

**Ορισμός:** Έστω $\Delta S_{[N]}$ η αλλαγή της N-οστής ημέρας στην τιμή του τίτλου. Το N-οστής ημέρας Conditional Value at Risk του τίτλου στο 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης δίνεται από τη σχέση

$$CVaR_{[N],a} = -E[\Delta S_{[N]} \,|\, \Delta S_{[N]} \leq -VaR_{[N],a}]$$

Πιο συγκεκριμένα, το CVaR (ή Expected Shortfall, ή Tail VaR, ή Tail Conditional Expectation, ή Worst Conditional Expectation, ή Expected Tail Loss) είναι το ποσό που αναμένεται να χάσουμε (L), αν έχουμε απώλεια μεγαλύτερη από το VaR:

CVaR=E[L|L>VaR]

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του CVaR έναντι του VaR είναι ότι δε μπορεί να «ξεγελαστεί» μετακινώντας «μάζα» της κατανομής του $\Delta S_{[N]}$, προς το αρνητικό άπειρο.

Ας συγκρίνουμε όμως αυτά τα δύο μέτρα κινδύνου πιο αναλυτικά.

**<u>Σύγκριση των μέτρων κινδύνου ( VaR και CvaR)</u>**

Η CVaR έχει πολλά από τα πλεονέκτηματα που έχει και η VaR:Μας παρεχει ένα συνεπές μέτρο κινδύνου μέσα από διάφορες θέσεις , λαμβάνει υπόψην τις συσχετίσεις με έναν σωστό τρόπο και έχει πολλές ίδιες χρήσεις με τη VaR.

Ωστόσο θα μπορούσαμε να πούμε ότι η CVaR είναι ένα καλύτερο μέτρο κινδύνου για του εξής πέντε παρακάτω λόγους:

1. Η CVaR μας δίνει τί πρέπει να περίμενουμε στην περίπτωση που συμβεί ένα άσχημο γεγονός (δηλαδή γεγονός που αντιστοιχεί στην ουρά της κατανομής) ενώ η VaR δε μας λέει κάτι περισσότερο από το ότι πρέπει να περιμένουμε μια χασούρα μεγαλύτερη από την τιμή της VaR.

2. Ένας κανόνας απόφασης που στηρίζεται στο CvaR για την εκτίμηση του κινδύνου στις αποδόσεις είναι αξιόπιστος κάτω από πιο γενικές συνθήκες σε σχέση με τον κανόνα απόφασης που στηρίζεται στο VaR. Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος που στηρίζεται στη CVaR είναι συνεπής με τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας όταν οι κίνδυνοι είναι διατεταγμένοι σύμφωνα με

τον κανόνα της κατά δεύτερης τάξης στοχαστικής κυριαρχίας, ενώ η μέθοδος που στηρίζεται στη VaR είναι συνεπής με τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας μόνο όταν οι κίνδυνοι είναι διατεταγμένοι κάτω από τον πολύ πιο αυστηρό πρώτης τάξης στοχαστικής κυριαρχίας κανόνα.

3. Η CVar ικανοποιεί την υποπροσθετικότητα λόγω του ότι είναι συνεπής , ενώ η VaR δεν την ικανοποιεί. Και η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας δίνει στη CVaR επιπλέον λόγους για να την προτιμούμε από τη VaR.

4. Η CVaR ευνοεί την διαφοροποίηση του κινδύνου με την έννοια της διασποράς ενός χαρτοφυλακίου σε πολλες διαφορετικές επενδύσεις για την ελλάτωση του κινδύνου, ενώ το VaR δεν την ευνοεί πάντα.

5. Τέλος, η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας που ικανοποιεί η CVaR υποδηλώνει ότι η επιφάνεια του κινδύνου του χαρτοφυλακίου είναι κυρτή, και η κυρτότητα αυτή μας εξασφαλίζει ότι στα προβλήματα βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιούμε μέτρα CVaR θα έχουμε πάντα μια μοναδική βέλτιστη λύση, κάτι που δε συμβαίνει με τα VaR μέτρα.

## Επεξήγηση του προγράμματος

Στόχος μας ήταν για ένα χαρτοφυλάκιο δύο μετοχών να βρούμε τα βάρη αυτά που μας εξασφαλίζουν ελαχιστοποίηση του κινδύνου.

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό:

1. Με πηγή δεδομένων το DataStream βρήκαμε τις εβδομαδιαίες παρατήρησεις των τιμών των μετοχών δύο μεγάλων τραπεζών, της EFG EUROBANK ERGASIAS και της ALPHA BANK από την 18/12/1997 μέχρι την 20/12/2007, δηλαδή διάστημα παρατηρήσεων δέκα χρόνων. Μαζί με τα παραπάνω, βρήκαμε και το ανάλογο ασφαλές επιτόκιο (deposit) (επιτόκιο διατραπεζικού δανεισμού εβδομαδιαίας διάρκειας) σε ετήσια βάση, οπότε και το ανατοκίσαμε σε εβδομαδιαία. Τα παραπάνω δεδομένα τα επεξεργαστήκαμε ως εξής: Από τις τιμές των μετοχών βρήκαμε τις λογαριθμικές αποδόσεις τους σύμφωνα με τον τύπο ln(P(t)/P(t-1)), κι έπειτα χρησιμοποιώντας το ήδη ανατοκισμένο ασφαλές επιτόκιο, βρήκαμε τις υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις χρησιμοποιώντας τον τύπο ln(P(t)/P(t-1)) - deposit(t-1). Έπειτα, τις υπερβάλλουσες αυτές λογαριθμικές αποδόσεις που βρήκαμε για κάθε τράπεζα ξεχωριστά, τις πολλαπλασιάσαμε με το 100, κάνοντάς αυτές με αυτόν τον τρόπο ποσοστά, έτσι ώστε να αυξηθεί η διακύμανση (επί $100^2$) για να μην δημιουργούν αριθμητικά προβλήματα οι κοντινές στο μηδέν τιμές στην ρουτίνα της πιθανοφάνειας όταν υπολογίζονται οι λογάριθμοι της μεταβλητότητας. Οι υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών των δύο τραπεζών παρατίθενται στο παράρτημα.
2. Έπειτα καταφύγαμε στη δημιουργία έξι m-files με τις ονομασίες : likelihoodeg.m, egarchsim.m (βοηθητική ρουτίνα για τον έλεγχο των υπολοίπων), filterANDpredict.m, firstStep.m, secondStep.m, portfolioChoiceFun.m. Στο παράρτημα παρατίθεται ο κώδικας που περιέχεται στα παραπάνω αρχεία. Ωστόσο πριν τη δημιουργία αυτών των αρχείων χρειάστηκε να δομηθεί σωστά ο αλγόριθμος, η διαδικασία που θα ακολουθούσαμε προκειμένου να εκτιμήσουμε τα βέλτιστα βάρη των

χαρτοφυλακίων. Η διαδικασία που ακολουθείται στα παραπάνω αρχεία, εν ολίγοις ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήσαμε εξηγείται επαρκώς από το παρακάτω διάγραμμα:

ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΥΣΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ

↓

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

↓

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ Κ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΠΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ**

↓

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΟΥΝ ΤΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΗΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ ΚΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΠΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ ΒΑΣΗ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ**

↓

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ **ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΘΥΜΗΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

↓

**ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ, ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΒΑΡΩΝ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ**

Παρακάτω εξηγούμε τη χρησιμότητα αυτών των προγραμμάτων με τη σειρά που θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν.

**likelihoodeg.m**

'Εχοντας τις αποδόσεις των μετοχών που θέλουμε να χρησιμοποίσουμε σε excel αρχείο, κ χρησιμοποιώντας το αρχείο αυτο, αποκτούμε τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για το EGARCH(1,1) μοντέλο. Προκείμενου να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτή, φιλτράρεται με τετριμμένο τρόπο η Volatility δεδομένης μιας αρχικής τιμής γι'αυτήν. Τα δεδομένα που εισάγουμε στη συνάρτηση σαν inputs είναι τα ακόλουθα:

- par: Είναι το διάνυσμα των παραμέτρων που χρειάζεται για να υπολογιστεί η συνάρτηση. Αυτές οι παράμετροι είναι τα ω, α, β και γ που εμφανίζεται στον τύπο της συνάρτησης πιθανοφάνειας:
- r: Είναι το δείγμα μας, δηλαδή οι αποδόσεις των μετοχών που θέλουμε να επεξεργαστούμε.
- init: Η αρχική τιμή της volatility την οποία συνήθως τη θέτουμε ίση με τη μονάδα.

Το m-file αυτό το κατασκευάσαμε προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους ω, α, β και γ της συναρτησης πιθανοφάνειας και κατ' επέκταση και τη λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Τέλος προκειμένου να αποφύγουμε προβλήματα υπερχείλισης, όταν θα εμφανίζεται στη συνάρτηση, και για να αποφύγουμε την 'κατάρευση' της διαδικασίας μεγιστοποίησης, θέτουμε τη συνάρτηση ίση με $10^{20}$ στο σημείο αυτό της υπερχείλισης.

Αναλυτικότερα, το m-file αυτό κάνει τα εξής βήματα: Από το διάνυσμα των παραμέτρων (par) που του έχουμε δώσει θέτει σαν ω το par(1), σαν α το par(2), σαν γ το par(3) και σαν β το par(4), δηλαδή δίνει σε κάθε συντελεστή του τύπου του EGARCH υποδείγματος μια τιμή που αντιστοιχεί σε κάποιο από τα στοιχεία του διανύσματος «par». Αν ο χρήστης θέσει για αρχική τιμή της μεταβλητότητας (init) τιμή μικρότερη ίση του μηδέσν τότε βγαίνει η ειδοποίηση «initial volatility out of bounds», ότι δηλαδή ο χρήστης έχει θέσει τιμή έξω από το επιτρπόμενο διάστημα της μεταβλητότητας. Μετά θέτουμε για αρχικές τιμές των διανυσμάτων h, q, και z το μηδενικό διάστημα. Έπειτα αρχίζει η διαδικασία υπολογισμού των διανυσμάτων αυτών, πρώτα για το h(1), δηλαδή για αρχική τιμή της μεταβλητότητας, θέτει την παράμετρο «init» που του δώσαμε, οπότε και υπολογίζει το $z(1)=\frac{r(1)}{\sqrt{h(1)}}$, και για q(1) τον λογάριθμο της αρχικής τιμής της μεταβλητότητας (init). Αυτό που θέλουμε μετά είναι να υπολογίσουμε τη μέση λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας, προκειμένου να τη μεγιστοποιήσουμε όμως μετά. Για αυτό τον λόγο δε χρησιμοποιούμε στον τύπο της συνάρτησης πιθανοφάνειας τους όρους που δε θα παίξουν ρόλο στη μεγιστοποίηση. Δίνουμε λοιπον στην αρχή μια αρχική τιμή στη λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας κ έπειτα μπαίνουμε σε ένα for-loop όπου υπολογίζουμε κατά σειρά το διάνυσμα $q(i)=\omega+\alpha\cdot\left|z(i-1)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right|+\gamma\cdot z(i-1)+\beta\cdot q(i-1)$, τη μεταβλητότητα που θα ισούται με $h(i)=e^{q(i)}$ , (στην περίπτωση που θα προκύψει σε οποιαδήποτε από τα i η μεταβλητότα μικρότερη ή ίση του μηδενός το πρόγραμμα θέτει αυτή ίση με την αρχική τιμή που θέσαμε (init)), τα shocks $z(i)=\frac{r(i)}{\sqrt{h(i)}}$, και η μέχρι τότε λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας για i=2 μέχρι για i=το πλήθος του δείγματός μας. Στο τέλος, αφου θα έχει τελείωσει το for-loop θα έχουμε τη λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας του δειγματός μας, κι έπειτα υπολογίζεται η μέση λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας διαιρώντας αυτό που προέκυψε από το for-loop με το μέγεθος του δείγματός μας. Τέλος, όπως εξηγήσαμε και προηγουμένως, στην περίπτωση της υπερχείλισης θέτουμε τη συνάρτηση να είναι ίση με $10^{20}$ στο σημείο αυτό της υπερχείλισης.

## egarchsim.m

Το m-file αυτό μας δίνει μια προσομοίωση της διαδρομής μιας EGARCH(1,1) διαδικασίας. Σε αυτό το m-file εισάγουμε το μέγεθος του μονοπατιού (T), που είναι στην ουσιά το μέγεθος του δείγματος και το διάνυσμα των παραμέτρων μας (par). Αυτό που μας επιστρέφει είναι τη διαδρομή της διαδικασίας (r) και τη διαδρομή της volatility (h). Το m-file αυτό χρησιμεύει στο να ελέγξουμε τις άλλες ρουτίνες σε προσομοιωμένα δεδομένα.

Αναλυτικότερα, όπως και στο προηγούμενο m-file, θέτουμε αρχικές τιμές για τους συντελεστές ω, α, β, και γ. Έπειτα, αφού τα z (shocks) ακολουθούν την κανονική κατανομή, χρησιμοποιούμε την εντολή normrnd για να παράγει τυχαία στοιχεία (T+1 στον αριθμό, δηλαδή ένα παραπάνω στοιχείο αό το μέγεθος του δείγματος) που ακολουθούν την κανονική κατανομή, με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Δίνουμε μετά αρχική τιμή για τη μεταβλητότητα h(1)=1 και έπειτα κατά κάποιον τρόπο δημιουργούμε ένα εικονικό δείγμα παρατηρήσεων μέσα σε ένα for-loop όπου πρώτα υπολογίζουμε τη μεταβλητότητα για κάθε i, με βάση το EGARCH υπόδειγμα και μετά δημιουργείται το δείγμα μας από τον τύπο $r(i)=z(i)\cdot\sqrt{h(i)}$ .

## FilterANDpredict.m

Δεδομένων των εκτιμημένων παραμέτρων του EGARCH(1,1) υποδείγματος, η ρουτίνα αυτή φιλτράρει τη μεταβλητότητα στο δείγμα χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε και στον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Επίσης εκτιμά την πρώτη μεταβλήτοτητα του δείγματος μας.

Τα inputs μας είναι:

- par: Οι εκτιμημένες παράμετροι
- r: Το δείγμα (αποδόσεις των μετοχών)
- init: Η αρχική τιμή για την φιλτραρισμένη μεταβλητότητα.

Για έξοδο έχουμε:

- z_filtered: Οι τυποποιημένες φιλτραρισμένες αποδόσεις
- h_filtered: Η φιλτραρισμένη μεταβλητότητα
- h_predicted: Η εκτιμημένη για την επόμενη χρονική περίοδο μεταβλητότητα.

Η ρουτίνα αυτή μας δίνει τις εκτιμήσεις τις μεταβλητότητας οι οποίες χρησιμεύουν μαζί με την εκτίμηση των παραμέτρων, στον υπολογισμό των μέτρων κινδύνου.

Αναλυτικότερα, αφού οριστούν με τον ίδιο τρόπο όπως και στα προηγούμενα m-files οι συντελεστές ω, α, β και γ, μεσω της διαδικασίας που κάναμε και στο likelihoodeg.m, δηλαδή χρησιμοποιώντας ένα for-loop, βρίσκουμε μέσω του τύπου για την μεταβλητότητα του EGARCH υποδείγματος, τη μεταβλητότητα σε κάθε περίπτωση κι αφού τελειώσει το loop αυτο, υπολογίζεται η h_predicted ίση με

$$h_{predicted} = \exp[\omega + \alpha \cdot (\left|z_{filtered}(T)\right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}) + \gamma \cdot z_{filtered}(T) + \beta \cdot \log(h_{filtered}(T))]$$

δηλαδή η εκτιμόμενη μεταβλητότητα της επόμενης παρατήρησης (T=μήκος του διανύσματος των παρατηρήσεων).

**FirstStep.m**

Αυτή η συνάρτηση εκτελεί σταδιακά την εκτίμηση του the EGARCH (1,1) υποδείγματος δεδομένου του δείγματος μας. Μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας που έχει προκύψει από τη Likelihoodeg ρουτίνα με βάση τις παραμέτρους ω, α, β και γ κι οχι με βάση όλες τις εισόδους στη Likelihoodeg, χρησιμοποιώντας την έτοιμη ρουτίνα fmincon που μας παρέχει το Matlab και περιορίζει το διάστημα τιμών των παραμέτρων. Τα διαστήματα που θέτει για κάθε περίπτωση ξεχωριστά είναι: (-1, 1) για το β για να εξασφαλίσουμε τη στασιμότητα, και (-5,5) για όλες τις άλλες παραμέτρους για να αποφύγουμε την περίπτωση της υπερχείλισης. Έπειτα, δεδομένων των εκτιμημένων παραμέτρων, καλεί την filterAndpredict ρουτίνα. Για είσοδο στην συνάρτηση αυτή έχουμε:

- τις αρχικές τιμές των παραμέτρων (init_param_values) για να ξεκινήσει η διαδικασία βελτιστοποίησης ( στην περίπτωση που δεν έχουμε τέτοιες αρχικές τιμές μπορούμε να τις θέσουμε εμείς σαν [0;0;0;0]).
- Αρχική τιμή για τη φιλτραρισμένη μεταβλητότητα ( συνήθως τη θέτουμε ίση με τη μονάδα)
- Το δείγμα r.

Αυτό που κάναμε στην περίπτωση αυτή είναι να χρησιμοποιήσουμε την fmincon[3] ρουτίνα προκειμένου να κάνουμε μεγιστοποίσης της μέσης λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας που προέκυψε από το likelihoodeg.m αρχείο. Η μεγιστοποίση αυτή γίνεται ως προς τις παραμέτρους ω,α,β,γ. Στην εντολή αυτή οι μόνες ανισοτικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι το διάστημα τιμών που μπορούν να πάρουν οι παράμετρες αυτοι, δηλαδή $\omega \in [-5,5]$, $\alpha \in [-5,5]$, $\gamma \in [-5,5]$, $\beta \in [-0.999, 0.999]$. Έπειτα, έχοντας βρεί τις παράμετρους που μεγιστοποιούν την μέση λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας, καλούμε την filterANDpredict ρουτίνα προκειμένου να εκτιμήσει τη μεταβλητότητα της επόμενης παρατήρησης.

---

[3] Η ρουτίνα αυτή βρίσκει το ελάχιστο μιας πολυμεταβλητής μη γραμμικής συνάρτησης υπό περιορισμούς. Δηλαδή βρίσκει το ελάχιστο σε ένα πρόβλημα της μορφής: $\min_x f(x)$ subject to :
$c(x) \le 0$, $ceq(x) = 0$, $A \cdot x \le b$, $Aeq \cdot x = beq$, και $lb \le x \le ub$, όπου τα x, b, beq, lb και ub είναι διανύσματα, τα A και Aeq είανι πίνακες , και τα c(x) και ceq(x) είναι συναρτήσεις που επιστρέφουν διανύσματα. Η f(x) είναι συνάρτηση που επιστρέφει βαθμωτό μέγεθος. Οι f(x), c(x) και ceq(x) μπορούν να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις.
Η εντολή x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub) αρχίζει από το x0 και προσπαθεί να βρεί το ελάχιστο x της συνάρτησης που υπάρχει στη θέση fun. Επίσης ορίζεται ένα διάστημα επιτρεπόμενων τιμών για το x, έτσι ώστε η λύση να βρίσκεται μεταξύ των τιμών $lb \le x \le ub$ .Θέτουμε A=[ ], b=[ ], Aeq=[ ] και beq=[ ] αν δεν έχουμε τις ανισοτικές σχέσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ορίσματα.

**PortfolioChoiceFun.m**

Η ρουτίνα αυτή με βάση το δείγμα των υπερβάλλουσων λογαριθμικών αποδόσεων των δύο μετοχών και τα βάρη, υπολογίζει την απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού. Έπειτα υπολογίζει το επιθυμητό για εμάς μέτρο κινδύνου ( μεταξύ των: δεσμευμένη διακύμανση, VaR, CvaR). Επομένως αυτή είναι και η αντικειμενική συνάρτηση για την εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Για είσοδο στη συνάρτηση αυτή έχουμε:

- Τα βάρη του χαρτοφυλακίου (lambda)
- Τις αποδόσεις των δύο μετοχών (r_first,r_second)
- Τους παρακάτω δείκτες:
  - iflag1

    Όταν θέσουμε iflag1==1 τότε υπολογίζεται το μέτρο κινδύνου που αντιστοιχεί στην επόμενη παρατήρηση

    Όταν iflag1==2, τότε τα μέτρα κινδύνου υπολογίζονται στο δείγμα ανά παρατήρηση, οπότε προκύπτει ένα διάνυσμα ίσου μήκους με το δείγμα μας, του οποίου μετά υπολογίζεται η Ευκλείδια νόρμα.
  - iflag2

    Για iflag2==1 τότε επιλέγουμε για επιθυμητό μέτρο κινδύνου τη δεσμευμένη διακύμανση.

    Για iflag2==2 επιλέγουμε σαν μέτρο κινδύνου την VaR.[4]

    Για iflag2==3 επιλέγουμε τη CVaR.
- Αρχικές τιμές των παραμέτρων (init_param_values) που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτίμηση
- Την αρχική μεταβλητότητα (init_vol) που χρησιμοποιήθηκε στο φιλτράρισμα
- Το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας (alpha) για τον υπολογισμό των VaR και CvaR.

[4] Θα πρέπει να επισημάνουμε σε αυτή την περίπτωση πως εφόσον ο μέσος στο υπόδειγμα είναι 0, το -VaR είναι γραμμικός (αύξων) 1-1 μετασχηματισμός της μεταβλητότητας (το -VaR και η μεταβλητότητα είναι αντικειμενικές συναρτήσεις), οπότε αναμένουμε τα αποτελέσματα για iflag2==1 και για iflag2==2 να είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους.

Καταρχήν, στη ρουτίνα αυτή θέτουμε στην περίπτωση που ο χρήστης θέσει lambda>1 ή lambda<0 να βγαίνει η προειδοποίηση «weights out of bounds», ότι δηλαδή έχει θέσει μεγαλύτερες από τις επιτρεπόμενες τιμές για το lambda και το πρόγραμμα θέτει αυτόματα lambda=1 ή lambda=0 αντίστοιχα για κάθε περίπτωση. Έπειτα υπολογίζει τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου και εφαρμόζει τη ρουτίνα firstStep πάνω σε αυτή την απόδοση προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη μέση λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας και να προβλέψει τη μεταβλητότητα της επόμενης παρατήρησης όπως είναι σχεδιασμένη να κάνει η ρουτίνα αυτή, αυτή τη φορά όμως για το χαρτοφυλάκιο. Ύστερα για τις ακόλουθες περιπτώσεις των δεικτών iflag έχουμε τις παρακάτω εξόδους:

- (iflag1, iflag2)=(1,1) : Η δεσμευμένη διακύμανση της επόμενης παρατήρησης που θα είναι η h_predicted που έχει προκύψει από την firstStep ρουτίνα.
- (iflag1, iflag2)=(1,2) : Η Value-at-Risk της επόμενης παρατήρησης η οποία δίνεται από τον τύπο $VaR = -z_a \cdot \sigma$, όπου σ είναι η τετραγωνική ρίζα του h_predicted.
- (iflag1, iflag2)=(1,3) : Η Conditional Value-at-Risk της επόμενης παρατήρησης που προέκυψε από τον τύπο $CVaR = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cdot \exp[-\frac{1}{2} \cdot z_a^2]$ όπου σ είναι η τετραγωνική ρίζα του h_predicted.
- (iflag1, iflag2)=(2,1) : Η δεσμευμένη διακύμανση που θα είναι η ευκλείδια νόρμα των h_filtered (μεταβλητότητες που προέκυψαν απο την filterANDpredict ρουτινα.
- (iflag1, iflag2)=(2,2) : Η Value-at-Risk η οποία υπολογίζεται ως εξής: Σε ένα for-loop υπολογίζουμε τη VaR για κάθε i (παρατήρηση) από τον τύπο $VaR(i) = z_a \cdot \sqrt{h_{filtered}(i)}$, όπου τα h_filtered είναι αυτά που προέκυψαν από την filterANDpredict ρουτίνα, κι έπειτα, αφού τελειώσει το loop, υπολογίζουμε την ευκλείδια νόρμα.

- (iflag1, iflag2)=(2,3) : Η Conditional Value-at-Risk που προέκυψε ως εξής: Μέσα σε ένα for-loop βρίσκουμε τη Value-at-Risk για κάθε παρατήρηση, κι έπειτα την Conditional Value-at-Risk για κάθε παρατήρηση. Τέλος, μετά το for-loop υπολογίζεται η ευκλείδια νόρμα των Conditional Value-at-Risk που προέκυψαν μέσα από το loop.

**SecondStep.m**

Η συνάρτηση αυτή επιλέγει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο (βάρη των μετοχών) ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση που υπολογίστηκε από την portfolioChoiceFun με βάση τα βάρη χρησιμοποιώντας την fmincon ρουτίνα (ελαχιστοποίηση με ανισοτικό περιορισμό), δεδομένης της επιθυμητής αναμενόμενης απόδοσης (min_ret).

**Αποτελέσματα**

Παρακάτω παραθέτουμε το βέλτιστο βάρος που προέκυψε από το πρόγραμμά μας για τα δεδομένα μας μόνο για iflag2=1, αφού είναι αυτό που αφορά στην επόμενη παρατήρηση οπότε και αυτό που έχει περισσότερο ενδιαφέρον:

- Το βέλτιστο λ χρησιμοποιώντας σαν μετρο κινδύνου τη δεσμευμένη διακύμανση: 0.5614
- Το βέλτιστο λ χρησιμοποιώντας σαν μετρο κινδύνου το VaR: 0.5625
- Το βέλτιστο λ χρησιμοποιώντας σαν μετρο κινδύνου το CVaR: 0.5626

Ας σημειώσουμε πως το λαμδα στο οποίο αναφερόμαστε εδώ είναι το βέλτιστο βάρος που αφορά στις μετοχές της EFG EUROBANK ERGASIAS. Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε πως αυτό που περιμέναμε για την τιμή του λαμδα στην περίπτωση της δεδμευμένης διακύμανσης και του VaR, επαληθεύεται και στα αποτελέσματα μας, δηλαδή το βέλτιστο λάμδα που προκύπτει χρησιμοποιώντας σαν μετρο κινδύνου τη δεσμευμένη διακύμανση (λ=0.5614) και το βέλτιστο λάμδα που προκύπτει χρησιμοποιώντας σαν μετρο κινδύνου το VaR (λ=0.5625) είναι πολύ κοντινά.

**Επίλογος**

Κλείνοντας, θα θέλαμε να σημειώσουμε πως ελπίζουμε ότι η εργασία αυτή θα αποτελέσει κίνητρο έρευνας σε θέματα που αξίζουν περαιτέρω μελέτης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εκτίμηση της οριακής κατανομής και από της δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων. Θα ήταν επίσης ενδιαφέρουσα μια μελέτη με τη χρησιμοποίηση και άλλων υποδειγμάτων που εκτιμούν τη δεσμευμένη κατανομη εκτός του EGARCH(1,1) που χρησιμοποιήθηκε εδώ, ή η εκτίμηση άλλων μέτρων κινδύνων.

Ελπίζουμε πως η εργασία αυτή θα αποτελέσει το έναυσμα για τέτοιου είδους μελέτες και στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων που θα συμβάλλουν στην εξέλιξη του τρόπου εκτίμησης κινδύνου των χαρτοφυλακίων σε ευρεία κλίμακα.

**Παράρτημα:**

**1.**

## ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΥΣΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ EFG EUROBANK ERGASIAS

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,068892402 | 0,030914354 | -0,042336509 | 0,003119335 | 0,03462401 | 0,006454821 |
| -0,002350339 | -0,033937214 | -0,007766525 | 0,004825151 | 0,001723866 | 0,007081922 |
| -0,002058828 | -0,02315241 | -0,038401495 | -0,018767518 | -0,008093796 | -0,070939682 |
| -0,030358891 | 0,213233639 | -0,003298079 | -0,013291078 | 0,002948241 | -0,062630518 |
| 0,03269268 | -0,052574376 | 0,030917078 | -0,030689237 | 0,033516962 | -0,067690177 |
| -0,010640469 | 0,060560949 | -0,041134551 | -0,002347136 | 0,015567453 | 0,015821677 |
| 0,032222826 | -0,08025662 | -0,008112757 | -0,037598019 | 0,036063386 | -0,004098156 |
| -0,129568475 | -0,011518383 | -0,063724671 | 0,015268801 | 0,016806714 | 0,000385114 |
| -0,011751336 | -0,012066134 | -0,043185275 | 0,028268559 | 0,021331516 | -0,014216032 |
| -0,048587138 | -0,021116669 | -0,010268885 | -0,043215936 | 0,02776769 | -0,036816091 |
| -0,002804432 | 0,062589835 | -0,009052418 | -0,026399705 | 0,02876226 | 0,04850219 |
| -0,00268773 | 0,029172901 | -0,057678158 | -0,063504332 | 0,009764673 | 0,00578343 |
| 0,14458212 | -0,052486924 | 0,076367796 | -0,024617999 | -0,032070542 | -0,031501312 |
| -0,016384225 | -0,038392656 | -0,014517484 | 0,032143997 | 0,031290053 | 0,003111908 |
| 0,025032671 | 0,074696489 | 0,067967247 | -0,004572183 | 0,009660702 | 0,047952551 |
| 0,037823255 | -0,028904546 | -0,089009026 | 0,099805789 | 0,032637103 | 0,022927802 |
| 0,085016023 | -0,04149156 | 0,022584416 | 0,001374959 | 0,018651156 | 0,036431698 |
| 0,226445226 | -0,01175517 | -0,03974681 | 0,032053288 | 0,05166907 | 0,007630799 |
| 0,032937311 | 0,065912052 | 0,003398427 | 0,063497699 | 0,028657225 | -0,033912618 |
| 0,28630289 | -0,038771557 | -0,013548664 | 0,040927453 | 0,013878913 | 0,028664007 |
| -0,045745501 | -0,033362447 | -0,110967642 | -0,00904061 | 0,014308246 | 0,001938882 |
| -0,059556444 | -0,002150745 | -0,082090921 | -0,019251567 | -0,038158841 | -0,004686657 |
| 0,214610905 | -0,002415525 | 0,011223382 | -0,00402462 | 0,017869676 | 0,001832906 |
| 0,145009932 | 0,015414454 | 0,067146769 | 0,088207417 | -0,005865592 | 0,018953821 |
| 0,08779067 | -0,011206405 | 0,008818402 | 0,064655365 | -0,017984095 | 0,061892312 |
| 0,221483323 | -0,03246411 | 0,002514037 | 0,029121633 | 0,040716579 | -0,008204829 |
| 0,382465451 | -0,013143508 | 0,059024305 | -0,032986892 | 0,014120162 | 0,00995774 |
| 0,382406777 | 0,000461876 | 0,148075128 | 0,043792388 | 0,000438514 | -0,025059442 |
| 0,121931399 | -0,070135514 | 0,038249623 | 0,009527425 | 0,029599763 | 0,033594961 |
| -0,133060168 | -0,030416436 | -0,014289792 | 0,026357112 | -0,065257095 | 0,080485006 |
| 0,046664268 | -0,040582345 | 0,013031748 | 0,00092324 | -0,035749668 | -0,02155907 |
| -0,176081396 | 0,004388843 | -0,00313925 | -0,00586849 | -0,031071649 | -0,051130239 |
| -0,081440711 | 0,016469261 | -0,008056658 | -0,003238425 | 0,05454475 | -0,026943044 |
| -0,130085687 | -0,038693205 | -0,043842506 | 0,017671966 | 0,035601716 | 0,021901677 |
| 0,258119443 | -0,054065866 | -0,005773374 | 0,056868005 | -0,082081628 | 0,01037803 |
| -0,233501163 | -0,082084929 | 0,00059313 | -0,02807188 | -0,020683288 | 0,001481789 |
| -0,053340837 | -0,023676617 | 0,030265252 | -0,038407853 | -0,025369555 | 0,045221828 |
| 0,196039854 | 0,036953359 | -0,038100301 | -0,028432443 | 0,013525075 | 0,037189268 |
| -0,05504824 | 0,083043141 | -0,028493112 | -0,026257523 | 0,05894534 | 0,019984022 |
| -0,032410225 | -0,082030219 | 0,040355357 | 0,012621355 | 0,020470011 | -0,002621737 |
| -0,041862204 | 0,003453908 | -0,026854796 | -0,010434548 | 0,004354211 | -0,006014483 |
| 0,046443399 | -0,047017978 | -0,02905212 | 0,047900328 | -0,000390244 | 0,007974479 |
| 0,124598388 | 0,030507872 | -0,018453499 | 0,000928893 | 0,064679278 | -0,017337278 |
| -0,051058839 | -0,057639956 | -0,017620863 | -0,0032191 | -0,015318168 | 0,009386839 |
| 0,018848819 | -0,011707202 | -0,042514281 | 0,017577673 | -0,041856161 | -0,10201782 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0,01528403 | -0,016432176 | 0,055417624 | 0,022531819 | 0,014429546 | 0,038909165 |
| 0,069917262 | 0,009405551 | 0,004867549 | -0,078018658 | 0,002652301 | 0,007023924 |
| 0,001630507 | 0,027728403 | -0,017383474 | -0,032639029 | 0,041160586 | 0,042514258 |
| 0,019736563 | -0,032451531 | 0,000719072 | 0,034806295 | -0,004115393 | 0,023193687 |
| 0,046074502 | 0,004219288 | -0,020325037 | 0,026582123 | -0,00483829 | 0,002544777 |
| -0,024469222 | -0,050095461 | 0,000744021 | -0,001920141 | 0,026793235 | 0,03019844 |
| -0,198546355 | -0,018946236 | -0,059769018 | 0,005301042 | -0,067049504 | -0,012853473 |
| 0,1385273 | 0,014388708 | -0,036269083 | 0,0418774 | -0,039182917 | 0,000590153 |
| -0,118675452 | -0,038369777 | 0,035029655 | 0,029821927 | -0,01340322 | -0,03723274 |
| 0,0922259 | 0,096636911 | 0,048315684 | 0,059923532 | 0,010207507 | 0,028730811 |
| -0,003462842 | 0,074831068 | 0,023747546 | 0,030793974 | -0,010991764 | 0,047165635 |
| 0,003593593 | -0,063826342 | -0,009140643 | -0,009908546 | -0,008528145 | -0,008138294 |
| -0,025234673 | 0,133595364 | 0,006527877 | -0,049264001 | 0,040716306 | -0,018802625 |
| 0,084371613 | -0,030180918 | -0,003528967 | 0,020690117 | 0,003571907 | -0,004470712 |
| 0,06382032 | -0,015191883 | -0,000633675 | 0,0044438 | -0,000394013 | -0,009982049 |
| 0,131928869 | -0,010913392 | -0,016421294 | 0,015432391 | -0,029151895 | -0,012272272 |
| 0,015049182 | 0,007921879 | 0,010896989 | -0,033274151 | 0,015660501 | -0,068179362 |
| -0,102213532 | 0,020816386 | -0,006282857 | 0,055134255 | 0,053184581 | 0,04779346 |
| 0,067921625 | -0,05383983 | -0,028359993 | -0,024143425 | -0,001937442 | 0,053144496 |
| -0,001797891 | -0,105099757 | -0,022966721 | -0,015049398 | 0,074571035 | 0,010419243 |
| -0,001780369 | -0,071857149 | -0,023685534 | -0,033807294 | -0,015890902 | -0,004477187 |
| -0,001806646 | 0,00919567 | 0,055165129 | 0,064427791 | -0,027941006 | -6,17334E-05 |
| -0,001806646 | 0,13988744 | 0,003738986 | 0,032232981 | -0,021180127 | -0,029369395 |
| -0,141161559 | -0,028916806 | 0,009419912 | -0,023542464 | -0,000446695 | -0,108041505 |
| -0,075750359 | -0,050055794 | -0,006318667 | 0,035314892 | -0,023908853 | 0,059451976 |
| 0,069079843 | -0,011043418 | -0,033062417 | 0,015336296 | 0,017807835 | 0,020579936 |
| 0,057473856 | 0,006584097 | -0,035626599 | 0,024883997 | 0,036386401 | -8,23808E-06 |
| -0,042670203 | -0,00952225 | -0,002306547 | -0,003635702 | 0,065517128 | 0,019026792 |
| -0,006075275 | -0,017329579 | -0,05797222 | -0,079722165 | 0,054997268 | -0,016689506 |
| -0,038615991 | -0,044819785 | -0,000616921 | 0,03552101 | -0,018583624 | 0,001529489 |
| 0,005296048 | 0,092462838 | -0,052946436 | 0,02768075 | 0,025347967 | -0,01124062 |
| 0,029814908 | -0,047400926 | -0,061328044 | -0,015996881 | 0,094260841 | 0,047203542 |
| -0,077567915 | 0,005835571 | 0,063393136 | 0,004033927 | -0,063183186 | -0,010036285 |
| -0,016288649 | -0,018387423 | -0,035752042 | -0,020666783 | 0,024559713 | 0,026788585 |
| 0,010511542 | -0,016799094 | 0,006655938 | 0,003024152 | -0,0580512 | 0,008225742 |
| 0,103603345 | 0,029607526 | 0,001073927 | -0,009552551 | -0,001177718 | -0,028795832 |
| 0,001298287 | -0,036430867 | -0,042210817 | 0,013259032 | 0,016619269 | -0,05209959 |
| -0,068363708 | -0,081310635 | 0,019537384 | -0,002697086 | -0,023336763 | -0,110163251 |
| -0,007955309 | -0,027415874 | 0,027817617 | 0,029865889 | 0,005943265 | 0,068107346 |
| -0,164720199 | -0,023457197 | -0,009256133 | -0,028326343 | 0,028966104 | 0,002514241 |
| -0,114036217 | 0,02625109 | -0,024001775 | -0,01169128 | -0,038916998 | -0,006813711 |
| 0,043919895 | 0,012328916 | 0,003149796 | -0,003818616 | 0,015384176 | -0,020582686 |

## ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΥΣΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ ALPHA BANK

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0,016274518 | 0,06822306 | -0,02502925 | -0,038938633 | 0,035145313 | -0,056101827 |
| 0,011339923 | -0,002463015 | -0,004657185 | -0,009101358 | 0,017912501 | 0,04562806 |
| -0,034235823 | 0,024014146 | -0,040018316 | -0,046152428 | -0,00240443 | -0,018423726 |
| -0,138906686 | 0,142665373 | -0,034780233 | 0,033041692 | 0,01963253 | -0,074664473 |
| 0,081949233 | -0,11132099 | 0,0658839 | -0,01630662 | 0,035583509 | -0,040271101 |
| -0,063347939 | -0,047188355 | -0,035623556 | -0,025501844 | -0,020651183 | -0,040877857 |
| 0,051606435 | -0,033468392 | -0,041648838 | -0,007812673 | 0,072000065 | 0,002640745 |
| 0,104912492 | 0,00541284 | -0,049084375 | -0,007800152 | -0,004946037 | 0,050767083 |
| -0,09492538 | -0,079740386 | -0,044035475 | 0,028396833 | 0,023913809 | -0,051836686 |
| -0,0284434 | 0,013239012 | -0,094879612 | -0,047963805 | -0,023765087 | -0,007934342 |
| 0,061157373 | 0,067255488 | -0,045379354 | -0,021305889 | 0,121110779 | -0,009055593 |
| 0,07261814 | 0,026454587 | -0,070224718 | -0,057404571 | -0,019079459 | 0,025854538 |
| 0,253948577 | 0,014118803 | 0,074527377 | -0,004554752 | 0,001229299 | -0,0015799 |
| 0,087030904 | -0,056947291 | 0,03768342 | 0,062438223 | -0,017733489 | 0,065993924 |
| -0,031510451 | 0,038492481 | 0,033874728 | -0,00430895 | -0,007092167 | -0,000559101 |
| 0,061282957 | 0,010481129 | -0,074101263 | 0,05710127 | 0,047144323 | 0,018763567 |
| 0,066839748 | -0,024509554 | -0,002560122 | 0,017415799 | -0,007628318 | 0,015550236 |
| 0,10298754 | -0,02932546 | -0,015496095 | 0,06303292 | 0,003612993 | 0,006941718 |
| 0,097761403 | 0,059700461 | 0,056531595 | 0,033906394 | 0,030455653 | -0,030946249 |
| -0,053572085 | -0,034059346 | -0,021519954 | 0,091583173 | 0,018118962 | -0,020025439 |
| 0,059260849 | -0,024686879 | -0,128257072 | -0,067156463 | 0,023775409 | 0,021762624 |
| -0,044991103 | -0,030591916 | -0,120857555 | 0,015076066 | -0,003382234 | -0,00347423 |
| -0,014790518 | -0,051390773 | 0,016326877 | 0,017898435 | -0,005637548 | 0,015658696 |
| 0,004005308 | 0,073401496 | -0,004937605 | 0,111230139 | -0,021680288 | 0,02649697 |
| -0,039355079 | 0,067878693 | -0,016697961 | 0,039457042 | -0,052451433 | 0,055869848 |
| -0,001211277 | -0,013343002 | 0,045545056 | -0,022800405 | 0,067665264 | -0,012013912 |
| -0,046753869 | -0,030026297 | -0,00585227 | -0,001716818 | 0,059798715 | 0,015126012 |
| -0,011978472 | 0,004801775 | 0,112362662 | 0,086361195 | -0,007544122 | -0,015502769 |
| 0,059760682 | -0,037339905 | -0,058543291 | 0,005695959 | 0,022305076 | 0,055067285 |
| 0,035333365 | -0,020357984 | 0,003278844 | 0,014089762 | -0,070082455 | 0,013433114 |
| 0,024782911 | -0,043929892 | 0,010009287 | 0,007962501 | 0,010089646 | 0,01647917 |
| -0,015942144 | 0,001168904 | -0,000624369 | 0,07836921 | -0,031365301 | -0,048630583 |
| -0,050331465 | 0,028792051 | 0,018428522 | -0,013664763 | 0,083470196 | -0,027284547 |
| -0,089095691 | -0,050148074 | -0,068017061 | 0,02811028 | -0,012460162 | 0,017441844 |
| 0,034924007 | -0,061400322 | 0,024306241 | 0,053276221 | -0,073718111 | -0,004971899 |
| -0,170135393 | -0,053270429 | -0,010552207 | -0,009640323 | -0,039590725 | -0,01189638 |
| -0,009144992 | -0,016938844 | 0,006286877 | -0,048062122 | 0,026425652 | 0,048433641 |
| 0,074761927 | 0,048516486 | -0,037854608 | -0,01898232 | 0,024976641 | 0,015727357 |
| -0,047946252 | 0,053576573 | 0,000383815 | -0,030697684 | -0,027465655 | 0,016247632 |
| -0,02818874 | -0,03208643 | 0,010602519 | 0,020998962 | 0,059509886 | -0,000672711 |
| -0,106030469 | 0,018343256 | -0,022156664 | 0,000744381 | 0,000495175 | -0,003063103 |
| -0,147806582 | -0,034341173 | -0,023644544 | 0,048483667 | 0,077477762 | -0,037385202 |
| 0,066573956 | 0,025081647 | -0,009130292 | 0,031984152 | 0,006101238 | 0,025573154 |
| 0,108947535 | -0,014519298 | -0,054424072 | -0,018009594 | -0,060408445 | 0,011395575 |
| 0,015265262 | -0,035240498 | 0,001635938 | 0,015166307 | -0,055118579 | -0,128516259 |
| 0,088301288 | -0,045216584 | 0,048768386 | 0,028996658 | -0,002195805 | -0,002529074 |
| -0,002410798 | 0,007490977 | -0,013566206 | 0,065345295 | 0,016724257 | -0,035931198 |
| 0,099301697 | 0,060052756 | -0,022561245 | -0,017364402 | 0,03902915 | 0,086841891 |
| 0,035616545 | -0,054845894 | -0,003949484 | 0,042453414 | -0,006415308 | 0,013874826 |
| -0,034720752 | -0,051277219 | -0,098667806 | -0,029060849 | -0,018706468 | -0,027488404 |
| 0,066784215 | -0,009723767 | -0,03178848 | 0,004282896 | 0,031653839 | 0,0302953 |
| -0,046840264 | -0,042544576 | -0,008230014 | -0,013569851 | -0,036852848 | 0,016098659 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,081206675 | -0,040671144 | -0,033031425 | 0,08826445 | -0,041911378 | 0,006768772 |
| 0,005428342 | -0,039313051 | -0,01253005 | 0,037014951 | 0,056923765 | -0,082629571 |
| 0,119024067 | 0,212232817 | 0,030858815 | 0,063419073 | 0,013432521 | -0,019757404 |
| -0,037897175 | 0,052127185 | 0,02613859 | 0,044744175 | -0,002964818 | 0,019213366 |
| 0,012162176 | -0,043514688 | -0,006940956 | -0,051785513 | -0,047086328 | 0,034555615 |
| 0,024549553 | 0,0285921 | -0,04065941 | -0,061271566 | 0,051440848 | 0,018992463 |
| 0,146394573 | -0,050572969 | 0,040684271 | 0,05259515 | 0,01152698 | -0,034436113 |
| -0,063975567 | -0,019476432 | -0,032758162 | -0,001976914 | 0,018051076 | 0,014077763 |
| -0,056162794 | 0,008259481 | -0,050116236 | -0,009973409 | -0,017139373 | 0,02991768 |
| -0,006906997 | 0,031257367 | 0,011616471 | -0,032173816 | -0,00802675 | -0,015996125 |
| -0,027484665 | 0,015881831 | -0,036491197 | 0,047340418 | 0,040455535 | 0,030290891 |
| 0,140016189 | -0,083994268 | -0,074954794 | -0,014695728 | -0,009415864 | 0,010745227 |
| 0,070506051 | -0,069735318 | -0,006717721 | 0,037364391 | 0,061906268 | 0,025049237 |
| -0,085817143 | -0,048387971 | -0,019022664 | -0,04134775 | -0,008958951 | -0,022504188 |
| -0,015705042 | -0,026778053 | 0,041869616 | 0,022682117 | -0,020154314 | -0,023802422 |
| 0,247097527 | 0,154641182 | 0,061270591 | 0,0358697 | -0,003638003 | -0,062579619 |
| -0,026800488 | -0,056697977 | 0,025593335 | -0,004929757 | 0,008300485 | -0,060081915 |
| -0,164901394 | -0,057366646 | 0,028888608 | -0,011865067 | -0,028579101 | 0,063781759 |
| 0,096344451 | -0,02185862 | -0,02201536 | 0,021689491 | 0,012517684 | 0,030401468 |
| 0,098312532 | -0,020276814 | -0,03771405 | -0,007167923 | 0,058899768 | 0,005138999 |
| -0,046214666 | 0,01713067 | 0,004941765 | 0,007914655 | 0,049101753 | 0,028444447 |
| 0,036821985 | -0,021234354 | -0,114048236 | -0,097255174 | 0,02308411 | 0,0049332 |
| -0,030602224 | -0,051260432 | -0,040410664 | 0,035725972 | 0,01910675 | 0,003259119 |
| -0,029805624 | 0,043179485 | -0,081697327 | -0,002303682 | 0,022782343 | 0,01698193 |
| 0,006890864 | -0,024730835 | -0,031021118 | 0,009183607 | 0,011626189 | -0,003209549 |
| -0,035136544 | -0,031983625 | 0,029792863 | -0,009954672 | -0,026115857 | -0,004823447 |
| -0,045279353 | -0,030475444 | -0,00415861 | -0,037576852 | 0,04175939 | 0,004061369 |
| 0,069768252 | -0,056841787 | 0,015130573 | 0,035857096 | -0,012339207 | 0,019111895 |
| -0,033758477 | 0,028443235 | 0,033585924 | -0,034632584 | -0,031502478 | -0,012655236 |
| 0,032517631 | -0,035530254 | -0,002275453 | 0,051969475 | 0,027200084 | 0,00319888 |
| 0,034984253 | -0,0196857 | 0,03411519 | -0,022347386 | -0,001158024 | -0,082608609 |
| -0,007207462 | -0,010399083 | 0,020320262 | -0,022842488 | 0,01537845 | -0,01465825 |
| -0,027128946 | 0,003889495 | 0,000970446 | -0,079437182 | 0,057511782 | 0,054310482 |
| 0,002778976 | 0,060514496 | -0,029578178 | 0,014472121 | -0,025579628 | 0,010594252 |
| 0,042078979 | 0,044771212 | -0,000551628 | -0,010977182 | 0,008996684 | -0,000108714 |

**2.**

**likelihoodeg.m**

```
function logl=likelihoodeg(par,r,init)
omega=par(1);
alpha=par(2);
gamma=par(3);
beta=par(4);

if init<=0;
   warning('initial volatility out of bounds');
end


h=0;
q=0;
z=0;


h(1)=init;
q(1)=log(init);
z(1)=r(1)/sqrt(h(1));

logl=0;

logl=logl+0.5*(q(1)+z(1)*z(1));

for i=2:length(r)
   q(i)=omega+alpha*(abs(z(i-1))-sqrt(2/pi))+gamma*z(i-1)+beta*q(i-1);
   h(i)=exp(q(i));
   if h(i)<=0;
     h(i)=init;
   end;
   z(i)=r(i)/sqrt(h(i));
   logl=logl+0.5*(q(i)+z(i)*z(i));
end
```

```
logl=logl/length(r);
logl(~isfinite(logl))=1.0e+20;
```

**egarchsim.m**

```
function [r,h]=egarchsim(par,T)
omega=par(1);
alpha=par(2);
gamma=par(3);
beta=par(4);

z=normrnd(0,1,T+1,1);
h(1)=1;
r(1)=z(1);

for i=2:T+1;
    h(i)=exp(omega+alpha*(abs(z(i-1))-sqrt(2/pi))+gamma*z(i-1)+beta*log(h(i-1)));
    r(i)=z(i)*sqrt(h(i));
end

r=r(2:end)';
h=h(2:end)';
```

**filterANDpredict.m**

```
function [z_filtered,h_filtered,h_predicted]=filterANDpredict(r,par,init)
omega=par(1);
alpha=par(2);
gamma=par(3);
beta=par(4);
```

```
h_filtered(1)=init;
z_filtered(1)=r(1)/sqrt(h_filtered(1));

for i=2:length(r)
h_filtered(i)=omega+alpha*(abs(z_filtered(i-1))-sqrt(2/pi))+gamma*z_filtered(i-
        1)+beta*log(h_filtered(i-1));
  h_filtered(i)=exp(h_filtered(i));
  z_filtered(i)=r(i)/sqrt(h_filtered(i));
end

h_predicted=omega+alpha*(abs(z_filtered(length(r)))-
sqrt(2/pi))+gamma*z_filtered(length(r))+beta*log(h_filtered(length(r)));
h_predicted=exp(h_predicted);
h_filtered=h_filtered';
z_filtered=z_filtered';
```

**firstStep.m**

```
function[est_par,h_filtered,z_filtered,h_predicted]=firstStep(init_param_values,
            init_vol,r)
[est_par]=fmincon(@(par)     likelihoodeg(par,r,init_vol),init_param_values,[],[],[],[],
            [-5,-5,-5,-0.999],[5,5,5,0.999]);
[z_filtered,h_filtered,h_predicted]=filterANDpredict(r,est_par,init_vol);
```

**portfolioChoiceFun.m**

```
function[out]=portfolioChoiceFun(lambda,r_first,r_second,iflag1,iflag2,init_param_v
            alues,init_vol,alpha)
if lambda>1;
  lambda=1;
```

```
  warning('weights out of bounds');
elseif lambda<0;
  lambda=0;
  warning('weights out of bounds');
end;

r=lambda*r_first+(1-lambda)*r_second;
[est_par,h_filtered,z_filtered,h_predicted]=firstStep(init_param_values,init_vol,r);

if iflag1==1;

   if iflag2==1;
      out=h_predicted;
   elseif iflag2==2;
      vArSingle=norminv(alpha)*sqrt(h_predicted);
      out=-vArSingle;
   elseif iflag2==3;
      vArSingle=norminv(alpha)*sqrt(h_predicted);
    CvArSingle=-(1/alpha)*((h_predicted^(1/2))/sqrt(2*pi))*exp(-(1/2)*
                (norminv(alpha)^(2)));
      out=-CvArSingle;
      end

   elseif iflag1==2;

         if iflag2==1;
         out=norm(h_filtered)/length(r);

         elseif iflag2==2;

               for i=1:length(r);

                    vAr(i)=norminv(alpha)*sqrt(h_filtered(i));
```

```
        end

        out=norm(vAr)/length(r);

    elseif iflag2==3;

        for i=1:length(r);

            vAr(i)=norminv(alpha)*sqrt(h_filtered(i));
            CvAr(i)=-(1/alpha)*((h_filtered(i)^(1/2))/sqrt(2*pi))*exp(-(1/2)*
                    (norminv(alpha)^(2)));

        end

        out=norm(CvAr)/length(r);

    end;

end;
```

**secondStep.m**

```
function [opt_lambda]=secondStep(min_ret,lambda_init,r_first,r_second,iflag1,iflag2,
                init_param_values,init_vol,alpha)
[opt_lambda]=fmincon(@(lambda)portfolioChoiceFun(lambda,r_first,r_second,iflag1
        ,iflag2,init_param_values,init_vol,alpha,lambda_init,[mean(r_second)-
        mean(r_first)],[mean(r_second)-min_ret],[],[],0,1);
```

**Βιβλιογραφία:**


- Financial Econometrics – Problems, models and methods, C.Gourieroux and J.Jasiak, Princeton Series in Finance
- ARCH – Selected Readings, Robert F.Engle, Oxford
- ARCH models and Financial Applications, C.Gourieroux, Springer
- Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk, P.Jorion, New York:McGraw-Hill
- Econometric Analysis, Greene, Prentice-Hall
- Risk management, M.Crouhy, McGraw-Hill, 2001
- Kristina Anderson, (2003), "Stochastic Volatility", U.U.D.M. Project report 2003:18
- E.Ghysels, A.Harvey, and E.Renault, (1995), "Stochastis Volatility", CIRANO, Scientific Series
- P.Artzner, F.Delbaen, J.Eber, and D.Heath, (1998), "Coherent measures of risk"
- J.Danielson, B.N.Jorgensen, M.Sarma and C.G. de Vries, (2005), "Comparing risk measures"
- G.W.Bassett, R.Koenker and G.Kordas, (2004), "Pessimistic Portfolio Allocation and Choquet Expected Utility", Journal of Financila Econometrics, 2004, Vol.2, No.4, 447-492

Βιβλιογραφία:


- Financial Econometrics – Problems, models and methods, C.Gourieroux and J.Jasiak, Princeton Series in Finance
- ARCH – Selected Readings, Robert F.Engle, Oxford
- ARCH models and Financial Applications, C.Gourieroux, Springer
- Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk, P.Jorion, New York:McGraw-Hill
- Econometric Analysis, Greene, Prentice-Hall
- Risk management, M.Crouhy, McGraw-Hill, 2001
- Kristina Anderson, (2003), "Stochastic Volatility", U.U.D.M, Project report 2003:18
- E.Ghysels, A.Harvey, and E.Renault, (1995), "Stochastic Volatility", CIRANO, Scientific Series
- P.Artzner, F.Delbaen, J.Eber, and D.Heath, (1998), "Coherent measures of risk"
- J.Danielsson, B.N.Jorgensen, M.Sarma and C.G. de Vries, (2005), "Comparing risk measures"
- G.W.Bassett, R.Koenker and G.Kordas, (2004), "Pessimistic Portfolio Allocation and Choquet Expected Utility", Journal of Financial Econometrics, 2004, Vol.2, No.4, 477–492