02

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ VAN HIELES ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΡΕΥΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΞΗΧΘΗ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

Δημήτριος Π. Βαρβιτσιώτης

ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής

του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική

Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα

Μάιος 2006

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Αξιολόγηση θεωρίας Van Hieles για την αποτύπωση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης μέσα από έρευνα που διεξήχθη στα ελληνικά σχολεία

Δημήτρης Παν. Βαρβιτσιώτης

ΕΡΓΑΣΙΑ
Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στη Στατιστική
Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα
05-2006

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Εργασία που υποβλήθηκε ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ VAN HIELES ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΡΕΥΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΞΗΧΘΗ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

Δημήτριος Π. Βαρβιτσιώτης

Υπεύθυνο μέλος ΔΕΠ:
Ειρ. Μουστάκη
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Ο Διευθυντής Μεταπτυχιακών Σπουδών

Μιχαήλ Ζαζάνης
Καθηγητής

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Στην κόρη μου την Μαριαλένα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στον αξιόλογο συνάδελφο Νικόλαο Τζίφα για τα στοιχεία που δανείστηκα από την υπέροχη έρευνα που έκανε στα Ελληνικά Σχολεία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασικό κριτήριο για την παρακολούθηση και την βελτίωση οτιδήποτε είναι να μπορούμε να το μετράμε. Άρα μια βασική αρχή που διέπει τον κόσμο που μας περιβάλλει είναι αυτή της μέτρησης. Δηλαδή πρέπει να υπάρχει κάποιος τρόπος μέτρησης είτε ποσοτικός είτε ποιοτικός ώστε να μπορούμε να έχουμε μια συνολική εικόνα του συγκεκριμένου αντικειμένου οπότε στη συνέχεια να εφεύρουμε τεχνικές βελτίωσης αλλά και ελέγχου του αντικειμένου αυτού. Ειδικά στον κλάδο των Μαθηματικών όλα είναι μετρήσιμα εκτός από την ιδιάζουσα περίπτωση της Γεωμετρίας όπου αξιόλογοι Μαθηματικοί ισχυρίζονται ότι δεν υπάρχει τρόπος μέτρησης αλλά και ότι δεν πρέπει να υπάρχει λόγω της φύσεως της ίδιας της επιστήμης.

Συγκεκριμένα είναι πολύ δύσκολο αν όχι αδύνατο να μετρήσει κάποιος το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης σε ένα άνθρωπο ειδικά σε παιδιά γιατί δεν πρέπει να υπάρχουν όρια μέσα στα οποία να μπορούμε να κινηθούμε για να κατανοήσουμε γεωμετρικές έννοιες. Η αντίληψη και η φαντασία είναι οι κύριοι παράγοντες που κάνουν την διαφορά σε σχέση με τους υπόλοιπους τομείς των Μαθηματικών ενώ η γνώση παίζει μικρότερο ρόλο και δεν είναι κυρίαρχη αλλά μάλλον δευτερεύουσα. Εδώ κάπου βρίσκεται και η ομορφιά της και γοητεύει ακόμη και ανθρώπους που δεν έχουν ιδιαίτερη κλίση στα Μαθηματικά. Είναι μερικοί από τους λόγους που η Γεωμετρία διχάζει τα παιδιά σε επίπεδο αγάπης-μίσους αφού είναι σύνηθες το φαινόμενο μαθητές με μεγάλους βαθμούς σε Άλγεβρα να έχουν μικρούς στην Γεωμετρία αλλά και μαθητές που ακολουθούν Θεωρητική Κατεύθυνση να έχουν υψηλούς βαθμούς στην Γεωμετρία.

Η αφορμή που δόθηκε για την εργασία αυτή είναι μια σπουδαία έρευνα που έγινε στα Ελληνικά σχολεία από τον συνάδελφο Νίκο Τζίφα για τη αλλά η αιτία είναι η μέθοδος την όποια χρησιμοποίησε ο συνάδελφος η οποία από την πρώτη στιγμή μου κέντρισε το ενδιαφέρον γιατί προσπαθεί να μετρήσει τα επίπεδα της γεωμετρικής ικανότητας και σκέψης των παιδιών και όχι μόνο.

Η μέθοδος των van hiele είναι μια ενδιαφέρουσα περίπτωση γιατί δεν μένει στην θεωρητική προσέγγιση αλλά προχωρεί σε κλίμακα βαθμολόγησης δηλαδή scoring κάτι που από την αρχή με κέντρισε να το εξετάσω και να το μελετήσω με τα σύγχρονα στατιστικά πακέτα και τα εργαλεία που διαθέτουμε.

Η μελέτη αυτή προχωρεί σε ένα άλλο επίπεδο της έρευνας του συναδέλφου και προσπαθεί να απαντήσει σε ερωτήματα που κατά βάση έχουν να κάνουν με την δομή της θεωρίας των van hiele.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δοθεί μια σύντομη περιγραφή της θεωρίας van hiele για να μπορούμε να κατανοήσουμε την βασική δομή της και τα σημαντικότερα σημεία της όπου θα εστιάσουμε χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα έτσι όπως αυτά προέκυψαν από την πανελλαδική έρευνα που έγινε στα Ελληνικά Σχολεία. Δηλαδή με την βοήθεια των αποτελεσμάτων της έρευνας θα προσπαθήσουμε όχι να εξάγουμε συμπεράσματα σε σχέση με την ερμηνεία της μεθόδου στην Ελληνική πραγματικότητα αλλά να διερευνήσουμε την ίδια την μέθοδο με βάση την αρχή της αμφισβήτησης σημαντικών στοιχείων που την διέπουν. Βέβαια σημαντικό εργαλείο είναι η ίδια η έρευνα την όποια θα περιγράψουμε γιατί είναι πραγματικά μια ολοκληρωμένη από κάθε άποψη και επιστημονικά τεκμηριωμένη αλλά και στατιστικά αξιόπιστη. Σημαντικό στοιχείο είναι το γεγονός ότι ο τρόπος βαθμολόγησης άρα και τα αποτελέσματα είναι βασισμένα σε δύο κριτήρια (ελαστικό-αυστηρό) όποτε και στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε και τις τυχόν διαφορές των δύο κριτηρίων.

Τελικά θα δοθούν τα βασικά ερωτήματα, η επεξεργασία τους, η στατιστική ανάλυσής τους με ένα ειδικό στατιστικό εργαλείο που δεν έχει δοκιμαστεί πάνω στα δεδομένα αυτά και βέβαια η εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων σε σχέση με τα ερωτήματα της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}

Θεωρητικό πλαίσιο θεωρίας Van Hiele

Η θεωρία των επιπέδων αναλυτικά

Αυτό που έχει γίνει γνωστό ως θεωρία των επιπέδων Van Hiele αναπτύχθηκε από την Dina Van Hiele – Geldof και το σύζυγό της Pierre Marie Van Hiele σε αυτόνομες διδακτορικές διατριβές στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το 1957.

Ύπαρξη επιπέδων

Σύμφωνα με τη θεωρία, υπάρχουν πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Αυτά τα επίπεδα περιγράφονται από τους Van Hiele σε πολλά σημεία των βιβλίων τους. Περιληπτικές γενικές περιγραφές και παραδείγματα από τον Hoffer (1979, 1981) παρατίθενται παρακάτω. Τα ονόματα εντός παρενθέσεων είναι δικά του.

Επίπεδο 1: (***αναγνώριση/recognition***) Ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα ως μια ολότητα και όχι σε σχέση με τις ιδιότητές τους. Για την περιγραφή των σχημάτων χρησιμοποιεί οπτικά πρότυπα (Π.χ Αναγνωρίζει ένα ορθογώνιο γιατί μοιάζει με πόρτα).

Επίπεδο 2: (***ανάλυση/analysis***) Ο μαθητής αναγνωρίζει τα σχήματα με την βοήθεια των ιδιοτήτων τους, μπορεί να ανακαλύπτει και να περιγράφει τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά δεν μπορεί να τις ορίσει τυπικά. Αν τον ρωτήσουμε γιατί αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε αυτός θα μας παραθέσει μια σειρά από ιδιότητες του ορθογωνίου (Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες κ.τ.λ).

Επίπεδο 3: (***διάταξη/order***) Ο μαθητής μπορεί να διατάξει λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και αρχίζει να αντιλαμβάνεται το ρόλο του ορισμού, αλλά δε λειτουργεί μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα. (Μπορεί να ακολουθηθεί απλός παραγωγικός συλλογισμός, αλλά η απόδειξη δε γίνεται κατανοητή). Μπορεί για παράδειγμα να επιλέξει από μια λίστα ιδιοτήτων του ορθογωνίου τις ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του και επίσης είναι ικανός να αναγνωρίσει τάξεις εγκλεισμού (π.χ τα τετράγωνα είναι ορθογώνια).

Επίπεδο 4: (***παραγωγικός συλλογισμός/deduction***) Ο μαθητής κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης.

Επίπεδο 5: (***αυστηρότητα/rigor***) Ο μαθητής κατανοεί την αναγκαιότητα για αυστηρότητα και είναι σε θέση να πραγματοποιήσει αφηρημένους παραγωγικούς συλλογισμούς. (Η μη-Ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να κατανοηθεί).

Ιδιότητες των επιπέδων

Στη θεωρία των Van Hiele αναφέρονται οι παρακάτω ιδιότητες(Van Hiele 1958-1959, Usiskin ,1982).

Ιδιότητα 1: (***σταθερή αλληλουχία/fixed sequence***) Ένας μαθητής δε μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο Van Hiele επίπεδο n δίχως να έχει διέλθει από το επίπεδο n-1.

Ιδιότητα 2: (***διαδοχικότητα/adjacency***) σε κάθε επίπεδο συλλογισμού εκείνο που ήταν σε λανθάνουσα κατάσταση στο προηγούμενο επίπεδο δηλώνεται στο επόμενο επίπεδο.

Ιδιότητα 3: (***διάκριση/distinction***) Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά.

Ιδιότητα 4: (***διαχωρισμός/separation***) Δύο άτομα που εκτελούν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα δε μπορούν να αλληλοκατανοηθούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

Σχεδιασμός της έρευνας – μεθοδολογία

Ο πληθυσμός αυτής της έρευνας αποτελείται από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και, Β΄ Λυκείου της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Συγκεκριμένα, για την Γ Γυμνασίου 95.378 + 5.781 = 101.159 (δημόσια και ιδιωτικά) μαθητές , για την Α΄ Λυκείου 75.576 + 5.752 = 81.328 μαθητές και για την Β΄ Λυκείου 72.434 + 5.597 = 78.031 μαθητές (*πηγή: ΥΠΕΠΘ, ΔΙΠΕ τμήμα Ε.Ε και στατιστικής 2005*). Στις Α΄ Λυκείου και Β΄ του Ενιαίου Λυκείου διδάσκεται το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» (θεωρητική Γεωμετρία). Στις Α΄ Λυκείου και Β΄ του τεχνικού και επαγγελματικού Λυκείου δεν διδάσκεται η Γεωμετρία.

2.1 Χαρακτηριστικά του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1.838 μαθητές από τους συνολικά 260.518 δηλαδή αναλογία 1:130, που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και, Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων από πολλές περιοχές της Ελλάδας όπως φαίνεται στον πίνακα του παραρτήματος ΓΓΓ Συγκεκριμένα το τυχαίο δείγμα των σχολείων που επιλέχθηκαν αποτελείτο από 16 Γυμνάσια, 25 Ενιαία Λύκεια, 2 Τ.Ε.Ε, 1 Αθλητικό Λύκειο, 1 Διαπολιτισμικό Λύκειο. Οι περισσότεροι από τους καθηγητές των μαθηματικών που δίδασκαν στα σχολεία αυτά είχαν διδακτική εμπειρία τουλάχιστον 15 χρόνων.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο χρονικό διάστημα από 27-01-2005 μέχρι 21-04-2005. Στο 80% των σχολείων παρευρέθηκε ,έδωσε οδηγίες και επιτήρησε τους μαθητές ο ίδιος ο ερευνητής. Πρέπει να αναφέρουμε ότι μοναδικό πρόβλημα υπήρξε το γεγονός ότι λίγοι μαθητές προσπάθησαν, αλλά δεν το πέτυχαν σε μεγάλο βαθμό, να αντιγράψουν από συμμαθητές τους.

Οριοθέτηση κριτηρίων

Συλλογή δεδομένων

Για τον εντοπισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών, το οποίο μεταφράστηκε για την Ελλάδα από τον ερευνητή Νίκο Τζίφα, με βάση το τεστ Van Hiele του καθηγητή του Πανεπιστημίου του Σικάγο, Zalman Usiskin ύστερα από άδεια του ιδίου.

Χρησιμοποιήθηκε το τροποποιημένο τεστ (μόνο για τα επίπεδα 1-4), το οποίο περιελάμβανε είκοσι ερωτήσεις (5 ερωτήσεις/επίπεδο * 4 επίπεδα). Οι 5 πρώτες ερωτήσεις(1-5) ελέγχουν την γεωμετρική σκέψη του 1^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις(6-10) ελέγχουν την γεωμετρική σκέψη του 2^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις(11-15) ελέγχουν την γεωμετρική σκέψη του 3^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις(16-20) ελέγχουν την γεωμετρική σκέψη του 4^{ου} επιπέδου.Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν το 3-5, δηλαδή 3 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές και το 4-5, δηλαδή 4 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές .

Για τον προσδιορισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης ενός μαθητή σύμφωνα με τη θεωρία Van Hieles απαιτείται να εισήχθησαν δύο λειτουργικοί ορισμοί. Ο ένας είναι αυτός της ***κυριάρχησης*** ενός επιπέδου και ο άλλος είναι αυτός της ***κατάταξης*** σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Ο μαθητής θα λέμε ότι κυριαρχεί στο επίπεδο n εφόσον απαντά σωστά τουλάχιστον στο πλήθος των ερωτήσεων που απαιτούνται από το είδος τους του κριτηρίου.

Το επίπεδο κατάταξης Van Hiele του μαθητή, για αυτήν την έρευνα, ήταν το πιο υψηλό επίπεδο κυριάρχησης του μαθητή με την προϋπόθεση ότι όλα τα προηγούμενα επίπεδα κυριαρχήθηκαν και υπό τον όρο ότι κανένα πιο υψηλό επίπεδο δεν κυριαρχήθηκε. Κατ' αυτό τον τρόπο, σε έναν μαθητή που κυριάρχησε στα επίπεδα 1 και 2 ορίστηκε ένα επίπεδο Van Hiele 2, αλλά ένας μαθητής που κυριάρχησε τα επίπεδα 1, 2. και 4 δεν κατατάσσεται σύμφωνα με το πρότυπο Van Hiele σε κανένα επίπεδο και αποκλείστηκε από την ανάλυση. Ο πίνακας 1 επεξηγεί κατωτέρω αυτήν την συμφωνία:

Πίνακας 1

Van Hiele Επίπεδο κατάταξης	**Επίπεδα που κυριάρχησε**
0	Κανένα
1	1 μόνο
2	1 και 2
3	1, 2 και 3
4	1, 2, 3 και 4
κανένα επίπεδο	2 μόνο
κανένα επίπεδο	3 μόνο
κανένα επίπεδο	4 μόνο
κανένα επίπεδο	1 και 3
κανένα επίπεδο	1 και 4
κανένα επίπεδο	2 και 3
κανένα επίπεδο	2 και 4
κανένα επίπεδο	3 και 4
κανένα επίπεδο	1,2 και 4
κανένα επίπεδο	1,3 και 4
κανένα επίπεδο	2,3 και 4

Βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας

Η βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας έγινε από τον ερευνητή σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια (το 3-5 και το 4-5) και σύμφωνα με την συμφωνία που απεικονίζεται στον πίνακα 2.Η διπλή ή τριπλή κ.λ.π. απάντηση σε μια ερώτηση λογίστηκε σαν λανθασμένη και συμπεριλήφθηκε στο ποσοστό των μαθητών που δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Για την αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών αντιστοιχίσαμε σε κάθε μαθητή με βάση τις απαντήσεις του στο τεστ van Hiele ένα σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας με τον ακόλουθο τρόπο:

1 βαθμός για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 1 – 5 (Επίπεδο 1)

2 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 6 – 10 (Επίπεδο 2)

4 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 11 – 15 (Επίπεδο 3)

8 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 16 – 20 (Επίπεδο 4)

Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν είτε το ελαστικό είτε το αυστηρό και οι βαθμοί αθροίστηκαν για να δώσουν το σταθμισμένο άθροισμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{O}

LAMI ΕΦΑΡΜΟΓΗ

3.1 Γενικά

Η μέθοδος που ακολουθούμε βασίζεται σε μοντέλα κατηγορικά και μάλιστα στην περίπτωση που είναι δυαδικές οι μεταβλητές, όπως εδώ, δηλαδή οι απαντήσεις είναι του είδους σωστό / λάθος. Θα ξεκινήσουμε με ένα μοντέλο πιθανοτήτων συνδέοντας τις παρατηρηθέντες μεταβλητές σε μια ομάδα λανθανουσών μεταβλητών. Μετά θα συζητήσουμε για την καλή προσαρμογή του μοντέλου μας και θα ερμηνεύσουμε τις παραμέτρους. Τα βασικά προβλήματα που έχουμε είναι:

- Να εξερευνήσουμε τις τυχόν αλληλεξαρτήσεις ανάμεσα στις παρατηρηθέντες απαντήσεις.
- Να ορίσω ένα βαθμό (scoring) για κάθε λανθάνων μεταβλητή με βάση τις απαντήσεις που έχουν δοθεί από το δείγμα μας.

Ο πίνακας που έχουμε στην διάθεση μας είναι ένας δυαδικός πίνακας και η κάθε εγγραφή καταγράφει πότε μια απάντηση είναι θετική ή αρνητική. Μια βολική σύμβαση είναι να θεωρήσουμε 1 να σημαίνει σωστή απάντηση και 0 λάθος απάντηση.

Το πρόγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί είναι το GENLAT (Ειρήνη Μουστάκη 2001) το οποίο εκτός άλλων παράγει και τα εκτιμώμενα ασύμπτωτα τυπικά σφάλματα, μετρήσεις για καλή εφαρμογή αλλά και μεθόδους βαθμολόγησης.

Κάθε γραμμή του πίνακα είναι της μορφής 00100101010100101101 και αναφέρεται ως απάντηση στις 20 δυαδικές μεταβλητές του κάθε μαθητή οπότε υπάρχουν 2^{20} πιθανοί συνδυασμοί απαντήσεων. Παρακάτω παρουσιάζουμε πίνακες που δείχνουν σε κάθε μεταβλητή ποσοστά επιτυχίας και αποτυχίας.

Δηλαδή συγκεντρωτικά έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μεταβλητή(Item)	Θετική απάντηση(Response 1)	Αρνητική απάντηση(Response 0)
1	0,85	0,15
2	0,91	0,09
3	0,87	0,13
4	0,84	0,16
5	0,78	0,22
6	0,47	0,53
7	0,76	0,25
8	0,59	0,42
9	0,65	0,35
10	0,37	0,63
11	0,37	0,63
12	0,48	0,52
13	0,80	0,20
14	0,27	0,73
15	0,37	0,63
16	0,38	0,62
17	0,33	0,67
18	0,21	0,79
19	0,18	0,82
20	0,30	0,70

Στις 1-5, 7, 13 ερωτήσεις έχουμε υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις ερωτήσεις 6,8,12 μοιρασμένα ποσοστά ενώ στις υπόλοιπες υψηλά ποσοστά αποτυχίας.

Οι δυαδικές παρατηρηθέντες μεταβλητές ορίζονται ως :

$$(x_1, \ldots, x_p)$$

ενώ το διάνυσμα των latent μεταβλητών δηλώνεται ως :

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$$

όπου $y_j \sim N(0,1)$ για όλα τα i. Από την στιγμή που τα χ_i είναι δυαδικές οι αναμενόμενες τιμές των χ_i δοθέντων των ys είναι :

$$\Pr(x_i = 1 \mid \mathbf{y}) = \pi_i(\mathbf{y})$$

όπου $\pi_i(y)$ είναι η υπό όρους πιθανότητα ότι η δυαδική μεταβλητή χ_i είναι ίση με 1 δίνοντας τις τιμές των q latent μεταβλητών $y_1, \ldots, y_q$. Οπότε εμείς πρέπει να ειδικεύσουμε την φόρμα της πιθανότητας $\pi_i(y)$ ως συνάρτηση των $y_1, \ldots, y_q$. Μια ιδανική γραμμική συνάρτηση είναι:

$$\pi_i(\mathbf{y}) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}y_1 + \cdots + \alpha_{iq}y_q \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

Αλλά τέτοια γραμμική σχέση έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα:

1) Αριστερά έχουμε τιμές από 0 έως 1 ως πιθανότητα και δεξιά μπορεί να πάρει όλες τις τιμές
2) Θα πρέπει να περιμένουμε ότι το εύρος της αλλαγής στην πιθανότητα μιας απάντησης (θετικής / αρνητικής) δεν θα είναι το ίδιο για όλο το εύρος των y.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω χρειαζόμαστε μια διαφορετική συνάρτηση σύνδεσης μεταξύ της πιθανότητας και των latent μεταβλητών. Αυτή η σύνδεση θα αντιστοιχεί το διάστημα [0 , 1] στο [-∞ , +∞] . Πρέπει επίσης να είναι μονοτονική συνάρτηση για κάθε y επειδή αυξάνοντας οποιοδήποτε y θα πρέπει να έχει επίδραση και στην αύξηση της πιθανότητας.

Το λογιστικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε ορίζεται ως

$$\operatorname{logit}\pi_i(\mathbf{y}) = \log_e \frac{\pi_i(\mathbf{y})}{1 - \pi_i(\mathbf{y})} = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} y_j$$

έτσι μετατρέποντας την $\pi_i(y)$ κατορθώνουμε να γράψουμε το μοντέλο μας ως γραμμικό που βέβαια μας διευκολύνει στην ερμηνεία του. Η πιθανότητα $\pi_i(y)$ δείχνει την πιθανότητα της επιτυχίας και ο λόγος $\pi_i(y)/(1-\pi_i(y))$ είναι τα odds της επιτυχίας.

Μετατρέποντας την εξίσωση μπορούμε να πάρουμε έκφραση ως προς $\pi_i(y)$

$$\pi_i(\mathbf{y}) = \frac{\exp(\alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} y_j)}{1 + \exp(\alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} y_j)}$$

Εφαρμόζουμε μοντέλο ενός παράγοντα στις 20 μεταβλητές μας . Η παράμετρος α_{i1} καθορίζει την κλίση της καμπύλης πάνω από την μέση του εύρους της . Αυτό σημαίνει ότι μια αλλαγή της τιμής y_1 θα παράγει μεγαλύτερη αλλαγή στην πιθανότητα μιας θετικής απάντησης και μάλιστα ανάλογη εάν αυτή η αλλαγή αυτή είναι μεγάλη ή μικρή. Για αυτό τον λόγο ονομάζεται discrimination παράμετρος. Μεγαλώνοντας την παράμετρο α_{i0} αυξάνουμε την πιθανότητα για όλες τις τιμές των y_1 και έτσι αναφέρεται ως difficulty παράμετρος.

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και των τυπικών σφαλμάτων δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Maximum Likelihood Estimates Of Item Parameters and Standard Errors

Binary Items

ITEM I	ALPHAB(0,I)	S.E.	ALPHAB(1,I)	S.E	P(X=1/Z=0)	STALPHAB
1	1.83	0.08	0.55	0.10	0.86	0.48
2	2.98	0.14	1.44	0.13	0.95	0.82
3	1.99	0.08	0.55	0.08	0.88	0.48

4	1.79	0.08	0.63	0.10	0.86	0.53
5	1.79	0.10	1.52	0.12	0.86	0.84
6	-0.16	0.07	1.56	0.11	0.46	0.84
7	1.33	0.07	0.94	0.08	0.79	0.69
8	0.50	0.07	1.47	0.11	0.62	0.83
9	0.71	0.06	0.80	0.08	0.67	0.62
10	-0.59	0.06	0.69	0.07	0.36	0.57
11	-0.55	0.05	0.52	0.06	0.37	0.46
12	-0.10	0.06	0.90	0.08	0.48	0.67
13	1.94	0.11	1.58	0.13	0.87	0.84
14	-1.23	0.07	1.17	0.09	0.23	0.76
15	-0.62	0.06	0.81	0.07	0.35	0.63
16	-0.51	0.05	0.51	0.06	0.38	0.46
17	-0.77	0.06	0.55	0.07	0.32	0.48
18	-1.46	0.07	0.62	0.07	0.19	0.53
19	-1.54	0.06	-0.05	0.07	0.18	-0.05
20	-0.88	0.06	0.53	0.06	0.29	0.47

Η τελευταία στήλη του πίνακα δίνει τις εκτιμήσεις των πιθανοτήτων ότι ο μέσος μαθητής θα απαντήσει θετικά. Όπως παρατηρούμε οι ερωτήσεις 1-5, 7,8,9 και 13 παρουσιάζουν μεγάλη πιθανότητα να απαντηθούνε σωστά από το μέσο άτομο ενώ οι 18,19 παρουσιάζουν μικρή πιθανότητα . Στην στήλη των α_{i1} παρατηρούμε ότι όλα είναι θετικά εκτός από την 19^{η} ερώτηση.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα τυποποιημένα α_{i1} που αναπαριστούν τους συντελεστές συσχέτισης ανάμεσα στις λανθάνων μεταβλητές και τις ελλοχεύουσες συνεχείς μεταβλητές x^*_i οι οποίες είναι μη παρατηρούμενες.

Το τέστ καλής προσαρμογής των δεδομένων μας θα είναι το log-likelihood-ratio test statistic G^2 όπου r αναπαριστά ένα pattern απάντησης και O(r) , E(r) αναπαριστούν τις παρατηρηθέντες και αναμενόμενες συχνότητες αντίστοιχα. Ένα άλλο τέστ είναι το Pearson chi-squared καλής προσαρμογής statistic X^2 που δίνεται από τον τύπο:

$$X^2 = \sum_{r=1}^{2^p} \frac{(O(r) - E(r))^2}{E(r)}$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $(2^p - p(q+1)-1)=7$

Goodness-of-Fit Measures
% OF G-SQUARE EXPLAINED 14.7908
LOGLIKELIHOOD VALUE -19697.5051
LIKELIHOOD RATIO STAT. 7821.97337
CHI-SQUARE FOR OBS RESP PATTERNS 13685.3025
CHI-SQUARE FOR ALL RESP PATTERNS 15271.7630
DEGREES OF FREEDOM 7

3.2 SCORING

Η ιδέα για το μοντέλο Latent Trait είναι ότι θα ψάξουμε για μια κατάλληλη πρόβλεψη για κάθε y ξέροντας τα xs. Θα χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένη μέση τιμή δηλαδή :

$$E(y_j \mid x_1, \ldots, x_p) \qquad (j = 1, \ldots, q)$$

Αυτοί οι μέσοι είναι συναρτήσεις των component scores τα οποία δίνονται από τον τύπο:

$$X_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} x_i \qquad (j = 1, \ldots, q)$$

Στην περίπτωση μας του ενός παράγοντα και η πρώτη εξίσωση και τα components δίνουν την ίδια κατάταξη στα αντικείμενα στο δείγμα. Τα components υπολογίζονται από τα σταθμισμένα βάρη που παρατηρούνται από την εφαρμογή του μοντέλου.
Ο πίνακας δίνει τους υπό όρους εκτιμώμενους μέσους και τα component scores όπως επίσης το συνολικό score αλλά και την εκτιμώμενη τυπική απόκλιση των μεταβλητών σε σχέση με τον υπό όρους μέσο.
Ο επόμενος πίνακας μας δίνει scoring για κάθε μία απάντηση του μαθητή και θα τον συγκρίνουμε με το scoring που προτείνουν τα επίπεδα Van Hiele χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο SPSS και εφαρμόζοντας κανονική παλινδρόμηση.
Παρακάτω έχουμε ένα δείγμα του πίνακα με τα scores που μας δίνει το LAMI πρόγραμμα :

Scoring Response Patterns

E(Z1/X)	SD1	CSCORE	ITOTAL	RESPONSE PATTERN
-2.533	0.592	0.51	1.00	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
-2.520	0.590	0.55	1.00	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-2.340	0.571	1.08	2.00	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
-2.185	0.555	1.58	1.00	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
-2.149	0.551	1.69	3.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
-2.148	0.551	1.70	3.00	0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
-2.097	0.546	1.87	3.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-2.022	0.539	2.12	2.00	0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-2.021	0.539	2.12	3.00	1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.989	0.536	2.24	5.00	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0
-1.975	0.535	2.28	4.00	1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
-1.974	0.535	2.29	4.00	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
-1.944	0.532	2.39	3.00	0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.943	0.532	2.39	4.00	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1
-1.926	0.531	2.46	4.00	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
-1.912	0.530	2.50	4.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0
-1.903	0.529	2.54	5.00	1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
-1.883	0.527	2.61	4.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1
-1.880	0.527	2.62	3.00	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.876	0.527	2.63	3.00	0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.870	0.526	2.66	4.00	1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
-1.847	0.524	2.74	3.00	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1
-1.842	0.524	2.76	5.00	1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
-1.819	0.522	2.84	4.00	0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
-1.774	0.519	3.01	6.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0
-1.752	0.517	3.09	5.00	0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0

-1.750	0.517	3.10	4.00	1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
-1.743	0.516	3.12	5.00	1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
-1.740	0.516	3.14	4.00	0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
-1.739	0.516	3.14	4.00	1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.721	0.515	3.21	4.00	1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.721	0.515	3.21	4.00	1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.716	0.514	3.22	5.00	1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
-1.712	0.514	3.24	6.00	0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1
-1.707	0.514	3.26	5.00	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0
-1.702	0.513	3.28	3.00	0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.694	0.513	3.31	4.00	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
-1.693	0.513	3.31	6.00	1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
-1.685	0.512	3.34	4.00	1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.675	0.512	3.38	5.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0
-1.664	0.511	3.42	5.00	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0
-1.663	0.511	3.43	5.00	1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
-1.659	0.511	3.44	6.00	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0
-1.654	0.510	3.46	4.00	1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
-1.649	0.510	3.48	4.00	0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1.636	0.509	3.53	4.00	0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Για την σύγκριση των score που δίνει η LAMI εφαρμογή με τα score που δίνουν τα επίπεδα VAN HIELE (σύμφωνα με το σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας που αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1) θα χρησιμοποιήσουμε κανονική παλινδρόμηση και με την βαθμολογία του ελαστικού κριτηρίου αλλά και με του αυστηρού.
Ως εξαρτημένη μεταβλητή θα βάλουμε τη LAMI score και σαν ανεξάρτητη πρώτα το score με βάση το ελαστικό κριτήριο και μετά με βάση το αυστηρό κριτήριο.
Παρατηρούμε με βάση τους παρακάτω πίνακες ότι :

Υπάρχει σχέση μεταξύ των μεταβλητών αφού οι συντελεστές συσχέτισης είναι αρκετά μεγάλοι και μάλιστα στατιστικά σημαντική από τα αντίστοιχα p-value.
Πιο συγκεκριμένα ο συντελεστής συσχέτισης r= 0,785 και 0,757 αντίστοιχα ανάλογα με το κριτήριο που χρησιμοποιούμε .
Επίσης έχουμε F=2953,635 και p-value=0.000<0.001 οπότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση για μη γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Διαφορετικά t= 54,347 και p-value=0.000<0.001.Ισχύει t^2=F.

Correlations

		sum_elas	LAMI	sum_ayst
sum_elas	Pearson Correlation	1	,785(**)	,658(**)
	Sig. (2-tailed)		,000	,000
	N	1838	1838	1838
LAMI	Pearson Correlation	,785(**)	1	,757(**)
	Sig. (2-tailed)	,000		,000
	N	1838	1838	1838
sum_ayst	Pearson Correlation	,658(**)	,757(**)	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	
	N	1838	1838	1838

Regression

Variables Entered/Removed(b)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	sum_elas(a)	.	Enter

a All requested variables entered.
b Dependent Variable: LAMI

Η μεταβλητή με το ελαστικό κριτήριο ερμηνεύει το 78.5% της ολικής μεταβλητότητας της μεταβλητής LAMI.

Model Summary(b)

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,785(a)	,617	,616	2,054	1,600

a Predictors: (Constant), sum_elas
b Dependent Variable: LAMI

ANOVA(b)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	12460,180	1	12460,180	2953,635	(a)
	Residual	7745,334	1836	4,219		
	Total	20205,513	1837			

a Predictors: (Constant), sum_elas
b Dependent Variable: LAMI

Coefficients(a)

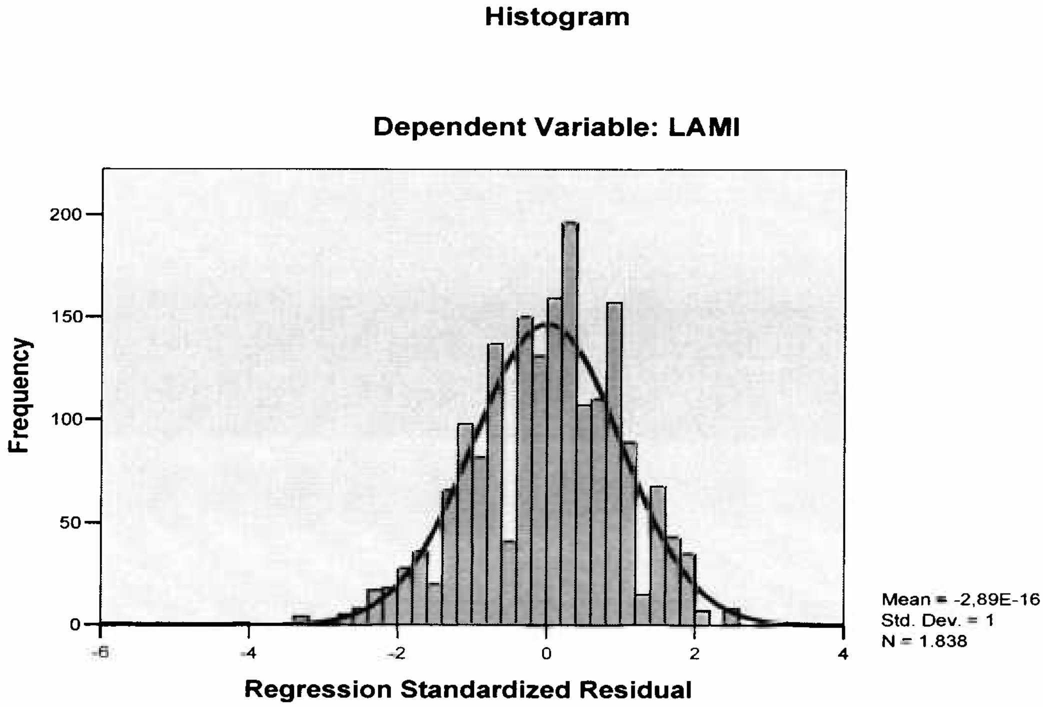
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig
1	(Constant)	7,744	,074		105,186	,000
	sum_elas	,604	,011	,785	54,347	,000

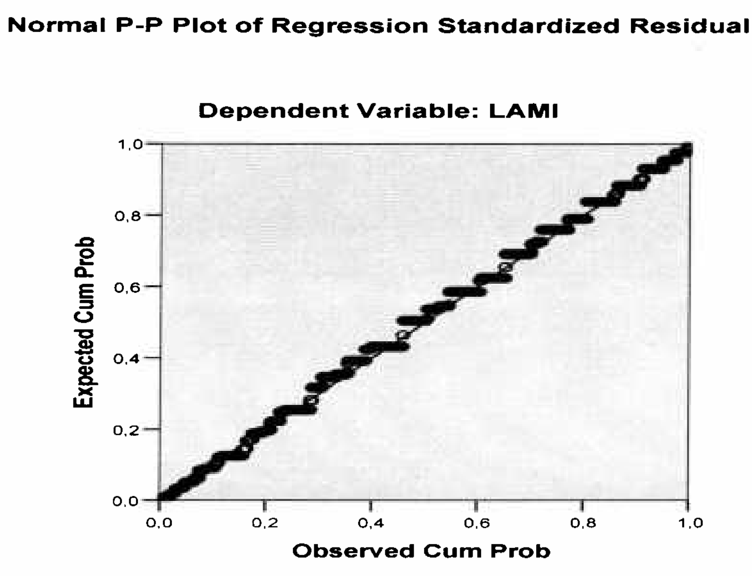
a Dependent Variable: LAMI

Residuals Statistics(a)

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	7,74	16,81	10,78	2,604	1838
Std. Predicted Value	-1,166	2,313	,000	1,000	1838
Standard Error of Predicted Value	,048	,121	,065	,020	1838
Adjusted Predicted Value	7,74	16,82	10,78	2,605	1838
Residual	-8,577	5,027	,000	2,053	1838
Std. Residual	-4,176	2,447	,000	1,000	1838
Stud. Residual	-4,178	2,448	,000	1,000	1838
Deleted Residual	-8,584	5,030	,000	2,056	1838
Stud. Deleted Residual	-4,197	2,452	,000	1,001	1838
Mahal. Distance	,000	5,351	,999	1,496	1838
Cook's Distance	,000	,010	,001	,001	1838
Centered Leverage Value	,000	,003	,001	,001	1838

a Dependent Variable: LAMI





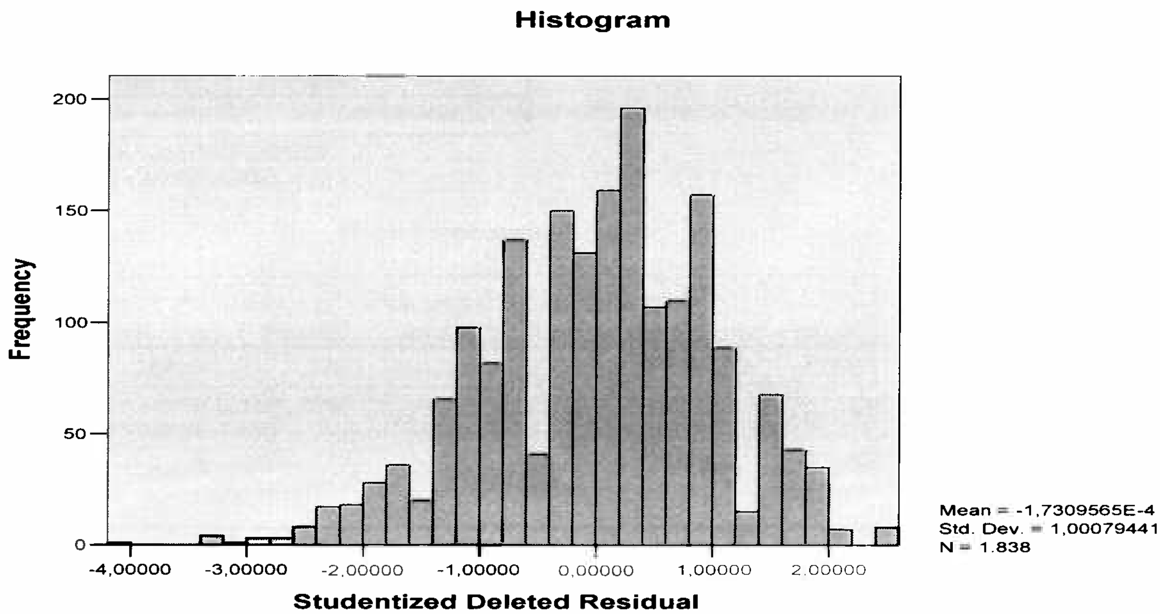
Tests of Normality

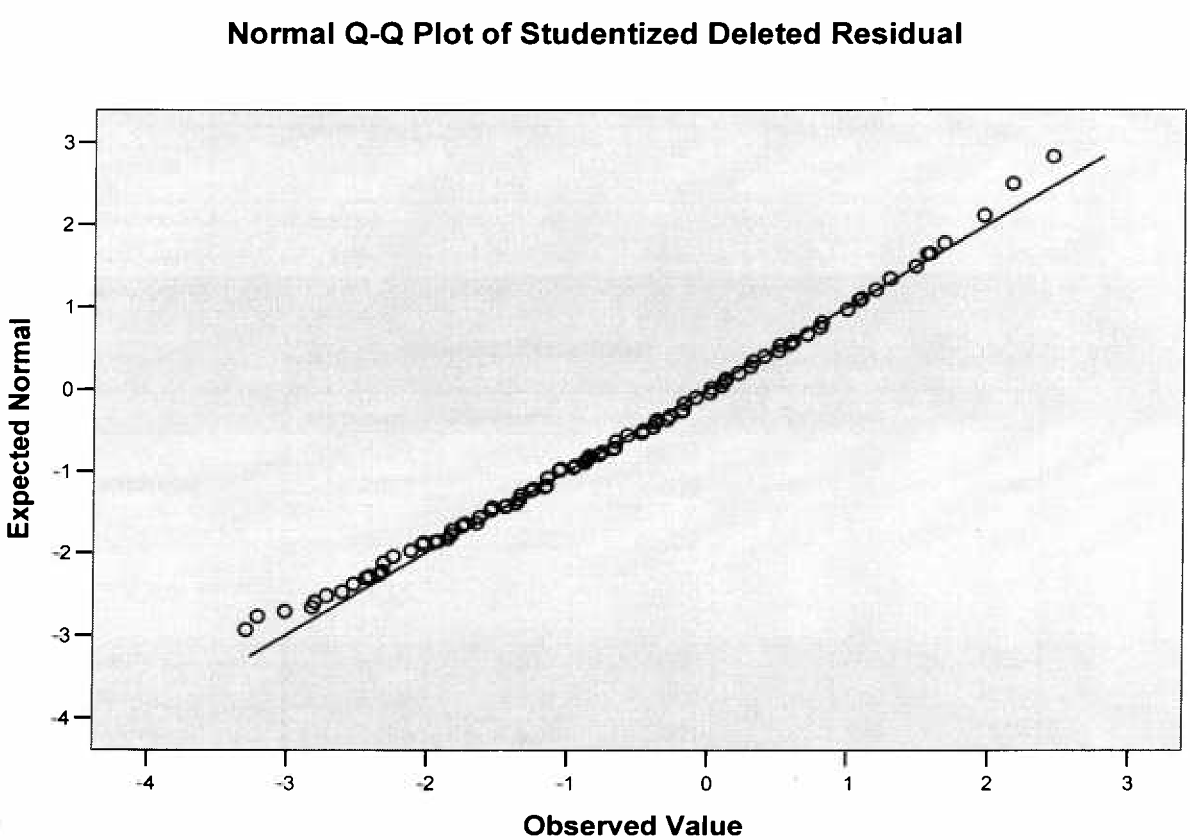
Γραφικά από τα διαγράμματα αλλά και σύμφωνα με τα τεστ των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk η υπόθεση της κανονικότητας των υπόλοιπων μπορεί να απορριφθεί.

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Studentized Deleted Residual	,046	1838	,000	,993	1838	,000

a Lilliefors Significance Correction

Studentized Deleted Residual





Παρακάτω αντίστοιχα για την μεταβλητή με το αυστηρό κριτήριο

Regression

Variables Entered/Removed(b)

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	sum_ayst(a)	.	Enter

a All requested variables entered.
b Dependent Variable: LAMI

Model Summary(b)

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,757(a)	,573	,573	2,167	1,608

a Predictors: (Constant), sum_ayst
b Dependent Variable: LAMI

ANOVA(b)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	11584,287	1	11584,287	2467,022	,000(a)
	Residual	8621,226	1836	4,696		
	Total	20205,513	1837			

a Predictors: (Constant), sum_ayst
b Dependent Variable: LAMI

Coefficients(a)

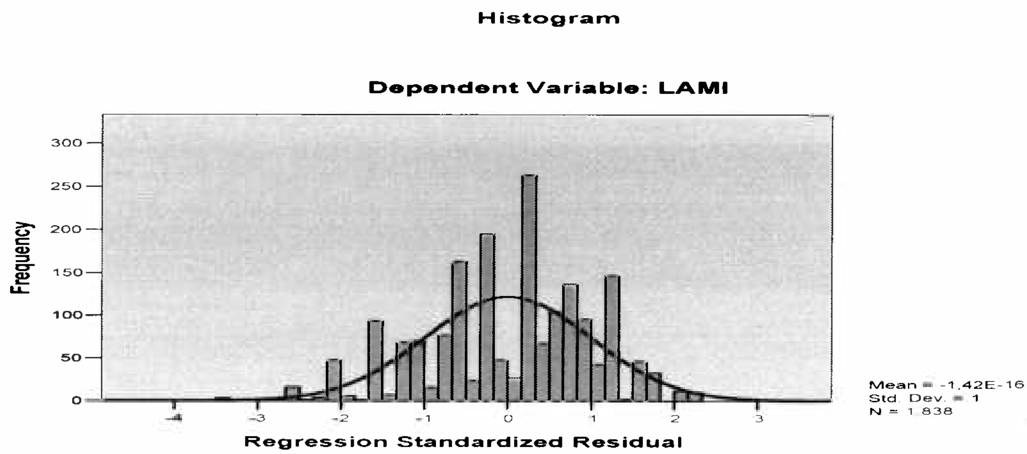
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	8,578	,067		127,556	,000
	sum_ayst	,865	,017	,757	49,669	,000

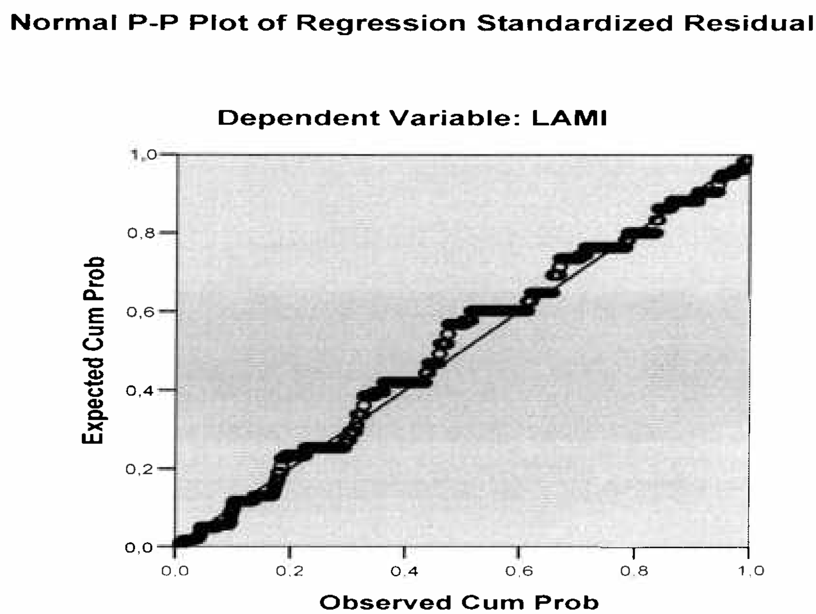
a Dependent Variable: LAMI

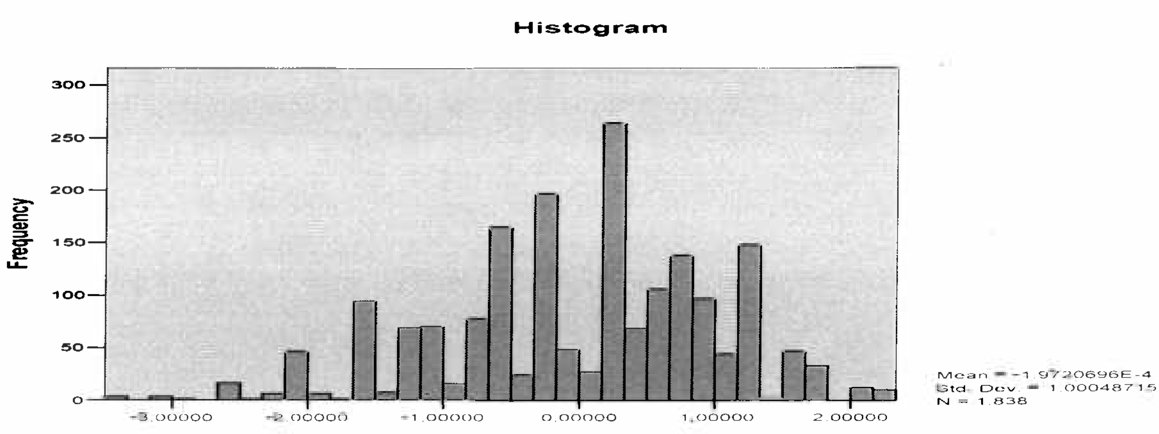
Residuals Statistics(a)

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	8,58	21,56	10,78	2,511	1838
Std. Predicted Value	-,877	4,291	,000	1,000	1838
Standard Error of Predicted Value	,051	,223	,067	,026	1838
Adjusted Predicted Value	8,58	21,62	10,78	2,514	1838
Residual	-7,578	4,826	,000	2,166	1838
Std. Residual	-3,497	2,227	,000	1,000	1838
Stud. Residual	-3,499	2,228	,000	1,000	1838
Deleted Residual	-7,586	4,829	-,001	2,170	1838
Stud. Deleted Residual	-3,510	2,230	,000	1,001	1838
Mahal. Distance	,024	18,409	,999	2,538	1838
Cook's Distance	,000	,035	,001	,003	1838
Centered Leverage Value	,000	,010	,001	,001	1838

a Dependent Variable: LAMI


Histogram
Dependent Variable: LAMI
Frequency
300
250
200
150
100
50
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
Regression Standardized Residual
Mean = -1,42E-16
Std. Dev. = 1
N = 1.838


Normal P-P Plot of Regression Standardized Residual
Dependent Variable: LAMI
Expected Cum Prob
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
Observed Cum Prob


Histogram
Frequency
300
250
200
150
100
50
0
-3,00000
-2,00000
-1,00000
0,00000
1,00000
2,00000
Studentized Residual
Mean = -1,9720696E-4
Std. Dev. = 1,00048715
N = 1.838

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

David J. Bartholomew, Fiona Steele, Irini Moustaki, Jane I. Galbraith. The Analysis and Interpretation of Multivariate Data for Social Scentists.

Karl G. Joreskog, Irini Moustaki. (2001). Factor analysis of ordinal variables:A comparison of Three Approaches.

Τζίφα Νικόλαο, Γιαννόπουλο Δημήτρη, Βαρβιτσιώτη Δημήτρη. Μια έρευνα για την αποτύπωση των επιπέδων της γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με την θεωρία επιπέδων van Hiele's.

Νικολουλόπουλος Κ. Αριστείδης Σημειώσεις Εργαστηρίων Γραμμικών Μοντέλων.

Bartholomew, D. J. (1998). Scaling unobservable constructw in social science. Applied Statititics

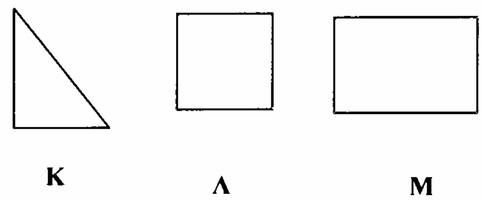
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

4.1 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α -Van Hiele Test

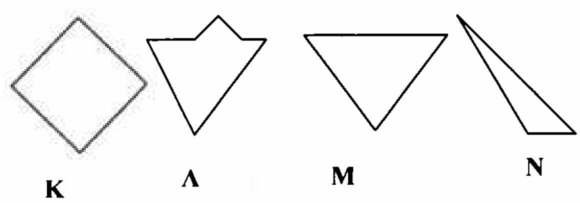
1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

- **a.** **Το Κ μόνο**
- **b.** **Το Λ μόνο**
- **c.** **Το Μ μόνο**
- **d.** **Το Λ και το Μ**
- **e.** **Όλα είναι τετράγωνα.**



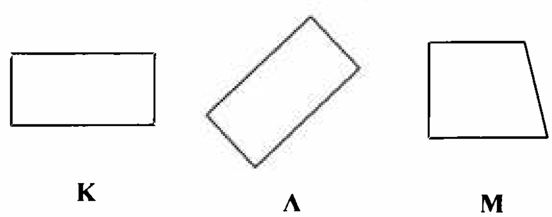
2. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνα;

- **a.** **Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.**
- **b.** **Το Λ μόνο**
- **c.** **Το Μ μόνο**
- **d.** **Το Μ και το Ν**
- **e.** **Το Λ και το Μ**



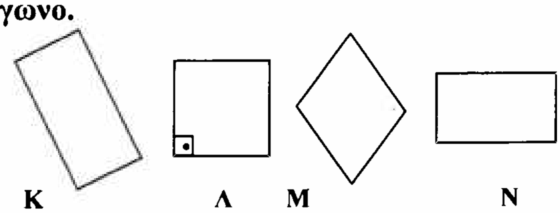
3. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια;

- **a.** **Το Κ μόνο**
- **b.** **Το Λ μόνο**
- **c.** **Το Κ και το Λ**
- **d.** **Το Κ και το Μ**
- **e.** **Όλα είναι ορθογώνια.**



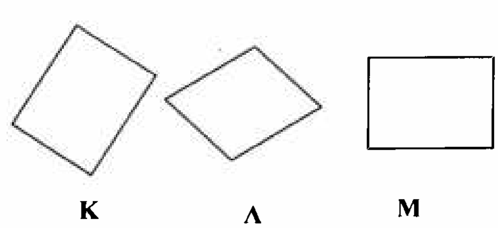
4. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

- **a.** **Κανένα από αυτά δεν είναι τετράγωνο.**
- **b.** **Το Λ μόνο**
- **c.** **Το Κ και Λ**
- **d.** **Το Λ και το Ν**
- **e.** **Όλα είναι τετράγωνα.**



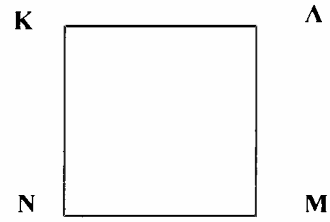
5. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι παραλληλόγραμμα;

- **a.** **Το Κ μόνο**
- **b.** **Το Μ μόνο**
- **c.** **Το Κ και Λ**
- **d.** **Κανένα από αυτά δεν είναι παραλληλόγραμμο.**
- **e.** **Όλα είναι παραλληλόγραμμα.**



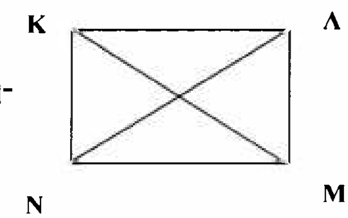
6. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής για όλα τα τετράγωνα.

a. **Το ΚΜ και το ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος.**
b. **Το ΚΜ και το ΛΝ είναι κάθετα.**
c. **Το ΚΝ και το ΛΜ είναι κάθετα.**
d. **Το ΚΝ και το ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος.**
e. **Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ.**



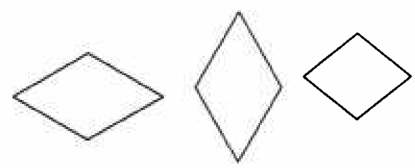
7. Στο ορθογώνιο ΚΛΜΝ οι ΚΜ και ΛΝ είναι διαγώνιες.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο;

a. **Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες.**
b. **Υπάρχουν 4 πλευρές.**
c. **Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.**
d. **Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.**
e. **Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο.**



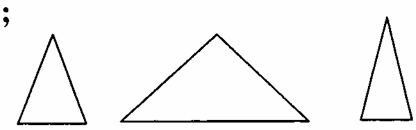
8. Ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ρόμβο;

a. **Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.**
b. **Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δύο από τις γωνίες του ρόμβου.**
c. **Οι δύο διαγώνιες είναι κάθετες.**
d. **Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.**
e. **Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.**



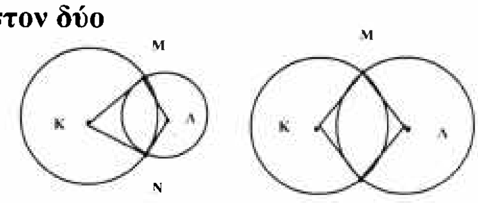
9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο με δύο ίσες πλευρές.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;

a. **Οι τρεις πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.**
b. **Μια πλευρά να είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.**
c. **Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο.**
d. **Οι τρεις γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.**
e. **Κανένα από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθές για κάθε ισοσκελές τρίγωνο.**



10. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Μ και Ν σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΚΜΛΝ. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι πάντα αληθή;

a. **Το ΚΜΛΝ θα έχει δύο ζευγάρια πλευρών ίσου μήκους.**
b. **Το ΚΜΛΝ θα έχει τουλάχιστον δύο γωνίες ίσου μέτρου.**
c. **Οι ευθείες ΚΛ και ΜΝ θα είναι κάθετες.**
d. **Οι γωνίες Κ και Λ θα έχουν το ίδιο μέτρο.**
e. **Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.**



11. Υπάρχουν δύο υποθέσεις.
Υπόθεση 1: Το σχήμα Φ είναι ένα ορθογώνιο.
Υπόθεση 2: Το σχήμα Φ είναι ένα τρίγωνο.
Ποιο είναι σωστό;

a. **Αν η 1 είναι αληθής, τότε και η 2 είναι αληθής.**
b. **Αν η 1 είναι λάθος ,τότε η 2 είναι αληθής.**
c. **Οι 1 και 2 δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.**
d. **Οι 1 και 2 δεν μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

12. Υπάρχουν δύο υποθέσεις.

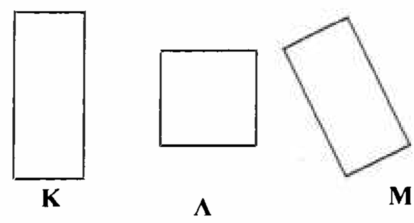
Υπόθεση Α: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις πλευρές με το ίδιο μήκος.
Υπόθεση Β: Στο τρίγωνο ΑΒΓ ,οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο.

Ποιο είναι σωστό;

a. **Οι υποθέσεις Α και Β δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.**
b. **Αν η Α είναι αληθής ,τότε και η Β είναι αληθής.**
c. **Αν η Β είναι αληθής ,τότε και η Α είναι αληθής.**
d. **Αν η Α είναι ψευδής ,τότε και η Β είναι ψευδής.**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

13. Ποια από τα παρακάτω σχήματα μπορούμε να τα ονομάσουμε ορθογώνια;

a. **Όλα μπορούν.**
b. **Μόνο το Λ.**
c. **Μόνο το Μ.**
d. **Τα Κ και Λ μόνο.**
e. **Τα Λ και Μ μόνο.**



14. Ποια είναι αληθή;

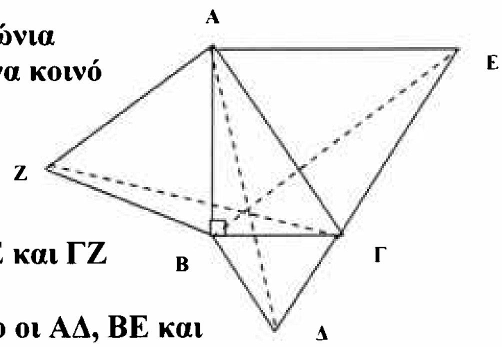
a. **Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.**
b. **Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογωνίων.**
c. **Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων**
d. **Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

15. Τι όλα τα ορθογώνια έχουν που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν;

a. **Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.**
b. **Οι διαγώνιες είναι ίσες.**
c. **Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.**
d. **Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.**
e. **Κανένα από τα (a) έως (d).**

16. **Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΒΖ και ΒΓΔ σχηματίζονται στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ. Από αυτή την πληροφορία κάποιος μπορεί να αποδείξει ότι: οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο. Τι σας λέει αυτή η απόδειξη;**

- **a.** **Μόνο σε αυτό το τρίγωνο είναι σίγουρο ότι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
- **b.** **Σε μερικά και όχι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
- **c.** **Σε οποιαδήποτε ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
- **d.** **Σε οποιαδήποτε τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
- **e.** **Σε οποιαδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**



17. **Παρακάτω υπάρχουν τρεις ιδιότητες ενός σχήματος.**
Ιδιότητα Α: Το σχήμα έχει διαγώνιες με ίσα μήκη.
Ιδιότητα Β: Το σχήμα είναι ένα τετράγωνο.
Ιδιότητα Γ: Το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.
Ποια είναι αληθή;

- **a.** **Η Α συνεπάγεται την Β η οποία συνεπάγεται την Γ.**
- **b.** **Η Α συνεπάγεται την Γ η οποία συνεπάγεται την Β.**
- **c.** **Η Β συνεπάγεται την Γ η οποία συνεπάγεται την Α.**
- **d.** **Η Γ συνεπάγεται την Α η οποία συνεπάγεται την Β.**
- **e.** **Η Γ συνεπάγεται την Β η οποία συνεπάγεται την Α.**

18. **Παρακάτω υπάρχουν δύο υποθέσεις.**

I. **Εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο ,τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.**
II. **Εάν οι διαγώνιοι ενός σχήματος διχοτομούνται ,τότε αυτό είναι ορθογώνιο.**

Ποιο είναι σωστό;

- **a.** **Για να αποδείξεις ότι η I είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η II είναι σωστή.**
- **b.** **Για να αποδείξεις ότι η II είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η I είναι σωστή.**
- **c.** **Για να αποδείξεις ότι η II είναι σωστή, είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.**
- **d.** **Για να αποδείξεις ότι η II είναι λάθος, είναι αρκετό να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.**
- **e.** **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

19. **Στη Γεωμετρία:**

- **a.** **Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί.**
- **b.** **Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι ορισμένες εικασίες είναι αληθείς.**
- **c.** **Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί αληθής.**

d. **Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά είναι αναγκαίο να έχουμε μερικές εικασίες οι οποίες υποτίθεται αληθείς.**

e. **Τίποτε από τα (a) έως (d) δεν είναι σωστό.**

20. Εξετάστε αυτές τις τρεις υποθέσεις.

I. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.

II. Μια ευθεία που είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες είναι κάθετη και στην άλλη.

III. Εάν δύο ευθείες ισαπέχουν ,τότε είναι παράλληλες

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ότι οι ευθείες α και β είναι κάθετες και οι ευθείες β και γ είναι κάθετες. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις μπορεί να είναι ο λόγος που η ευθεία α είναι παράλληλη στην ευθεία γ ;

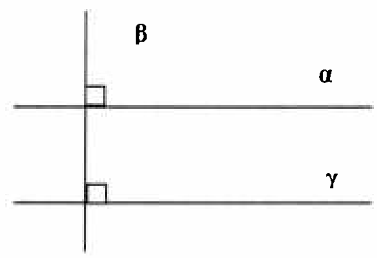
a. **Η I μόνο.**

b. **Η II μόνο.**

c. **Η III μόνο.**

d. **Είτε η I είτε η II.**

e. **Είτε η II είτε η III.**



4.2 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

***ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ*:……………………………………………………………**
***ΤΑΞΗ:*………………….. *ΣΧΟΛΕΙΟ:*……………………………………………**
***ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:*…………………..*ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ* ……………………………..**

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση

1.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
2.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
3.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
4.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
5.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
6.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
7.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
8.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
9.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
10.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
11.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
12.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
13.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
14.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
15.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
16.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
17.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
18.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
19.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
20.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ VAN HIELE TEST

1.b

2.d

3.c

4.b

5.e

6.b

7.e

8.a

9.c

10.d

11.c

12. b

13. a

14. a

15. b

16. c

17. c

18. d

19. d

20. a

4.3 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ -ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ		
1	62° ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
2	3° ΓΛΥΦΑΔΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
3	1° ΑΥΛΩΝΑ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
4	2° ΤΑΥΡΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
5	3° ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
6	3° ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ (ΑΘΛΗΤΙΚΟ)
7	3° ΑΓΙΟΥ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
8	1° ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
9	1° ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
10	2° ΑΜΑΛΙΑΔΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
11	1° ΠΑΠΑΓΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
12	1° Τ.Ε.Ε ΑΓΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ	ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΛΥΚΕΙΟ
13	3° ΤΡΙΚΑΛΩΝ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
14	ΣΑΜΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
15	2° ΚΟΖΑΝΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
16	9° ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
17	ΕΡΑΣΜΕΙΟΣ ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
18	ΠΕΝΤΑΛΟΦΟΥ ΚΟΖΑΝΗΣ	ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
19	4° ΤΡΙΚΑΛΩΝ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
20	3° ΓΛΥΦΑΔΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
21	2° ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
22	1° ΑΥΛΩΝΑ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
23	2° ΤΑΥΡΟΥ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
24	6° ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
25	34° ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
26	ΕΡΑΣΜΕΙΟΣ ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
27	ΣΗΤΕΙΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
28	ΣΗΤΕΙΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
29	33° ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
30	1° ΤΑΥΡΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
31	2° ΑΙΓΑΛΕΩ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
32	9° ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
33	ΚΑΙΣΑΡΗ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
34	ΚΑΙΣΑΡΗ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
35	22° ΠΑΤΡΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
36	12° ΠΑΤΡΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
37	3° ΠΑΤΡΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
38	5° ΠΑΤΡΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
39	7° ΤΕΕ ΠΑΤΡΑΣ	ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΛΥΚΕΙΟ

40	ΚΟΡΩΠΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
41	12° ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
42	1° ΙΛΙΟΥ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
43	1° ΙΛΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
44	ΛΕΟΝΤΕΙΟΣ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
45	ΙΩΝΙΔΕΙΟΣ ΠΕΙΡΑΙΑ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ