

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
εισ. 79821
Αρ.
ταξ.

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΜΕ ΠΑΧΙΕΣ ΟΥΡΕΣ**

**ΠΕΚΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ : 676**

**Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

Αθήνα

Δεκέμβριος 2005



**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ**



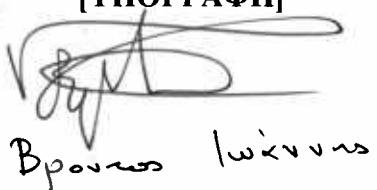
0 000000 571104



Εγκρίνουμε τη διατριβή τής ΠΕΚΟΥ ΣΟΦΙΑΣ

[Ιωάννης Βρόντος, Λέκτορας]
[Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών]

[ΥΠΟΓΡΑΦΗ]



Βρόντος Ιωάννης

[Ηλίας Τζαβαλής, Καθηγητής]
[Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών]

[ΥΠΟΓΡΑΦΗ]



Τζαβαλής

[ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ]

11/1/2006



Ευχαριστίες

Δέντρο της ζωής που έρχεται από σπέρματά μου, όπως και βούλησα στην
αρχή λαμβάνοντας την ονομασία του α' Ηρόντη Γεώργιου που δίστηρε να

προσέλθει σε καθέρισμα της αδερφής του, επίλεγοντας και χρήσιμη βαθμολογία της περιοχής
όπου θα γίνεται η γέννηση της πατούλισσας. Ήταν τότε πρόσφατος και ότι τις παραδίδει
και παραδίδει σε άλλη απόγονη την ίδια την πατούλισσα.

Κατόπιν, έγινε από την πατούλισσα του α' Ηρόντη Γεώργιου που δίστηρε να παραδίδει
παραδίδει σε άλλη απόγονη την ίδια την πατούλισσα.

Τέλος, της δίδισε σε παραδίδει σε άλλη απόγονη την ίδια την πατούλισσα.

**Αφιερώνεται στο Βασίλη
και στη Δήμητρα**



Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Πρώτα απόλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ^ο Βρόντο Ιωάννη που δέχτηκε να αναλάβει καθήκοντα επιβλέποντος καθηγητή και πρώτου βαθμολογητή της εργασίας αυτής. Τον ευχαριστώ για την καθοδήγηση που μου προσέφερε και για τις υποδείξεις που μου έκανε κατά τη συγγραφή της διατριβής μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ^ο Τζαβαλή Ηλία, που δέχτηκε να αναλάβει καθήκοντα δεύτερου βαθμολογητή της εργασίας αυτής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και τον άντρα μου για την οικονομική και ηθική υποστήριξη που μου πρόσφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2.1 Εισαγωγή στην επικονιασμένη αυτοπαλίνδρομη επεξεργασία.....	3
2.2 Κατάλογος των παραπομπών στην επεξεργασία.....	3
2.3 Η επικονιασμένη αυτοπαλίνδρομη επεξεργασία.....	3
Κατάλογος διαγραμμάτων.....	3
Κατάλογος πινάκων.....	4
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	6
1.1 Ορισμοί.....	8
1.2 Τα κυριότερα χαρακτηριστικά των δεδομένων.....	8
1.3 Μονομεταβλητά μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας..... (Η έννοια της αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας)	13
1.3.1 Ορισμός της διαδικασίας ARCH.....	13
1.3.2 Γενικευμένη αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα..	15
1.3.3 Ιδιότητες των ARCH μοντέλων.....	17
1.4 Ερμηνείες των ARCH μοντέλων.....	20
1.4.1 Ερμηνεία του τυχαίου συντελεστή (Random Coefficient)...	20
1.4.2 Ερμηνεία του μη-γραμμικού υποδείγματος.....	21
1.5 Προεκτάσεις του υποδείγματος.....	23
1.5.1 Το μοντέλο EGARCH.....	24
1.5.2 Τα μοντέλα GARCH in the mean.....	25
1.5.3 Το μοντέλο TGARCH.....	27
1.5.4 Το μοντέλο PGARCH.....	27
1.5.5 Το μοντέλο GJR (p,q).....	28
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	29

2. ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ..	31
2.1 Η κατανομή Student-t.....	32
2.2 Κατανομή γενικευμένου σφάλματος.....	32
2.3 Double exponential κατανομή.....	33
2.4 Η ασύμμετρη κατανομή t.....	33
2.5 Έλεγχος για ARCH επιδράσεις και εξειδίκευσης του μοντέλου..	34
3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ GARCH ΜΟΝΤΕΛΩΝ...	37
3.1 Μέθοδοι εκτίμησης των μοντέλων GARCH.....	37
3.2 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας.....	38
3.3 Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών GARCH μοντέλων.....	40
4. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ..	43
4.1 Εισαγωγή.....	43
4.2 Ορισμοί.....	44
4.3 VECM και DVECM μοντέλο.....	45
4.4 Επίλογος.....	48
5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ..	49
5.1 Εφαρμογή μονομεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας..	49
5.1.1 Εφαρμογή σε μία σειρά αποδόσεων.....	50
5.1.1.1 Περιγραφή δεδομένων και ανάλυσή τους.....	50
5.2 Εφαρμογή πολυμεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας..	61
5.2.1 Εφαρμογή σε τέσσερις σειρές αποδόσεων.....	61
5.2.1.1 Περιγραφή δεδομένων και ανάλυσή τους.....	61
5.3 Συμπεράσματα.....	69
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	70

Κατάλογος διαγραμμάτων

Μονομεταβλητή περίπτωση	
1) Ημερήσιες αποδόσεις αμοιβαίων κεφαλαίων.....	50
2) Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (acf) των αποδόσεων και των τετραγώνων αυτών.....	51
3) Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των ϵ_t και σ_t για μια ARCH(1) διαδικασία.....	52
4) Κανονικό QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.....	55
5) ACF των τετραγωνικών τυποποιημένων καταλοίπων.....	55
6) Ημερήσιες αποδόσεις της σειράς και δεσμευμένη τυπική απόκλιση...	56
7) Student-t QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.....	58
8) Σύγκριση των ACF των τετραγωνικών τυποποιημένων καταλοίπων....	59
9) Σύγκριση των QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.....	59
Πολυμεταβλητή εφαρμογή	
10) ACF της πολυμεταβλητής σειράς.....	61
11) QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.....	64
12) Πολυμεταβλητή δεσμευμένη διακύμανση.....	64
13) Σύγκριση των QQ-plot χρησιμοποιώντας την κανονική και την Student-t κατανομή.....	68

Κατάλογος πινάκων

Μονομεταβλητή εφαρμογή

1. Περιγραφικά στοιχεία των ημερήσιων αποδόσεων της σειράς...	51
2. Έλεγχος για ARCH επιδράσεις.....	52
3. Εκτίμηση ενός GARCH (1,1).....	53
4. Έλεγχος κανονικότητας.....	54
5. Έλεγχος αυτοσυσχέτισης Ljung-Box.....	56
6. Κριτήρια επιλογής των GARCH μοντέλων.....	58

Πολυμεταβλητή εφαρμογή

7. Εκτίμηση του DVEC (1,1) μοντέλου.....	62
8. Έλεγχος κανονικότητας.....	63
9. Έλεγχος αυτοσυσχέτισης.....	65
10. Έλεγχος για ARCH επιδράσεις.....	65
11. Κριτήρια επιλογής των GARCH μοντέλων.....	66

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σημαντική αναγκαιότητα της χρήσης της οικονομετρίας στη χρηματοοικονομική θεωρία –περισσότερο από άλλους κλάδους της οικονομικής επιστήμης- πηγάζει από το γεγονός ότι η αβεβαιότητα και ο κίνδυνος διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη χρηματοοικονομική θεωρία και τις εφαρμογές της. Καθώς οι οικονομολόγοι και οικονομέτρες ερευνητές αναζητούσαν νέες, βελτιωμένες τεχνικές που θα λαμβάνουν υπόψιν τους τον κίνδυνο και την αβεβαιότητα, στράφηκαν στην υπόθεση της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας, δηλαδή στην υπόθεση των χρονικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Σημαντικό εργαλείο προς την κατεύθυνση αυτή αποτελεί το μοντέλο της μεταβαλλόμενης δεσμευμένης διακύμανσης το οποίο πρώτος εισήγαγε ο Engle (1982). Στα ARCH μοντέλα γίνεται διάκριση μεταξύ των δεσμευμένων και μη δεσμευμένων ροπών δεύτερης τάξης. Η μη δεσμευμένη διακύμανση μιας χρονολογικής σειράς μπορεί να είναι σταθερή ως προς το χρόνο, άλλα η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να εξαρτάται από στοιχεία του παρελθόντος.

Το μονομεταβλητό μοντέλο αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (autoregressive conditional heteroskedasticity model ή ARCH), που πρώτος εισήγαγε ο Engle (1982), είναι πολύ δημοφιλές για τη μοντελοποίηση των χρηματοοικονομικών σειρών και πάνω σε αυτό το μοντέλο έχουν βασιστεί πολλά άλλα μονομεταβλητά μοντέλα που προτάθηκαν τα επόμενα χρόνια. Το κύριο χαρακτηριστικό των ARCH μοντέλων είναι ότι η μη δεσμευμένη διακύμανση της διαδικασίας είναι σταθερή, άλλα η δεσμευμένη διακύμανση δεν είναι σταθερή.

Η επέκταση των μονομεταβλητών τύπου ARCH μοντέλων σε ένα πολυμεταβλητό πλαίσιο και η εκτίμηση των χρονικά μεταβαλλόμενων συνδιακυμάνσεων μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, είναι σημαντικά συστατικά της διαδικασίας τιμολόγησης των χρηματοοικονομικών στοιχείων, της διαχείρισης κινδύνου και της ανάλυσης αμοιβαίων κεφαλαίων.

Στην παρούσα εργασία γίνεται παρουσίαση των κυριότερων μονομεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας και μια αναφορά στα πολυμεταβλητά μοντέλα και κυρίως στο DVEC μοντέλο. Στη συνέχεια γίνεται εφαρμογή τόσο στα μονομεταβλητά όσο και στα πολυμεταβλητά μοντέλα. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εφαρμογή αυτή υποδεικνύουν σημαντικά οφέλη από την υπόθεση μιας χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρηματοοικονομική θεωρία είναι το κομμάτι εκείνο της οικονομικής θεωρίας και των κοινωνικών επιστημών, εν γένει, με το μεγαλύτερο εύρος εφαρμογών. Αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό γιατί οι χρηματαγορές δεν είναι αφορημένη επιστημονική έννοια, αλλά αποτελούν ένα πρακτικό μέρος της οικονομικής ζωής και διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη σταθερότητα και την ανάπτυξη της παγκόσμιας οικονομίας. Επομένως, παρότι μερικά θέματα της επιστημονικής βιβλιογραφίας που αφορούν τη χρηματοοικονομική θεωρία φαίνονται εκ πρώτης όψεως πρακτικώς ανεφάρμοστα, εντούτοις, παίζουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία κατάλληλων χρηματοοικονομικών υποδειγμάτων.

Από την άλλη μεριά, η πρακτική φύση της χρηματοοικονομικής θεωρίας δεν μπορεί να υποκαταστήσει την έλλειψη της μεθόδου του πειράματος η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη στις φυσικές επιστήμες. Συνεπώς η πρωταρχική πηγή συμπερασμάτων για έναν οικονομολόγο που ασχολείται με τη χρηματοοικονομική θεωρία είναι η στατιστική μελέτη οικονομικών μοντέλων, δηλαδή η χρηματοοικονομική θεωρία. Η σημαντική αναγκαιότητα της χρήσης της οικονομετρίας στη χρηματοοικονομική θεωρία –περισσότερο από άλλους κλάδους της οικονομικής επιστήμης– πηγάζει από το γεγονός ότι η αβεβαιότητα και ο κίνδυνος διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη χρηματοοικονομική θεωρία και τις εφαρμογές της. Οι βασικές μορφές αβεβαιότητας αφορούν την αβεβαιότητα στη συμπεριφορά των επενδυτών και κυρίως των τιμών. Ωστόσο, μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του '80, τα κλασικά οικονομετρικά μοντέλα χρονολογικών σειρών δεν έδιναν μεγάλη προσοχή στο στοιχείο του κινδύνου. Το ενδιαφέρον των ερευνητών κατά τη μοντελοποίηση των χρονολογικών σειρών, επικεντρωνόταν στις υπό συνθήκη πρώτες ροπές, ενώ κάθε ένδειξη εξάρτησης σε μεγαλύτερες ροπές, αντιμετωπίζονταν ως θόρυβος. Έτσι η υπόθεση ότι μόνο ο μέσος μεταβάλλεται και η διακύμανση και συνδιακύμανση παραμένουν σταθερές στο χρόνο, είναι μη ρεαλιστική αφού στην πράξη κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Και αυτό γιατί είναι γνωστό ότι στις χρηματοοικονομικές αγορές, μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές. Με άλλα λόγια οι χρηματοοικονομικές αγορές παρουσιάζουν κάποιες χρονικές περιόδους μεγαλύτερη μεταβλητότητα και κάποιες άλλες χρονικές περιόδους μικρότερη μεταβλητότητα.

Καθώς οι οικονομολόγοι και οικονομέτρες ερευνητές αναζητούσαν νέες, βελτιωμένες τεχνικές που θα λαμβάνουν υπόψιν τους τον κίνδυνο και την αβεβαιότητα, στράφηκαν στην υπόθεση της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας, δηλαδή στην υπόθεση των χρονικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Σημαντικό εργαλείο προς την κατεύθυνση αυτή αποτελεί το μοντέλο χρονικά μεταβαλλόμενης διακύμανσης το οποίο πρώτος εισήγαγε ο Engle (1982). Στα ARCH



μοντέλα γίνεται διάκριση μεταξύ των δεσμευμένων και μη δεσμευμένων ροπών δεύτερης τάξης. Η μη δεσμευμένη διακύμανση μιας χρονολογικής σειράς μπορεί να είναι σταθερή ως προς το χρόνο, αλλά η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να εξαρτάται από στοιχεία του παρελθόντος. Έτσι το να κατανοήσουμε την ακριβή φύση αυτής της εξάρτησης είναι σημαντικό για πολλά θέματα της χρηματοοικονομικής όπως είναι και τα αμοιβαία κεφάλαια.



1.1 Ορισμοί

Έστω ότι $\{\varepsilon_t(\theta)\}$ συμβολίζει μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου με υπό συνθήκη συναρτήσεις μέσου και διακύμανσης που παραμετροποιούνται από το διάνυσμα πεπερασμένης διάστασης $\theta \in \Theta \subseteq R^n$, με θ_0 να συμβολίζει την πραγματική του τιμή. Επίσης, έστω ότι $E_{t-1}(\cdot)$ συμβολίζει τη μαθηματική ελπίδα της διαδικασίας, δεσμευμένη ως προς το παρελθόν, δηλαδή δεσμευμένη ως προς την πληροφορία που είναι διαθέσιμη τη χρονική στιγμή $t-1$.

Η διαδικασία $\{\varepsilon_t(\theta_0)\}$ ακολουθεί ένα ARCH μοντέλο, αν ο δεσμευμένος μέσος ισούται με το μηδέν :

$$E_{t-1}(\varepsilon_t(\theta_0))=0, \text{ για } t=1,2,\dots,T$$

και η δεσμευμένη διακύμανση η οποία είναι η εξής:

$$\sigma_{\varepsilon_t(\theta_0)}^2 \equiv \text{Var}_{t-1}(\varepsilon_t(\theta_0)) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2(\theta_0)), \quad t=1,2,\dots,T \quad (1)$$

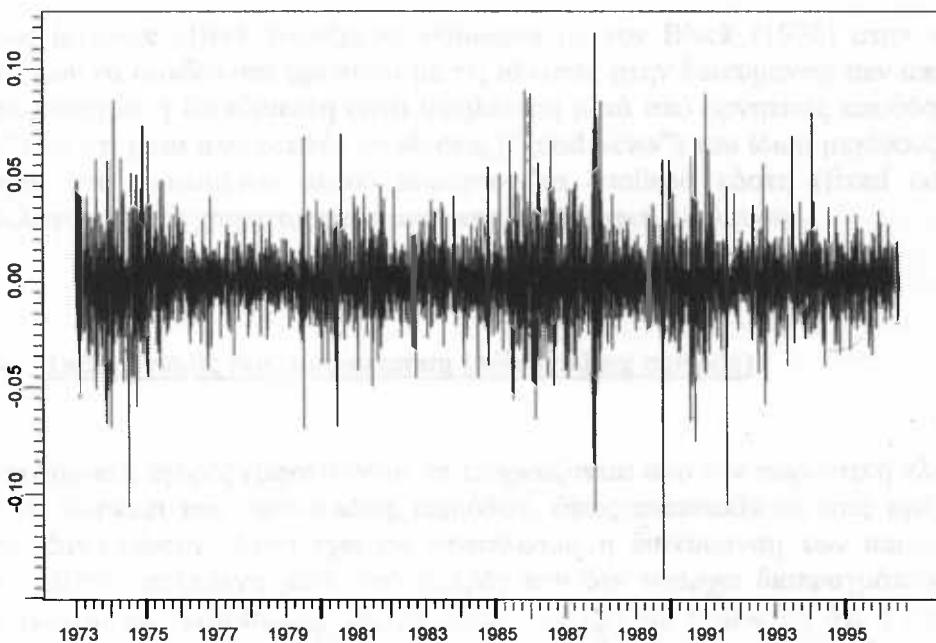
εξαρτάται από τις προηγούμενες παρατηρήσεις.

1.2 Κυριότερα χαρακτηριστικά των δεδομένων (stylized facts)

Με βάση την εξίσωση (1) μπορούν να δημιουργηθούν πλήθος συναρτησιακών μορφών μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας. Έτσι για να ελπίζουμε ότι κάθε φορά επιλέγουμε το σωστό μοντέλο, πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που συλλαμβάνουν τα ARCH μοντέλα. Κάποια από τα κύρια χαρακτηριστικά των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων είναι τα παρακάτω:

↳ Volatility clustering φαινόμενο

Κάτι που έχει παρατηρηθεί στις χρονολογικές σειρές χρηματοοικονομικών στοιχείων είναι ότι έχουν περιόδους όπου η volatility είναι χαμηλή και άλλες περιόδους όπου η volatility είναι υψηλή. Δηλαδή μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές (είτε θετικές είτε αρνητικές) και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να γίνει σαφές μέσα από το διάγραμμα των αποδόσεων ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου στο χρόνο. Για παράδειγμα έχουμε το παρακάτω διάγραμμα :



Διάγραμμα 1.1: ημερήσιες αποδόσεις μετοχών

Στο διάγραμμα αυτό βλέπουμε περιόδους με μικρή μεταβλητότητα και περιόδους με μεγάλη μεταβλητότητα να διαδέχονται η μία την άλλη. Να σημειώσω ότι το διάγραμμα παρουσιάζει τις ημερήσιες αποδόσεις μιας μετοχής για την περίοδο 02/01/1973 έως 23/07/1996.

↳ Παχιές ουρές (fat tails)

Η ακριβής κατανομή των αποδόσεων παραμένει αναπάντητο ερώτημα. Οι κατανομές των αποδόσεων παρουσιάζουν χαρακτηριστικά μη-κανονικής κατανομής. Έτσι ένα δεύτερο χαρακτηριστικό των οικονομικών αποδόσεων είναι ότι αυτές συχνά παρουσιάζουν λεπτοκύρτωση που σημαίνει ότι η κατανομή των αποδόσεων έχει παχιές ουρές. Δηλαδή η κύρτωση αυτών είναι μεγαλύτερη από 3 (αυτής της κανονικής κατανομής) που σημαίνει ότι ακραίες τιμές παρατηρούνται πιο συχνά από την κανονική κατανομή. Εκτός από τις παχιές ουρές οι αποδόσεις παρουσιάζουν και ασυμμετρία.

↳ Το φαινόμενο της μόχλευσης (leverage effect)

Ο όρος leverage effect αναφέρεται σύμφωνα με τον Black (1976) στην τάση των αποδόσεων να συνδέονται αρνητικά με τις αλλαγές στην διακύμανση των αποδόσεων. Για παράδειγμα η διακύμανση είναι υψηλότερη μετά από αρνητικές αποδόσεις (“bad news”) απ’ ότι μετά από θετικές αποδόσεις (“good news”) του ίδιου μεγέθους. Μερική εξήγηση του φαινομένου αυτού παρέχουν τα σταθερά κόστη (fixed costs) στις συναλλαγές όπως η χρηματοοικονομική και λειτουργική μόχλευση.

↳ Ημέρες χωρίς διαπραγμάτευση (non-trading periods)

Οι οικονομικές αγορές εμφανίζονται να επηρεάζονται από την σωρευτική πληροφορία κατά τη διάρκεια των non-trading περιόδων, όπως αντανακλάται στις τιμές όταν οι αγορές ξανανοίγουν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διακύμανση των αποδόσεων να παρουσιάζεται αυξημένη μετά από ημέρες που δεν υπάρχει διαπραγμάτευση. Αυτό είναι γνωστό ως “non-trading period effect”. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διακύμανση των αποδόσεων δεν είναι ανάλογη της διάρκειας κλεισίματος της αγοράς και μάλιστα σύμφωνα με τον Fama (1965) και French και Roll (1986) η πληροφορία συσσωρεύεται με μικρότερο ρυθμό όταν οι αγορές είναι κλειστές απ’ ότι όταν είναι ανοιχτές. Κατά συνέπεια οι διακυμάνσεις είναι υψηλότερες μετά από τα σαββατοκύριακα και τις αργίες απ’ ότι είναι τις υπόλοιπες μέρες.

↳ Συμμεταβολές στις μεταβλητότητες (co-movements in volatilities)

Είναι γενικά παραδεκτό, από ότι έχει παρατηρηθεί, ότι οι μεταβολές στις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών σειρών κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι όταν παρατηρείται μία μεγάλη (ή μικρή) διακύμανση σε μία σειρά, αυτό μπορεί να επηρεάζει και τις άλλες σειρές. Έτσι οι Diebold και Nerlove (1989) υποστηρίζουν ότι υπάρχουν κάποιοι κοινοί παράγοντες που ερμηνεύουν τις κινήσεις της μεταβλητότητας των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Αυτό το φαινόμενο της συμμεταβολής παρατηρείται όχι μόνο μεταξύ των χρηματοοικονομικών στοιχείων μιας σειράς αλλά και μεταξύ διαφορετικών αγορών.

♦ Προβλέψιμα γεγονότα (forecastable events)

Οι προβλέψιμες ανακοινώσεις πληροφορίας σχετίζονται με υψηλότερη μεταβλητότητα. Παράδειγμα, συνήθως η μεταβλητότητα της απόδοσης μιας μετοχής είναι μεγαλύτερη γύρω από τις ημερομηνίες ανακοίνωσης της διανομής μερίσματος.

Έτσι λόγω της αυξημένης σημασίας που παίζει ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα στη μοντέρνα οικονομική θεωρία αλλά και για να ξεπεραστούν τα παραπάνω εμπόδια, ήταν αναγκαία η ανάπτυξη νέων οικονομετρικών τεχνικών οι οποίες θα μοντελοποιούν το μέσο, τη διακύμανση και τη συνδιακύμανση. Έτσι έχουμε τα ARMA μοντέλα τα οποία μοντελοποιούν το μέσο και τα ARCH μοντέλα τα οποία μοντελοποιούν τη διακύμανση. Τα ARCH μοντέλα είναι αυτά που χρησιμοποιούνται ευρέως για την περιγραφή και την πρόβλεψη των αλλαγών της μεταβλητότητας στις οικονομικές χρονολογικές σειρές.

Οι ρίζες της μεθοδολογίας των υποδειγμάτων αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ή ARCH) αναζητούνται στις αρχές του αιώνα μας στα συγγράμματα του Bachelier (1900), ο οποίος πρώτος έγραψε για τη συμπεριφορά των κερδοσκοπικών τιμών. Τελικά η αφετηρία μιας συστηματικής προσπάθειας να δημιουργηθούν οικονομετρικά υποδείγματα συμβατά με τα παραπάνω χαρακτηριστικά έγινε με βάση το άρθρο του Engle (1982). Σε αντίθεση με το γεγονός της σύντομης ιστορίας τους, τα υποδείγματα ARCH κατάφεραν να προσελκύσουν το έντονο ενδιαφέρον της διεθνούς βιβλιογραφίας. Οι εφαρμογές τους προέρχονται στο μεγαλύτερο μέρος, από εμπειρική κυρίως παρατήρηση αλλά και από θεωρητική τεκμηρίωση. Πριν από την εισαγωγή των ARCH, οι ερευνητές είχαν συνειδητοποιήσει τις μεταβολές της διακύμανσης, αλλά χρησιμοποιούσαν μη συστηματικές μεθόδους για να συλλάβουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, ο Mandelbrot (1963a) χρησιμοποίησε τη μέθοδο των διαδοχικών εκτιμητών (recursive estimates) της διακύμανσης και ο Klien (1977) υπολόγισε τους κινητούς μέσους εκτιμητές διακύμανσης. Το υπόδειγμα του Engle (1982) ήταν τελικά αυτό που κατάφερε να ανταποκριθεί στα κυριότερα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιοι λόγοι χρήσης των πιο πάνω υποδειγμάτων και στη συνέχεια το υπόδειγμα ARCH και κάποιες παραλλαγές (επεκτάσεις) αυτού. Τα υποδείγματα μεταβαλλόμενης δεσμευμένης διακύμανσης χρησιμοποιούνται για τους παρακάτω λόγους:

1. Μοντελοποιούμε καλύτερα το ρίσκο (διακύμανση) μιας χρονολογικής σειράς
2. Παίρνουμε πιο καλές εκτιμήσεις και προβλέψεις ενός υποδείγματος αφού μοντελοποιούμε την μεταβαλλόμενη διακύμανση
3. Κατασκευάζουμε πιο ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης

4. Μπορούν να συλλάβουν την επιπλέον κύρτωση στα χρηματοοικονομικά δεδομένα, γιατί τα ARCH παρουσιάζουν κύρτωση μεγαλύτερη από 3, όπου η χρήση της κανονικής κατανομής στην περίπτωση αυτή δεν είναι η πιο κατάλληλη

5. Τα μοντέλα αυτά λαμβάνουν υπόψη τα clustered errors και τη μη-γραμμικότητα της σειράς καθώς στα ARCH μοντέλα η προβλεπόμενη διακύμανση μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο

6. Τα μοντέλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στη χρηματοοικονομική θεωρία. Τα χαρτοφυλάκια των χρηματοοικονομικών στοιχείων κατασκευάζονται με βάση τις αναμενόμενες αποδόσεις και τις διακυμάνσεις των αποδόσεων. Έτσι κάθε αλλαγή στη ζήτηση των χρηματοοικονομικών στοιχείων θα συνδέεται με αλλαγές στις αναμενόμενες αποδόσεις και τις διακυμάνσεις των αποδόσεων. Αν υποθέσουμε ότι η μέση τιμή ακολουθεί ένα τυπικό μοντέλο παλινδρόμησης ή χρονολογικής σειράς, η διακύμανση περιορίζεται να είναι σταθερή στο χρόνο. Η χρήση μιας εξωγενούς μεταβλητής για την ερμηνεία των αλλαγών στη διακύμανση συνήθως δεν είναι κατάλληλη σε εμπειρικές εφαρμογές.

7. Το ARCH μοντέλο παλινδρόμησης αποτελεί προσέγγιση μιας πιο σύνθετης παλινδρόμησης που περιλαμβάνει non-ARCH διαταραχές. Στην περίπτωση αυτή η ARCH εξειδίκευση μπορεί να συλλαμβάνει την επίδραση των μεταβλητών που παραλείπονται από το εκτιμώμενο μοντέλο. Έτσι αν υπάρχει λανθασμένη παράλειψη επεξηγηματικών μεταβλητών ή παράλειψη δομικών αλλαγών, τα ARCH μοντέλα αποτελούν την καλύτερη επιλογή για την προσέγγιση της πραγματικότητας.

8. Τέλος τα ARCH μοντέλα είναι γνωστά για την επιτυχία τους λόγω της απλότητας και της ευκολίας στη χρήση τους.

1.3 Μονομεταβλητά μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας

Η έννοια της αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας

Τα μοντέλα αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (ARCH) έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στην ανάλυση χρονολογικών σειρών και συγκεκριμένα στην ανάλυση του ρίσκου ενός στοιχείου. στην εκτίμηση της τιμής ενός option, στην πρόβλεψη χρονικών διαστημάτων εμπιστοσύνης και στην παροχή αποτελεσματικών εκτιμητών κάτω από την ύπαρξη της ετεροσκεδαστικότητας.

1.3.1 Ορισμός της διαδικασίας ARCH

Ας θεωρήσουμε μία μονομεταβλητή χρονολογική σειρά y_t . Αν ψ_{t-1} είναι η διαθέσιμη πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή $t-1$, μπορούμε να την γράψουμε ως εξής:

$y_t = E[y_t | \psi_{t-1}] + \varepsilon_t = \mu + \varepsilon_t$, όπου $E[\cdot | \cdot]$ δηλώνει την αναμενόμενη δεσμευμένη τιμή της y_t και ε_t είναι ο διαταρακτικός όρος (ή το απρόβλεπτο μέρος) για το οποίο ισχύει $E(\varepsilon_t) = 0$ και $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s$, δηλαδή τα σφάλματα έχουν μέσο μηδέν και είναι ασυγχέτιστα μεταξύ τους.

Υποθέτουμε ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτου βαθμού AR(1) $y_t = \alpha y_{t-1} + u_t$, όπου u_t είναι λευκός θόρυβος με διακύμανση $V(u_t) = \sigma^2$, με μη-δεσμευμένο μέσο των y_t ίσο με μηδέν, ενώ ο δεσμευμένος μέσος είναι αy_{t-1} . Έχει μη-δεσμευμένη διακύμανση $V(u_t) = \sigma^2 / (1 - \alpha^2)$ και δεσμευμένη $V(y_t | y_{t-1}) = \sigma^2$. Έτσι η διακύμανση του μοντέλου αυτού είναι και στις δύο περιπτώσεις σταθερή. Για να μοντελοποιήσουμε τη διακύμανση που δεν είναι σταθερή στο χρόνο, ένα φαινόμενο γνωστό ως ετεροσκεδαστικότητα, η προσέγγιση που δόθηκε από τον Engle ήταν να προτείνει το ακόλουθο μοντέλο:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (1)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 \quad (2)$$

όπου $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση ίση με 1, και σ_t είναι μια θετική μετρήσιμη συνάρτηση του ψ_{t-1} , που είναι η διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο $t-1$. Το μοντέλο έτσι όπως ορίζεται από τις σχέσεις (1),(2) είναι γνωστό σαν ένα μοντέλο “αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας”.

Η συνάρτηση διακύμανσης που περιγράφεται από την (2) μπορεί να γενικευτεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει πληροφορία πολύ πίσω από μία περίοδο. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$\sigma_t^2 = h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}, a) \quad (3)$, όπου p είναι η τάξη της ARCH διαδικασίας και a είναι ένα διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων. Έτσι το πρώτο μοντέλο που παρουσιάστηκε στις (1),(2) είναι μια πρώτης τάξης ARCH διαδικασία όπου το διάνυσμα των άγνωστων

παραμέτρων είναι $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1]$. Για να παρουσιάσουμε μία παλινδρόμηση του ARCH μοντέλου, υποθέτουμε ότι ο μέσος του y_t είναι ένας γραμμικός συνδυασμός από υστερημένες μεταβλητές που περιλαμβάνονται στο σετ πληροφοριών το χρόνο $t-1$. Για παράδειγμα $E(y_t) = x_t\beta$, όπου β είναι διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων. Έτσι η σχέση (3) μπορεί να γραφτεί στην γενική της μορφή ως:

$$\sigma_t^2 = h(\psi_{t-1}, a)$$

Παρόλα αυτά, μία λιγότερο εκτεταμένη γενίκευση είναι αρκετή να περιγράψει το μοντέλο. Οπότε το μοντέλο παλινδρόμησης μπορεί να γραφτεί όπως παρακάτω

$$y_t \mid \Psi_{t-1} \sim N(x_t\beta, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, a),$$

$$y_t = x_t\beta + \varepsilon_t$$

Στην βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει μεγάλο αριθμό ARCH μοντέλων τα οποία εισήχθησαν για να περιγράψουν τα χαρακτηριστικά των οικονομικών αγορών. Μια ARCH διαδικασία σύμφωνα με τον Engle (1982) είναι κάθε $\{\varepsilon_t\}$ της μορφής

$$\varepsilon_t = z_t\sigma_t$$

όπου z_t είναι ανεξάρτητη και ισόνομα κατανεμημένη διαδικασία με $E(z_t) = 0$, $Var(z_t) = 1$ και όπου σ_t είναι μια θετική μετρήσιμη συνάρτηση του ψ_{t-1} . Εξ' ορισμού τα ε_t είναι αυσυχέτιστα με μέσο μηδέν αλλά με δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 η οποία μπορεί να αλλάζει στο χρόνο.

Έτσι σύμφωνα με τον Engle (1982) ένα ARCH(q) μοντέλο δίνεται από την :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma_t^2 = a_0 + a(L) \varepsilon_t^2$$

όπου L είναι ο δείκτης χρονικής υστέρησης.

Για να είναι καλά ορισμένο ένα ARCH μοντέλο και η δεσμευμένη διακύμανση να είναι θετική πρέπει οι παράμετροι να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Έτσι για να έχουμε $\sigma_t^2 > 0$ πρέπει:

$$a_0 > 0 \text{ και}$$

$$a_i > 0, \text{ για κάθε } i=1, \dots, q$$

Είδαμε προηγουμένως ότι η διακύμανση μπορεί να γραφτεί και ως $\sigma_t^2 = a_0 + a(L)\varepsilon_t^2$, όπου $a(L) = a_1L + a_2L^2 + \dots + a_qL^q$.

Ορίζοντας $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, το μοντέλο μπορεί να πάρει τη μορφή $\varepsilon_t^2 = a_0 + a(L)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t$, όπου v_t ασυσχέτιστα με $E_{t-1}(v_t)=0$, αλλά όχι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα.

Επειδή $E_{t-1}(v_t)=0$, το ARCH(q) μοντέλο παρουσιάζεται ως μια AR(q) διαδικασία των τετραγωνικών σφαλμάτων, ε_t^2 . Η παραπάνω διαδικασία είναι στάσιμη αν και μόνο αν το άθροισμα των θετικών παραμέτρων είναι μικρότερο από 1. Έτσι, αν η διαδικασία είναι στάσιμη, η μη δεσμευμένη διακύμανση αυτής είναι:

$$V(\varepsilon_t) \equiv \sigma^2 = a_0(1 - \sum_{i=1}^q (a_i))^{-1} = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_q}$$

Η κύρτωση για την ARCH(1) διαδικασία με δεσμευμένη κανονική κατανομή των καταλοίπων είναι :

$$E(\varepsilon_t^4) / E(\varepsilon_t^2)^2 = \frac{3(1 - a_1^2)}{1 - 3a_1^2}, \text{ αν } 3a_1^2 < 1$$

Δηλαδή, η κύρτωση μιας ARCH διαδικασίας είναι μεγαλύτερη από 3, την κύρτωση μιας διαδικασίας που ακολουθεί η κανονική κατανομή. Επομένως μια ARCH διαδικασία έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή.

1.3.2 Γενικευμένη αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

Από εμπειρικές εφαρμογές του ARCH(q) μοντέλου έχει διαπιστωθεί ότι απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός χρονικών υστερήσεων της σειράς $\{\varepsilon_t\}$ στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης. Επίσης ο αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν είναι πολύ μεγάλος. Για να παρακάμψει τα παραπάνω προβλήματα ο Bollerslev (1986) πρότεινε μια γενίκευση της ARCH διαδικασίας, το γενικευμένο ARCH ή GARCH(p, q) μοντέλο (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model) :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2) \\ &= a_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\sigma_t^2 \end{aligned}$$

όπου $A(L) = a_1L + \dots + a_qL^q$

$B(L) = \beta_1L + \dots + \beta_pL^p$

Για να είναι καλά ορισμένη η δεσμευμένη διακύμανση πρέπει:

- $p \geq 0$
- $q \geq 0$
- $a_0 > 0$
- $a_i \geq 0$ για κάθε $i=1,\dots,q$
- $b_j \geq 0$ για κάθε $j=1,\dots,p$

Για $p=0$, προκύπτει μια ARCH(q) διαδικασία ενώ για $p=q=0$ η $\{\varepsilon_t\}$ είναι λευκός θόρυβος.

Σύμφωνα με τους Nelson και Cao (1992), οι παράμετροι πρέπει να είναι μη-αρνητικοί. Εξασφαλίζοντας ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $B(L)=1$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και τα πολυώνυμα $1-B(L)$ και $A(L)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, ο περιορισμός της θετικότητας ικανοποιείται αν όλοι οι συντελεστές της άπειρης σειράς $A(L)/1-B(L)$ είναι μη αρνητικοί. Για παράδειγμα στο GARCH (1,2) οι συνθήκες της μη-αρνητικότητας είναι ότι $a_0 \geq 0$, $0 \leq b_1 < 1$, $a_1 \geq 0$ και $b_1 a_1 + a_2 \geq 0$.

Στο GARCH (2,1) μοντέλο οι αναγκαίες συνθήκες είναι : $a_0 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $b_1 + b_2 < 1$ και $b_1^2 + 4b_2 \geq 0$. Στην ARCH (q) διαδικασία η δεσμευμένη διακύμανση ορίζεται σαν μια γραμμική συνάρτηση των υστερήσεων των τετραγώνων των όρων της διαδικασίας σφαλμάτων, ενώ στην GARCH (p,q) διαδικασία, η δεσμευμένη διακύμανση είναι συνάρτηση τόσο των υστερήσεων των τετραγώνων των όρων της διαδικασίας σφαλμάτων όσο και των υστερήσεων της σειράς των δεσμευμένων διακυμάνσεων.

Τέλος, όπως ένα ARCH (q) μοντέλο μπορεί να εκφραστεί σαν ένα AR μοντέλο των τετραγωνικών καταλοίπων, έτσι και το GARCH (p,q) μοντέλο μπορεί να παρουσιαστεί ως μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία κινητού μέσου στα τετραγωνικά σφάλματα των τάξεων $\max(p,q)$ και p [$\text{ARMA}(\max(p,q),p)$] αντίστοιχα :

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \varepsilon_{t-j}^2) - \sum_{j=1}^p (b_j v_{t-j}) + v_t$$

Το μοντέλο είναι δεύτερης τάξης στάσιμο αν οι ρίζες του $A(L)+B(L)=1$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου ή ισοδύναμα αν $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1$.

Η μη δεσμευμένη διακύμανση είναι ίση με :

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^q a_i - \sum_{j=1}^p b_j}$$

Ωστόσο, στην πλειοψηφία των εμπειρικών εφαρμογών η εκτίμηση για το $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j$, δείχνει ότι είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Ένα τέτοιο μοντέλο όπου το $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j$

είναι μονάδα, αναπτύχθηκε από τους Engle και Bollerslev (1986) και ονομάστηκε Integrated GARCH (IGARCH) μοντέλο:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i L^i \varepsilon_t^2 + \sum_{j=1}^p b_j L^j \sigma_t^2, \quad \text{για} \quad \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j = 1$$

όπου L είναι ο δείκτης υστέρησης. Το πολυώνυμο $\sum_{i=1}^q a_i L^i + \sum_{j=1}^p b_j L^j = 1$, έχει $d > 0$ μοναδιαίες ρίζες και $\max(p,q)-d$ ρίζες έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Επιπλέον ο Nelson (1990a) έδειξε ότι το GARCH (1,1) είναι αυστηρά στάσιμο αν και μόνο αν $a_1+b_1>1$, καθώς $E(\log(b_1+a_1 z_t^2)) < 0$. Έτσι, η δεσμευμένη διακύμανση στο IGARCH (1,1) με $a_0=0$, τείνει στο μηδέν σχεδόν σίγουρα, και στο IGARCH (1,1) με $a_0>0$ είναι αυστηρά στάσιμη. Επομένως, μια διαδικασία η οποία είναι ολοκληρωμένη στο μέσο δεν είναι στάσιμη σε κάθε περίπτωση, ενώ μια IGARCH διαδικασία είναι αυστηρά στάσιμη αλλά με μη στάσιμη συνδιακύμανση.

1.3.3 Ιδιότητες των ARCH μοντέλων

Οι μη-δεσμευμένες ροπές των ARCH

Οι ιδιότητες των υποδειγμάτων ARCH που περιγράψαμε παραπάνω συνάγονται από τη μελέτη των μη-δεσμευμένων ροπών τους. Ο Engle (1982) ανάλυσε τις σημαντικότερες ροπές και διατύπωσε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξή τους. Ο Milhoj (1985) εξέτασε πρόσθετες ροπές και ο Bollerslev (1986) επέκτεινε αυτά τα αποτελέσματα για τα μοντέλα GARCH. Η εξαγωγή των μη-δεσμευμένων ροπών του ARCH είναι δυνατή με την εκτεταμένη χρήση του παρακάτω νόμου :

Law of Iterated Expectations (L.I.E)

Αν $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ δύο σύνολα τυχαίων μεταβλητών και για μια τυχαία μεταβλητή τότε :

$$E(y/\Omega_1) = E\{E(y/\Omega_2)/\Omega_1\}$$

Τα Ω_1 και Ω_2 είναι σύνολα πληροφοριών, διαθέσιμων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω νόμου προκύπτει αν θέσουμε $\Omega_1 = \emptyset$ και η οποία εκφράζεται ως εξής :

$$E(y) = E\{E(y/\Omega_2)\}$$

Η έκφραση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί συνδέει μια μη δεσμευμένη ροπή με μια δεσμευμένη και από τη στιγμή που τα ARCH είναι εξειδικευμένα σε όρους δεσμευμένων ροπών, μας προσφέρει τον τρόπο να εξάγουμε τις μη-δεσμευμένες ροπές.

Αρχικά, ας εξετάσουμε τον μη-δεσμευμένο μέσο ενός GARCH (p,q) σφάλματος ε_t , με δεσμευμένη διακύμανση την

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2) \quad (1.3.3)$$

Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω νόμο έχουμε ότι : $E(\varepsilon_t) = E\{E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\}$ και επειδή το υπόδειγμα προβλέπει $E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})=0$ για όλες τις πραγματοποιημένες τιμές του Ψ_{t-1} , αμέσως συνεπάγεται ότι :

$$E(\varepsilon_t) = E\{E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\} = 0$$

δηλαδή η διαδικασία GARCH έχει μηδενικό μέσο.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την μη-δεσμευμένη διακύμανση ενός GARCH (p,q) σφάλματος ε_t . Για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε ένα GARCH (1,1), σημειώνοντας ότι τα αποτελέσματα ισχύουν και γενικά. Αν θέσουμε στη σχέση (1.3.3) $p=q=1$ και αν εφαρμόσουμε τον νόμο L.I.E θα έχουμε :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= E\{E(\varepsilon_t^2 / \Psi_{t-1})\} \\ &= a_0 + a_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + b_1 E(\sigma_{t-1}^2) \\ &= a_0 + (a_1 + b_1) E(\varepsilon_{t-1}^2) \end{aligned}$$

η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση διαφορών στην ακολουθία των διακυμάνσεων. Υποθέτοντας ότι η διαδικασία ζεκίνησε απείρως πίσω στο παρελθόν με μια πεπερασμένη αρχική διακύμανση, η ακολουθία των διακυμάνσεων συγκλίνει στη σταθερά :

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = a_0 / (1 - a_1 - b_1) , \text{ αν } a_1 + b_1 < 1$$

Αντίστοιχα, για το GARCH (p,q) o Bollerslev (1986) έδωσε την παρακάτω ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της σειράς :

$$a(1) + b(1) = \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η διακύμανση ισούται με :

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = a_0 / (1 - a(1) - b(1))$$

Ενώ η διακύμανση του σφάλματος (ε_t) δεσμευμένου στο Ψ_{t-1} αλλάζει καθώς μεταβάλλονται τα στοιχεία του συνόλου πληροφοριών, η μη-δεσμευμένη διακύμανσή

του είναι ομοσκεδαστική. Μια από τις συνεισφορές της μεθοδολογίας ARCH συνίσταται στο αποτέλεσμα ότι οι αλλαγές στη μεταβλητή τα των οικονομικών χρονολογικών σειρών μπορεί να προκύπτουν από ένα συγκεκριμένο τύπο μηγραμμικότητας παρά από μια εξωγενή δομική αλλαγή στη διακύμανση, οπότε είναι δυνατή και η πρόβλεψή τους.

Η φύση της μη-δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας μιας διαδικασίας ARCH αναλύεται από ροπές ανώτερης τάξης. Συγκεκριμένα, η τέταρτη ροπή για το ARCH που περιγράφεται στη σχέση $y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$, μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει :

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_\varepsilon^4} = 3 \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \right) > 3, \text{ αν } 3\alpha_1^2 < 1$$

το οποίο συνεπάγεται ότι έχει πιο παχές ουρές από την κανονική κατανομή. Αυτή η ιδιότητα κάνει ελκυστικά τα ARCH, διότι συνίσταται συνήθως στην κανονική κατανομή πιθανοτήτων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων (Pagan, 1996).

Παραπάνω εξετάσαμε τη μονομεταβλητή κατανομή ενός απλού σφάλματος (ε_t). Οι ροπές της από κοινού κατανομής (joint distribution) των ε_t μας αποκαλύπτουν και άλλες χρήσιμες ιδιότητες των ARCH. Για $\kappa \geq 1$ οι αυτοσυνδιακυμάνσεις (autocovariances) ενός GARCH (p,q) είναι :

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = E\{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} / \Psi_{t-1})\} = E\{\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1})\} = 0$$

Επομένως, η διαδικασία GARCH είναι μη-αυτοσυνχετιζόμενη με σταθερό μέσο μηδέν και ασθενώς στάσιμη, αν υπάρχει η διακύμανση. Μια επίσης αξιοσημείωτη ιδιότητα την οποία ανέδειξε ο Nelson (1990a) για το GARCH (1,1) είναι ότι μπορεί να χαρακτηρίζεται από ισχυρή στασιμότητα (strong stationarity) χωρίς να είναι ασθενώς στάσιμο. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της ασθενούς στασιμότητας, η οποία απαιτεί το μέσο, τη διακύμανση και τις αυτοσυνδιακυμάνσεις να είναι πεπερασμένες και ανεξάρτητες από το χρόνο. Αντίθετα, η ισχυρή στασιμότητα προϋποθέτει ότι η συνάρτηση κατανομής κάθε πεπερασμένου συνόλου των ε_t να είναι αμετάβλητη κάτω από χρονικές μεταβολές, χωρίς να απαιτούνται πεπερασμένες ροπές.

Η έλλειψη αυτοσυνχέτισης είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ARCH, το οποίο τα κάνει κατάλληλα για την υπόδειγματοποίηση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς (Efficient Market Hypothesis) στην ασθενή της μορφή, απαιτεί ότι οι παρελθόντες ρυθμοί απόδοσης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουμε τις προβλέψεις των μελλοντικών ρυθμών απόδοσης.

Το θέμα της εξειδίκευσης της τάξης των χρονικών υστερήσεων (p,q), αντιμετωπίζεται με ανάλογο τρόπο όπως και στη μεθοδολογία των Box-Jenkins, δηλαδή χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αυτοσυνχέτισης και μερικής αυτοσυνχέτισης των τετραγώνων των καταλοίπων, αντί του επιπέδου των καταλοίπων. Στην πράξη, πολύ σπάνια συναντάμε την ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερης τάξης από GARCH (2,1) και GARCH (1,2) ενώ στη συντριπτική πλειοψηφία οι ερευνητές περιγράφουν τα δεδομένα με GARCH (1,1).



1.4 Ερμηνείες των ARCH

Εκτός από την απλότητα, ο κύριος λόγος επιτυχίας των ARCH έγκειται στο ότι ερμηνεύουν πολλές παρατηρούμενες ιδιότητες των δεδομένων όπως παχιές ουρές της κατανομής, η συγκέντρωση μεγάλων και μικρών αποκλίσεων, οι μη γραμμικότητες και οι άλλαγές στη δυνατότητα να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές. Επομένως, δεν είναι παράξενο ότι αυτά τα υποδείγματα επιδέχονται πολλές ερμηνείες, τις βασικότερες από τις οποίες εξετάζουμε στην ενότητα αυτή.

1.4.1 Ερμηνεία του τυχαίου συντελεστή (Random Coefficient)

Στην τελευταία ενότητα τονίσαμε ότι τα ARCH λαμβάνουν υπόψη τους συγκέντρωση μεγάλων και μικρών αποκλίσεων και την υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis), όπως παρατηρούνται σε πολλές χρονολογικές σειρές. Ένα από τα σημαντικότερα μελήματα του Engle όταν εισήγαγε την εν λόγω μεθοδολογία, ήταν η δυνατότητα των οικονομετρών να προβλέψουν τις μελλοντικές μεταβλητότητες από την μία περίοδο στην άλλη. Οι προβλέψεις συνήθως απαιτούν τη χρήση ενός υποδείγματος δεσμευμένου μέσου. Η αβεβαιότητα σχετικά με τον δεσμευμένο μέσο μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή τυχαίου συντελεστή.

Έστω μια διαδικασία AR(1) με τυχαίο αυτοπαλινδρόμο συντελεστή (ϕ_t) :

$$y_t = \phi_t y_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου $\phi_t \sim (\phi, \alpha_1)$ και $\varepsilon_t \sim (0, a_0)$ είναι ανεξάρτητα. Έτσι, $E(y_t / \Psi_{t-1}) = \phi y_{t-1}$ όπως και στην AR(1) με σταθερό συντελεστή. Αντίθετα όμως $Var(y_t / \Psi_{t-1}) = a_0 + a_1 y_{t-1}^2$, έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση $\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$. Με βάση το οικονομετρικό αυτό πλαίσιο για να φτάσουμε σε ένα γενικό ARCH μέσα από την έννοια του τυχαίου συντελεστή, πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^q \phi_i \varepsilon_{t-i} + u_t = \sum_{i=1}^q (\phi_i + \eta_{it}) \varepsilon_{t-i} + u_t \quad (1.4.1)$$

όπου $\eta_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{qt})' \sim (0, A_{qxq})$ και $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ είναι ανεξάρτητα. Άρα η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι :

$$E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \phi' \underline{\varepsilon}_{t-1}$$

όπου $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)'$ και $\underline{\varepsilon}_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})'$

$$Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \underline{\varepsilon}'_{t-1} A \underline{\varepsilon}_{t-1} + \sigma_u^2$$



Αν $A = [a_{ij}]$ είναι μια διαγώνια μήτρα με $A = diag(a_1, \dots, a_q)$ και $\sigma_u^2 = a_0$ τότε :

$$Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

όπως και στη σχέση $\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$. Μια μη-διαγώνια μήτρα A σημαίνει ότι έχουμε μια διαδικασία ARCH με πρόσθετους όρους εκτός κυρίας διαγωνίου μεταξύ των παρελθόντων σφαλμάτων. Το βαθύτερο νόημα της προηγούμενης διαπίστωσης είναι ότι λαμβάνεται υπ' όψη η αλληλεπίδραση μεταξύ των καταλούπων και της δεσμευμένης διακύμανσης. Το υπόδειγμα $Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \underline{\varepsilon}'_{t-1} A \underline{\varepsilon}_{t-1} + \sigma_u^2$, αναλύεται από τους Bera, Higgins και Lee (1992), οι οποίοι το ονόμασαν προσαυξημένο ARCH (Augmented ARCH ή AARCH). Αν προσθέσουμε επιπλέον και γραμμικούς όρους ε_{t-1} στη σχέση $Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \underline{\varepsilon}'_{t-1} A \underline{\varepsilon}_{t-1} + \sigma_u^2$, τότε θα προκύψει το τετραγωνικό ARCH (Quadratic ARCH ή QARCH). Είναι φανερό ότι αντίθετα με το ARCH, το AARCH δεν είναι συμμετρικό, με την έννοια ότι η δεσμευμένη διακύμανση εξαρτάται από το πρόσημο των υστερήσεων του σφάλματος ε_t (lagged error).

1.4.2 Ερμηνεία του μη-γραμμικού υποδείγματος

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά των υποδειγμάτων ARCH είναι αυτό που αφορά τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των τιμών του ε_t , δηλαδή ότι :

$$Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-j}^2) \neq 0 \quad \text{και} \quad Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad \text{για } j \neq 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν ότι οι τιμές των ε_t δεν συσχετίζονται γραμμικά. Αντίθετα, συσχετίζονται τα τετράγωνα των τιμών τους, δηλαδή ορίζεται μια μη γραμμική σχέση μεταξύ των σφαλμάτων. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται διάφορες μορφές μοντέλων μη-γραμμικών χρονολογικών σειρών, όπως τα διγραμμικά (bilinear), τα threshold autoregressive, τα εκθετικά παλινδρομικά (exponential autoregressive) και τα μη-γραμμικά κινητού μέσου (non-linear moving average), τα οποία χαρακτηρίζονται από την παραπάνω ιδιότητα. Για απλούστευση θα εξετάσουμε τη σχέση του διγραμμικού και του ARCH υποδείγματος. Μια χρονολογική σειρά $\{\varepsilon_t\}$ λέμε ότι ακολουθεί ένα διγραμμικό υπόδειγμα αν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^q \phi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s b_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k} + u_t \quad (1.4.2)$$

όπου u_t είναι μια ακολουθία από i.i.d $(0, \sigma_u^2)$ τυχαίες μεταβλητές. Οι δύο πρώτες δεσμευμένες ροπές της είναι :

- $E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \sum_{i=1}^q \phi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s b_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k}$
- $Var(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \sigma_u^2$

Οι δεσμευμένες αυτές ροπές έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες των ARCH, όπου ο μέσος είναι, εν γένει, μια σταθερά και η διακύμανση μεταβάλλεται διαχρονικά. Από την άλλη πλευρά, οι μη δεσμευμένες ροπές μπορεί να είναι πανομοιότυπες. Για παράδειγμα, ένα διγραμμικό υπόδειγμα:

$$\varepsilon_t = b_{21} \varepsilon_{t-2} u_{t-1} + u_t$$

έχει :

$$E(\varepsilon_t) = 0 \text{ και } Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-2}^2) = b_{21} \sigma_u^2$$

Και επειδή η διαδικασία αυτή είναι αυτοσυγχετιζόμενη στα τετράγωνα, θα χαρακτηρίζεται από προσωρινή συγκέντρωση (clustering) και από μεγάλες αποκλίσεις όπως ένα υπόδειγμα ARCH. Πράγματι, ένα διγραμμικό υπόδειγμα είναι αρκετά όμοιο με ένα ARCH και μπορεί να παρασταθεί σαν υπόδειγμα AR τυχαίου συντελεστή. Η σχέση 1.4.2 μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^m [\phi_j + A_j] \varepsilon_{t-j} + u_t = \sum_{j=1}^m \phi_{jt} \varepsilon_{t-j} + u_t \quad (1.4.3)$$

$$\text{όπου } m = \max(p, r), \quad A_j = b_{jk} u_{t-k} \text{ με } \phi_i = 0, \quad i \geq p+1, \quad b_{jk} = 0, \quad j \geq r+1$$

Η βασική διαφορά του υποδείγματος (1.4.3) από το (1.4.1) είναι ότι στο δεύτερο οι συντελεστές είναι τυχαίοι, ενώ στο αμέσως παραπάνω υπόδειγμα το μέρος των μεταβλητών συντελεστών $[A_j(t)]$ εξαρτάται από τις προηγούμενες διαταραχές, u_t . Μελετώντας τις ομοιότητες και τις διαφορές των διγραμμικών και των ARCH υποδειγμάτων, συμπεραίνουμε ότι παρ' ότι και τα δύο λαμβάνουν υπόψη τη μη-γραμμική εξάρτηση, στα ARCH αυτό γίνεται σε πολλαπλασιαστική μορφή :

$$\varepsilon_t = u_t f_1(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, u_{t-1}, u_{t-2} \dots) = u_t f_1,$$

ενώ στα διγραμμικά σε αθροιστική μορφή :

$$\varepsilon_t = f_2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, u_{t-1}, u_{t-2} \dots) + u_t = u_t + f_2,$$

όπου $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ είναι δυο πολύ καλά ορισμένες συναρτήσεις. Οι Higgins και Bera (1992) προτείνουν μια διαδικασία τύπου Cox για να ελέγξουν την ύπαρξη του ενός ή του άλλου υποδείγματος.

Από την πρακτική πλευρά οι δύο τύποι υποδειγμάτων έχουν διαφορετικές συνέπειες. Με τη χρήση ενός διγραμμικού υποδείγματος είναι δυνατόν να βελτιώσουμε την πρόβλεψη σημείου σε σχέση με ένα ARMA, αλλά χάνουμε σε αξιοπιστία στην πρόβλεψη διαστήματος. Από την άλλη πλευρά ένα ARCH μας βοηθάει να προβλέψουμε τη δεσμευμένη διακύμανση χωρίς κανένα επιπλέον όφελος στην πρόβλεψη σημείου. Είναι, επίσης εφικτή και η ύπαρξη ενός συνδυασμένου ARCH-διγραμμικού υποδείγματος. Η εμπειρική διερεύνηση του θέματος προσφέρει ποικίλα αποτελέσματα.

Τέλος, πρέπει να τονίσουμε ένα πρόβλημα που απορρέει από τη χρήση του μη-γραμμικού δεσμευμένου μέσου στην εξήγηση των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Για να ανταποκριθεί το υπόδειγμα στην παρατηρούμενη στην πράξη μεταβλητότητα, θα πρέπει η πρώτη του ροπή να παρουσιάζει μεγάλη ετερομορφία, γεγονός που μεταφράζεται σε τεράστια ανεκμετάλλευτα κέρδη για τους επενδυτές. Πιθανότατα, για αυτό το λόγο τα μοντέλα με μη-γραμμικότητα στο μέσο δεν είναι τόσο γνωστά όσο τα ARCH, τα οποία παριστάνουν τις αλλαγές στη μεταβλητότητα με αλλαγές στη δεσμευμένη διακύμανση και έτσι δεν αντιμετωπίζουν το προαναφερόμενο πρόβλημα.

1.5 Προεκτάσεις του υποδείγματος

Τα GARCH μοντέλα συλλαμβάνουν με επιτυχία αρκετά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών όπως είναι οι αποδόσεις με παχιές ουρές και το volatility clustering. Από την άλλη η δομή του παρουσιάζει σημαντικούς περιορισμούς.

Η αρχική έκδοση του μοντέλου ARCH από τον Engle υπέθετε, όπως ήταν φυσικό, ότι η συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης είναι γραμμική στα τετραγωνικά σφάλματα και η δεσμευμένη κατανομή τους είναι κανονική. Αναγνώρισε όμως ότι αυτές οι υποθέσεις είναι περιοριστικές και ακατάλληλες για συγκεκριμένες εφαρμογές. Επιπλέον η διακύμανση εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και όχι από το πρόσημο των ε_t με αποτέλεσμα τα μοντέλα αυτά να αδυνατούν να συλλάβουν το leverage effect. Έτσι μια νέα τάξη μοντέλων έχει εισαχθεί για να μοντελοποιούν σωστά την ασυμμετρία που παρουσιάζεται στα δεδομένα. Στα μοντέλα αυτά τα καλά και τα κακά νέα έχουν διαφορετική επίδραση στην μελλοντική διακύμανση.

1.5.1 Το μοντέλο EGARCH (Exponential Generalized ARCH)

Το πιο γνωστό μοντέλο που συλλαμβάνει την επίδραση της ασυμμετρίας, καθώς είναι μια μη-συμμετρική συνάρτηση των κανονικοποιημένων καταλοίπων, είναι το Exponential GARCH (EGARCH) μοντέλο του Nelson (1991). Σύμφωνα με τον Nelson η δεσμευμένη διακύμανση έχει την παρακάτω μορφή :

$$\log(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i g\left(\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right), \quad \pi_1 \equiv 1 \quad (1.5)$$

και προσαρμόζει την ασύμμετρη σχέση μεταξύ αποδόσεων των μετοχών και των αλλαγών στη διακύμανση φτιάχνοντας την $g(\varepsilon_t / \sigma_t)$ από ένα συνδυασμό των $|\varepsilon_t / \sigma_t|$ και ε_t / σ_t :

$$g(\varepsilon_t / \sigma_t) = \theta(|\varepsilon_t / \sigma_t| - E|\varepsilon_t / \sigma_t|) + \gamma(\varepsilon_t / \sigma_t) \quad (1.5.1)$$

όπου θ και γ είναι σταθερές.

Από κατασκευή της η σχέση (1.5.1) είναι μια i.i.d σειρά με μέσο μηδέν (σημειώνουμε ότι $z_t \equiv \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$), σταθερή διακύμανση (αν είναι πεπερασμένη) και διαχρονικά ανεξάρτητη.

Επομένως η σχέση (1.5) παριστάνει ένα γραμμικό ARMA για την $\log(z_t)$ με διαταρακτικό όρο $g(z_t)$. Είναι όπως είπαμε μια μη-συμμετρική συνάρτηση των κανονικοποιημένων καταλοίπων και γι'αυτό το λόγο μπορεί να ερμηνεύσει μη-συμμετρικές επιδράσεις μιας διαταραχής στη μεταβλητότητα.

Οι ιδιότητες του EGARCH καθορίζονται από την προσεκτική κατασκευή της συνάρτησης (1.5.1). Αυτές οι ιδιότητες είναι οι εξής:

1) Η $g(z_t)$ στη δεσμευμένη διακύμανση είναι <<μία προς μία γραμμική>>.

Έτσι για

- $0 < z_t < \infty$ η $g(z_t)$ έχει κλίση $\theta + \gamma$
- $-\infty < z_t \leq 0$ η $g(z_t)$ έχει κλίση $\gamma - \theta$

2) Ο πρώτος όρος της σχέσης (1.5.1), $\theta(|z_t| - E|z_t|)$, αναπαριστά την επίδραση

του μεγέθους (magnitude effect) όπως στο GARCH μοντέλο και επιτρέπει την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των σφαλμάτων και των μελλοντικών δεσμευμένων διακυμάνσεων. Για να γίνει κατανοητό το παραπάνω υποθέτουμε ότι $\theta > 0$ και $\gamma = 0$. Τα σφάλματα τότε στην $\log(\sigma_t^2)$ είναι θετικά (αρνητικά) όταν το μέγεθος του z_t είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) από την αναμενόμενή του τιμή.

3) Ο δεύτερος όρος της σχέσης (1.5.1), $\gamma(z_t)$, δηλώνει την επίδραση της μόχλευσης (leverage effect or sign effect) και είναι η επίδραση του ARCH. Για παράδειγμα, αν $\gamma > 0$ και $\theta = 0$ τότε αν το μέγεθος του (z_t) ξεπερνά την προσδοκώμενη τιμή του, η $g(z_t)$ είναι θετική. Συνεπώς, μεγάλες ξαφνικές διαταραχές (shocks) αυξάνουν τη δεσμευμένη διακύμανση.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του EGARCH μοντέλου έναντι των GARCH είναι ότι δεν απαιτούνται περιορισμοί για τις παραμέτρους στην εκτίμηση. Και αυτό διότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι θετική (λόγω του λογαρίθμου) ανεξάρτητα από το αν οι

συντελεστές π_i είναι θετικοί ή όχι. Επίσης ο Nelson έδειξε ότι $\log(\sigma_t^2)$ και ε_t είναι αυστηρά στάσιμα για $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 < \infty$.

Εκτός όμως από τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα που περιγράψαμε, το υπόδειγμα EGARCH παρουσιάζει και μερικά μειονεκτήματα, τα οποία όμως δεν μειώνουν τη σημαντική συνεισφορά του στη βελτίωση του κλασικού υποδείγματος ARCH. Η εμπειρική εφαρμογή έχει δείξει ότι η επίδραση των πιο πρόσφατων διαταραχών είναι πλέον εκθετική και όχι τετραγωνική, αυξάνεται υπερβολικά σε περιπτώσεις μεγάλων διαταραχών. Επιπρόσθετα, υπάρχουν δυσκολίες στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας και στην κατασκευή προβλέψεων.

Τέλος, το υπόδειγμα EGARCH μπορεί να γραφτεί ως ένα ARMA ως εξής :

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + (1 + \sum_{i=1}^q a_i L^i)(1 - \sum_{j=1}^p b_j L^j)^{-1} (\theta(|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}| - E|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}|) + \gamma(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}))$$

ή ισοδύναμα

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + (1 + A(L))(1 - B(L))^{-1} g(z_{t-1})$$

1.5.2 Τα μοντέλα GARCH-in-the-mean

Η χρηματοοικονομική θεωρία προτείνει ότι ένα περιουσιακό στοιχείο με μεγαλύτερο αναμενόμενο ρίσκο έχει μεγαλύτερη απόδοση κατά μέσο όρο. Όταν υποδειγματοποιούμε αποδόσεις είναι προτιμότερο να τις υπολογίζουμε ως μία διαφορά από την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, δηλαδή να χρησιμοποιούμε την έννοια του risk premium. Στα ετεροσκεδαστικά μοντέλα (ARCH-GARCH) που παρουσιάσαμε πιο πριν, υποθέτουμε ότι ο μέσος της διαδικασίας δεν επηρεάζεται από την δεσμευμένη διακύμανση. Στην πραγματικότητα όμως πολλές οικονομικές θεωρίες υποθέτουν κάποιο είδος σχέσης μεταξύ του μέσου και της διακύμανσης μιας απόδοσης. Ένας τρόπος για να ληφθεί αυτό υπόψιν, είναι να γράψουμε τις αποδόσεις ως συνάρτηση της υπό συνθήκη διακύμανσης ή με άλλα λόγια να συμπεριλάβουμε την δεσμευμένη διακύμανση ως έναν ακόμα παράγοντα στην παλινδρόμηση. Τα μοντέλα GARCH-in-the-mean επιτρέπουν στη διακύμανση να έχει επιδράσεις του μέσου. Τις περισσότερες φορές ο όρος της δεσμευμένης διακύμανσης αντιπροσωπεύει το risk premium.

Υποθέτουμε το ακόλουθο μοντέλο GARCH-M :

$$y_t = c + ag(\sigma_t) + \varepsilon_t, \text{ , όπου } g(\sigma_t) \text{ είναι η συνάρτηση της διακύμανσης.}$$

Η εκτίμηση των c και a εξαρτάται από τη σωστή εξειδίκευση του μοντέλου. Η συνάρτηση $g(\sigma_t)$ πρέπει να είναι μία από τις παρακάτω :



- $g(\sigma_t) = \sigma$
- $g(\sigma_t) = \sigma^2$
- $g(\sigma_t) = \ln(\sigma^2)$

Η εκτίμηση ενός μοντέλου GARCH-M είναι αριθμητικά αβέβαιη, έτσι πολλές εφαρμογές γίνονται με βάση τα ARCH-M τα οποία είναι πιο εύκολα στην εκτίμηση.

Ένα παράδειγμα ARCH(1)-M

Υποθέτουμε ότι έχουμε το απλό μοντέλο :

$$y_t = \psi \sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

όπου $\varepsilon_t = u_t \sigma_t$, $u_t \sim N(0,1)$

και $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$

Τότε τα y_t μπορούν να εκφραστούν ως εξής :

$$y_t = \psi(\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2) + \varepsilon_t$$

Η αναμενόμενη τιμή των y_t είναι :

$$E(y_t) = \psi\omega + \psi\alpha E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

Όμως $E(\varepsilon_{t-1}^2) = \frac{\omega}{1-\alpha}$, οπότε

$$E(y_t) = \psi\omega + \psi\alpha \frac{\omega}{1-\alpha}$$

Ωστόσο, τα απλά υποδείγματα ARCH διαφέρουν από τα ARCH στο μέσο. Πρώτον, ενώ στα απλά υποδείγματα υπάρχει ευελιξία στην επιλογή της μεθοδολογίας εκτίμησης, στα υποδείγματα στο μέσο στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας. Δεύτερον, μπορούμε να εξειδικεύσουμε ένα απλό υπόδειγμα ARCH μελετώντας την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των καταλοίπων, κατά αντιστοιχία με την μεθοδολογία των Box-Jenkins. Αντίθετα, στα ARCH στο μέσο είναι αδύνατο να εκτιμήσουμε τα κατάλοιπα, εάν πρωτύτερα δεν έχουμε εξειδικεύσει ένα σωστό υπόδειγμα για τη δεσμευμένη διακύμανση και την συνάρτηση που την συνδέει με το μέσο.



1.5.3 Το μοντέλο TGARCH (Threshold GARCH)

Ένας άλλος τρόπος να μοντελοποιήσουμε τις επιδράσεις της ασυμμετρίας πάνω στην δεσμευμένη διακύμανση, είναι το μοντέλο TGARCH το οποίο προτάθηκε αρχικά από τον Zakoian (1991) και στη συνέχεια αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Zakoian και τον Rabemananjara (1993) και το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2$$

όπου

$$S_{t-i} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι ανάλογα με το αν το ε_{t-i} είναι κάτω ή πάνω από το μηδέν, τα ε_{t-i}^2 έχουν διαφορετικές αποδράσεις στην δεσμευμένη διακύμανση. Έτσι όταν $\varepsilon_{t-i} > 0$, η συνολική επίδραση δίνεται από την $a_i \varepsilon_{t-i}^2$ και όταν $\varepsilon_{t-i} < 0$ η συνολική επίδραση δίνεται από την $(a_i + \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^2$. Για $\gamma_i > 0$ υπάρχει "leverage effect".

1.5.4 Το μοντέλο PGARCH (Power GARCH)

Μια άλλη επέκταση του βασικού μοντέλου GARCH είναι το power GARCH το οποίο αντιμετωπίζει και αυτό το πρόβλημα του "leverage effect". Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Ding, Granger και Engle (1993) και έχει την εξής μορφή :

$$\sigma_t^d = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^d + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^d$$

όπου το d είναι ένας θετικός εκθέτης που παίζει το ρόλο ενός Box-Cox μετασχηματισμού του σ_t και το γ_i είναι ο συντελεστής του leverage effect.

Για να ορίζεται η σ_t^d πρέπει :

- $a_0 > 0$
- $d \geq 0$
- $a_i \geq 0$
- $-1 < \gamma_i < 1$ για $i=1, \dots, q$
- $b_j \geq 0$ για $j=1, \dots, p$

Για d=2 παίρνουμε το βασικό GARCH μοντέλο με leverage effect. Μια αρνητική τιμή του γ_i σημαίνει ότι παρελθόντα αρνητικά (θετικά) σοκ έχουν μια βαθύτερη επίδραση στη σημερινή διακύμανση απ' ότι παρελθόντα θετικά σοκ (shocks). Το PGARCH περιλαμβάνει άλλες επτά επεκτάσεις του ARCH μοντέλου σαν ειδικές περιπτώσεις. Αυτές είναι :

- ARCH αν d=2, $\gamma_i=0$ ($i=1,\dots,p$) και $b_j=0$ ($j=1,\dots,p$)
- GARCH όταν d=2 και $\gamma_i=0$ ($i=1,\dots,p$)
- GJR όταν d=2
- TARCH όταν d=1
- NARCH όταν $\gamma_i=0$ ($i=1,\dots,p$) και $b_j=0$ ($j=1,\dots,p$)
- Log-ARCH όταν $d \rightarrow 0$

1.5.5 Το μοντέλο GJR (p,q)

Ένας επιπλέον δημοφιλής τρόπος να μοντελοποιήσουμε την ασυμμετρία των θετικών και αρνητικών σφαλμάτων, είναι η χρήση του μοντέλου GJR (p,q) που προτάθηκε από τον Glosten et al. (1993) με τη διακύμανση να έχει την παρακάτω μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^q (\gamma_i d(\varepsilon_{t-i} < 0) \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2)$$

όπου γ_i , για $i = 1,2,\dots,q$, είναι παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν, $d(\cdot)$ είναι μία συνάρτηση για την οποία :

- $d(\varepsilon_{t-i} < 0) = 1$, αν $\varepsilon_{t-i} < 0$
- $d(\varepsilon_{t-i} < 0) = 0$, αλλιώς

Το μοντέλο GJR (p,q) επιτρέπει στα καλά νέα, ($\varepsilon_{t-i} > 0$), και στα κακά νέα, ($\varepsilon_{t-i} < 0$), να έχουν διαφορετικές επιδράσεις στην δεσμευμένη διακύμανση. Έτσι, στην περίπτωση του GJR (0,1) μοντέλου, τα καλά νέα έχουν μια επίδραση a_i , ενώ τα κακά νέα έχουν μια επίδραση $a_i + \gamma_i$. Για $\gamma_i > 0$, υπάρχει "leverage effect".

To ARCHI παρέχει την τηλεοπτική συνέδεση της απόδοσης.

Επίπεδο	Επίπεδο Α	Επίπεδο Β	Επίπεδο Γ	Επίπεδο Δ	Επίπεδο Ε	Επίπεδο Ζ
ARCHI	$\pi^A = \alpha + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$					Bellman (1993)
CARChis		$\pi^B = -\sum_{j=1}^n (\alpha_j x_j) + \sum_{j=1}^n (\beta_j x'_j)$				Bellman (1993)
PIARCHis			$\pi^G = \alpha + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{j=1}^n \gamma_j x'_j$			Zabelin (1993)
PIARCHis				$\pi^D = \alpha + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{j=1}^n \gamma_j x'_j$		Zabelin (1993)
PIARCHis					$\pi^E = \alpha + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{j=1}^n \gamma_j x'_j$	Πλ. Καραϊσκάκη (1993)
PIARCHis						Πλ. Καραϊσκάκη (1993)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Τα ARCH μοντέλα που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο είναι τα παρακάτω:

Πίνακας 1. Τα ARCH μοντέλα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1.

$$\text{ARCH(q)} \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \text{Engle(1982)}$$

$$\text{GARCH(p,q)} \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2) \quad \text{Bollerslev (1986)}$$

$$\text{IGARCH(p,q)} \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2) \quad \text{για } \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j = 1$$

Engle and Bollerslev (1986)

$$\text{EGARCH(p,q)} \quad \log(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i g\left(\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right) \quad \text{Nelson (1991)}$$

$$g(\varepsilon_t / \sigma_t) = \theta(|\varepsilon_t / \sigma_t| - E|\varepsilon_t / \sigma_t|) + \gamma(\varepsilon_t / \sigma_t)$$

$$\text{GJR(p,q)} \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^q (\gamma_i d(\varepsilon_{t-i} < 0) \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2) \quad \text{Glosten et.al (1993)}$$

$$\text{TGARCH(p,q)} \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{Zakoian(1991)}$$

$$S_{t-i} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PGARCH(p,q)} \quad \sigma_t^d = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^d + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^d \quad \text{Ding et.al (1993)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μη κανονική δεσμευμένη κατανομή σφαλμάτων

Όπως περιγράφτηκε πιο πριν, ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό των ARCH είναι ότι ενώ η δεσμευμένη κατανομή του σφαλμάτων είναι κανονική, η μη-δεσμευμένη είναι μη-κανονική με ουρές παχύτερες από τις κανονικής κατανομής. Εμπειρικές μελέτες έδειξαν ότι οι χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν μη-κανονική μορφή με μεγάλη κύρτωση ή λοξότητα. Στην περίπτωση αυτή τα GARCH μοντέλα δεν μοντελοποιούν σωστά τη διακύμανση.

Στο γραμμικό οικονομετρικό υπόδειγμα με κανονικά κατάλοιπα ARCH, ας υποθέσουμε ότι ε_t και h_t είναι οι εκτιμητές των σφαλμάτων και της δεσμευμένης διακύμανσης, αντίστοιχα. Τότε τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα $\varepsilon_t / h_t^{1/2}$ πρέπει να είναι περίπου $N(0,1)$. Οι McCurdy και Morgan (1988), Milhoj (1987b) και Hsieh (1988, 1989) όμως έδειξαν πως για ένα διευρυμένο σύνολο συναλλαγματικών ιστοιμιών, ο συντελεστής κύρτωσης του δείγματος των κανονικοποιημένων καταλοίπων συνήθως υπερβαίνει το 3. Η συχνή ανικανότητα του “μη-δεσμευμένου κανονικού” υποδείγματος ARCH να περάσει τον απλό αυτό διαγνωστικό έλεγχο, οδήγησε στη χρήση πιο γενικευμένων μορφών δεσμευμένων κατανομών από την κανονική κατανομή. Τα κανονικοποιημένα σφάλματα ορίζονται ως εξής :

$$\eta_t = \varepsilon_t / h_t^{1/2} = (y_t - x_t' \xi) / h_t^{1/2}$$

όπου x_t είναι ένα ($K \times 1$) διάνυσμα εξωγενών μεταβλητών και ξ ένα ($K \times 1$) διάνυσμα συντελεστών παλινδρόμησης.

Σε αυτή την προσέγγιση η δεσμευμένη κατανομή του η_t εξειδικεύεται ως εξής :

$$\eta_t / \Psi_{t-1} \sim f(\eta, \theta)$$

όπου θ είναι ένα παραμετρικό διάνυσμα μικρών διαστάσεων, του οποίου η τιμή καθορίζει το σχήμα της δεσμευμένης διακύμανσης η_t . Στο δεσμευμένο κανονικό υπόδειγμα ARCH το θ δεν υπάρχει και η $f(\eta)$ είναι η $N(0,1)$ συνάρτηση πυκνότητας. Ο Bollerslev (1987) ήταν ο πρώτος που ενσωμάτωσε στην έρευνά του την παραπάνω προσέγγιση και εξειδίκευσε την $f(\eta, \theta)$ σαν μια δεσμευμένη κατανομή t , όπου το θ είναι οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής. Η δεσμευμένη κατανομή t επιτρέπει για παχύτερες ουρές από την κανονική κατανομή και καθώς $\theta \rightarrow \infty$, η κανονική κατανομή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της.

Έτσι γνωρίζοντας για τις παχιές ουρές στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές, ήταν επιθυμητή η χρήση κατανομών με ουρές παχύτερες από αυτές της κανονικής.

Οι μη-κανονικές κατανομές που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι οι παρακάτω :

↳ 2.1 Κατανομή Student-t

Όπως αναφέρθηκε πιο πριν ο Bollerslev (1987) πρότεινε τη χρήση της τυποποιημένης t κατανομής (standardized t distribution) με $v > 2$ βαθμούς ελευθερίας η οποία επιτρέπει για παχύτερες ουρές από την κανονική και καθώς οι βαθμοί ελευθερίας τείνουν στο άπειρο, η t προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Έτσι αν μία τυχαία μεταβλητή ζι έχει μια Student-t κατανομή με v βαθμούς ελευθερίας, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής είναι :

$$f(z_t; v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi(v-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

όπου $\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1} dx$, είναι η συνάρτηση γάμα και v είναι η παράμετρος που περιγράφει το πάχος των ουρών της κατανομής. Η t κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν και σύμφωνα με τους Kendall και Stuart (1969) για $v > 4$ η δεσμευμένη κύρτωση είναι ίση με :

$$E(\varepsilon_t^4 | y_{t-1}) = \frac{3(v-2)}{v-4}$$

Είναι προφανές ότι για $v > 4$ η κύρτωση αυτή ξεπερνάει το 3, αυτή δηλαδή της κανονικής κατανομής. Είναι επίσης γνωστό ότι για $\frac{1}{v} \rightarrow 0$, δηλαδή για $v \rightarrow \infty$ η t κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή αλλά για $\frac{1}{v} > 0$ η t κατανομή έχει "παχύτερες ουρές" από την κανονική. Η t κατανομή μπορεί να επεκταθεί επιτρέποντας στους βαθμούς ελευθερίας να πάρουν πραγματικές τιμές στο διάστημα $(2, \infty]$. Το πάχος των ουρών μειώνεται όσο αυξάνει το v.

↳ 2.2 Κατανομή γενικευμένου σφάλματος (Generalized Error Distribution)

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα με τις παχιές ουρές που παρατηρείται στην κατανομή των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, ο Nelson (1991) πρότεινε την χρήση του GED (generalized error distribution). Αν μία τυχαία μεταβλητή u έχει μια GED κατανομή με μέσο μηδέν και μοναδιαία διακύμανση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της u δίνεται από τη σχέση :

$$f(u_t) = \frac{v \exp[-(1/2)|u_t/\lambda|^\nu]}{\lambda 2^{(v+1)/\nu} \Gamma(1/\nu)}, \text{ για } v > 0$$

$$\text{όπου } \lambda = \left[\frac{2^{-2/\nu} \Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)} \right]^{1/2},$$

και ν είναι μια θετική παράμετρος που δηλώνει το πάχος των ουρών της κατανομής.

- Όταν $\nu=2$ η παραπάνω PDF είναι αυτή της κανονικής κατανομής.
- Για $\nu < 2$, η κατανομή των καταλοίπων έχει παχύτερες ουρές από την κανονική.
- Για $\nu > 2$, τα κατάλοιπα έχουν λεπτότερες ουρές από την κανονική κατανομή.
- Για $\nu = \infty$, τα κατάλοιπα έχουν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

◆ 2.3 Double Exponential κατανομή

Μια τελευταία κατανομή που χρησιμοποιείται στην περίπτωση της μη-κανονικής κατανομής είναι η Double Exponential κατανομή. Τα κατάλοιπα ακολουθούν την κατανομή αυτή για $\nu=1$. Η συνάρτηση πυκνότητας αυτής είναι :

$$f(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|u_t|}$$

◆ 2.4 Η ασύμμετρη κατανομή t (skewed t-distribution)

Ένα βασικό μειονέκτημα της t κατανομής είναι ότι είναι συμμετρική, σε αντίθεση με τις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές που είναι λοξές. Οι Lee και Tse (1991) πρότειναν ότι η δεσμευμένη κατανομή των σφαλμάτων μπορεί να είναι λεπτόκυρτη αλλά επίσης και ασύμμετρη. Οι Lambert και Laurent (2000,2001) επέκτειναν την λοξή Student κατανομή που πρότειναν οι Fernandez και Steel (1998) στο θέμα των ARCH μοντέλων, στην παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας :

$$f(z_t; \nu, g) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(\frac{2s}{g + g^{-1}} \right) \left(1 + \frac{sz_t + m}{\nu-2} g^{-\Pi_t} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

για $v > 2$

- όπου g : είναι η παράμετρος ασυμμετρίας
 v : βαθμοί ελευθερίας της κατανομής
 $\Gamma(\cdot)$: είναι η κατανομή γάμα



$$\begin{cases} \Pi_t = 1, z_t \geq -ms^{-1} \\ \Pi_t = -1, \alpha \lambda \lambda \tau \omega \varsigma \end{cases}$$

$$m = \Gamma((v-1)/2) \sqrt{(v-2)} (\Gamma(v/2) \sqrt{\pi})^{-1} (g - g^{-1}) \text{ και}$$

$$S = \sqrt{g^2 + g^{-2} - m^2 - 1}$$

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος της λοξότητας έχουν εισαχθεί αρκετές κατανομές αλλά στο παρόν σύγγραμμα δεν θα επεκταθώ περαιτέρω διότι απαιτείται ξεχωριστή ανάλυση πάνω σ' αυτό.

2.5 Έλεγχος για ARCH επιδράσεις και εξειδίκευσης του μοντέλου (Testing for ARCH effects)

Πριν προχωρήσουμε στην εκτίμηση ενός ARCH ή GARCH μοντέλου μιας χρηματοοικονομικής χρονολογικής σειράς, συνήθως είναι καλή πρακτική να ελέγχουμε την παρουσία επιδράσεων του ARCH μοντέλου στα κατάλοιπα. Αν δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις στα κατάλοιπα, τότε το ARCH μοντέλο δεν είναι αναγκαίο και είναι λάθος επιλογή. Υπάρχουν δύο φιλοσοφίες όταν αναφερόμαστε στην καταλληλότητα ενός υπόδειγματος. Η πρώτη έγκειται στο να αντιστοιχίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά (stylized facts) της χρονολογικής σειράς με τις ιδιότητες που διέπουν το στατιστικό μας υπόδειγμα. Για παράδειγμα, όταν παρατηρείται συγκέντρωση (clustering) στις δεσμευμένες διακυμάνσεις μιας σειράς, το πιο κατάλληλο υπόδειγμα για να ερμηνεύσει το χαρακτηριστικό αυτό είναι το ARCH.

Μια πιο πειστική προσέγγιση του προβλήματος της εξειδίκευσης είναι η κατασκευή ενός στατιστικού ελέγχου του πολλαπλασιαστή Lagrange (LM test) ο οποίος προτάθηκε από τον Engle (1982). Σε αυτή την περίπτωση το κύριο πρόβλημά μας είναι ο καθορισμός του κατάλληλου εναλλακτικού υποδειγματος. Στην πλειοψηφία τους οι προτάσεις που γίνονται αφορούν διαφορετικές υποδειγματοποιήσεις για τη δεσμευμένη διακύμανση.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι ένα μοντέλο δυναμικής παλινδρόμησης το οποίο μπορεί να γραφτεί ως

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$$



όπου x_t είναι ένα σύνολο από εξωγενείς εξαρτημένες μεταβλητές και ε_t είναι μια διαδικασία λευκού θορύβου $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$, όπου I_t είναι το σύνολο των πληροφοριών. Η εναλλακτικά κάτω από την μηδενική υπόθεση υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι ένα AR(p) μοντέλο :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

με ε_t και I_t να ορίζονται όπως προηγουμένως.

Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι τα σφάλματα είναι ARCH(q). Ο έλεγχος για επιδράσεις ARCH (p) απλά στηρίζεται στην παλινδρόμηση

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = a_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + a_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + a_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + \psi_t$$

Η μηδενική υπόθεση είναι :

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0 \\ H_1 : \text{κάποιο } a_i \neq 0 \end{cases}$$

ή εναλλακτικά

H_0 : δεν υπάρχει ARCH επίδραση

H_1 : υπάρχει ARCH επίδραση

Η ελεγχούσυνάρτηση που χρησιμοποιούμε είναι η $t=TR^2$ η οποία ακολουθεί την κατανομή X^2 με q βαθμούς ελευθερίας, όπου T είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και το R^2 υπολογίζεται από την παλινδρόμηση των ε_t^2 πάνω σε μία σταθερά και στα $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$. Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν $p\text{-value}=\text{παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας} < \alpha = \text{επίπεδο σημαντικότητας}$.

Αν τα δεδομένα είναι ομοσκεδαστικά, η διακύμανση δεν μπορεί να προβλεφθεί και οι μεταβλητές στα ε_t^2 θα είναι τυχαίες. Ωστόσο, αν υπάρχουν επιδράσεις ARCH, μεγάλες τιμές των ε_t^2 θα προβλέπονται από μεγάλες τιμές των παρελθόντων τετραγωνικών καταλοίπων.

Παρόλο που το τεστ αυτό είναι απλό στο υπολογισμό και τη χρήση καθώς επίσης και διαδεδομένο, υπάρχουν κάποια σημεία που χρειάζονται προσοχής και αποτελούν μειονεκτήματα αυτού.

Πρώτο και σημαντικότερο, αν το μοντέλο $y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$ είναι λάθος εξειδικευμένο από παράλειψη κάποιου παράγοντα ή αποτυγχάνει να συλλάβει την σειριακή συσχέτιση, είναι μάλλον πιθανόν ότι το τεστ για ARCH να απορρίπτει καθώς τα σφάλματα ενδέχεται να έχουν σειριακή συσχέτιση στα τετραγωνικά σφάλματα. Έτσι κάποιος δεν μπορεί έτσι απλά να υποθέσει ότι οι ARCH επιδράσεις παρουσιάζονται όταν το ARCH τεστ απορριφθεί.

Δεύτερο μειονέκτημα στη χρήση του LM τεστ για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0 : $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_q=0$, είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψιν τον την μονόπλευρη φύση της εναλλακτικής υπόθεσης ότι οι παράμετροι α_i του ARCH (q), μοντέλου πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Έτσι θα αναμένουμε μία μικρή απώλεια της δύναμης του τεστ λόγω αυτής της παράλειψης, αλλά το δίπλευρο LM τεστ θα δίνει σωστά αποτελέσματα ασυμπτωτικά.

Τέλος, υπάρχουν πολλές άλλες ασυμπτωτικά ισοδύναμες μορφές του LM τεστ συμπεριλαμβανομένου και του F-test από την παραπάνω παλινδρόμηση. Μια άλλη εκδοχή του τεστ απλά παραλείπει τη σταθερά αλλά αφαιρεί την εκτίμηση της μηδεσμευμένης διακύμανσης, σ^2 , από την εξαρτημένη μεταβλητή και στη συνέχεια χρησιμοποιεί το ήμισυ του αθροίσματος των τετραγώνων ως ελεγχοσυνάρτηση. Οι Engle και Ng (1993), προτείνουν ως επιπλέον όρους ψευδομεταβλητές σε αθροιστική ή πολλαπλασιαστική μορφή. Οι Pagan και Schwert (1990) υποστηρίζουν μια μη παραμετρική προσέγγιση, προσεγγίζοντας την δεσμευμένη διακύμανση με ένα GARCH με Fourier όρους στο οποίο ελέγχουν τη σημαντικότητα αυτών των όρων. Πράγματι, υπάρχουν πολλοί τρόποι κατασκευής διαγνωστικών ελέγχων, ανάλογα με τους όρους που προσθέτουμε. Πέρα όμως από αυτό το ερώτημα, μας απασχολεί επίσης, αν οι συντελεστές της δεσμευμένης διακύμανσης είναι διαχρονικά σταθεροί. Οι Lamoureux και Lastrapes (1990a) υποστήριξαν ότι η συχνή εύρεση παραμέτρων που αθροίζουν κοντά στη μονάδα (IGARCH) μπορεί να είναι απλά ένα σύμπτωμα της αστάθειάς τους. Οι Lee και Hansen (1991) δημιούργησαν ένα στατιστικό κριτήριο που ελέγχει τη σταθερότητα των GARCH παραμέτρων. Η περίπτωση αυτή μπορεί να ελεγχθεί με ένα LM τεστ, στο οποίο ελέγχουμε την υπόθεση αν οι συντελεστές ακολουθούν ένα τυχαίο περίπτωτο (random walk), έναντι της εναλλακτικής ότι είναι σταθεροί.

Structural Breaks and ARCH effects

Σύμφωνα με τον Diebold (1986a) τα breaks στην διακύμανση τα οποία δεν λαμβάνονται υπόψιν από τους οικονομέτρες, θα εμφανίζονται ως επιδράσεις ARCH όταν το συγκεκριμένο ελλιπές δείγμα χρησιμοποιείται. Στην περίπτωση αυτή η μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης με βάση ένα ARCH μοντέλο, θα είναι μια λανθασμένη επιλογή. Έτσι προτιμάται να διαιρείται το δείγμα και να εξετάζουμε για ARCH επιδράσεις σε κάθε περίοδο. Αν δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις για κάποια από τις περιόδους χωριστά αλλά υπάρχουν για το συνολικό δείγμα, αυτό αποτελεί μια ξεκάθαρη ένδειξη ενός break στην μη- δεσμευμένη διακύμανση και όχι επιδράσεις ARCH.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εκτίμηση μονομεταβλητών GARCH μοντέλων

3.1 Μέθοδοι εκτίμησης των GARCH μοντέλων

Οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι εκτίμησης των υποδειγμάτων ARCH στην χρηματοοικονομική οικονομετρία (financial econometrics) είναι οι παρακάτω :

- Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood ή ML)
- Μέθοδος οιονεί μέγιστης πιθανοφάνειας (Quasi-Maximum Likelihood ή QML)
- Γενικευμένη μέθοδος των ροπών (Generalized Method of Moments ή GMM)
- Έμμεση μέθοδος εκτίμησης (Indirect estimation ή IM)
- Εκτίμηση κατά Bayes (Bayesian estimation ή BM)

Επίσης, οι Pagan και Hong (1991) εφάρμοσαν μια μη παραμετρική εκτίμηση Kernel στην αναμενόμενη τιμή των τετραγωνικών σφαλμάτων. Οι Pagan και Schwert (1990) χρησιμοποίησαν μια σύλλογή από μη παραμετρικές μεθόδους εκτίμησης όπως τα Kernels και τις σειρές Fourier. Ο Geweke (1989) υποστήριξε ότι μια Μπεϊζιανή προσέγγιση απ'ότι μια κλασική μπορεί να είναι πιο κατάλληλη στην εκτίμηση των ARCH μοντέλων εξαιτίας των αυστηρών χαρακτηριστικών που έχουν αυτά τα μοντέλα.

Οι εκτιμητές της μεθόδου GMM δεν φαίνεται να έχουν μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με τους εκτιμητές της ML, αντίθετα, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες παρουσιάζονται δυσκολίες στον υπολογισμό τους. Η μέθοδος IM γνωρίζει μεγάλη διάδοση τα τελευταία χρόνια, διότι μας βοηθάει σε περιπτώσεις που είναι δύσκολο να υπολογιστούν οι εκτιμητές με τη ML. Από την άλλη πλευρά όμως είναι μια μέθοδος με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Οι μέθοδοι εκτίμησης κατά Bayes κερδίζουν συνεχώς έδαφος στη χρηματοοικονομική οικονομετρία γιατί όλοι και συχνότερα οι παράμετροι

λαμβάνονται ως τυχαίες μεταβλητές. Στην παρούσα εργασία θα γίνει μελέτη μόνο της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας καθώς οι υπόλοιπες ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής.

3.2 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (ML)

Η κλασικότερη μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων ενός υποδείγματος ARCH είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας. Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μιας παλινδρόμησης με ARCH διαταρακτικό όρο. Η εξίσωση της παλινδρόμησης είναι :

$$y_t = x_t' \beta + \varepsilon_t$$

όπου x_t είναι προκαθορισμένες ερμηνευτικές μεταβλητές, οι οποίες μπορούν να περιλαμβάνουν και παρελθόντες τιμές του y . Ο διαταρακτικός όρος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} v_t \\ h_t &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_m \varepsilon_{t-m}^2 \end{aligned}$$

Είναι χρήσιμο να θέσουμε υπό συνθήκη τις πρώτες m παρατηρήσεις ($t=-m+1, -m+2, \dots, 0$) και να χρησιμοποιήσουμε τις $t = 1, 2, \dots, T$ παρατηρήσεις για εκτίμηση. Ας συμβολίσουμε με Y_t το διάνυσμα των παρατηρήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t :

$$Y_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, y_0, \dots, y_{-m+1}, x_t', x_{t-1}', \dots, x_1', x_0', \dots, x_{-m+1}')$$

Αν $v_t \sim i.i.d.N(0,1)$ με v_t ανεξάρτητο από Y_t και x_t , τότε η δεσμευμένη διακύμανση του y_t είναι Gaussian με μέσο $x_t' \beta$ και διακύμανση h_t :

$$f(y_t / x_t, Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\{-(y_t - x_t' \beta)^2 / 2h_t\}$$

όπου :

$$\begin{aligned} h_t &= a_0 + a_1 (y_{t-1} - x_{t-1}' \beta)^2 + a_2 (y_{t-2} - x_{t-2}' \beta)^2 + \dots + a_m (y_{t-m} - x_{t-m}' \beta)^2 \\ &= [z_t(\beta)]' \delta \end{aligned}$$

για $\delta = (a_0, a_1, \dots, a_m)'$

$$[z_t(\beta)]' = [1, (y_{t-1} - x_{t-1}' \beta)^2, (y_{t-2} - x_{t-2}' \beta)^2, \dots, (y_{t-m} - x_{t-m}' \beta)^2]$$

Ορίζουμε το διάνυσμα θ με τις παραμέτρους που θα εκτιμηθούν :

$$\theta = (\beta', \delta')' \quad (3.2.1)$$

Τότε η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (log likelihood function) του δείγματος, δεσμευμένη στις πρώτες m παρατηρήσεις, ισούται με :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^T \log f(y_i / x_i, Y_{t-1}; \theta) = \\ &= -(T/2) \log(2\pi) - (1/2) \sum_{t=1}^T \log(h_t) - (1/2) \sum_{t=1}^T (y_t - x_t' \beta)^2 / h_t \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Για μια δεδομένη τιμή του διανύσματος των παραμέτρων θ , η ακολουθία των δεσμευμένων διακυμάνσεων χρησιμοποιείται για να αξιολογήσουμε την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (3.2.2). Η προηγούμενη ανάλυση στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι ο διαταρακτικός όρος v_t είναι Gaussian, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις που η μη-δεσμευμένη κατανομή μερικών χρονολογικών σειρών έχει παχύτερες ουρές από αυτές που επιτρέπει η κατηγορία των Gaussian. Όμοια με την προηγούμενη προσέγγιση –στα βασικότερα σημεία- ακολουθείται για τον non-Gaussian διαταρακτικό όρο, αλλά και σε περιπτώσεις διαφορετικών κατανομών οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί σε υποδείγματα ARCH.

Παραπάνω είδαμε την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας στην περίπτωση που τα κατάλοιπα κατανέμονται κανονικά. Αν αυτά ακολουθούν την t κατανομή, τότε η συνάρτηση αυτή γίνεται :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= T \left[\ln \Gamma \left(\frac{v+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(v-2)] \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + (1+v) \ln \left(1 + \frac{(y_t - x_t' \beta)^2}{\sigma_t^2(v-2)} \right) \right] \end{aligned}$$

Ενώ στην περίπτωση της γενικευμένης κατανομής των σφαλμάτων (GED) έχουμε ότι :

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{v}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{(y_t - x_t' \beta)}{\sigma_t} \frac{1}{\lambda} \right|^v - (1+v^{-1}) \ln(2) - \ln \Gamma \left(\frac{1}{v} \right) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) \right]$$

Να τονίσουμε ότι οι παραπάνω λογαριθμικές συναρτήσεις πιθανοφάνειας προκύπτουν από τις συναρτήσεις που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.

3.3 Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών GARCH μοντέλων

Η σύγκριση μεταξύ μοντέλων GARCH γίνεται με τους παρακάτω τρόπους :

➤ **Τεστ εξειδίκευσης στα τυποποιημένα κατάλοιπα**

Έχουμε δει ότι τα κατάλοιπα μπορούν να γραφτούν ως ένα γινόμενο ενός λευκού θορύβου (white noise) και της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης. Για παράδειγμα, για ένα ARCH (1) αυτό μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\varepsilon_t = \nu_t (\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2}$$

Επομένως μπορούμε να εξετάσουμε την ύπαρξη ARCH επιδράσεων στα τυποποιημένα κατάλοιπα

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_t / (\hat{\omega} + \hat{\alpha} \hat{\varepsilon}_{t-1}^2)^{1/2}$$

Το μοντέλο το οποίο “καθαρίζει”(cleans) τα τυποποιημένα κατάλοιπα, είναι υποψήφιο να είναι το “σωστό” μοντέλο.

➤ **Σύγκριση μεταξύ εναλλακτικών μοντέλων βασιζόμενοι στη χρήση βοηθητικών παλινδρομήσεων**

Οι Pagan και Schwert (1990) προτείνουν τη χρήση της ακόλουθης παλινδρόμησης ως ένα μέσο για την επιλογή μεταξύ διαφορετικών ARCH μοντέλων :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t^2 + \xi_t$$

Η παραπάνω παλινδρόμηση, παλινδρομεί τα τετραγωνικά σφάλματα πάνω στην προσαρμοσμένη διακύμανση των εναλλακτικών GARCH μοντέλων. Αν το επιλεγόμενο GARCH μοντέλο είναι κατάλληλο να εξηγήσει την δεσμευμένη διακύμανση της σειράς, θα πρέπει να αναμένουμε το α να είναι μηδέν, το β να είναι μονάδα και η προσαρμογή (που φαίνεται από το R^2) να είναι καλή. Οι Pagan και Schwert (1990) πρότειναν τον έλεγχο της παρακάτω υπόθεσης :

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0, \beta = 1 \\ H_1 : \alpha \neq 0, \beta \neq 1 \end{cases}$$

Σαν δεύτερο βήμα, προτείνουν τη σύγκριση των μοντέλων τα οποία δεν απορρίπτονται στη βάση της καλής προσαρμογής. Τελικά επιλέγεται εκείνο το μοντέλο με την

καλύτερη προσαρμογή των δεδομένων και επομένως εκείνο που “μιμείται” καλύτερα την δεσμευμένη διακύμανση.

➤ Μέτρηση της ακρίβειας πρόβλεψης των διαφόρων ARCH μοντέλων

Ο Hamilton (1994) πρότεινε την χρήση της ικανότητας πρόβλεψης των διαφορετικών ARCH μοντέλων σαν έναν τρόπο σύγκρισης αυτών των μοντέλων. Τα ARCH μοντέλα έχουν την ιδιότητα που επιτρέπει να προβλέπουν την υπό συνθήκη διακύμανση μιας σειράς, επομένως ένα κριτήριο το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα της επιλογής μεταξύ διαφόρων μοντέλων, είναι να διαλέξουμε αυτό που προβλέπει καλύτερα.

Για την πρόβλεψη των ARCH μοντέλων, έχουν προταθεί διάφορα μέτρα (συναρτήσεις απώλειας) μεταξύ των οποίων είναι τα παρακάτω :

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (The Mean Squared Error)

$$MSE = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 \right)$$

- Μέσο απόλυτο σφάλμα (The Mean Absolute Error)

$$MAE = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T |\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2| \right)$$

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα του λογαρίθμου των τετραγωνικών καταλοίπων (The Mean Squared Error of the log of the squared residuals)

$$|LE|^2 = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (\ln(\hat{\varepsilon}_t^2) - \ln(\hat{\sigma}_t^2))^2 \right)$$

- Μέσο απόλυτο σφάλμα του λογαρίθμου των τετραγωνικών καταλοίπων (The Mean Absolute Error of the log of the squared residuals)

$$[MAE]^2 = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T |\ln(\hat{\varepsilon}_t^2) - \ln(\hat{\sigma}_t^2)| \right)$$

Για όλα τα μοντέλα υπολογίζουμε την ποσοστιαία βελτίωση με βάση ένα μοντέλο το οποίο υποθέτει σταθερή διακύμανση π.χ. $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}^2$. Το μοντέλο που παρέχει την μεγαλύτερη ποσοστιαία βελτίωση, είναι αυτό που προτιμάται.

Ο Hamilton πρότεινε επίσης τη σύγκριση της προβλεπτικής ικανότητας σε διαφορετικούς ορίζοντες (4 και 8 περιόδους). Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω συναρτήσεις γίνονται :

$$MSE = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_{t+r}^2 - \hat{\sigma}_{t+r}^2)^2 \right)$$

$$MAE = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T |\hat{\epsilon}_{t+r}^2 - \hat{\sigma}_{t+r}^2| \right)$$

$$|LE|^2 = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T (\ln(\hat{\epsilon}_{t+r}^2) - \ln(\hat{\sigma}_{t+r}^2))^2 \right)$$

$$[MAE]^2 = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T |\ln(\hat{\epsilon}_{t+r}^2) - \ln(\hat{\sigma}_{t+r}^2)| \right)$$

όπου $\hat{\sigma}_{t+r}^2$ είναι η πρόβλεψη της διακύμανσης r περιόδους μπροστά δεδομένης της πληροφορίας στο χρόνο t .

Τέλος, επειδή τα GARCH μοντέλα μπορούν να γραφούν σαν ARMA μοντέλα για τα τετραγωνικά σφάλματα, για τη σύγκρισή τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα παραδοσιακά κριτήρια επιλογής όπως το κριτήριο Akaike (Akaike information criterion ή AIC) και το Bayesian κριτήριο (Bayesian information criterion ή BIC). Το μοντέλο με το μικρότερο BIC είναι το καταλληλότερο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυμεταβλητά μοντέλα Ετεροσκεδαστικότητας



4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η σημαντικότητα του κινδύνου και της αβεβαιότητας στη σύγχρονη οικονομική θεωρία αλλά και οι στατιστικές ιδιότητες των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων, έκαναν απαραίτητη την ανάπτυξη νέων οικονομετρικών τεχνικών, για την ανάλυση δεδομένων που αποτελούν χρονολογικές σειρές, και οι οποίες τεχνικές θα επέτρεπαν τη μοντελοποίηση χρονικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων. Το μονομεταβλητό μοντέλο αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (autoregressive conditional heteroskedasticity model ή ARCH), που πρώτος εισήγαγε ο Engle (1982), είναι πολύ δημοφιλές για τη μοντελοποίηση των χρηματοοικονομικών σειρών και πάνω σε αυτό το μοντέλο έχουν βασιστεί πολλά άλλα μονομεταβλητά μοντέλα που προτάθηκαν τα επόμενα χρόνια. Το κύριο χαρακτηριστικό των ARCH μοντέλων είναι ότι η μη δεσμευμένη διακύμανση της διαδικασίας είναι σταθερή, αλλά η δεσμευμένη διακύμανση δεν είναι σταθερή.

Η επέκταση των μονομεταβλητών τύπου ARCH μοντέλων σε ένα πολυμεταβλητό πλαίσιο και η εκτίμηση των χρονικά μεταβαλλόμενων συνδιακυμάνσεων μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, είναι σημαντικά συστατικά της διαδικασίας τιμολόγησης των χρηματοοικονομικών στοιχείων, της διαχείρισης κινδύνου και της ανάλυσης αμοιβαίων κεφαλαίων. Οι Kraft και Engle (1982) παρουσίασαν το πολυμεταβλητό ARCH μοντέλο ενώ οι Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988) πρότειναν ένα δεσμευμένο πίνακα συνδιακύμανσης ενός συνόλου αποδόσεων περιουσιακών στοιχείων, ο οποίος μεταβάλλεται διαχρονικά σύμφωνα με ένα πολυμεταβλητό GARCH μοντέλο.

Οστόσο, υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα που σχετίζονται με τα πολυμεταβλητά ARCH και GARCH μοντέλα : ο μεγάλος αριθμός παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν και η δυσκολία εκτίμησης λόγω του περιορισμού ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Τα προβλήματα αυτά ξεπερνιούνται με διάφορα τροποποιημένα πολυμεταβλητά μοντέλα GARCH που έχουν προταθεί.

4.2 Ορισμοί

Στην πολυμεταβλητή περίπτωση υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις έχουν τη μορφή :

$$y_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

όπου $y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t})'$ είναι ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα.

Έστω ότι η εξίσωση για το μέσο (mean equation) και η δεσμευμένη κατανομή της διαδικασίας σφαλμάτων (innovation process) είναι :

$$y_t = E(y_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N_N(0, H_t)$$

όπου I_{t-1} είναι το σ-πεδίο που δημιουργείται από το σύνολο πληροφορίας που είναι διαθέσιμη μέχρι και τη στιγμή $t-1$, $E(y_t | I_{t-1})$ είναι ο μέσος της διαδικασίας, ε_t είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα σφαλμάτων, H_t είναι ένας $N \times N$ πίνακας συνδιακυμάνσεων με στοιχεία, $h_{ij,t}$ $i=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,N$, όπου $h_{ij,t}$ είναι η διακύμανση της i μεταβλητής τη χρονική στιγμή t και $h_{ij,t}$ με $i \neq j$ είναι η συνδιακύμανση ανάμεσα στην i και j μεταβλητή τη χρονική στιγμή t .

Η ποσότητα $E(y_t | I_{t-1})$ μπορεί να είναι ίση με μια ARMA διαδικασία για το y_t , να είναι απλά ίση με μ ή με μ ακόμα να είναι ίση με 0 . Στην ανάλυσή μας δεν θα μας απασχολήσει η εξίσωση μέσου, οπότε θα μπορούσαμε ακόμα και να υποθέσουμε ότι $E(y_t | I_{t-1}) = 0$.

Όσον αφορά τον πίνακα δεσμευμένης διακύμανσης H_t , τα διάφορα μοντέλα που αφορούν χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα συνδιακύμανσης θέτουν διαφορετικούς περιορισμούς όσον αφορά το πώς οι διαταραχές του παρελθόντος επηρεάζουν τις προβλέψεις για τον πίνακα συνδιακύμανσης. Η εξειδίκευση του πίνακα δεσμευμένης διακύμανσης είναι αυτή που διαφοροποιεί τα διάφορα πολυμεταβλητά GARCH μοντέλα. Γενικά στη βιβλιογραφία διακρίνονται τρεις προσεγγίσεις για την κατασκευή πολυμεταβλητών GARCH μοντέλων :

1. άμεσες γενικεύσεις του μονομεταβλητού GARCH υποδείγματος του Bollerslev
2. γραμμικοί συνδυασμοί μονομεταβλητών GARCH υποδειγμάτων
3. μη γραμμικοί συνδυασμοί μονομεταβλητών GARCH υποδειγμάτων

Στην πρώτη κατηγορία ανήκει το υπόδειγμα VECM, το υπόδειγμα BEKK και τα παραγοντικά μοντέλα (factor models). Ακόμη σε αυτή την κατηγορία υπάρχουν σχετικά μοντέλα, όπως το flexible MGARCH, το Riskmetrics, το Cholesky και το πλήρες παραγοντικό (full-factor) GARCH μοντέλο. Στη δεύτερη κατηγορία έχουμε τα γενικευμένα ορθογώνια μοντέλα και τα λανθάνοντα παραγοντικά μοντέλα (latent factor models). Η τελευταία κατηγορία περιλαμβάνει υποδείγματα σταθερής αλλά και δυναμικής δεσμευμένης συσχέτισης, τα γενικευμένα μοντέλα δυναμικής συνδιακύμανσης και τα copula-GARCH μοντέλα.

4.3 VECM και DVEC μοντέλο

Πριν προχωρήσουμε στην πρακτική εφαρμογή, καλό είναι να αναφέρουμε λίγα μόνο θεωρητικά πράγματα για το μοντέλο diagonal VEC.

Είναι προφανές, από τα όσα αναφέρθηκαν στην εισαγωγή των πολυμεταβλητών μοντέλων (παράγραφος 4.2), ότι κάθε παραμετροποίηση του H_t αντιμετωπίζει το γεγονός ότι ο H_t έχει $N \times N$ στοιχεία, κάτι που εξ αρχής κάνει τον αριθμό των παραμέτρων υπερβολικά μεγάλο, ακόμα και για σχετικά όχι μεγάλες τιμές του N . Για να εκφράσουμε τον H_t σε μορφή διανύσματος, χρησιμοποιούμε τον τελεστή “vech(.)” που μετατρέπει το κάτω τριγωνικό κομμάτι ενός συμμετρικού πίνακα σε ένα διάνυσμα-στήλη. Μια γενική μορφή του H_t είναι η παρακάτω :

$$vech(H_t) = vech(\Sigma) + \sum_{i=1}^q A_i vech(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^p B_i vech(H_{t-i}) \quad (5.2)$$

όπου $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Nt})'$,

Σ είναι ένας $N \times N$ θετικά ορισμένος πίνακας και

A_i, B_i είναι $\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$ πίνακες.

Η σχέση (5.2) αποτελεί μια vech παρουσίαση του πολυμεταβλητού μοντέλου GARCH. Για $N=2$ και $p=q=1$, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή :

$$vech(H_t) = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η εκτίμηση του H_t είναι δύσκολη λόγω του μεγάλου αριθμού παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν. Συγκεκριμένα, η εξίσωση (5.2) θα είναι δύσκολο να εκτιμηθεί γιατί αυτή έχει $[\frac{N(N+1)}{2}]x[1+\frac{N(N+1)}{2}(p+q)]$ παραμέτρους, όπου για την περίπτωση της διμεταβλητής (5.3) μετράει 21 παραμέτρους –πολύ μεγάλος αριθμός-

Οι Engle, Granger και Kraft (1986), δημοσίευσαν το πρώτο άρθρο πάνω στα πολυμεταβλητά ARCH μοντέλα. Αυτοί υπέθεσαν ένα διμεταβλητό μοντέλο ARCH το οποίο ήταν σαν το (5.3) αλλά χωρίς τους όρους h_t . Για το μοντέλο αυτό έθεσαν κάποιους περιορισμούς έτσι ώστε ο H_t να είναι θετικά ορισμένος. Οι περιορισμοί αυτοί είναι οι ακόλουθοι :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} > 0, \sigma_{22} > 0, \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0 \\ \alpha_{11} \geq 0, \alpha_{13} \geq 0, \alpha_{31} \geq 0, \alpha_{33} \geq 0 \\ \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}^2 \geq 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{13} - \frac{1}{4}\alpha_{12}^2 \geq 0, \alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{21}^2 \geq 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{33} - \frac{1}{4}\alpha_{32}^2 \geq 0, \alpha_{13}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Να σημειώσουμε ότι στις σχέσεις (5.2), (5.3) κάθε $h_{ij,t}$ εξαρτάται από υστερημένα τετραγωνικά κατάλοιπα και τις παρελθούσες διακυμάνσεις όλων των μεταβλητών του συστήματος. Μια απλή υπόθεση που μπορεί να γίνει έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των παραμέτρων, είναι να εξειδικεύσουμε ότι η δεσμευμένη διακύμανση εξαρτάται μόνο από τα δικά της υστερημένα τετραγωνικά κατάλοιπα και τις παρελθούσες τιμές. Η υπόθεση αυτή θεωρεί τους A_i και B_i διαγώνιους πίνακες. Στην περίπτωση αυτή, οι συνθήκες στην (5.4) γίνονται :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} > 0, \sigma_{22} > 0, \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0 \\ \alpha_{11} \geq 0, \alpha_{33} \geq 0, \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Από την (5.2) η “διαγώνια παρουσίαση” για $p = q = 1$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$h_{ij,t} = \sigma_{ij} + a_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} + b_{ij}h_{ij,t-1} \quad \text{για } i, j = 1, 2, \dots, N$$

Η παραπάνω φόρμουλα χρησιμοποιήθηκε από τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988) και είναι γνωστή ως diagonal VEC ή DVEC (p, q) μοντέλο. Βέβαια ο περιορισμός στο DVEC μοντέλο μειώνει τον αριθμό των παραμέτρων σε $3N(N+1)/2$. Όμως και κάτω από αυτή την υπόθεση της διαγωνιότητας, τα μεγάλα συστήματα εξακολουθούν να έχουν πολλές παραμέτρους και είναι δύσκολο να εκτιμηθούν στην πράξη. Το σημαντικό είναι πως το DVEC μοντέλο άνοιξε το δρόμο για την εμπειρική χρήση των πολυμεταβλητών GARCH μοντέλων. Έτσι η ανάλυση που ακολουθεί στα πολυμεταβλητά μοντέλα γίνεται με βάση το παραπάνω μοντέλο.

Στην παρούσα εργασία δεν θα επεκταθώ σε περαιτέρω θεωρητική ανάλυση των πολυμεταβλητών μοντέλων αλλά θα γίνει εφαρμογή των GARCH μοντέλων και συγκεκριμένα του (DVEC ή Diagonal Vector Model) σε χρονολογικές σειρές αμοιβαίων κεφαλαίων.

Ακολουθεί το κεφάλαιο 5 με εφαρμογές των μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας σε ημερήσιες αποδόσεις αμοιβαίων κεφαλαίων.

Η έρευνα στην υποδειγματοποίηση του δεσμευμένου μέσου παρ'ότι έχει ξεκινήσει αρκετές δεκαετίες πριν, συνεχίζει να ενδιαφέρει τους ερευνητές. Τα σχετικά θέματα που μελετώνται σήμερα είναι η συνολοκλήρωση, οι δομικές αλλαγές, οι διαφορετικές μορφές μη-γραμμικότητας, οι έλεγχοι υποθέσεων και οι ιδιότητες των εκτιμητών του δείγματος. Είναι σίγουρο πως τα προβλήματα της υποδειγματοποίησης του δεσμευμένου μέσου κληρονομούνται και στα υποδείγματα ARCH, δηλαδή στην προσπάθειά μας να υποδειγματοποίησουμε τη δεσμευμένη διακύμανση. Στα παραπάνω κεφάλαια επιχειρήσαμε μια σύντομη προσέγγιση των προβλημάτων αυτών, μέσα από την ανάλυση των πιο σημαντικών εναλλακτικών μορφών των υποδειγμάτων ARCH. Εκτός όμως από αυτά, τα υποδείγματα ARCH παρουσιάζουν και προβλήματα τα οποία δεν συναντώνται στα υποδείγματα της δεσμευμένης πρώτης ροπής. Για παράδειγμα, μέχρι σήμερα, δεν γνωρίζουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών του ARCH. Η σημερινή βιβλιογραφία προσπαθεί να δώσει απαντήσεις σε τέτοιου είδους θέματα, αλλά παράλληλα επεκτείνει τις υπάρχουσες εναλλακτικές μορφές και χρήσεις τους. Βέβαια, δεν είναι ίδια η ένταση όπως την πρώτη δεκαετία δημιουργίας τους, παρ'όλα αυτά παραμένει μια θεματική ενότητα με πολλές εφαρμογές στην οικονομική επιστήμη.

“ Η επιτυχία των ARCH είναι πιθανό να οδηγήσει τους ερευνητές στην χρήση της τρίτης και τέταρτης ροπής με έναν συστηματικό τρόπο. Το γεγονός αυτό ίσως μας βοηθήσει στην προσπάθειά μας να γνωρίσουμε καλύτερα την συμπεριφορά των οικονομικών μεταβλητών εν γένει, μια προσπάθεια που ξεκίνησε έναν αιώνα πριν από τον Luis Bachelier.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



Με βάση την παραπάνω θεωρία που αναπτύχθηκε στα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας, θα προσπαθήσουμε να την επαληθεύσουμε πάνω στην πρακτική εφαρμογή των GARCH μοντέλων σε πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας, αφορούν ημερήσιες αποδόσεις αμοιβαίων κεφαλαίων. Στη συνέχεια θα γίνει παρουσίαση της ανάλυσης μιας χρονολογικής σειράς με βάση τα ARCH και GARCH μοντέλα και η οποία σειρά παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά εκείνα που οδηγούν στη χρήση των παραπάνω μοντέλων. Τέλος, θα γίνει ανάλυση ενός πολυμεταβλητού μοντέλου με τέσσερις χρονολογικές σειρές.

5.1 Εφαρμογή μονομεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας

Η μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων είχε βασιστεί στις υποθέσεις της σταθερότητας της διακύμανσης και της κανονικότητας. Αναφορικά με την πρώτη υπόθεση, ο Mandelbrot (1963a) ήταν ο πρώτος που έδειξε τη διαχρονική μεταβλητότητα της διακύμανσης. Ενώ σχετικά με τη δεύτερη, οι Mandelbrot (1963a) και Fama (1965) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εμπειρική κατανομή των αποδόσεων είναι λεπτόκυρτη και συνεπώς, δεν μπορεί να είναι κανονική. Αυτά και άλλα χαρακτηριστικά θα δούμε στη συνέχεια της μελέτης πως αντιμετωπίζονται και ποια τελικά είναι η καταλληλότερη κατανομή που μπορεί να περιγράψει καλύτερα τέτοιου είδους χρονολογικές σειρές.



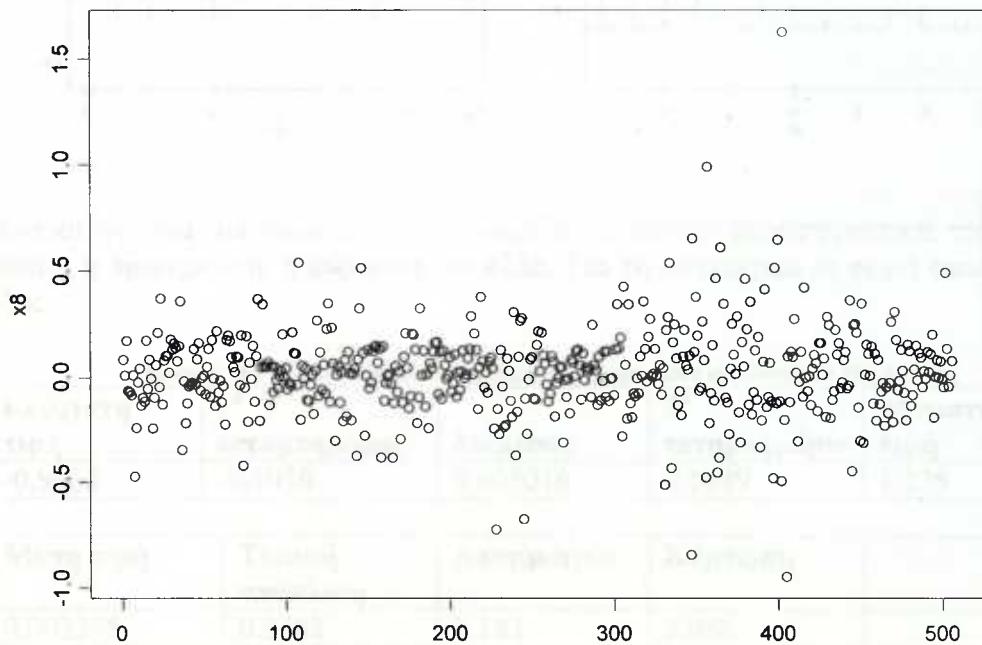
5.1.1 Εφαρμογή σε μία σειρά αποδόσεων

5.1.1.1 Περιγραφή δεδομένων και ανάλυσή τους

Ξεκινάμε την ανάλυση μιας χρονολογικής σειράς η οποία περιέχει ημερήσιες αποδόσεις αμοιβαίων κεφαλαίων. Πρόκειται για αποδόσεις 506 ημερών, έχουμε δηλαδή 506 παρατηρήσεις.

Συνήθως σε πολλές μικροοικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές, είναι σύνηθες φαινόμενο μεγάλες και μικρές αλλαγές να σχηματίζουν ομάδες (clusters) σε γειτονικές χρονικές περιόδους. Έτσι η σειρά ενδέχεται να παρουσιάζει μικρή σειριακή συσχέτιση. Μια πρώτη εικόνα της σειράς παίρνουμε από το διάγραμμα που ακολουθεί (μια καλύτερη από το διάγραμμα 6, πιο κάτω).

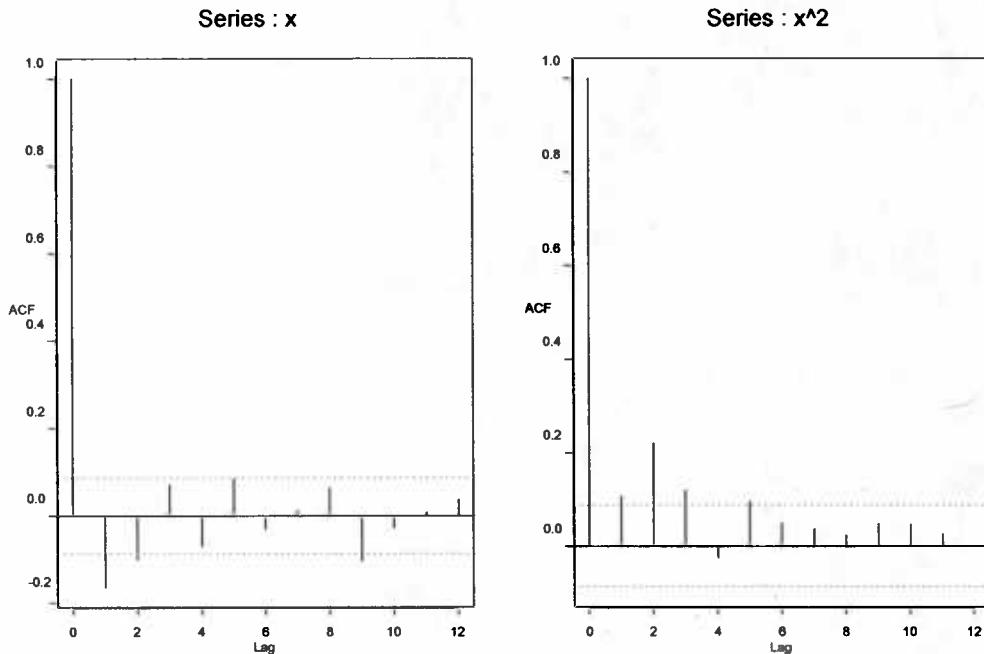
Διάγραμμα 1 : Ημερήσιες αποδόσεις αμοιβαίων κεφαλαίων



Για να διαπιστωθεί όμως αν όντως κάτι τέτοιο συμβαίνει, φτιάχνουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για τις αποδόσεις και τα τετράγωνα των αποδόσεων. Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα 2, τόσο στις αποδόσεις όσο και στα τετράγωνα των αποδόσεων υπάρχει αυτοσυσχέτιση τουλάχιστον σε lag 4. Και επειδή οι τετραγωνικές αποδόσεις μετράνε τη ροπή δεύτερης τάξης στην αρχική χρονολογική σειρά, αυτό δηλώνει ότι η διακύμανση της σειράς δεσμευμένη στα ιστορικά της στοιχεία αλλάζει στο χρόνο ή ισοδύναμα ότι η σειρά παρουσιάζει μεταβαλλόμενη δεσμευμένη διακύμανση ή volatility clustering. Άρα παρατηρούμε ότι είναι απαραίτητη η χρήση των ARCH μοντέλων για τη μοντελοποίηση της παραπάνω σειράς.

Διάγραμμα 2 : Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (acf) των αποδόσεων και των τετραγώνων αυτών



Απαραίτητο για μία σειρά είναι να γνωρίζουμε κάποια χαρακτηριστικά της, όπως ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση και άλλα. Για τη συγκεκριμένη σειρά αυτά είναι τα εξής :

Πίνακας 1 : Περιγραφικά στοιχεία των ημερησίων αποδόσεων της σειράς

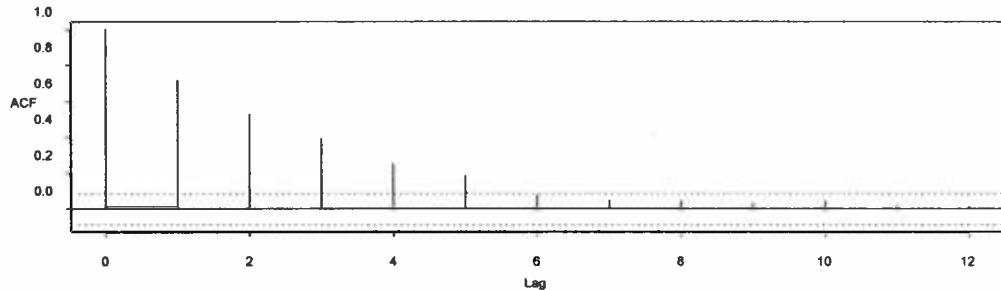
Ελάχιστη τιμή	1 ^ο τεταρτημόριο	διάμεσος	3 ^ο τεταρτημόριο	Μέγιστη τιμή
-0.9662	-0.1039	0.005016	0.1089	1.225
Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ασυμμετρία	Κύρτωση	
0.002375	0.2302	0.143	7.086	

Εδώ άξιον προσοχής είναι ότι η χρονολογική σειρά έχει υψηλή τιμή για την κύρτωση, 7.086 πολύ μεγαλύτερη δηλαδή από τον συντελεστή κύρτωσης της κανονικής κατανομής (ο οποίος είναι 3). Επομένως έχουμε να κάνουμε με λεπτόκυρτη κατανομή, δηλαδή κατανομή με παχές ουρές (thick tails). Επιπλέον, η σειρά παρουσιάζει ασυμμετρία διαφορετική από το μηδέν (η ασυμμετρία της κανονικής κατανομής), κάτι που επίσης δηλώνει απόκλιση από την υπόθεση της κανονικότητας.

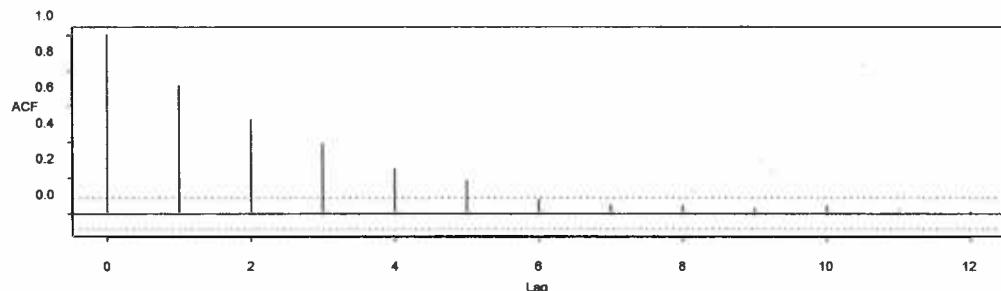
Τέλος, αν θέλουμε να παραστήσουμε την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγωνικών καταλοίπων και της διακύμανσης, αυτή είναι η παρακάτω παράσταση.

Διάγραμμα 3 : Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των ε_t και σι για μια ARCH (1) διαδικασία

Series : arch1\$et^2



Series : arch1\$sigma.t^2



Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι και οι δύο σειρές παρουσιάζουν ιδιότητες σειριακής συσχέτισης.

Πριν όμως να εκτιμήσουμε ένα ARCH μοντέλο για την χρονολογική μας σειρά, είναι καλή πρακτική να ελέγξουμε αν υπάρχουν ARCH επιδράσεις στα κατάλοιπα. Αν υπάρχουν, προχωράμε στην εκτίμηση διαφορετικά η ιδέα των ARCH μοντέλων δεν είναι και η καλύτερη για τη συγκεκριμένη σειρά. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τον έλεγχο ακολουθούν παρακάτω.

Πίνακας 2 : Έλεγχος για ARCH επιδράσεις

Έλεγχος για ARCH επιδράσεις	με βάση το LM Test
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις
T στατιστική	40.9150
p.value	0.0001
Κατανομή κάτω από την μηδενική υπόθεση	X^2 με 12 βαθμούς ελευθερίας
Αριθμός παρατηρήσεων	506

Όπως είπαμε και στη θεωρία, ο έλεγχος για ARCH επιδράσεις στα κατάλοιπα (ARCH effects) γίνεται με το Lagrange Multiplier (LM) test με μηδενική υπόθεση :

H_0 : δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις, έναντι της εναλλακτικής
 H_1 : υπάρχουν ARCH επιδράσεις

۱

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0 \\ H_1 : \text{κάποιο } \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

Από τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι το p -value = 0.0001 < α = 0.05 (αν θεωρήσουμε ως επίτεδο σημαντικότητας το 5%). Οπότε για 5%, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση και επομένως συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ARCH επιδράσεις στα κατάλοιπα της σειράς. Έτσι ένα ARCH μοντέλο είναι απαραίτητο για να περιγράψει τα δεδομένα και τη διακύμανση.

Στη συνέχεια προχωράμε στην εκτίμηση ενός GARCH (1,1) με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Όπως είδαμε και στη θεωρία ένα GARCH μοντέλο έχει τη μορφή :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p (b_j \sigma_{t-j}^2)$$

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι :

Συντελεστές	
c	0.014848
a_0	0.004497
a_1	0.139498
b_1	0.755489

Πίνακας 3 : Εκτίμηση του GARCH (1,1)

Έτσι οι πιο πάνω σχέσεις γίνονται :

$$y_t = 0.014848 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.004497 + 0.139498\epsilon_{t-1}^2 + 0.755489\sigma_{t-1}^2$$

Η μη δεσμευμένη διακύμανση της σειράς, $a_0 / (1-a_1-b_1)$, είναι 0.2069468.

Αφού εκτιμήσαμε το μοντέλο GARCH (1,1), επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε αν αυτό έχει καλό fit στα δεδομένα. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει με δύο τρόπους :

- με συγκεντρωτικές στατιστικές πληροφορίες
 - και γραφικά

Τα στατιστικά που παίρνουμε για το παραπάνω μοντέλο είναι :

	Value	Std.Error	t value	Pr (> t)
c	0.014848	0.008252	1.799	3.628e-002
a₀	0.004497	0.001229	3.661	1.390e-004
a₁	0.139498	0.022361	6.238	4.698e-010
b₁	0.755489	0.044643	16.923	0.000e+000

Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται ξανά οι συντελεστές του μοντέλου, τα τυπικά σφάλματα και οι τιμές των p-value για τον έλεγχο της σημαντικότητας των συντελεστών. Από τις τιμές αυτές, βλέπουμε ότι το p-value < $\alpha = 0.05$ οπότε όλοι οι συντελεστές είναι σημαντικοί για το μοντέλο που εκτιμήσαμε.

Ένα άλλο στοιχείο που φαίνεται από τα στατιστικά του μοντέλου είναι η κανονικότητα ή όχι των καταλοίπων. Η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην κανονική κατανομή αφού το βασικό garch μοντέλο υποθέτει κανονική κατανομή για τα κατάλοιπα ε_t . Για να δούμε αν όντως κάτι τέτοιο ισχύει εφαρμόζουμε κάποιους ελέγχους κανονικότητας. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής :

Πίνακας 4 : Έλεγχος κανονικότητας σφαλμάτων

Jarque-Bera	229.9
P-value	0
Shapiro-Wilk	0.9739
P-value	0.0005947

Από τους ελέγχους αυτούς για τα τυποποιημένα κατάλοιπα είναι φανερό ότι τόσο ο Jarque-Bera όσο και ο Shapiro-Wilk απορρίπτουν την υπόθεση της κανονικότητας. Και αυτό διότι και στις δύο περιπτώσεις p-value < $\alpha = 0.05$. Έτσι η μηδενική υπόθεση του ελέγχου

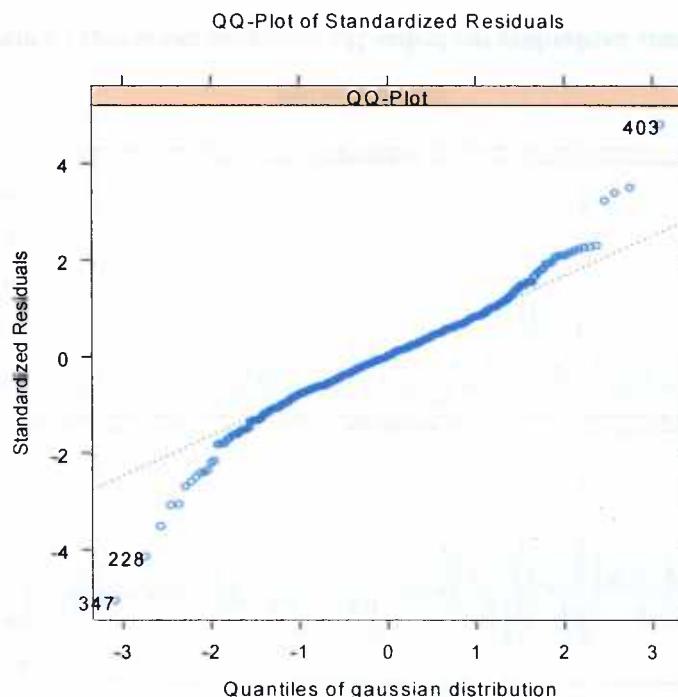
H_0 : τα κατάλοιπα κατανέμονται κανονικά

H_1 : τα κατάλοιπα δεν κατανέμονται κανονικά ,

απορρίπτεται, και επομένως άλλη είναι η κατανομή που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα της σειράς.

Η διαπίστωση αυτή μπορεί να γίνει και γραφικά με ένα QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.

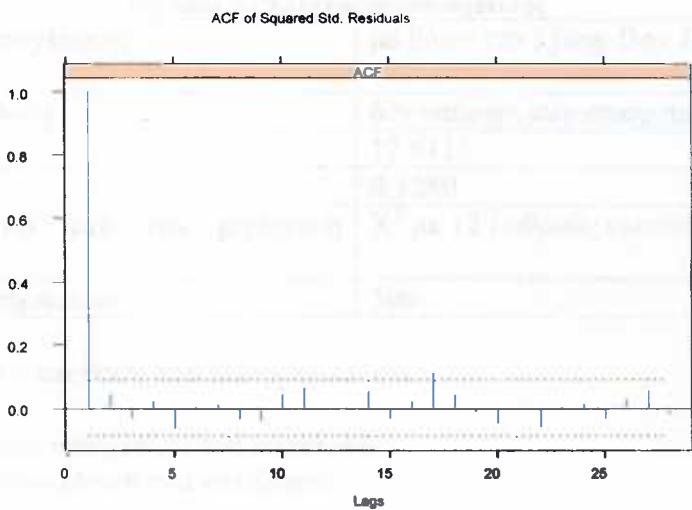
Διάγραμμα 4 : Κανονικό QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων.



Από το διάγραμμα 4 παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική διασπορά και στις δύο ουρές από την κανονική QQ-γραμμή. Καταλήγουμε λοιπόν στο ίδιο συμπέρασμα με τους ελέγχους παραπάνω. Επομένως είναι φανερό ότι η υπόθεση της κανονικότητας δεν είναι κατάλληλη για τη σειρά που μελετάμε.

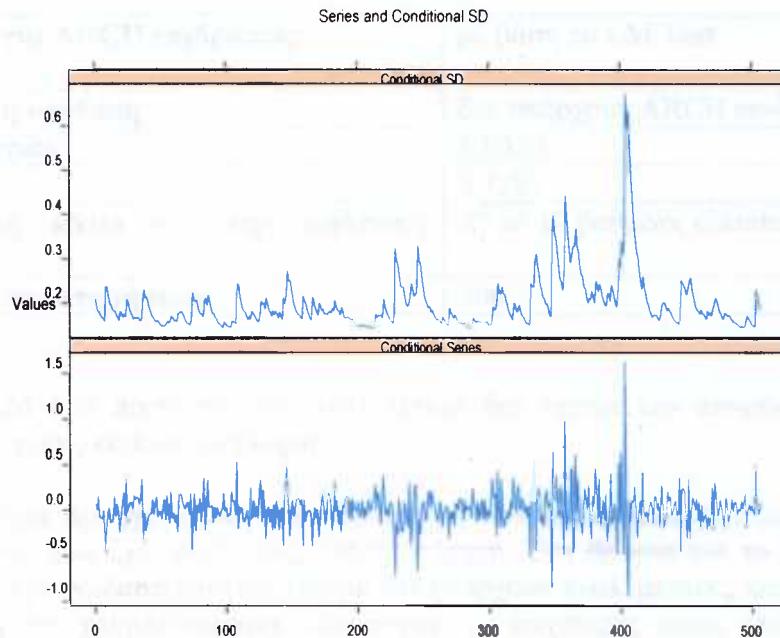
Εκτός από το QQ-plot, υπάρχουν και άλλα διαγράμματα με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να δούμε την προσαρμογή του μοντέλου. Το πρώτο από αυτά είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (acf) στα τετραγωνικά τυποποιημένα κατάλοιπα που ακολουθεί.

Διάγραμμα 5 : ACF των τετραγωνικών τυποποιημένων καταλοίπων



Το γράφημα αυτό δείχνει ότι έχει μείνει λίγη αυτοσυσχέτιση στα τετραγωνικά τυποποιημένα κατάλοιπα.

Διάγραμμα 6 : Ημερήσιες αποδόσεις της σειράς και δεσμευμένη τυπική απόκλιση



Το δεύτερο διάγραμμα έχει στο πάνω μέρος την τυπική απόκλιση και στο κάτω την αρχική σειρά.

Ένας άλλος έλεγχος που πρέπει να γίνει είναι αυτός της αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων.

Για να ελέγχουμε αν η δεσμευμένη διακύμανση και ο δεσμευμένος μέσος παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση, πραγματοποιούμε τον έλεγχο Ljung - Box για έλεγχο της αυτοσυσχέτισης. Τα αποτελέσματα παρατίθενται αμέσως :

Πίνακας 5 : Έλεγχος αυτοσυσχέτισης

Έλεγχος αυτοσυσχέτισης	με βάση τον Ljung-Box έλεγχο
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση
T στατιστική	17.6115
p.value	0.1280
Κατανομή κάτω από την μηδενική υπόθεση	χ^2 με 12 βαθμούς ελευθερίας
Αριθμός παρατηρήσεων	506

Στον έλεγχο αυτό η υπόθεση που ελέγχουμε είναι :

H_0 : δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα

H_1 : υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα

Στην περίπτωση αυτή δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αφού $p\text{-value} = 0.1280 > \alpha = 0.05$. Επομένως ικανοποιείται η υπόθεση της μη ύπαρξης αυτοσυσχέτισης στα κατάλοιπα. Και το ίδιο ισχύει για τα τετράγωνα των καταλοίπων. Κάτι άλλο που πρέπει να ελέγξουμε είναι το αν έχουν μείνει επιδράσεις ARCH στα κατάλοιπα.

Έλεγχος για ARCH επιδράσεις	με βάση το LM Test
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις
T στατιστική	8.8030
p.value	0.7197
Κατανομή κάτω από την μηδενική υπόθεση	χ^2 με 12 βαθμούς ελευθερίας
Αριθμός παρατηρήσεων	506

Από το LM test προκύπτει ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει και επομένως η ανάλυση προχωράει χωρίς κάποιο πρόβλημα.

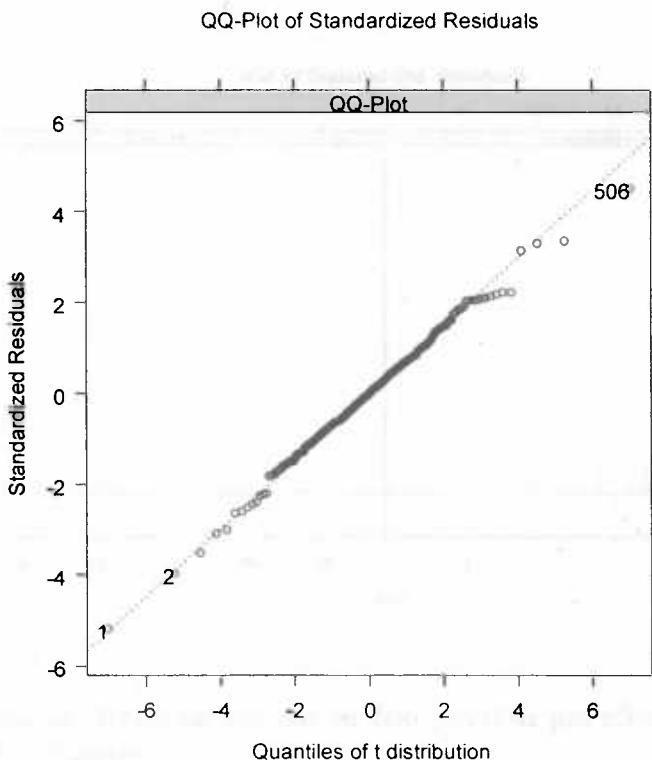
Είδαμε προηγουμένως ότι η κατανομή των καταλοίπων δεν είναι η κανονική, αλλά κάποια που έχει παχύτερες ουρές απ' αυτή. Στη θεωρία για τα μονομεταβλητά μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας είδαμε ότι υπάρχουν εναλλακτικές κατανομές για την περιγραφή των χρηματοοικονομικών σειρών με παχύτερες ουρές από την κανονική. Αυτές είναι η Student-t κατανομή, η Generalized Error κατανομή και η double exponential κατανομή (βλέπε κεφάλαιο 2). Εδώ θα γίνει ξανά εκτίμηση του GARCH μοντέλου υποθέτοντας ότι η κατανομή των καταλοίπων είναι η Student-t και στη συνέχεια θα γίνει σύγκριση για το ποια κατανομή παρέχει το καλύτερο fit για το μοντέλο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων χρησιμοποιώντας την t-κατανομή.

	Value	Std.Error	t value	Pr (> t)
c	0.017789	0.006884	2.584	5.020e-003
a_0	0.005785	0.002616	2.211	1.375e-002
a_1	0.183360	0.067911	2.700	3.584e-003
b_1	0.699724	0.094370	7.415	2.619e-013

Για να δούμε την καλή προσαρμογή του μοντέλου, κατασκευάζουμε το QQ-plot βασισμένο στην εκτιμώμενη Student-t κατανομή. Έτσι αυτό που παίρνουμε είναι η ακόλουθη παράσταση :

Διάγραμμα 7 : Student-t QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων



Αν συγκρίνουμε το διάγραμμα 4 με το διάγραμμα 7, είναι φανερό ότι η κατανομή t παρέχει καλύτερη προσαρμογή (fit) από την κανονική κατανομή. Τώρα η διασπορά γύρω από την QQ-γραμμή είναι πολύ μικρή. Η διαπίστωση αυτή που γίνεται γραφικά, μπορεί να επαληθευτεί από διάφορα κριτήρια όπως το AIC και το BIC.

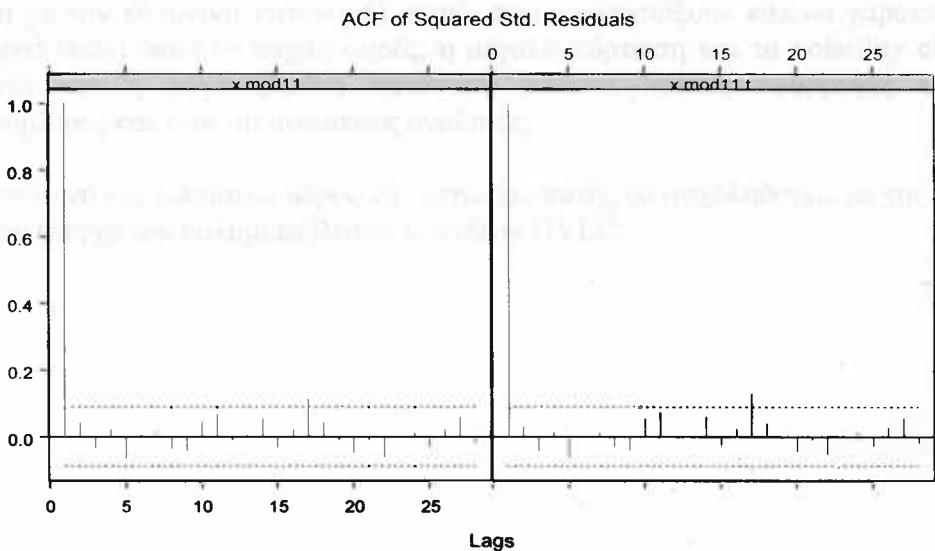
	x. με κανονική κατανομή	x. με t κατανομή
AIC	-222.8	-280.4
BIC	-205.9	-259.3
Likelihood	115.4	145.2

Πίνακας 6 : Κριτήρια επιλογής των GARCH μοντέλων

Από τα παραπάνω στοιχεία διαπιστώνουμε ότι καλύτερο μοντέλο είναι εκείνο με το μικρότερο AIC ή με το μικρότερο BIC, δηλαδή το μοντέλο που εκτιμήθηκε με βάση την κατανομή t .

Εκτός από τα κριτήρια AIC - BIC μπορούμε να συγκρίνουμε και τις ACF των τετραγωνικών τυποποιημένων καταλοίπων των προσαρμοσμένων μοντέλων. Αυτές είναι οι παρακάτω :

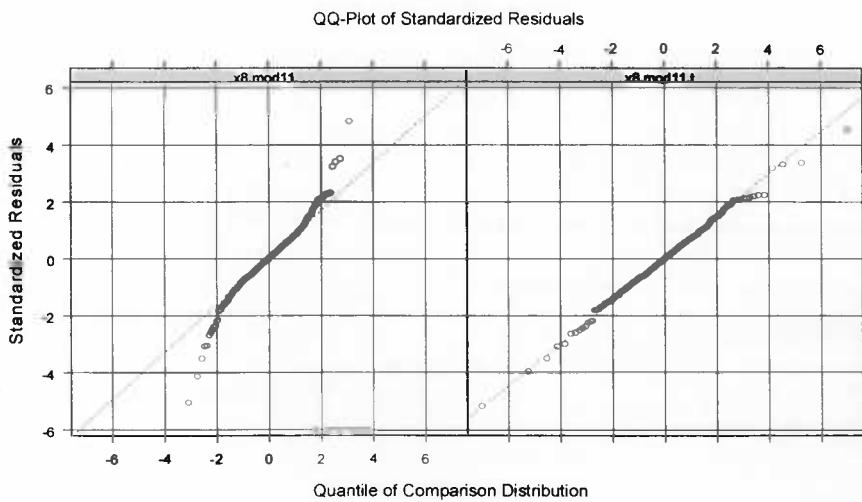
Διάγραμμα 8 : Σύγκριση των ACF των τετραγωνικών τυποποιημένων καταλοίπων



Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι και τα δύο μοντέλα μοντελοποιούν με επιτυχία τη δεσμευμένη διακύμανση.

Τέλος, μπορούμε να συγκρίνουμε και τα QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων για να δούμε τη διαφορά των δύο κατανομών στην προσαρμογή. Έτσι παίρνουμε το γράφημα που ακολουθεί.

Διάγραμμα 9 : Σύγκριση των QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων



Από το γράφημα παρατηρούμε τη μεγάλη βελτίωση στη γραμμή QQ με τη χρήση της t κατανομής.

Σαν συμπέρασμα, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή των μοντελοποιεί καλύτερα (σε σχέση με την κανονική κατανομή) σειρές που παρουσιάζουν κάποια χαρακτηριστικά (stylized facts) όπως οι παχιές ουρές, η μεγάλη κύρτωση και το volatility clustering. Γι' αυτό και η συγκεκριμένη κατανομή βρίσκει πολλές εφαρμογές από τους οικονομέτρες και τους οικονομικούς αναλυτές.

Στο επόμενο και τελευταίο μέρος της εργασίας αυτής θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση και τον έλεγχο του πολυμεταβλητού μοντέλου DVEC.



5.2 Εφαρμογή πολυμεταβλητών μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας

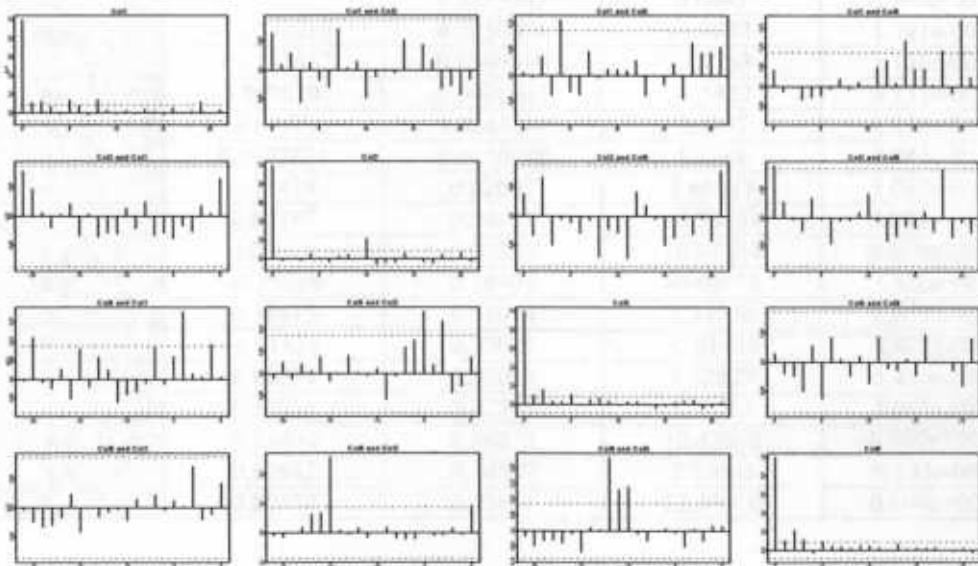
5.2.1 Εφαρμογή σε 4 σειρές αποδόσεων αμοιβαίων κεφαλαίων

5.2.1.1 Περιγραφή δεδομένων και ανάλυσή τους

Όταν μοντελοποιούμε πολυμεταβλητές οικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές χρησιμοποιώντας το διάνυσμα αυτοπαλίνδρομων μοντέλων, συχνά τα τετραγωνικά κατάλοιπα παρουσιάζουν σημαντική σειριακή συσχέτιση. Στην προηγούμενη εφαρμογή είδαμε ότι οι χρονολογικές σειρές ενδέχεται να είναι υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικές και τα GARCH μοντέλα με μεγάλη επιτυχία μοντελοποιούν τη σειριακή συσχέτιση στη ροτή δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια θα γίνει ανάλυση μιας πολυμεταβλητής σειράς. Και η εκτίμηση αυτής θα γίνει με βάση το δημοφιλές πολυμεταβλητό μοντέλο diagonal VEC (DVEC(p,q)).

Τα δεδομένα μας αποτελούνται από τέσσερις χρονολογικές σειρές ημερήσιων αποδόσεων αμοιβαίων κεφαλαίων (μία είναι η σειρά που χρησιμοποιήθηκε στη μονομεταβλητή περίπτωση και έχουμε και άλλες τρεις). Όπως στην μονομεταβλητή περίπτωση όπου οι σειρές αυτές παρουσιάζουν μικρή σειριακή συσχέτιση, και στην πολυμεταβλητή περίπτωση ο έλεγχος για σταυρωτή συσχέτιση (cross-correlation) στα επίπεδα καθώς και η μεταβλητότητα στις σειρές αυτές, παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Για να ελέγχουμε αν υπάρχει συσχέτιση και σταυρωτή συσχέτιση κατασκευάζουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Για τη συγκεκριμένη πολυμεταβλητή χρονολογική σειρά αυτή είναι η παρακάτω :

Διάγραμμα 10 : ACF της πολυμεταβλητής σειράς



Από το διάγραμμα 10 βλέπουμε ότι τόσο η αυτοσυσχέτιση όσο και η σταυρωτή συσχέτιση των ροπών 2nd τάξης είναι σημαντική σε lag πάνω από 5, κάτι που σημαίνει ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης της σειράς είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και σειριακά συσχετισμένος.

Στη συνέχεια προχωράμε στην προσαρμογή και εκτίμηση ενός DVEC(1,1) μοντέλου στην τετραμεταβλητή χρονολογική σειρά. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα εξής :

Πίνακας 7 : Εκτίμηση DVEC (1,1) μοντέλου

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
c(1)	0.0051683	0.0084797	0.6095	2.712e-001
c(2)	0.0455962	0.0081209	5.6147	1.638e-008
c(3)	0.0419120	0.0090391	4.6367	2.264e-006
c(4)	0.0175123	0.0088118	1.9874	2.371e-002
a _{0,11}	0.0027841	0.0012028	2.3147	1.052e-002
a _{0,21}	0.0004862	0.0005669	0.8576	1.958e-001
a _{0,31}	-0.0009006	0.0024201	-0.3721	3.550e-001
a _{0,41}	0.0008620	0.0017810	0.4840	3.143e-001
a _{0,22}	0.0268716	0.0249815	1.0757	1.413e-001
a _{0,32}	0.0015299	0.0040108	0.3814	3.515e-001
a _{0,42}	0.0025524	0.0019665	1.2979	9.746e-002
a _{0,33}	0.0040111	0.0024214	1.6565	4.913e-002
a _{0,43}	0.0009103	0.0009643	0.9439	1.728e-001
a _{0,44}	0.0033772	0.0009728	3.4718	2.810e-004
a ₁₁	0.1117281	0.0306785	3.6419	1.495e-004
a ₂₁	-0.0198096	0.0191056	-1.0368	1.502e-001
a ₃₁	0.0665006	0.0581112	1.1444	1.265e-001
a ₄₁	0.0270220	0.0419387	0.6443	2.598e-001
a ₂₂	-0.0272288	0.0250804	-1.0857	1.391e-001
a ₃₂	-0.0185437	0.0389310	-0.4763	3.170e-001
a ₄₂	-0.0626301	0.0405845	-1.5432	6.171e-002
a ₃₃	0.0546936	0.0244204	2.2397	1.278e-002
a ₄₃	0.0577825	0.0459030	1.2588	1.043e-001
a ₄₄	0.11429	0.02007	5.69313	1.067e-008
b ₁₁	0.82195	0.04425	18.57453	0.000e+000
b ₂₁	0.93074	0.09232	10.08154	0.000e+000
b ₃₁	-0.23898	0.58901	-0.40573	3.426e-001
b ₄₁	0.78615	0.41044	1.91536	2.801e-002
b ₂₂	-0.01424	0.97025	-0.01467	4.942e-001
b ₃₂	0.80639	0.53039	1.52037	6.453e-002
b ₄₂	0.52936	0.37735	1.40283	8.065e-002
b ₃₃	0.85490	0.06873	12.43802	0.000e+000
b ₄₃	0.82982	0.14507	5.72006	9.195e-009
b ₄₄	0.80538	0.03651	22.05910	0.000e+000

Στον παραπάνω πίνακα υπάρχουν οι εκτιμώμενοι συντελεστές του μοντέλου, τα τυπικά σφάλματα, οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου και οι p-τιμές. Από τις εκτιμήσεις παρατηρούμε ότι αρκετοί (αλλά όχι όλοι) συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$. Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε είναι το :

$$h_{ij,t} = a_{0,ij} + a_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} + b_{ij}h_{ij,t-1}$$

➤ Έλεγχος κανονικότητας

Η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην κανονική κατανομή αφού το βασικό garch μοντέλο υποθέτει κανονική κατανομή για τα κατάλοιπα ε_t . Για να δούμε αν όντως κάτι τέτοιο ισχύει εφαρμόζουμε κάποιους ελέγχους κανονικότητας. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής :

	Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
X1	18.369	0.0001026	0.9870	7.212e-001
X2	152.686	0.0000000	0.9613	1.201e-011
X3	8.754	0.0125626	0.9881	8.281e-001
X4	180.783	0.0000000	0.9774	1.224e-002

Πίνακας 8 : Έλεγχος κανονικότητας

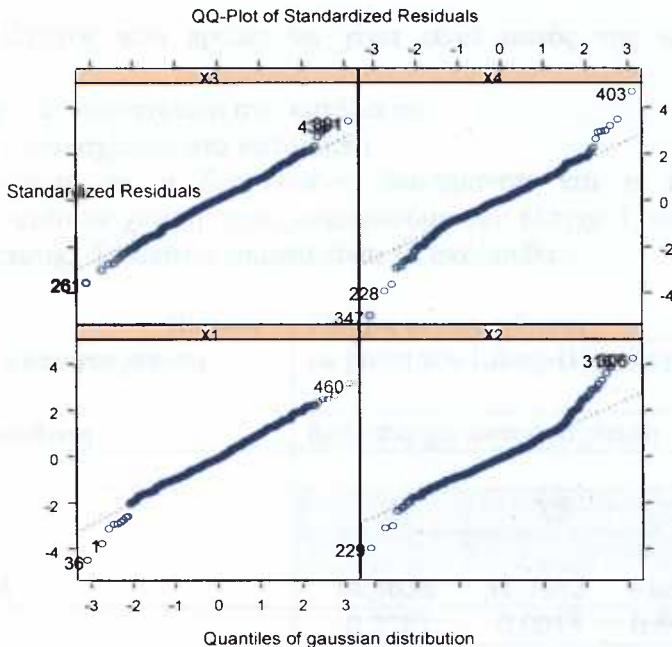
Από τους ελέγχους αυτούς για τα τυποποιημένα κατάλοιπα είναι φανερό ότι τόσο ο Jarque - Bera όσο και ο Shapiro-Wilk απορρίπτουν την υπόθεση της κανονικότητας. Και αυτό διότι και στις δύο περιπτώσεις p-value < $\alpha = 0.05$. Έτσι η μηδενική υπόθεση του ελέγχου

H_0 : τα κατάλοιπα κατανέμονται κανονικά

H_1 : τα κατάλοιπα δεν κατανέμονται κανονικά

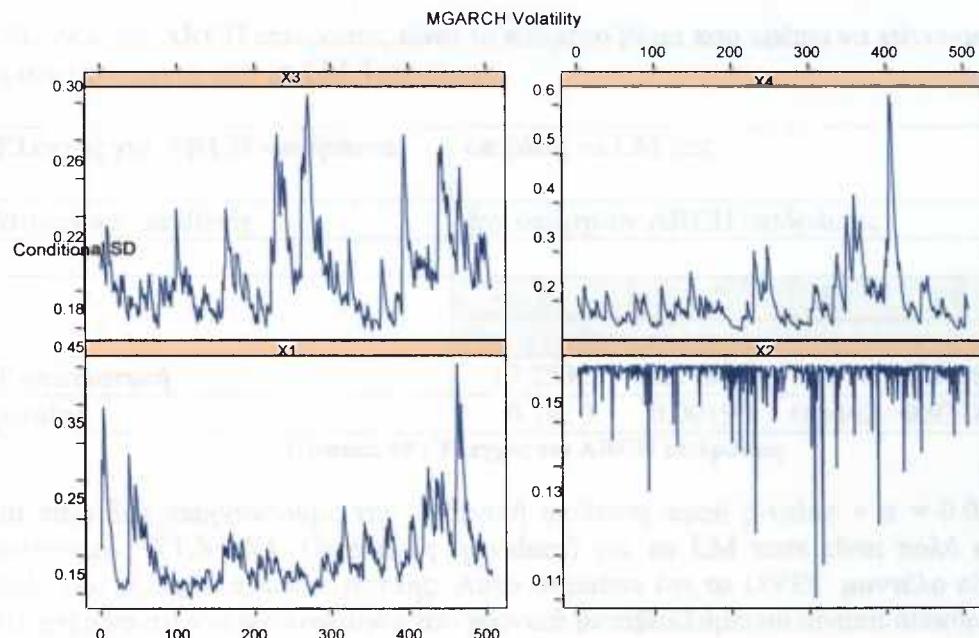
απορρίπτεται, και επομένως άλλη είναι η κατανομή που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα της σειράς και όχι η κανονική. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να γίνει και γραφικά με ένα QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων που ακολουθεί.

Διάγραμμα 11 : QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων



Παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική διασπορά στις ουρές από την κανονική QQ-γραμμή για τα κατάλοιπα όλων των σειρών, κάτι που φάνηκε και από τον έλεγχο κανονικότητας πιο πάνω. Άλλο ένα γράφημα που μας βοηθάει να δούμε το fit του μοντέλου είναι αυτό της εκτιμώμενης δεσμευμένης τυπικής απόκλισης που ακολουθεί :

Διάγραμμα 12 : Πολυμεταβλητή δεσμευμένη διακύμανση



➤ Έλεγχος αυτοσυσχέτισης

Ο επόμενος έλεγχος που πρέπει να γίνει είναι αυτός της αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων.

H_0 : δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα

H_1 : υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα

Για να ελέγξουμε αν η δεσμευμένη διακύμανση και ο δεσμευμένος μέσος παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση, πραγματοποιούμε τον έλεγχο Ljung - Box για έλεγχο της αυτοσυσχέτισης. Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα :

Πίνακας 9 : Έλεγχος αυτοσυσχέτισης

Έλεγχος για αυτοσυσχέτιση	με βάση τον Ljung-Box έλεγχο			
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση			
	X1 X2 X3 X4			
T στατιστική	14.3636	31.7612	9.0508	5.3420
p.value	0.2781	0.0015	0.6986	0.9456

Για τις τρεις σειρές (X1,X3,X4) οι p-τιμές είναι πολύ μεγαλύτερες από το $\alpha=5\%$ με αποτέλεσμα η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση, δεν μπορεί να απορριφθεί. Το αντίθετο ισχύει για την σειρά X2.

➤ Έλεγχος για ARCH επιδράσεις

Ο έλεγχος για ARCH επιδράσεις είναι το επόμενο βήμα που πρέπει να κάνουμε. Τα αποτελέσματα από το LM Test είναι :

Έλεγχος για ARCH επιδράσεις	με βάση το LM test			
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχουν ARCH επιδράσεις			
	X1 X2 X3 X4			
T στατιστική	17.2332	31.0484	10.7996	5.6708
p.value	0.1410	0.0019	0.5462	0.9318

Πίνακας 10 : Έλεγχος για ARCH επιδράσεις

Και πάλι δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αφού $p-value > \alpha = 0.05$ για τις χρονοσειρές X1,X3,X4. Οι p-τιμές (p-values) για τα LM tests είναι πολύ κοντά σε αυτές του ελέγχου αυτοσυσχέτισης. Αυτό σημαίνει ότι το DVEC μοντέλο είναι πολύ επιτυχημένο στην μοντελοποίηση των χρονικά μεταβαλλόμενου πίνακα διακύμανσης.

Σημείωση :

Να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω τεστ εφαρμόζονται για κάθε σειρά ξεχωριστά και δεν μπορούν να ελέγξουν την σειριακή συσχέτιση της σταυρωτής ροπής. Επομένως αυτά τα τεστ δεν είναι στην πραγματικότητα πολυμεταβλητά τεστ. Το πολυμεταβλητό τεστ Multivariate Portmanteau Test για τα τετραγωνικά κατάλοιπα δίνει τα εξής αποτελέσματα :

Πολυμεταβλητός έλεγχος για σειριακή συσχέτιση	με βάση τον έλεγχο Ljung-Box
Μηδενική υπόθεση	δεν υπάρχει σειριακή συσχέτιση
T στατιστική	217.0724
p.value	0.1036
Κατανομή κάτω από την μηδενική υπόθεση	χ^2 με 192 βαθμούς ελευθερίας
Αριθμός παρατηρήσεων	506

Τώρα βλέπουμε ότι η πολυμεταβλητή σειρά δεν παρουσιάζει προβλήματα αυτοσυσχέτισης.

Είδαμε προηγουμένως στον έλεγχο για την κανονικότητα, ότι τα κατάλοιπα ενδέχεται να μην ακολουθούν μια δεσμευμένη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Έτσι στη συνέχεια εκτιμάμε το μοντέλο με βάση μια εναλλακτική κατανομή, την κατανομή Student-t, και τελικά συγκρίνουμε τα δύο μοντέλα.

Η σύγκριση με βάση τα διάφορα κριτήρια σύγκρισης όπως το AIC και το BIC δίνει τα πιο κάτω αποτελέσματα.

	dvec με κανονική	dvec με t κατανομή
AIC	-1005.5	-1096.3
BIC	-861.8	-948.4
Likelihood	536.7	583.1

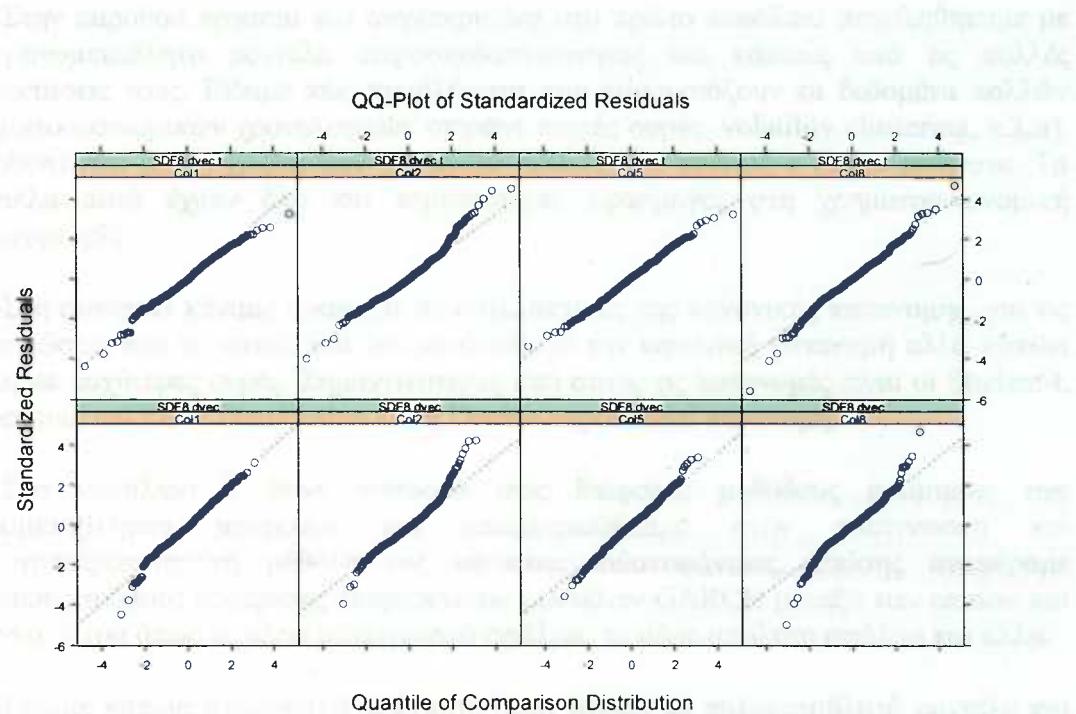
Πίνακας 11 : Κριτήρια επιλογής των GARCH μοντέλων

Είναι φανερό ότι και με τα τρία κριτήρια η πολυμεταβλητή κατανομή t παρέχει καλύτερη προσαρμογή του μοντέλου. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό και γραφικά από τη σύγκριση των QQ-plot των τυποποιημένων καταλοίπων. Στο διάγραμμα αυτό (διάγραμμα 14 πιο κάτω) βλέπουμε την προσαρμογή με κανονική κατανομή στα κατάλοιπα (κάτω μέρος) και την προσαρμογή με την t κατανομή (πάνω μέρος). Η βελτίωση όσον αφορά τη διασπορά γύρω από την QQ γραμμή είναι μεγάλη με τη χρήση της Student –t κατανομής.

Οι εκτιμήσεις που παίρνουμε από την εκτίμηση με την κατανομή t φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα :

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
c(1)	0.00326980	0.0081278	0.4023	3.438e-001
c(2)	0.03703772	0.0067256	5.5069	2.930e-008
c(3)	0.04049505	0.0087916	4.6061	2.608e-006
c(4)	0.01855351	0.0073430	2.5267	5.911e-003
$\alpha_{0,11}$	0.00159777	0.0013963	1.1443	1.265e-001
$\alpha_{0,21}$	0.00035804	0.0003658	0.9787	1.641e-001
$\alpha_{0,31}$	-0.00008844	0.0007710	-0.1147	4.544e-001
$\alpha_{0,41}$	0.00064239	0.0012279	0.5231	3.006e-001
$\alpha_{0,22}$	0.03150732	0.0367147	0.8582	1.956e-001
$\alpha_{0,32}$	0.00186542	0.0023566	0.7916	2.145e-001
$\alpha_{0,42}$	0.00043962	0.0003007	1.4618	7.222e-002
$\alpha_{0,33}$	0.00384660	0.0030238	1.2721	1.020e-001
$\alpha_{0,43}$	0.00048040	0.0007348	0.6537	2.568e-001
$\alpha_{0,44}$	0.00507478	0.0018646	2.7216	3.362e-003
α_{11}	0.04616090	0.0225697	2.0453	2.068e-002
α_{21}	-0.02289453	0.0292366	-1.1902	1.173e-001
α_{31}	0.00434694	0.0231628	0.1877	4.256e-001
α_{41}	0.03177202	0.0423893	0.7495	2.269e-001
α_{22}	-0.01529075	0.0314156	-0.4867	3.133e-001
α_{32}	-0.04312412	0.0458662	-0.9402	1.738e-001
α_{42}	-0.03741562	0.0247613	-1.5111	6.570e-002
α_{33}	0.05055847	0.0287285	1.7599	3.952e-002
α_{43}	0.03368873	0.0371986	0.9056	1.828e-001
α_{44}	0.1542	0.04410	3.4963	2.569e-004
b_{11}	0.9190	0.04687	19.6064	0.000e+000
b_{21}	0.9467	0.06312	14.9969	0.000e+000
b_{31}	0.9572	0.35268	2.7142	3.457e-003
b_{41}	0.8171	0.30413	2.6868	3.728e-003
b_{22}	-0.2662	1.50670	-0.1767	4.299e-001
b_{32}	0.7789	0.30288	2.5716	5.206e-003
b_{42}	0.9193	0.06609	13.9086	0.000e+000
b_{33}	0.8739	0.07931	11.0180	0.000e+000
b_{43}	0.8987	0.12311	7.2997	5.741e-013
b_{44}	0.7112	0.07763	9.1609	0.000e+000

Διάγραμμα 13 : Σύγκριση των QQ-plot χρησιμοποιώντας την κανονική και την Student -t κατανομή



5.3 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία και συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τα μονομεταβλητά μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας και κάποιες από τις πολλές προεκτάσεις τους. Είδαμε πώς προβλήματα που παρουσιάζουν τα δεδομένα πολλών χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών (παχιές ουρές, volatility clustering, κ.λ.π), διορθώνονται με τη χρήση των μοντέλων ARCH που πρώτος ο Engle εισήγαγε. Τα μοντέλα αυτά έχουν όλο και περισσότερες εφαρμογές στη χρηματοοικονομική οικονομετρία.

Στη συνέχεια κάναμε αναφορά σε εναλλακτικές της κανονικής κατανομής, για τις περιπτώσεις που τα κατάλοιπα δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή αλλά κάποια άλλη με παχύτερες ουρές. Σημαντικότερες από αυτές τις κατανομές είναι οι Student-t, η Generalized Error Distribution και η Double exponential κατανομή.

Στο κεφάλαιο 3 έγινε αναφορά στις διάφορες μεθόδους εκτίμησης των μονομεταβλητών μοντέλων και επικεντρωθήκαμε στην πασίγνωστη και πολυχρησιμοποιημένη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Επίσης αναφέραμε κάποιους τρόπους σύγκρισης διαφορετικών μοντέλων GARCH μεταξύ των οποίων και κάποια μέτρα όπως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το μέσο απόλυτο σφάλμα και άλλα.

Είδαμε κάποια εισαγωγικά πράγματα όσον αφορά τα πολυμεταβλητά μοντέλα και επικεντρωθήκαμε στο μοντέλο VECM και DVEC. Τα VECM μοντέλα είναι πολύ ευέλικτα, αλλά έχουν τόσες πολλές παραμέτρους ώστε ουσιαστικά είναι αδύνατο να εκτιμηθούν για περισσότερες από 3 ή 4 σειρές. Το DVEC μοντέλο μειώνει τον αριθμό των παραμέτρων αλλά και πάλι οι παράμετροι είναι πολλοί και είναι δύσκολο να εκτιμηθούν. Ωστόσο το DVEC μοντέλο άνοιξε το δρόμο για την εμπειρική χρήση των πολυμεταβλητών GARCH μοντέλων. Ακόμα έγινε εφαρμογή του μοντέλου αυτού σε μια πολυμεταβλητή χρονολογική σειρά από 4 μονομεταβλητές χρονολογικές σειρές.

Τέλος εφαρμόσαμε τα ARCH και GARCH μοντέλα σε χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές αποδόσεων αμοιβών κεφαλαίων. Αυτό που παρατηρήσαμε είναι η χρησιμότητα των παραπάνω μοντέλων στις περιπτώσεις της χρονικά μεταβαλλόμενης διακύμανσης καθώς επίσης και η κατανομή που θα επιλέξουμε για τα κατάλοιπα της σειράς. Εδώ παρατηρήσαμε ότι η κατανομή Student-t είναι η καταλληλότερη σε σχέση με την κανονική για την περιγραφή δεδομένων με χαρακτηριστικά όπως αυτά που αναφέρθηκαν στο 1^ο κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- BACHELIER, L. (1900), Theory of speculation. In the random character of stock market prices (Edited by P. Cootner (1964)). MIT Press, Cambridge
- BERA, A. K., HIGGINS, M. L. and LEE, S. (1992), Interaction between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity : "A Random Coefficient Approach", *Journal of Business and Economics Statistics*, 10, 133-142
- BLACK, F. (1976), Studies of Stock Price Volatility Changes, *Proceedings from the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177-181
- BOLLERSLEV, T. (1986), A generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327
- BOLLERSLEV, T. (1987), A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return, *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. and WOOLDRIDGE, J. M. (1988), A capital asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, 96, 116-131
- DIEBOLD, F. X. (1986a), Modelling the persistence of conditional variances: a comment, *Econometric Reviews*, 5, 51-56
- DIEBOLD, F. X. and NERLOVE, M. (1989), The dynamics of exchange rate volatility: a multivariate latent factor ARCH model, *Journal of Applied Econometrics*, 4, 1-21
- DING, Z., GRANGER, C.W.J, ENGLE, R.F. (1993), A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106
- ENGLE, R. F. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008
- ENGLE, R. F. and BOLLERSLEV, T. (1986), Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-87
- ENGLE, R. F. and NG, V. K. (1993) Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, 48, 1749-1778
- ENGLE, R. F., GRANGER, C. W. J. and KRAFT, D. (1986), Combining competing forecasts of inflation using a bivariate ARCH model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8, 151-165





ENGLE, R. F., and KRAFT, D. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity in multiple time series models, Discussion Paper 82-2, La Jolla, University of California, San Diego

FAMA, E.F (1965), The behavior of stock market prices, *Journal of Business*, 36, 420-429

FERNANDEZ, C. and STEEL, M. (1998), On Bayesian modeling of fat tails and skewness, *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359-371

FRENCH, K. R., and R.ROLL (1986), Stock returns variances: The arrival of information and the reaction of traders, *Journal of Financial Economics*, 17, 5-26

GEWEKE, J. (1989), Exact predictive densities in linear models with ARCH disturbances, *Journal of Econometrics*, 44, 307-325

GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. and RUNKLE, D. (1993), On the relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801

HAMILTON, J. (1994), *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ

HIGGINS, M. L. and BERA, A. K. (1992), A class of nonlinear ARCH models, *International Economic Review*, 33, 137-158

HSIEH, D. A. (1988), The statistical properties of daily foreign exchange rates: 1974-1983, *Journal of International Economics*, 24, 129-145

HSIEH, D. A. (1989), Testing for non-linear dependence in daily foreign exchange rates changes, *Journal of Business*, 62, 339-368

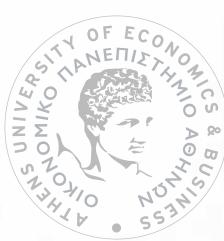
KENDALL, M.G. and STUART, A. (1969), *The advanced theory of statistics*, Vol.1, 3rd ed. (New York: Hafner Publishing Company)

KLIEN, B. (1977), The demand for quality-adjusted cash balances: price uncertainty in the U.S. demand for money function, *Journal of Political Economy*, 85, 692-715

LAMBERT, P. and LAURENT, S. (2000), Modelling skewness dynamics in series of financial data, *Discussion paper*, Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve

LAMBERT, P. and LAURENT, S. (2001), Modelling financial time series using GARCH-type models and a skewed student density, *Mimeo*, Universite de Liege

LAMOUREUX, G. C. and LASTRAPES, W. D. (1990a), Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effects, *The Journal of Finance*, 45, 221-229



LEE, S-W. and HANSEN, B.E (1991), Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator and test of the stability of parameters of the GARCH and IGARCH models, Mimeo, Department of Economics, University of Rochester

LEE, T.K.Y and TSE, Y.K (1991), Term structure of interest rates in the Singapore Asian dollar market, Journal of Applied Econometrics, 6, 143-152

MANDELBROT, B. (1963a), The variation of certain speculative prices, Journal of Business, 36, 394-419

MCCURDY, T. and MORGAN, I. (1988), Testing the martigale hypothesis in Deutsche Mark Futures with models specifying the form of the heteroskedasticity, Journal of Applied Econometrics, 3, 187-202

MILHOJ, A. (1985), The moment structure of ARCH processes, Scandinavian Journal of Statistics, 12, 281-292

MILHOJ, A. (1987b), A conditional variance model for daily observations of an exchange rate, Journal of Business and Economics Statistics, 5, 199-203

NELSON, D. B. (1990a), Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model, Econometric Theory, 6, 318-334

NELSON, D. B. (1991), Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, Econometrica, 59, 347-370

NELSON, D. B. and C. Q. CAO (1992), Inequality constraints in the univariate GARCH model, Journal of Business & Economic Statistics, 10, 229-235

PAGAN, A. R. (1996), The econometrics of financial markets, Journal of Empirical Finance, 3, 15-102

PAGAN, A. R. and HONG, Y. S. (1991), Nonparametric estimation and the risk premium, in Barnett, W. A. Powell, J and Tauchen, G. (eds.), Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics, Cambridge University Press, Cambridge

PAGAN, A. R. and SCHWERT, G. W. (1990), Alternative models for conditional stock volatility, Journal of Econometrics, 45, 267-290

RABEMANANJARA, R. and ZAKOIAN, J. M. (1993), Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, Journal of Applied Econometrics, 8, 31-49

ZAKOIAN, J-M. (1991), Threshold heteroskedastic model, Mimeo, INSEE, Paris



