ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Η Σταθμική Διάρκεια Ομολόγων με Κίνδυνο Χρεοκοπίας της Εκδότριας Εταιρείας

Μαρίνα Καρυώτη

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα
Ιανουάριος 2004

Εγκρίνουμε τη διατριβή της Μαρίνας Καρυώτη

Αθανάσιος Επίσκοπος
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γεώργιος Δημόπουλος
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιανουάριος 2004

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το ζήτημα της διάρκειας για ομολογίες που χαρακτηρίζονται από κίνδυνο αθέτησης.

Μετά από μία σύντομη εισαγωγή, στην οποία γίνεται λόγος για τη σύγχρονη χρηματοοικονομική πραγματικότητα καθώς και για τις δύο μορφές κινδύνου που μας απασχόλησαν σε αυτήν την εργασία (κίνδυνος επιτοκίου και πιστωτικός κίνδυνος), ακολουθεί μια παρουσίαση των κυριοτέρων ερευνητών που ασχολήθηκαν με το θέμα της διάρκειας (κεφάλαιο 1). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του μέτρου της διάρκειας και οι κυριότερες χρήσεις του (κεφάλαια 2 και 3). Στα επόμενα δύο κεφάλαια (κεφάλαια 4 και 5) εξετάζεται πώς η διάρκεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε στρατηγικές ανοσοποίησης χαρτοφυλακίων με ομολογίες. Στο κεφάλαιο 6, παρατίθενται οι βασικές έρευνες που έχουν δημοσιευτεί γύρω από τη σταθμική διάρκεια ομολογιών με κίνδυνο χρεοκοπίας της εκδότριας επιχείρησης. Στο κεφάλαιο 7, γίνεται μια εμπειρική εφαρμογή του μέτρου της διάρκειας που ανέπτυξε ο Chance για την περίπτωση που οι ομολογίες χαρακτηρίζονται από κίνδυνο αθέτησης. Η εφαρμογή αυτή, γίνεται σε πέντε ελληνικές εταιρείες, οι οποίες είναι εισηγμένες στο Χρηματιστήριο Αθηνών και συνθέτουν (μαζί με άλλες είκοσι) το δείκτη FTSE/ASE – 20. Στο τέλος της εργασίας, παρατίθενται τα παραρτήματα, τα οποία βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση και αποσαφήνιση κάποιων ζητημάτων.

Εισαγωγή

Στο διεθνές οικονομικό σύστημα παρατηρούνται τάσεις για παγκοσμιοποίηση των διάφορων χρηματοοικονομικών δραστηριοτήτων καθώς και όξυνση του ανταγωνισμού. Αποτέλεσμα των φαινομένων αυτών είναι η κατάργηση των συνόρων, όχι μόνο μεταξύ των γεωγραφικών αγορών, αλλά και μεταξύ των διαφόρων κλάδων του ευρύτερου επιχειρηματικού κόσμου. Συνεπώς, αν θέλουμε να μιλήσουμε για οικονομική και χρηματοοικονομική ανάλυση, θα πρέπει να μελετήσουμε με μια ευρύτερη έννοια τις διάφορες επιχειρήσεις και χρηματοοικονομικούς οργανισμούς καθώς και τα προϊόντα που προσφέρουν στους πελάτες τους.

Οι διεθνείς τάσεις καθώς και οι διεθνείς κρίσεις του οικονομικού συστήματος, έχουν ως αποτέλεσμα την αύξηση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις. Με τον όρο κίνδυνος, αναφερόμαστε, συνήθως, στις εξής κατηγορίες κινδύνων (Saunders A., 2000):

- ✓ Κίνδυνος επιτοκίου (interest rate risk)
- ✓ Πιστωτικός κίνδυνος (credit risk)
- ✓ Κίνδυνος αγοράς (market risk)
- ✓ Συναλλαγματικός κίνδυνος (foreign exchange risk)
- ✓ Κίνδυνος χώρας (sovereign risk)
- ✓ Κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk)

Ο αριθμός και η ποικιλία των κινδύνων, κάνουν επιτακτική την ανάγκη για ανάπτυξη πολιτικών για τη σωστή διαχείριση και αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των κινδύνων αυτών. Τα τελευταία χρόνια μάλιστα, στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος βρίσκεται η διοίκηση των επιχειρήσεων / χρηματοοικονομικών οργανισμών, μέσα από το πρίσμα της «διοίκησης» των κινδύνων που προαναφέρθηκαν.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τα δύο πρώτα είδη κινδύνου, τον κίνδυνο επιτοκίου και τον πιστωτικό κίνδυνο. Κυρίως όμως, διαπραγματεύεται το βασικό υπόδειγμα για τη διαχείριση του κινδύνου του επιτοκίου –το υπόδειγμα της διάρκειας (duration model)-, και πώς επηρεάζεται και αλλάζει όταν λάβουμε υπόψη μας τον πιστωτικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει η επιχείρηση.

Μια επιχείρηση / χρηματοοικονομικός οργανισμός εκτίθεται στον κίνδυνο του επιτοκίου όταν υπάρχει αναντιστοιχία μεταξύ των λήξεων του ενεργητικού και του παθητικού. Μια μεταβολή των επιτοκίων μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της αγοραίας αξίας (market value) του ενεργητικού σε σχέση με το παθητικό και, κατά συνέπεια, σε μείωση της καθαρής θέσης (Επίσκοπος, 2000). Ο κίνδυνος του επιτοκίου μπορεί να αναλυθεί σε δύο επιμέρους κινδύνους:

✓ *Κίνδυνος αναχρηματοδότησης (refinancing)*: το στοιχείο του παθητικού (π.χ. καταθέσεις) λήγει πριν το στοιχείο του ενεργητικού (π.χ. δάνεια). Αν συμβαίνει αυτό και τα επιτόκια αυξηθούν, η επιχείρηση / χρηματοοικονομικός οργανισμός θα πρέπει να αναχρηματοδοτήσει το ενεργητικό του με στοιχεία υψηλότερου κόστους.

✓ *Κίνδυνος επανεπένδυσης (reinvestment)*: το στοιχείο του ενεργητικού λήγει πριν το στοιχείο του παθητικού. Οι αποδόσεις των κεφαλαίων που πρέπει να επανεπενδυθούν μπορεί να υποχωρήσουν κάτω από το κόστος των δανειζομένων κεφαλαίων.

Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα κινδύνου του επιτοκίου είναι η περίπτωση των Savings & Loan (S&L). Τα S&L's είναι τράπεζες που συγκεντρώνουν καταθέσεις ταμιευτηρίου και παρέχουν στεγαστικά δάνεια. Κατά τη δεκαετία του 1980 αντιμετώπισαν πολύ σοβαρά προβλήματα. Κατά τη διάρκεια των 20 ετών που προηγήθηκαν είχε εφαρμοστεί πολιτική εξομάλυνσης των επιτοκίων. Επιπρόσθετα, η καμπύλη αποδόσεων (yield curve) ήταν αύξουσα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα το σταθερό επιτόκιο των στεγαστικών δανείων να είναι μεγαλύτερο από το επιτόκιο καταθέσεων. Το Fed για να μειώσει τον πληθωρισμό στόχευσε στις υποχρεωτικές καταθέσεις των τραπεζών. Η περιοριστική νομισματική πολιτική οδήγησε τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια σε υψηλά επίπεδα (16%). Τα S&L's παρουσίασαν αρνητικά ανοίγματα επιτοκίων. Επιπλέον, επειδή οι καταθέτες άρχισαν να αποσύρουν τα χρήματα τους, αναγκάστηκαν να αυξήσουν τα επιτόκια καταθέσεων. Το Fed επέτρεψε στα S&L's να δίνουν στεγαστικά δάνεια με κυμαινόμενο επιτόκιο και να επενδύουν σε αναπτυξιακά δάνεια. Με τον τρόπο αυτό, οι υγιείς τράπεζες ενδυναμώθηκαν αλλά οι αδύναμες κατέληξαν να αναλάβουν περισσότερους κινδύνους και να οδηγηθούν σταδιακά στη χρεοκοπία.

Σύμφωνα με το Saunders (2000), υπάρχουν τρία μοντέλα που αφορούν στον κίνδυνο του επιτοκίου:

I. *The Repricing Model*: η επιχείρηση / χρηματοοικονομικός οργανισμός εξετάζει, για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, το repricing gap[1] μεταξύ των τόκων που εισπράττει από τα στοιχεία του ενεργητικού και των τόκων που πληρώνει για τα στοιχεία του παθητικού. Το μοντέλο αυτό δείχνει πόσο χρόνο πρέπει να περιμένει ο

[1] *Repricing gap*: η διαφορά μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού των οποίων το επιτόκιο θα αναθεωρηθεί σε κάποια μελλοντική χρονική περίοδο (rate sensitive assets) και των στοιχείων του παθητικού των οποίων το επιτόκιο θα αναθεωρηθεί σε κάποια μελλοντική χρονική περίοδο (rate-sensitive liabilities).

manager για να αλλάξει το επιτόκιο κάποιου στοιχείου του ενεργητικού ή του παθητικού.

Ωστόσο, το μοντέλο αυτό έχει αρκετά μειονεκτήματα. Αρχικά, αγνοεί τις επιπτώσεις που έχει μια αλλαγή των επιτοκίων στην αγοραία αξία των στοιχείων του ενεργητικού ή του παθητικού. Επιπλέον, δεν αντιμετωπίζει αποτελεσματικά το πρόβλημα των runoffs[2]. Τα μειονεκτήματα αυτά προκαλούν προβλήματα στην ακριβή μέτρηση του κινδύνου του επιτοκίου.

II. *The Maturity Model*: εξετάζει πόσο ευπαθή είναι τα αξιόγραφα στις μεταβολές του επιτοκίου σε συνάρτηση με το χρόνο ως τη λήξη τους, Το μοντέλο καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι λήξεις του ενεργητικού θα πρέπει να είναι ίσες με τις λήξεις του παθητικού. Αυτό σημαίνει, πως αν τα στοιχεία του ενεργητικού έχουν, κατά μέσο όρο, χρονικό ορίζοντα ως τη λήξη τους 20 χρόνια, τότε και τα στοιχεία του παθητικού πρέπει να έχουν τον ίδιο χρονικό ορίζοντα. Με αυτόν τον τρόπο, εξαλείφεται το άνοιγμα στις λήξεις (maturity gap).

Τα συμπεράσματα του μοντέλου είναι τα εξής:

1) Η αύξηση των επιτοκίων οδηγεί σε μείωση της αξίας των αξιογράφων.

2) Η πτώση στην αξία των αξιογράφων αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο χρόνος ως τη λήξη. Αυτό σημαίνει ότι τα μακροπρόθεσμα αξιόγραφα επηρεάζονται περισσότερο από την αύξηση του επιτοκίου από ότι τα βραχυπρόθεσμα αξιόγραφα.

3) Η πτώση στην αξία των αξιογράφων αυξάνεται με μειούμενο ρυθμό καθώς αυξάνεται ο χρόνος ως τη λήξη.

---

[2] *Runoffs*: περιοδικές ταμειακές ροές τόκων και αρχικού κεφαλαίου, από μακροπρόθεσμα στοιχεία του ενεργητικού, οι οποίες μπορούν να επενδυθούν στο επιτόκιο της αγοράς.

Ωστόσο, το μοντέλο αυτό αγνοεί τη χρονική διάρθρωση των ταμειακών ροών.

III. *The Duration Model*: αντιμετωπίζει αποτελεσματικά το μειονέκτημα του προηγούμενου μοντέλου, καθώς λαμβάνει υπόψη του το χρόνο λήξης (maturity), αλλά και το χρόνο λήψης των ταμειακών ροών. Δηλαδή, λαμβάνει υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος (time value of money).

Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι η αβεβαιότητα που υπάρχει σχετικά με την ικανότητα μιας εταιρείας να εξυπηρετήσει να χρέη και τις λοιπές υποχρεώσεις της. Σχετίζεται με τον κίνδυνο αθέτησης των πληρωμών των τοκομεριδίων μιας ομολογίας ή των δόσεων ενός δανείου. Οι επιχειρήσεις / χρηματοοικονομικοί οργανισμοί ενδιαφέρονται για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου γιατί βοηθάει στην τιμολόγηση των δανείων και των ομολογιών και θέτει όρια στο ποσό της πίστωσης που δίνεται. Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες μοντέλων για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου (Saunders A., 2000):

I. *Ποιοτικά μοντέλα*: λαμβάνουν υπόψη τους παράγοντες σχετικά με το δανειζόμενο και παράγοντες σχετικά με την αγορά.

II. *Ποσοτικά μοντέλα*: χρησιμοποιούν στοιχεία για να υπολογίσουν την πιθανότητα αθέτησης (default probability) ή για να ταξινομήσουν τους δανειζόμενους σε διαφορετικές κλάσεις αθέτησης.

III. *Νεότερα μοντέλα*: στην κατηγορία αυτή εμπίπτει η χρήση της καμπύλης αποδόσεων για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου (term structure derivation of credit risk). Επίσης, πολύ χρήσιμα είναι τα μοντέλα που χρησιμοποιούν τη θεωρία τιμολόγησης των options για να υπολογίσουν την πιθανότητα αθέτησης. Το πιο γνωστό μοντέλο αυτής της κατηγορίας είναι το KMV.

Οι διακυμάνσεις της τιμής μιας ομολογίας οφείλονται σε διάφορους κινδύνους, όπως ο κίνδυνος πληθωρισμού και ο κίνδυνος ανάκλησης (call risk). Οι πιο σημαντικές όμως πηγές κινδύνου είναι ο κίνδυνος αθέτησης και ο κίνδυνος του επιτοκίου. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να μελετήσει το θέμα της σταθμικής διάρκειας των ομολογιών όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης από την επιχείρηση που τις εκδίδει.

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το μοντέλο της διάρκειας, όπως αυτό μελετήθηκε από διάφορους ερευνητές, τα χαρακτηριστικά και τις χρήσεις του. Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε διεξοδικά τα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί σχετικά με τη διάρκεια των ομολογιών όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης.

1. Το Μοντέλο Σταθμικής Διάρκειας

1.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια προσπάθεια αναλυτικής παρουσίασης των πιο σημαντικών ερευνητών που έχουν ασχοληθεί με το θέμα της διάρκειας.

Εκτός από το Macaulay, που πρώτος ερεύνησε και πρότεινε το μέτρο της διάρκειας, υπάρχουν και μετέπειτα ερευνητές που ασχολήθηκαν με αυτό το ζήτημα και πρότειναν και αυτοί με τη σειρά τους διάφορα μέτρα, που άλλοτε ταυτίζονται και άλλοτε διαφέρουν, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό από τον αρχικό ορισμό της διάρκειας από το Macaulay.

Στις σελίδες που ακολουθούν, παρουσιάζονται με χρονική συνέπεια οι έρευνες που έχουν δημοσιευτεί αναφορικά με τη διάρκεια. Αναφέρονται οι ορισμοί που έχουν δώσει οι διάφοροι ερευνητές, οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ τους, οι τύποι για τον αριθμητικό υπολογισμό της διάρκειας, οι προεκτάσεις κάποιων μοντέλων από μετέπειτα μελετητές, καθώς και οι νεωτερισμοί που εισήγαγαν.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι όλα τα μοντέλα που ακολουθούν εμπίπτουν στην κατηγορία των λεγόμενων Single Factor Duration Models (SFDMs). Τα μοντέλα αυτά, αν και έγιναν αποδεκτά και άρχισαν να χρησιμοποιούνται αμέσως από τις επιχειρήσεις, αντιμετωπίσθηκαν με σκεπτικισμό από τον ακαδημαϊκό κόσμο. Ο κυριότερος λόγος για αυτό είναι η έλλειψη μιας οικονομικής ή χρηματοοικονομικής βάσης, αλλά και το γεγονός ότι μερικά από αυτά έχουν μη επιθυμητά χαρακτηριστικά. Επιπλέον, εμφανίζονται να είναι ασυνεπή με τις γενικά αποδεκτές οικονομικές συνθήκες ισορροπίας. Τα περισσότερα μοντέλα δημιουργήθηκαν αποσπασματικά / σταδιακά σε μια ad hoc βάση.

1.2. Macaulay

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ο Macaulay ήταν ο πρώτος που ανέφερε τον όρο διάρκεια στην έρευνα του για τα επιτόκια και τιμές των μετοχών που δημοσιεύτηκε το 1938. Ήθελε έναν αριθμό, και όχι άνυσμα, που να ορίζει το χρονικό «μέγεθος» μιας ομολογίας. Έψαχνε ένα καλύτερο μέτρο της ζωής μιας ομολογίας από το χρόνο ως τη λήξη (maturity) που χρησιμοποιούταν ως τότε, το οποίο να ενσωματώνει το χρόνο της ροής των πληρωμών των τοκομεριδίων της ομολογίας.

Χρησιμοποιώντας παραδείγματα, πρότεινε και απέρριψε αρκετά μέτρα ώσπου να καταλήξει στη διάρκεια. Χρησιμοποίησε τη λέξη αυτή για να ορίσει τη σημασία του χρόνου σε ένα δάνειο. Απέδειξε ότι το μέτρο αυτό συμπεριφερόταν όπως επιθυμούσε.

Υποστήριξε ότι είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι η διάρκεια οποιουδήποτε δανείου, το οποίο περιλαμβάνει περισσότερες από μία μελλοντικές πληρωμές, θα είναι ένα είδος σταθμισμένου μέσου των λήξεων (maturities) κάθε μεμονωμένου δανείου που ανταποκρίνεται σε κάθε μελλοντική πληρωμή. Το ερώτημα που παρουσιάστηκε τότε, ήταν ποια βάρη να χρησιμοποιήσει για τις σταθμίσεις: την παρούσα αξία ή τη μελλοντική αξία των μεμονωμένων δανείων. Βασιζόμενος σε υποθετικά παραδείγματα και τη διαίσθησή του, απέρριψε τη στάθμιση με χρήση της μελλοντικής αξίας και χρησιμοποίησε την παρούσα αξία.

Το επόμενο πρόβλημα που τον απασχόλησε ήταν ποιο προεξοφλητικό παράγοντα να χρησιμοποιήσει. Επέλεξε την απόδοση ως τη λήξη (yield to maturity), λόγω της δυσκολίας υπολογισμού των πραγματικών προεξοφλητικών παραγόντων που θα επικρατήσουν στο μέλλον.

Τελικά όρισε τη διάρκεια D ως εξής:

$$D=\frac{\sum_{n=1}^{m} S(n)*n*(1+i)^{-n}}{\sum_{n=1}^{m} S(n)*(1+i)^{-n}} \quad (1)$$

Όπου: $S(n)$ είναι η πληρωμή τόκου το χρόνο n και i είναι η απόδοση ως τη λήξη (yield to maturity).

Εναλλακτικά, ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$D=\frac{\sum_{n=1}^{m} S(n)*n*e^{-y*n}}{\sum_{n=1}^{m} S(n)*e^{-y*n}} \quad (2)$$

Όπου: y είναι η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση στη λήξη (yield to maturity) για τη χρηματική ροή $S(n)$.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η διάρκεια, όπως την όρισε ο Macaulay, είναι η μέση διάρκεια του χρόνου που πρέπει να περάσει για να λάβει ο κάτοχος της ομολογίας την παρούσα αξία της, υπό τη μορφή ήδη γνωστών, σταθερών πληρωμών.

1.3. Hicks

Ένα χρόνο μετά τη δημοσίευση της μελέτης του Macaulay, εκδόθηκε το βιβλίο του Hicks *Value and Capital* (1939). Ο Hicks επιθυμούσε να δείξει πώς οι αλλαγές στα επιτόκια επηρεάζουν τις σχετικές τιμές των στοιχείων του ενεργητικού. Υποθέτοντας ότι το επιτόκιο είναι το ίδιο για όλες τις λήξεις (maturities), υπολόγισε την ελαστικότητα της αξίας του κεφαλαίου ως προς τον προεξοφλητικό παράγοντα (επιτόκιο).

Ο Hicks ονόμασε το μέτρο του *average period* (μέση περίοδος). Στην ουσία, κατέληξε σε ένα μέτρο που είναι ισοδύναμο / ισότιμο με τη διάρκεια, όπως ορίσθηκε από το Macaulay, χωρίς όμως να γνωρίζει την έρευνα και τα συμπεράσματα του Macaulay. Είναι σημαντικό να τονίσουμε το γεγονός, ότι και οι δύο ερευνητές χρησιμοποίησαν τη διάρκεια ως μέτρο της μεταβλητότητας της τιμής ενός αξιόγραφου. Ο Macaulay ήθελε ένα μέτρο για το χρόνο ενώ ο Hicks μια ελαστικότητα. Ο Hicks παρατήρησε, ότι ενώ συνήθως οι ελαστικότητες είναι «καθαροί» αριθμοί, η συγκεκριμένη ελαστικότητα που βρήκε είχε μια διάσταση χρόνου.

Ο Hicks χρησιμοποίησε το μέτρο του για να θεμελιώσει αυτό που ήδη γνώριζε διαισθητικά: «όταν υπάρχει πτώση των επιτοκίων το average period (μέση περίοδος) θα αυξηθεί και οι παραγωγοί θα αντικαταστήσουν τα χρήματα (ή το κεφάλαιο που μπορούν να αγοράσουν με αυτά τα χρήματα) με άλλα μέσα παραγωγής». Απέδειξε ότι η τιμή μιας δεκαετούς ομολογίας, που ίσως έχει διάρκεια 7 ετών, θα αυξηθεί ή θα μειωθεί 7 φορές από το επίπεδο του επιτοκίου.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι, σύμφωνα με το Weil (1973), ο Grove (1966) είναι ο πρώτος που ανέφερε στη μελέτη του και τον Hicks αλλά και το Macaulay.

1.4. Samuelson

Το 1945 ο Samuelson, χωρίς να γνωρίζει την έρευνα του Macaulay και του Hicks, ανέλυσε την επίδραση των αλλαγών του επιτοκίου στην παρούσα αξία της καθαρής θέσης χρηματοοικονομικών οργανισμών όπως πανεπιστήμια, ασφαλιστικές εταιρείες και τράπεζες.

Αν και ο Samuelson δε δημιούργησε ένα τυπικό οικονομικό μοντέλο, το μέτρο το οποίο τελικά ανέπτυξε είναι ισοδύναμο / ισότιμο με τη διάρκεια του Macaulay. Το ονόμασε *weighted average time period of payments* (σταθμισμένη μέση χρονική περίοδος πληρωμών). Χρησιμοποίησε το μέτρο αυτό για να αναλύσει την ευαισθησία των ενδιάμεσων χρηματοοικονομικών οργανισμών (intermediaries) στις αλλαγές του επιτοκίου. Απέδειξε ότι αν η διάρκεια των στοιχείων του ενεργητικού του χρηματοοικονομικού οργανισμού είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από τη διάρκεια των στοιχείων του παθητικού, τότε ο οργανισμός θα χάσει (κερδίσει) αν τα επιτόκια αυξηθούν και θα κερδίσει (χάσει) αν τα επιτόκια μειωθούν. Συμπέρανε ότι «η επικείμενη μεταπολεμική αύξηση των επιτοκίων θα ωφελήσει εκείνες τις τράπεζες που το παθητικό τους έχει μικρότερη διάρκεια από το ενεργητικό τους».

1.5. Redington

Το 1952 ο F.M. Redington, εμπειρογνώμων ασφαλίσεων στο επάγγελμα, χωρίς να γνωρίζει το άρθρο του Samuelson, χρησιμοποίησε σχεδόν την ίδια μεθοδολογία και λύνοντας για την κατανομή των στοιχείων του ενεργητικού σε σχέση με τα στοιχεία του παθητικού, η οποία θα μειώσει την πιθανότητα ζημιάς λόγω μιας αλλαγής στα επιτόκια, κατέληξε στην εξίσωση (1). Ονόμασε το μέτρο του *mean term*. Το mean term μιας ακολουθίας S, με παρούσες αξίες ($P_{t1}, P_{t2,} .....P_{tn}$), ορίζεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i * P_{ti}) \qquad (3)$$

Ο Redington ήταν ο πρώτος που ανέφερε και όρισε τον όρο *immunization* (ανοσοποίηση). Έδειξε ότι η επιχείρηση ανοσοποιείται σε μια γενική αλλαγή του επιτοκίου, όταν το mean term του ενεργητικού ισούται με το mean term του παθητικού. Υποστήριξε ότι η καλύτερη επενδυτική πολιτική για τις ασφαλιστικές εταιρείες ήταν να ταιριάζουν, περίοδο ανά περίοδο, τη ροή των ταμειακών ροών του ενεργητικού με την αντίστοιχη του παθητικού. Απέδειξε ότι τα κέρδη μιας ασφαλιστικής εταιρείας ανοσοποιούνται (δηλαδή, δε μπορούν να μειωθούν αλλά ίσως αυξηθούν) σε μια μικρή (απειροελάχιστη) αλλαγή του επιτοκίου, μόνο όταν ισχύει η ισότητα των mean terms του ενεργητικού και του παθητικού.

Οι βασικές υποθέσεις στις οποίες στηρίζονται τα συμπεράσματα του Redington είναι οι εξής:

i. σταθερό επιτόκιο, τόσο για τα στοιχεία του ενεργητικού, όσο και για τα στοιχεία του παθητικού,

ii. όλα τα κεφάλαια επενδύονται σε αξιόγραφα σταθερού επιτοκίου,

iii. τα αξιόγραφα αυτά είναι μη μετατρέψιμα ή είναι μετατρέψιμα σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή.

Ο Redington ανέφερε κάποιες από τις πρακτικές εφαρμογές του μέτρου που πρότεινε. Πέρα από αυτό όμως, δεν ασχολήθηκε περαιτέρω με τις υποκείμενες υποθέσεις ή επιπλοκές.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Wallas (1960) επέκτεινε την μελέτη του Redington.

1.6. Durand

Το 1957, ο Durand υποστήριξε ότι τα μόνα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία με πολύ μεγάλη διάρκεια είναι οι growth stocks . Άρα, οι οργανισμοί που έχουν παθητικό με μεγάλη διάρκεια θα θέλουν να έχουν growth stocks, για να μειώσουν κατά αυτό τον τρόπο τον κίνδυνο ζημιάς λόγω διακυμάνσεων στα επιτόκια.

1.7. Fisher

Το 1966, ο Fisher απέδειξε, ότι η πρώτη παράγωγος της τιμής μιας ομολογίας ως προς την απόδοση ως τη λήξη (yield to maturity) είναι ανάλογη με τη διάρκεια του Macaulay. Για μικρές αλλαγές και συνεχή ανατοκισμό, η μεταβλητότητα της τιμής της ομολογίας συσχετίζεται με τις αλλαγές του yield to maturity ως εξής:

$$\frac{dP}{di} = -\frac{D}{P} \tag{4}$$

Όπου: P είναι η τιμή της ομολογίας, D είναι η διάρκεια και i είναι το yield to maturity.

Χρησιμοποίησε αυτό το αποτέλεσμα για να βελτιώσει τη μέθοδο των Newton - Raphson σχετικά με τον υπολογισμό των σωστών αποδόσεων των χρηματικών ροών που έχουν αυθαίρετα κατανεμηθεί στο χρόνο.

Η φόρμουλα που ανέπτυξε ο Hicks χρησιμοποιούσε αντί του i το $(1+r)$, όπου το r είναι το επιτόκιο ανά περίοδο. Η ελαστικότητα του Fisher είναι ανάλογη της ελαστικότητας του Hicks.

Στο ίδιο συμπέρασμα με το Fisher κατέληξαν και οι Hopewell και Kaufman (1973). Χρησιμοποίησαν τον παραπάνω τύπο για να δείξουν ότι για μια δεδομένη αλλαγή του επιτοκίου, η σχετική αλλαγή στην τιμή ομολογιών χωρίς τοκομερίδια θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος ως τη λήξη (maturity) της ομολογίας. Ωστόσο, η σχέση αυτή ίσως δεν ισχύει για ομολογίες με τοκομερίδια.

1.8. Whittaker

Θεώρησε την έννοια της διάρκειας χρήσιμη για την ανάλυση που πραγματοποίησε όσον αφορά τα Βρετανικά αμοιβαία κεφάλαια. Έγραψε τις παρατηρήσεις του, σχετικά με το μέτρο αυτό, σε δύο άρθρα που δημοσίευσε το 1969 και το 1970.

1.9. Fisher και Weil

Ο Lawrence Fisher και ο Roman Weil ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τις υποκείμενες υποθέσεις της ανάλυσης της διάρκειας, στο άρθρο τους το 1971.

Ανέπτυξαν ένα μέτρο της διάρκειας το οποίο είναι παρόμοιο με αυτά των Macaulay και Hicks. Το ονόμασαν *average duration* (μέση διάρκεια).

Το βασικό έργο των δύο αυτών ερευνητών αφορά στο immunization. Επέκτειναν το αποτέλεσμα του Redington για την ανοσοποίηση[3], εξετάζοντας μεγάλες διακυμάνσεις του επιτοκίου. Επίσης, χρησιμοποίησαν την έννοια της διάρκειας και το μέτρο που όρισαν, για τη δημιουργία της κατάλληλης στρατηγικής για επενδύσεις σε ομολογίες που να δίνουν την ίδια απόδοση με ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο.

[3] Αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων τους θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο.

1.10. Κριτική των μοντέλων

Σύμφωνα με τους Bierwag, Kaufman και Toevs (1982), τα μοντέλα της διάρκειας έχουν δεχτεί τέσσερις βασικές κριτικές.

✓ Η πρώτη, και πιο διαδεδομένη, επίκριση των μοντέλων είναι ότι η διάρκεια είναι χρήσιμη μόνο όταν η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη. Η υπόθεση αυτή έχει γίνει από όλους τους ερευνητές που προηγήθηκαν των Fisher και Weil (1971), αλλά «ξεχάστηκε» όταν αναπτύχθηκαν μέτρα της διάρκειας για μια ποικιλία στοχαστικών διαδικασιών.

✓ Το δεύτερο είδος κριτικής δεν αφορά τη διάρκεια αυτή καθ' αυτή, αλλά τη χρήση των Single Factor Duration Models (SFDMs) για την επίτευξη ανοσοποίησης. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, μόνο λίγοι επενδυτές είναι τελείως risk averse (αντίθετοι ως προς τον κίνδυνο) και η ανοσοποίηση είναι μόνο ένα μικρό μέρος -και όχι και τόσο ενδιαφέρον- του ευρύτερου ζητήματος του κινδύνου.

Παρόλα αυτά όμως, η ανοσοποίηση συνδέεται με πολύ σημαντικά υπολογιστικά και πρακτικά θέματα. Όσον αφορά τα υπολογιστικά θέματα, οι φόρμουλες / τύποι των μέτρων της διάρκειας «εξάγονται» εύκολα αν λύσουμε ως προς τις συνθήκες ανοσοποίησης για την κάθε στοχαστική διαδικασία που υποθέτουμε ότι ισχύει. Όσον αφορά τα πρακτικά θέματα, η ανοσοποίηση ενάντια του κινδύνου του επιτοκίου, είναι πολύ σημαντική για μερικές κατηγορίες επενδυτών (π.χ. ασφαλιστικές εταιρείες), αλλά και για όλους τους επενδυτές καθώς είναι ένα μέσο ώστε να αποκτήσουν την απόδοση χωρίς κίνδυνο (riskless return).

Σύμφωνα με τους Bierwag και Khang (1979), η ανοσοποίηση είναι συνεπής με τις minimax συνθήκες που ικανοποιούν τους επενδυτές. Η διάρκεια, ως μέσο ανοσοποίησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο στην τιμολόγηση ομολογιών, όσο και στη δημιουργία χαρτοφυλακίων ομολογιών με τοκομερίδια, τα οποία είναι «ισοδύναμα» με ομολογίες χωρίς τοκομερίδια (zero coupon bonds), οι οποίες όμως δεν είναι διαθέσιμες.

✓ Σύμφωνα με μια τρίτη κριτική, τα μοντέλα είναι τελείως ντετερμινιστικά και δεν περιλαμβάνουν κάποιο όρο για το σφάλμα ή τα κατάλοιπα. Αυτό συμβαίνει γιατί οι πρώτοι ερευνητές δεν έκαναν υποθέσεις για κάποια στοχαστική διαδικασία ή υπέθεταν ότι υπάρχει μόνο μία τέτοια στοχαστική διαδικασία, η οποία είναι γνωστή με βεβαιότητα.

Ωστόσο, όταν οι ερευνητές άρχισαν να λαμβάνουν υπόψη τους την αβεβαιότητα και την ύπαρξη πολλαπλών στοχαστικών διαδικασιών, δημιουργήθηκε η ανάγκη επακριβούς προσδιορισμού της πραγματικής στοχαστικής διαδικασίας. Αν δεν προσδιοριστεί σωστά, τότε το μοντέλο περιλαμβάνει και κάποιο σφάλμα, το οποίο ονομάζεται «κίνδυνος στοχαστικής διαδικασίας» (stochastic process risk).

✓ Μία άλλη κριτική αφορά στο κατά πόσο ένας μοναδικός παράγοντας μπορεί να περιγράψει την αβεβαιότητα του επιτοκίου. Οι μεταβολές των επιτοκίων πάνω στην καμπύλη αποδόσεων πρέπει να συσχετίζονται τέλεια. Άρα, αν η στοχαστική διαδικασία έχει προσδιοριστεί σωστά αλλά δεν ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη, τότε θα υπάρχει stochastic process risk.

Οι Ingersoll, Skelton και Weil (1978), καθώς και οι Cox, Ingersoll και Ross (1977), υποστηρίζουν ότι οι στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στα «παραδοσιακά» Single Factor Duration Models (SFDMs) είναι ασυνεπείς με τις γενικές συνθήκες ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει γιατί οι συναρτήσεις αποδόσεων των ανοσοποιημένων χαρτοφυλακίων, οι οποίες βασίζονται στις προαναφερθείσες διαδικασίες, είναι κυρτές ως προς την ένταση του shock του επιτοκίου. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το shock, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η απόδοση. Επίσης σημαίνει, ότι όσο μεγαλύτερο το τοκομερίδιο, τόσο μεγαλύτερη η απόδοση για κάποιο δεδομένο shock. Επομένως, ίσως υπάρξουν ευκαιρίες για arbitrage, με τελικό αποτέλεσμα οι ομολογίες με υψηλά τοκομερίδια να «παραγκωνίσουν» τις ομολογίες με χαμηλά τοκομερίδια.

Αν από την άλλη μεριά, οι στοχαστικές διαδικασίες δεν είναι «καθαρά» κυρτές, τότε ένα χαρτοφυλάκιο με ομολογίες με τοκομερίδια έχει ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά με μια ομολογία χωρίς τοκομερίδια, με την οποία όμως έχει ακριβώς την ίδια διάρκεια. Επομένως, αν δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής, τα δύο χαρτοφυλάκια είναι πανομοιότυπα. Αυτό σημαίνει, ότι αν η ομολογία χωρίς τοκομερίδια δεν είναι διαθέσιμη, μπορούν να δημιουργηθούν χαρτοφυλάκια ομολογιών με τοκομερίδια, τα οποία θα έχουν ακριβώς την ίδια «συμπεριφορά» με την ομολογία χωρίς τοκομερίδια.

1.11. Συμπεράσματα

Όπως φαίνεται από την ανάλυση που προηγήθηκε, η έννοια της διάρκειας απασχόλησε αρκετούς ερευνητές. Ίσως υπάρχουν και άλλοι που έχουν χρησιμοποιήσει τη διάρκεια ή παρόμοια μέτρα. Σίγουρα όμως υπάρχουν αρκετοί ερευνητές που θα μπορούσαν να έχουν επωφεληθεί αν γνώριζαν τη διάρκεια και τη χρησιμοποιούσαν. Για παράδειγμα, όπως σημειώνει ο Weil (1973), ο Wehrle (1961) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι ασφαλιστικές εταιρείες θα πρέπει να διακρατούν κρατικές ομολογίες, με χρόνο ως τη λήξη (maturity) από 50 έως 100 χρόνια, με κουπόνι από 3,5% έως 3,9%, μη «ανακαλέσιμες» (noncallable), οι οποίες να είναι και «tap issue». Αυτό σημαίνει, ότι οι ομολογίες θα είναι διαθέσιμες για αγορά για μια εκτεταμένη χρονική περίοδο. Όμως, η διάρκεια μιας ομολογίας με χρόνο ως τη λήξη (maturity) 100 χρόνια, με εξαμηνιαίο κουπόνι 3,5% και επιτόκιο 6%, είναι λίγο μεγαλύτερη από 17 χρόνια. Μια ομολογία με αυτά τα χαρακτηριστικά δεν πρόκειται να βοηθήσει μια επιχείρηση, η οποία έχει παθητικό με μεγάλη διάρκεια, και η οποία θέλει να πετύχει ανοσοποίηση του ισολογισμού της. Αντιθέτως, η επιχείρηση αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιήσει ομολογίες χωρίς τοκομερίδια και με μεγάλη διάρκεια.

Αξίζει να σημειώσουμε, ότι ο πιο γνωστός ορισμός της διάρκειας, και ο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενος, είναι αυτός που δόθηκε από το Macaulay. Ωστόσο, η δουλειά και των υπολοίπων ερευνητών βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στην πράξη. Θα μπορούσαμε να πούμε, ότι οι έρευνες αυτές συνδυάζονται κατά κάποιο τρόπο και εφαρμόζονται από κοινού στη διαδικασία διαχείρισης χαρτοφυλακίων, ώστε να υπάρξει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα για την επιχείρηση / χρηματοοικονομικό οργανισμό.

2. Τα Χαρακτηριστικά της Διάρκειας

2.1. Εισαγωγή

Έχοντας ήδη παρουσιάσει τις πιο βασικές έρευνες γύρω από το θέμα της διάρκειας, θα πρέπει να έχει γίνει ξεκάθαρο τι ακριβώς εννοούμε στη χρηματοοικονομική επιστήμη όταν χρησιμοποιούμε τον όρο αυτό. Παρόλα αυτά όμως, για να υπάρξει καλύτερη κατανόηση του ζητήματος αυτού, κρίνεται σκόπιμο στο κεφάλαιο αυτό να επεκταθούμε και να εξετάσουμε λεπτομερώς τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες της διάρκειας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το πώς ορίζεται, κατά το Saunders (2000), η διάρκεια συγκεκριμένων, ειδικών κατηγοριών ομολογιών, όπως οι ομολογίες χωρίς τοκομερίδια (zero-coupon bonds) και οι διηνεκείς ομολογίες (consol bonds).

2.2. Διάρκεια Ομολογιών Χωρίς Τοκομερίδια (Zero-Coupon Bonds)

Οι ομολογίες χωρίς τοκομερίδια είναι ομολογίες που συνήθως πωλούνται με έκπτωση επί της ονομαστικής τους αξίας και «πληρώνουν» την ονομαστική τους αξία (π.χ. \$1.000) στη λήξη τους (maturity). Η τρέχουσα τιμή που ένας επενδυτής είναι πρόθυμος να πληρώσει για μια τέτοια ομολογία ισούται με την παρούσα αξία της ομολογίας. Δηλαδή:

$$P = \frac{\$1.000}{(1+i)^n} \tag{5}$$

Όπου: P είναι η τιμή της ομολογίας, i είναι η απαιτούμενη, ετησίως ανατοκιζόμενη, απόδοση στη λήξη (yield to maturity) και n είναι ο αριθμός των περιόδων ως τη λήξη (maturity).

Είναι φανερό, ότι επειδή δεν υπάρχουν ενδιάμεσες ταμειακές ροές στο χρονικό διάστημα μεταξύ έκδοσης και λήξης (maturity), θα πρέπει να ισχύει:

$$D = M \tag{6}$$

Δηλαδή, η διάρκεια μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια ισούται με το χρόνο ως τη λήξη της (maturity).

2.3. Διάρκεια Διηνεκών Ομολογιών (Consol Bonds)

Οι διηνεκείς ομολογίες παρουσιάζουν πολύ μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον για τη διερεύνηση των διαφορών μεταξύ λήξης (maturity) και διάρκειας.

Διηνεκής ονομάζεται η ομολογία που «πληρώνει» ένα σταθερό τοκομερίδιο κάθε χρόνο. Το χαρακτηριστικό που την καθιστά ιδιαίτερη, είναι ότι δε λήγει ποτέ. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$M = \infty \tag{7}$$

Εφόσον η διηνεκής ομολογία δε λήγει ποτέ –ο χρόνος ως τη λήξη της (maturity) εκτείνεται στο άπειρο- η διάρκειά της δίνεται από τον εξής τύπο:

$$D = 1 + \frac{1}{i} \tag{8}$$

Όπου: i είναι η απαιτούμενη απόδοση στη λήξη (yield to maturity).

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η διάρκεια της διηνεκούς ομολογίας επηρεάζεται μόνο από την απόδοση στη λήξη (yield to maturity) και είναι ανεξάρτητη από το ύψος του τοκομεριδίου της.

Τέλος, θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός, ότι ενώ ο χρόνος ως τη λήξη (maturity) είναι άπειρος, η διάρκεια είναι πεπερασμένη.

Όπως φαίνεται και από τη σχέση (8), μια αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε μείωση της διάρκειας της διηνεκούς ομολογίας. Για παράδειγμα:

Αν $i = 5\%$, τότε: $D = 1 + (1/0{,}05) = 21$ χρόνια.

Αν $i = 8\%$, τότε: $D = 1 +\ (1/0{,}06)\ = 13{,}5$ χρόνια.

2.4. Χαρακτηριστικά / Ιδιότητες της Διάρκειας

Για να γίνουν απόλυτα κατανοητές οι ιδιότητες της διάρκειας, παραθέτουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα (Saunders, 2000).

Α) Διάρκεια εξαετούς ομολογίας

Ας υποθέσουμε μια ομολογία που «πληρώνει» τοκομερίδιο ετησίως. Ας υποθέσουμε επίσης, ότι η ονομαστική αξία της ομολογίας είναι $1.000 και ότι η απόδοση στη λήξη (yield to maturity: i) και το τοκομερίδιο είναι 8%. Ο ακόλουθος πίνακας περιλαμβάνει τους απαραίτητους υπολογισμούς για τον υπολογισμό της διάρκειας της ομολογίας.

Διάρκεια 6ετούς ομολογίας με τοκομερίδιο και απόδοση στη λήξη (yield to maturity) 8%				
n	$S(n)$	DF	$S(n) * DF$	$S(n) * DF * n$
1	80	0,9259	74,07	74,07
2	80	0,8573	68,59	137,18
3	80	0,7938	63,51	190,53
4	80	0,735	58,8	235,2
5	80	0,6806	54,45	272,25
6	1.080	0,6302	680,58	4.038,48
			1.000	4.992,71

Πίνακας 1

Όπου: $S(n) = 8\% * (1.000) = 80$ και αντιπροσωπεύει την ετήσια πληρωμή κουπονιού,

και $DF = (1 + i)^{-n}$ και είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας.

Σύμφωνα με τον πίνακα, η διάρκεια της ομολογίας είναι:

$D = 4.992{,}71 / 1.000 = 4{,}993$ χρόνια.

Β) Διάρκεια διετούς ομολογίας

Ας υποθέσουμε μια διετή ομολογία, η οποία «πληρώνει» εξαμηνιαίο κουπόνι. Ας θεωρήσουμε ότι η ονομαστική αξία της ομολογίας είναι \$1.000, η ετήσια απόδοση στη λήξη (yield to maturity: i) είναι 12% και το ετήσιο τοκομερίδιο είναι 8%.

Διάρκεια 2ετούς ομολογίας με 8% τοκομερίδιο και 12% απόδοση στη λήξη (yield to maturity)				
n	$S(n)$	DF	$S(n)*DF$	$S(n)*DF*n$
½	40	0,9434	37,74	18,87
1	40	0,8900	35,60	35,6
1 ½	40	0,8396	33,58	50,37
2	1.040	0,7921	823,78	1.647,56
			930,70	1.752,4

Πίνακας 2

Όπου: $S(n) = 8\% * (1.000) * ½ = 40$ και αντιπροσωπεύει την εξαμηνιαία πληρωμή τοκομεριδίου, και $DF = (1 + i/2)^{-n}$.

Σύμφωνα με τον πίνακα, η διάρκεια της ομολογίας είναι:

$D = 1.752,4 / 930,70 = 1,88$ χρόνια.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραδείγματα αυτά, αλλά και τα χαρακτηριστικά της διηνεκούς ομολογίας και της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια, μπορούμε να ορίσουμε τις ιδιότητες της διάρκειας, όπως παρουσιάζονται από το Βασιλείου (2001), αλλά και από το Saunders (2000).

2.4.1. Διάρκεια και Χρόνος ως τη Λήξη (maturity)

Η διάρκεια αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο χρόνος ως τη λήξη (maturity) της ομολογίας, αλλά με φθίνοντα ρυθμό:

$$\frac{\partial D}{\partial M} > 0 \qquad \text{αλλά} \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial M^2} < 0 \tag{9}$$

Ο φθίνων ρυθμός οφείλεται στο γεγονός ότι καθώς ο χρόνος λήξης της ομολογίας επιμηκύνεται, η παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας που θα καταβληθεί στη λήξη (maturity). της ομολογίας μειώνεται.

Τέλος, η διάρκεια μιας ομολογίας με τοκομερίδια, είναι πάντοτε μικρότερη από το χρόνο λήξης της (maturity). Αυτό συμβαίνει, γιατί η διάρκεια λαμβάνει υπ'όψη της τις ενδιάμεσες ταμειακές ροές.

2.4.2. Διάρκεια και Απόδοση στη Λήξη (yield to maturity)

Καθώς η απόδοση στη λήξη (yield to maturity: i) αυξάνεται, η διάρκεια μειώνεται:

$$\frac{\partial D}{\partial i} < 0 \tag{10}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί η υψηλότερη απόδοση στη λήξη προεξοφλεί «περισσότερο» τις πιο «μακρινές» ταμειακές ροές, και η σχετική σπουδαιότητα (οι σταθμίσεις / βάρη) αυτών των «μακρινών» ταμειακών ροών μειώνεται σε σχέση με τις «νωρίτερες» ταμειακές ροές της ομολογίας.

2.4.3. Διάρκεια και Ύψος Τοκομεριδίου

Όσο υψηλότερο το κουπόνι που «πληρώνει» η ομολογία, τόσο μικρότερη η διάρκεια:

$$\frac{\partial D}{\partial C} < 0 \tag{11}$$

Όπου: C το ύψος του τοκομεριδίου.

Αυτή η σχέση παρατηρείται, γιατί όσο υψηλότερό είναι το τοκομερίδιο, τόσο πιο γρήγορα λαμβάνονται οι ταμειακές ροές, και τόσο υψηλότερες είναι οι σταθμίσεις / βάρη αυτών των ταμειακών ροών.

2.5. Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από την ενότητα αυτή και θα πρέπει να θυμάται ο αναγνώστης, είναι το εξής:

Για μια δεδομένη ποσοστιαία μεταβολή του επιτοκίου, η μεταβολή της τιμής της ομολογίας θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο:

1) μεγαλύτερος ο χρόνος ως τη λήξη (maturity),

2) μικρότερη η απόδοση στη λήξη (yield to maturity),

3) μικρότερο το τοκομερίδιο.

3. Οι Χρήσεις της Διάρκειας

3.1. Εισαγωγή

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε εις βάθος την έννοια της διάρκειας, παραθέσαμε τις διαστάσεις του όρου καθώς και τις βασικές ιδιότητές του. Η λογική σειρά των πραγμάτων απαιτεί, στη φάση αυτή, να παρουσιάσουμε τις χρήσεις της διάρκειας.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από τρεις βασικές ενότητες. Αρχικά θα παρουσιάσουμε τις κύριες χρήσεις της διάρκειας. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στη χρησιμότητα της διάρκειας ως risk proxy και τέλος θα αναφέρουμε κάποιους ερευνητές που έχουν προτείνει εναλλακτικές χρήσεις του μέτρου.

3.2. Οι Βασικές Χρήσεις της Διάρκειας

Η διάρκεια είναι σημαντική στην ανάλυση και διαχείριση ομολογιών για τρεις κυρίως λόγους (Bierwag, Kaufman και Khang, 1978):

i. είναι ένας χρήσιμος δείκτης των χαρακτηριστικών του χρόνου μιας ροής χρηματικών ροών. Πιο συγκεκριμένα, η διάρκεια αποτελεί μέτρο της «αποτελεσματικής ή οικονομικής ζωής» μιας ομολογίας. Ας συγκρίνουμε, για παράδειγμα, δύο ομολογίες οι οποίες έχουν επιτόκιο έκδοσης 8% και οι δύο, και η μεν πρώτη λήγει σε 10 χρόνια, η δε δεύτερη σε 50 χρόνια. Η δεύτερη ομολογία λήγει σε πενταπλάσιο χρόνο από την πρώτη. Παρόλα αυτά, η πρώτη ομολογία έχει διάρκεια (δηλαδή αποτελεσματική ζωή) 7,25 χρόνια, ενώ η δεύτερη έχει 13,21 χρόνια. Άρα, οι δύο ομολογίες δε διαφέρουν τόσο πολύ όσο φαίνεται εκ πρώτης όψεως.

ii. Συσχετίζει τις μεταβολές του επιτοκίου με τις μεταβολές της τιμής της ομολογίας. Είναι δηλαδή, μέτρο της ευαισθησίας των τιμών των ομολογιών σε μεταβολές των επιτοκίων. Με άλλα λόγια, η διάρκεια μετρά τον κίνδυνο επιτοκίου των ομολογιών.

iii. Χρησιμοποιείται σε διάφορες στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων ώστε να ανοσοποιείται το χαρτοφυλάκιο ενάντια του κινδύνου που δημιουργείται λόγω των μη αναμενόμενων μεταβολών του επιτοκίου.

3.3. Η Διάρκεια ως Risk Proxy

Ο Hicks (1939) ήταν ο πρώτος που μίλησε για την ιδιότητα της διάρκειας ως risk proxy. Απέδειξε ότι για μια δεδομένη, απειροελάχιστη μεταβολή του επιτοκίου, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της ομολογίας θα είναι ανάλογη με τη διάρκειά της. Από το 1972 και μετά, πολλοί ερευνητές επέκτειναν το αποτέλεσμα του Hicks.

Οι Hopewell και Kaufman (1973) έδειξαν ότι υπάρχει θετική σχέση μεταξύ του χρόνου ως τη λήξη (maturity) και της ευαισθησίας των ομολογιών ως προς το επιτόκιο. Σημείωσαν όμως, ότι αυτή η σχέση δεν ισχύει πάντοτε όταν πρόκειται για ομολογίες με τοκομερίδια που πωλούνται με έκπτωση. Αυτή η αντίφαση εξαφανίστηκε όταν η διάρκεια αντικαταστάθηκε με το χρόνο ως τη λήξη (maturity). Όσον αφορά ομολογίες που πωλούνται στο άρτιο ή υπέρ το άρτιο, αποδείχθηκε ότι η διάρκεια και ο κίνδυνος του επιτοκίου αυξάνονται με φθίνοντα ρυθμό καθώς αυξάνεται ο χρόνος ως τη λήξη (maturity). Για ομολογίες που πωλούνται με έκπτωση, η διάρκεια και ο κίνδυνος του επιτοκίου αυξάνονται καθώς αυξάνεται ο χρόνος ως τη λήξη (maturity).

Η επιτυχία της διάρκειας ως μέτρο της ευαισθησίας της ομολογίας ως προς το επιτόκιο, οδήγησε τους Hopewell και Kaufman να προτείνουν την εξέταση της καμπύλης αποδόσεων (yield curve) σε σχέση με την διάρκεια και όχι με τον χρόνο ως την λήξη (maturity). Την ίδια σχεδόν άποψη είχαν και οι Carr, Halpern και McCallum (1974). Ωστόσο, οι Livingston και Caks (1977) έδειξαν ότι για να είναι η καμπύλη αποδόσεων συνάρτηση της διάρκειας θα πρέπει τα προθεσμιακά επιτόκια να μπορούν να καθορισθούν επακριβώς από τα επιτόκια που προηγούνται αυτών.

Οι Haugen και Wichern (1974), σε μια πιο γενική μελέτη της ευαισθησίας των ομολογιών ως προς το επιτόκιο, επαναδιατύπωσαν μαθηματικά τα αποτελέσματα των Hopewell και Kaufman. Οι Boquist, Racette και Schlarbaum (1975) συσχέτισαν την έννοια της διάρκειας με το συστηματικό κίνδυνο (συντελεστής βήτα: β) των ομολογιών και των μετοχών.

Παρ' όλες τις αποδείξεις ότι η διάρκεια είναι proxy για την ευαισθησία ως προς το επιτόκιο και τη χρησιμότητά της στην ανοσοποίηση των χαρτοφυλακίων με ομολογίες, πολλές έρευνες σχετικά με την ανάπτυξη στρατηγικών για χαρτοφυλάκια ομολογιών αγνοούν τη διάρκεια. Όπως σημειώνουν οι Hopewell και Kaufman, πολλές έρευνες, όσον αφορά εναλλακτικές στρατηγικές για χαρτοφυλάκια ομολογιών, κατέληξαν σε ανάμεικτα αποτελέσματα κατά την προσπάθεια να βρεθεί ένα μείγμα λήξεων (maturities) που να είναι το ιδανικό όσον αφορά τον κίνδυνο του επιτοκίου και την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Αυτό συνέβη γιατί συγκρίθηκαν χαρτοφυλάκια που δημιουργήθηκαν χωρίς να ληφθεί υπόψη η διάρκεια. Συγκεκριμένα, αποδείχθηκε ότι πολύ δημοφιλείς, «ανταγωνιστικές» στρατηγικές, όπως η «dumbbell» (μία long θέση σε ομολογία και μια short θέση σε ομολογία) και η «ladder» (evenly spaced maturities), ίσως είναι πολύ δύσκολο να διαχωριστούν, καθώς και οι δύο μπορούν να εφαρμοστούν για να «παράγουν» πανομοιότυπες διάρκειες και κατά συνέπεια πανομοιότυπο κίνδυνο του επιτοκίου.

Αν και το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας χρησιμοποιεί τη διάρκεια ως μια proxy για τον κίνδυνο του επιτοκίου, οι Ingersoll, Skelton και Weil (1978) αποδεικνύουν ότι η διάρκεια δε μπορεί να είναι risk proxy σε αγορές που βρίσκονται σε ισορροπία, παρά μόνο αν ισχύουν πολύ περιοριστικές υποθέσεις. Με βάση την έρευνά τους μπορούν να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα:

i. Μερικοί ερευνητές έχουν «διαστρεβλώσει» την έννοια της διάρκειας του Macaulay. Για τον υπολογισμό της παρούσα αξίας, χρησιμοποιούν την απόδοση στη λήξη (yield to maturity) αντί του προθεσμιακού επιτοκίου. Η διάρκεια που προκύπτει με βάση αυτόν τον υπολογισμό, δε μπορεί να λειτουργήσει ως risk proxy παρά μόνο αν η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη.

ii. Η χρήση της διάρκειας του Macaulay για τη μέτρηση του κινδύνου όταν η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη, είναι επιτρεπτή, μόνο αν οι μεταβολές της καμπύλης αποδόσεων είναι απειροελάχιστες και ομοιόμορφης, σταθερής (αναλογικής) έντασης.

iii. Η εμφάνιση ομοιόμορφων μεταβολών στην καμπύλη αποδόσεων, οι οποίες όμως δεν είναι απειροελάχιστες, δημιουργεί ευκαιρίες για arbitrage. Επομένως, μη απειροελάχιστες, ομοιόμορφες μεταβολές της καμπύλης αποδόσεων δε μπορούν να συμβούν σε μια ανταγωνιστική ισορροπία.

3.4. Επιπλέον Χρήσεις της Διάρκειας

Πιο πρόσφατες μελέτες αναφέρονται σε εναλλακτικές χρήσεις της διάρκειας, πέρα από αυτές που ήδη αναφέρθηκαν. Οι πιο σημαντικές είναι οι ακόλουθες:

i. Ο Durand (1974) πρότεινε έννοιες χρόνου, όπως η διάρκεια, και τις χρησιμοποίησε στην ανάλυση κερδοφορίας του προγραμματισμού κεφαλαίου.

ii. Ο Grove (1975) χρησιμοποίησε τη διάρκεια σε σχέση με τον κίνδυνο και τις σχετικές αλλαγές στην αξία των χρηματικών ροών των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού.

iii. Οι Blocher και Stickney (1978) εξέτασαν την επίδραση που έχουν οι αλλαγές στην απαιτούμενη απόδοση της επιχείρησης πάνω στη διάρκεια των έργων / προγραμμάτων της (projects), και πρότειναν κανόνες επιλογής projects σύμφωνα με την ανοχή ως προς τον κίνδυνο (risk tolerance) κάθε manager.

iv. Οι Bierwag και Khang (1979) έδειξαν ότι μία στρατηγική ανοσοποίησης με βάση τη διάρκεια είναι ιδανική, όταν οι προτιμήσεις του επενδυτή όσον αφορά το λεγόμενο «downside» κίνδυνο, περιγράφονται από το μέτρο του Fishburn.

v. Οι Tito και Wagner (1977) πρότειναν την αξιολόγηση των managers των συνταξιοδοτικών ταμείων με βάση την απόδοση του χαρτοφυλακίου για μια δεδομένη διάρκεια.

vi. Οι Keintz και Stickney (1977) ασχολήθηκαν με τα προβλήματα και την ορθότητα της χρήσης της διάρκειας για την ανοσοποίηση των συνταξιοδοτικών ταμείων ως προς τις αλλαγές του επιτοκίου.

3.4. Συμπεράσματα

Το βασικό συμπέρασμα του κεφαλαίου αυτού είναι ότι η διάρκεια έχει ποικίλες χρήσεις και βρίσκει εφαρμογή με πολλούς τρόπους. Ωστόσο, ο αναγνώστης θα πρέπει να θυμάται τις τρεις βασικές χρήσεις του μέτρου, καθώς και το γεγονός ότι η διάρκεια λειτουργεί ως risk proxy του κινδύνου του επιτοκίου μόνο κάτω από την περιοριστική υπόθεση ότι το τρέχον (spot) επιτόκιο και η απόδοση στη λήξη (yield to maturity) όλων των ομολογιών, αλλάζουν κατά ένα ίσο ποσό. Αυτό είναι πιθανό μόνο όταν η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη και μετακινείται με παράλληλο τρόπο (δηλαδή δεν αλλάζει το σχήμα της).

4. Διάρκεια και Στρατηγικές Immunization

4.1. Εισαγωγή

Έχοντας παρουσιάσει τις βασικές χρήσεις της διάρκειας, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι όλες είναι πολύ σημαντικές και βρίσκουν μεγάλη πρακτική εφαρμογή. Όμως, η πιο διαδεδομένη χρήση της διάρκειας, και το θέμα που ελκύει περισσότερο το ενδιαφέρον του ακαδημαϊκού κόσμου, προέρχεται από τις διαδικασίες βελτιστοποίησης για τη δημιουργία χαρτοφυλακίων που ελαχιστοποιούν συγκεκριμένα είδη κινδύνου.

Ο κίνδυνος του επιτοκίου, η διάρκεια και η ανοσοποίηση του χαρτοφυλακίου είναι τρεις έννοιες που συνδέονται στενά μεταξύ τους και αλληλοεπηρεάζονται. Στο παρόν κεφάλαιο, εξετάζονται οι έννοιες αυτές σε συνδυασμό και παρουσιάζονται οι βασικές έρευνες σχετικά με την ανάπτυξη στρατηγικών για τη δημιουργία χαρτοφυλακίων που προστατεύονται από τις ανεπιθύμητες μεταβολές του επιτοκίου.

4.2. Samuelson, Redington και Grove

Ο Samuelson (1945), ο Redington και ο Grove (1966, 1974), καθώς και αρκετοί άλλοι ερευνητές, απέδειξαν ότι μια επιχείρηση μπορεί να ανοσοποιηθεί ενάντια του κινδύνου του επιτοκίου, θέτοντας τη σταθμισμένη διάρκεια των στοιχείων του ενεργητικού ίση με τη σταθμισμένη διάρκεια των στοιχείων του παθητικού.

4.3. Fisher και Weil

4.3.1. Η Στρατηγική Ανοσοποίησης και οι Υποκείμενες Υποθέσεις

Μεγάλη συμβολή στο θέμα της ανοσοποίησης των χαρτοφυλακίων με τη χρήση της διάρκειας, αποτελεί η έρευνα των Fisher και Weil (1971). Έδειξαν πώς οι επενδυτές μπορούν να δημιουργήσουν ένα χαρτοφυλάκιο με ομολογίες με τοκομερίδια, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, το οποίο στο τέλος του προγραμματισμένου επενδυτικού ορίζοντα θα έχει απόδοση μεγαλύτερη ή ίση από την υποσχεθείσα απόδοση στην αρχή του επενδυτικού ορίζοντα, ανεξάρτητα από τις μεταβολές του επιτοκίου κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής.

Απέδειξαν ότι η ανοσοποίηση μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας το «μήκος του χρόνου» του προγραμματισμένου επενδυτικού ορίζοντα ίσο με κάποιο «χαρακτηριστικό χρόνου» του χαρτοφυλακίου. Απέδειξαν επίσης, ότι αυτό το «χαρακτηριστικό χρόνου» του χαρτοφυλακίου ταυτίζεται με τη διάρκεια όπως ορίσθηκε από το Macaulay, όταν ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

i. η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη,

ii. οι μη αναμενόμενες μεταβολές του επιτοκίου ακολουθούν μια αθροιστική στοχαστική διαδικασία,

iii. χρησιμοποιείται συνεχής ανατοκισμός.

Αν όμως δεν ισχύει η πρώτη υπόθεση, δηλαδή η καμπύλη αποδόσεων δεν είναι επίπεδη, αλλά οι υπόλοιπες δύο υποθέσεις εξακολουθούν να ισχύουν, τότε ο «δείκτης» χρόνου που χρησιμοποιείται για την ανοσοποίηση θα είναι διαφορετικός. Οι σταθμίσεις, για τον υπολογισμό του μέτρου, δε θα είναι συναρτήσεις της απόδοσης στη λήξη (yield to maturity), αλλά θα είναι συναρτήσεις των προεξοφλητικών παραγόντων που ισχύουν κάθε περίοδο. Οι Fisher και Weil ονόμασαν αυτόν το « δείκτη» χρόνου *average duration* (μέση διάρκεια)[4].

Για τη δημιουργία ενός ανοσοποιημένου χαρτοφυλακίου ομολογιών, με τη χρήση της μέσης διάρκειας των Fisher και Weil, θα πρέπει να ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

i. οι μη αναμενόμενες μεταβολές του επιτοκίου περιγράφονται από μια αθροιστική στοχαστική διαδικασία,

ii. μόνο μία μεταβολή στην καμπύλη αποδόσεων μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια ενός προγραμματισμένου επενδυτικού ορίζοντα,

iii. ο προγραμματισμένος επενδυτικός ορίζοντας είναι δεδομένος και γνωστός με βεβαιότητα.

Ένα αθροιστικό στοχαστικό shock είναι αυτό που προκαλεί τη μετακίνηση της καμπύλης αποδόσεων προς τα επάνω ή προς τα κάτω, κατά το ίδιο τυχαίο ποσό για κάθε λήξη (maturity). Δηλαδή, αν το $r(t)$ περιγράφει την αρχική καμπύλη αποδόσεων, τότε μετά από κάποιο shock η νέα καμπύλη αποδόσεων περιγράφεται από το $r(t)+\lambda$. Το λ είναι ανεξάρτητο από το t και ισχύει $\lambda \leq 0$ ή $\lambda \geq 0$. Η καμπύλη αποδόσεων μπορεί να αλλάξει θέση, μετακινούμενη κατά λ, μόνο μία φορά κατά τη διάρκεια του προγραμματισμένου επενδυτικού ορίζοντα.

Αν ισχύουν όλα αυτά, τότε το χαρτοφυλάκιο μπορεί να ανοσοποιηθεί ενάντια στον κίνδυνο του επιτοκίου, μόνο αν θέσουμε τον προγραμματισμένο επενδυτικό ορίζοντα, έστω H, ίσο με τη μέση διάρκεια του χαρτοφυλακίου, έστω D'. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει:

[4] Βλέπε κεφάλαιο 1

$$H = D' \quad (12)$$

4.3.2. Έλεγχος της Στρατηγικής Ανοσοποίησης

Οι Fisher και Weil έλεγξαν εμπειρικά τη στρατηγική ανοσοποίησης που πρότειναν. Σύγκριναν το πόσο καλά ανοσοποιείται το χαρτοφυλάκιο αν εφαρμοστεί η στρατηγική τους, σε σχέση με το αν εφαρμοστεί η λεγόμενη maturity στρατηγική, δηλαδή η αγορά και η διακράτηση ομολογιών με λήξεις (maturities) που ισούνται με τον προγραμματισμένο επενδυτικό ορίζοντα και η επανεπένδυση των τοκομεριδίων σε ομολογίες με χρόνο λήξης (maturity) ίσο με το χρόνο που απομένει ως το τέλος του προγραμματισμένου επενδυτικού ορίζοντα.

Για τον έλεγχο αυτό, οι Fisher και Weil χρησιμοποίησαν δεδομένα επιτοκίου για την περίοδο 1925 – 1968. Η στρατηγική δημιουργήθηκε στην αρχή του επενδυτικού ορίζοντα, με βάση την καμπύλη αποδόσεων που ίσχυε τότε. Το χαρτοφυλάκιο αναπροσαρμοζόταν κάθε χρόνο, έτσι ώστε η διάρκειά του να διατηρείται ίση με τον εναπομείναντα επενδυτικό ορίζοντα.

Ο έλεγχος έδειξε ότι η στρατηγική των Fisher και Weil υπερτερεί της maturity στρατηγικής, κατά το 75% των περιπτώσεων, για μια ποικιλία επενδυτικών οριζόντων. Επίσης, εμφανίζει χαμηλότερη τυπική απόκλιση, όσον αφορά στη διαφορά πραγματοποιηθείσας – υποσχεθείσας απόδοσης, σε σχέση με άλλες στρατηγικές.

4.3. Bierwag, Kaufman και Khang

Οι ερευνητές αυτοί, με το άρθρο που δημοσίευσαν το 1978, επέκτειναν και γενίκευσαν το μοντέλο των Fisher και Weil. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται τα κυριότερα συμπεράσματά τους.

1) Ανοσοποίηση και μη αθροιστικές στοχαστικές διαδικασίες: ακόμη και αν η στοχαστική διαδικασία που ακολουθούν τα επιτόκια δεν είναι αθροιστική, η ανοσοποίηση μπορεί να επιτευχθεί. Ωστόσο, το μέτρο της διάρκειας που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να διαφέρει σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η νέα καμπύλη αποδόσεων γίνεται $\theta r(t)$ μετά από κάποιο πολλαπλό shock, όπου $\theta \geq 1$ ή $\theta \leq 1$ είναι το τυχαίο shock, «καταδεικνύεται» ένα ανοσοποιητικό μέτρο της διάρκειας ίσο με D^*, όπου $D^* \neq D'$ εκτός και αν η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη. Ο ορισμός της D^* [5] είναι ο εξής:

$$r\{D^*\} = \frac{\sum_{t=1}^{m} s(t) * (\frac{t}{q}) * r(t) * [1 + r(t)]^{-t}}{\sum_{t=1}^{m} s(t) * [1 + r(t)]^{-t}} \qquad (13)$$

Όπου: $r(t)$ είναι η καμπύλη αποδόσεων και q είναι ο προγραμματισμένος επενδυτικός ορίζοντας.

Η στοχαστική διαδικασία σύμφωνα με την οποία τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια διακυμαίνονται πιο πολύ από ότι τα μακροπρόθεσμα, περιγράφεται ως εξής[6]: $r(t) + (\frac{\lambda}{\alpha t}) * \ln(1 + \alpha t)$, και οδηγεί σε ένα νέο ορισμό της διάρκειας D^{**}:

[5] Σύμφωνα με τον Bierwag.
[6] Σύμφωνα με τον Khang.

$$\ln(1+aD^{**}) = \frac{\sum_{t=1}^{m} s(t) * \ln(1+at) * [1+r(t)]^{-t}}{\sum_{t=1}^{m} s(t) * [1+r(t)]^{-t}} \tag{14}$$

Όπου: a είναι η παράμετρος που προσδιορίζει το λόγο των μεταβολών των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων ως προς τις μεταβολές των μακροπρόθεσμων επιτοκίων.

Σε γενικές γραμμές, μπορούμε να πούμε ότι αν η ανοσοποίηση είναι δυνατή, το μέτρο της διάρκειας που πρέπει να χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από την υποκείμενη στοχαστική διαδικασία. Ωστόσο, για μερικές στοχαστικές διαδικασίες ίσως δεν είναι δυνατόν να βρεθεί μια ανοσοποιητική στρατηγική.

2) Πολλαπλά τυχαία shocks στην προγραμματισμένη επενδυτική περίοδο: αν το τυχαίο shock μπορεί να συμβεί περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της προγραμματισμένης επενδυτικής περιόδου, η ανοσοποίηση γίνεται μια «τοπική» ιδιότητα μιας στρατηγικής με τη χρήση της διάρκειας. Αυτό σημαίνει ότι αν τα shocks που συμβαίνουν στην καμπύλη αποδόσεων κατά τη διάρκεια της προγραμματισμένης επενδυτικής περιόδου μπορούν να συμβούν κατά διαστήματα, τότε η τελική αξία της επένδυσης θα είναι συνάρτηση όλων των shocks. Ακόμα και αν ακολουθήσουμε την κατάλληλη στρατηγική αλλά αυτά τα shocks διακυμαίνονται πολύ, η ανοσοποίηση ίσως αποτύχει, ανεξάρτητα από τη στοχαστική διαδικασία.

3) Η ανοσοποίηση είναι μια minimix στρατηγική: η ανοσοποίηση είναι η ιδανική στρατηγική για επενδυτές που επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν την ελάχιστη δυνατή απόδοση που θα λάβουν κατά τη διάρκεια της προγραμματισμένης επενδυτικής περιόδου, με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι υποθέσεις των Fisher και Weil (1971). Αν $r(t)+\lambda$ είναι η καμπύλη αποδόσεων μετά από ένα shock και αν ισχύει

$prob[\lambda < 0] > 0$ και $prob[\lambda > 0] > 0$, τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη απόδοση που θα αντιστοιχεί σε κάθε στρατηγική χαρτοφυλακίου με ομολογίες. Αυτό σημαίνει ότι η στρατηγική s θα έχει απόδοση r_s, έτσι ώστε $prob[r_s' \geq r_s] = 1$. Η ανοσοποιητική στρατηγική είναι μια στρατηγική s^* για την οποία ισχύει: $r'_{s^*} = \max_s(r'_s)$.

4) Διάρκεια και εμπειρική αξιολόγηση των στρατηγικών χαρτοφυλακίων με ομολογίες: η διάρκεια ενός χαρτοφυλακίου με ομολογίες είναι ο σταθμισμένος μέσος της διάρκειας της κάθε ομολογίας που ανήκει στο χαρτοφυλάκιο. Δηλαδή ισχύει:

$$D = \sum_{j=1}^{n} (c_j * D_j) \tag{15}$$

Όπου: c_j = το ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου που έχει επενδυθεί στη j ομολογία, και

D_j = η διάρκεια της ομολογίας j.

Γενικά, ισχύει ότι διαφορετικά χαρτοφυλάκια μπορεί να έχουν την ίδια διάρκεια, και άρα ίσως δεν υπάρχει μόνο ένα χαρτοφυλάκιο που να ικανοποιεί τις συνθήκες για την ανοσοποίηση. Για παράδειγμα, ένα χαρτοφυλάκιο που έχει δημιουργηθεί με τη στρατηγική «barbell», δηλαδή υπάρχει συγκέντρωση ομολογιών που λήγουν πολύ νωρίς ή πολύ αργά, μπορεί να έχει την ίδια διάρκεια με ένα χαρτοφυλάκιο που έχει δημιουργηθεί με τη στρατηγική «ladder», δηλαδή υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή των ομολογιών μεταξύ των διαφόρων χρόνων ως τη λήξη (maturities).

Θεωρώντας ως δεδομένο ότι ο επενδυτής επιλέγει ανοσοποίηση του χαρτοφυλακίου του, παραμένει το πρόβλημα της επιλογής του επιθυμητού χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιήσει τον «κανόνα» της αναμενόμενης αξίας του χαρτοφυλακίου, θα επιλέξει εκείνο το χαρτοφυλάκιο ομολογιών, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, που θα έχει τη μεγαλύτερη αναμενόμενη αξία. Ωστόσο, άλλοι «κανόνες» μπορεί να οδηγήσουν σε επιλογή διαφορετικού χαρτοφυλακίου.

Στις περισσότερες εμπειρικές μελέτες, στις οποίες γίνεται προσομοίωση διάφορων στρατηγικών χαρτοφυλακίων ομολογιών, δε γίνεται προσπάθεια να διατηρηθεί σταθερή η διάρκεια των χαρτοφυλακίων για τις διάφορες στρατηγικές που εξετάζονται. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, είναι πολύ δύσκολο να αποφανθεί κανείς αν η στρατηγική «barbell» είναι καλύτερη ή χειρότερη από τη στρατηγική «ladder».

5) Ανοσοποίηση και ανάλυση ελαχίστου διακύμανσης: μια στρατηγική ανοσοποίησης ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean squared error):

$$m^2(s) = E[(r - r'_{s^*})^2 \mid s] = Var(r \mid s) + [E(rs) - r_{s^*}]^2 \qquad (16)$$

Μια στρατηγική ανοσοποίησης είναι χωρίς κίνδυνο, στο βαθμό που το $m^2(s)$ είναι το κατάλληλο μέτρο κινδύνου. Παρόλα αυτά όμως, αν οι στρατηγικές χαρτοφυλακίου τίθενται σε σειρά βάση του $[E(r \mid s), Var(r \mid s)]$, τότε κάποιες μη ανοσοποιητικές στρατηγικές ίσως είναι προτιμότερες του s^*. Αυτό σημαίνει ότι ίσως υπάρχουν στρατηγικές που έχουν τις εξής ιδιότητες: $E(r \mid s) > E(r \mid s^*)$ και $Var(r \mid s) < Var(r \mid s^*)$. Επομένως, ένα χαρτοφυλάκιο που έχει ανοσοποιηθεί ίσως δεν είναι αποτελεσματικό, δηλαδή ίσως υπάρχουν άλλα χαρτοφυλάκια που έχουν υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση και χαμηλότερη διακύμανση. Τα χαρτοφυλάκια αυτά θα έχουν χαμηλότερο r'_s και θετική πιθανότητα ότι η απόδοση ίσως μειωθεί περισσότερο από το r'_{s^*}, δηλαδή την ελάχιστη απόδοση που εγγυάται η στρατηγική ανοσοποίησης. Τέλος, ο Kaufman (1978) υποστηρίζει ότι ο κίνδυνος, όπως μετριέται από το $m^2(s)$, είναι πιθανό να μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η διάρκεια μιας ομολογίας, με δεδομένο τον επενδυτικό ορίζοντα του επενδυτή.

6) Σχέση με το Μοντέλο Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM): μια στρατηγική που ανοσοποιεί το χαρτοφυλάκιο για μια επενδυτική περίοδο μήκους q, ίσως δεν ανοσοποιεί το χαρτοφυλάκιο για μικρότερες ή μεγαλύτερες επενδυτικές περιόδους. Επομένως, το πόσο επικίνδυνθ είναι ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο εξαρτάται από την προγραμματισμένη επενδυτική περίοδο του επενδυτή. Επενδυτές με διαφορετικές επενδυτικές περιόδους, που κατά τα άλλα είναι όμοιοι, ίσως έχουν διαφορετικές απόψεις ως προς το πόσο επικίνδυνο είναι ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο. Σύμφωνα με το CAPM, αυτό σημαίνει ότι ένα συγκεκριμένο β για κάποιο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά από διαφορετικούς επενδυτές. Ο Kaufman (1978) αποδεικνύει ότι το β είναι συνάρτηση της διάρκειας του περιουσιακού στοιχείου, της διάρκειας του χαρτοφυλακίου της αγοράς και του χρονικού διαστήματος κατά το οποίο υπολογίζονται οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Αν αυτό το χρονικό διάστημα είναι ακριβώς ίσο με τον προγραμματισμένο χρονικό ορίζοντα, τότε ένα αποτελεσματικά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο από ομολογίες με τοκομερίδια, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, με διάρκεια ίση με τον προγραμματισμένο χρονικό ορίζοντα, θα έχει $\beta = 0$. Αν το χρονικό διάστημα υπολογισμού των αποδόσεων είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από τον προγραμματισμένο επενδυτικό ορίζοντα, τότε $\beta \neq 0$. Η αξία του β έχει νόημα μόνο για εκείνους τους επενδυτές των οποίων ο επενδυτικός ορίζοντας είναι ίσος με το χρονικό διάστημα υπολογισμού των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

4.3. Συμπεράσματα

Από τη μελέτη των προηγούμενων ενοτήτων, προκύπτει το συμπέρασμα η χρήση της διάρκειας για την ανοσοποίηση ενός χαρτοφυλακίου ομολογιών είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα που έχει απασχολήσει τους ερευνητές σε μεγάλο βαθμό. Ο κυριότερος λόγος, που εξηγεί την προσέλκυση του τόσο μεγάλου ερευνητικού ενδιαφέροντος, είναι ότι μέσω της ανοσοποίησης η απόδοση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή διασφαλίζεται ως προς κάποιο κατώτατο όριο, δηλαδή μπορεί να αυξηθεί αλλά δε μπορεί να μειωθεί. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η διάρκεια του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με τον επενδυτικό ορίζοντα του επενδυτή.

5. Στρατηγικές Ανοσοποίησης μέσω ενός Διανυσματικού Μοντέλου της Διάρκειας

5.1. Εισαγωγή

Μέχρις στιγμής, στα κεφάλαια που προηγήθηκαν ασχοληθήκαμε με τα λεγόμενα Single Factor Duration Models (SFDMs). Οι στρατηγικές ανοσοποίησης που εξετάστηκαν βασίζονται στη χρήση του μέτρου της διάρκειας, όπως αυτό καθορίζεται από τα μοντέλα αυτά. Παρόλα αυτά όμως, από το 1980 κυρίως και μετά, διάφοροι ερευνητές ανέπτυξαν μοντέλα που παρουσίαζαν το μέτρο της διάρκειας ως διάνυσμα. Με βάση τα μοντέλα αυτά (Duration Vector Models) αναπτύχθηκαν στρατηγικές ανοσοποίησης.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις κυριότερες προσεγγίσεις όσον αφορά το μέτρο της διάρκειας ως διάνυσμα. Εξετάζονται επίσης οι βασικές στρατηγικές ανοσοποίησης που μπορούν να επιτευχθούν με τη χρήση των Duration Vector Models.

5.2. Προσέγγιση της Διάρκειας μέσω Διανυσμάτων

Στην ενότητα αυτή αναλύονται οι δύο βασικές έρευνες που έχουν δημοσιευτεί επί του θέματος της διάρκειας μέσω διανυσμάτων.

5.2.1. Cooper

Ο Cooper, στην έρευνά του το 1977, αναλύει την καμπύλη αποδόσεων σε τέσσερις απλές συναρτησιακές φόρμες. Η καμπύλη αποδόσεων εκφράζεται ως συνάρτηση του χρόνου και όχι περισσότερων από τρεις άλλες παραμέτρους. Για παράδειγμα: $R(t)=\exp(A+B*t+C*\log t)$, όπου exp είναι η εκθετική συνάρτηση.

Η υπόθεση, στην οποία βασίζεται ο Cooper, είναι ότι η καμπύλη αποδόσεων ακολουθεί μία από αυτές τις συγκεκριμένες φόρμες. Αυτός ο περιορισμός είναι παρόμοιος, αλλά όχι τόσο αυστηρός, με την υπόθεση που χρησιμοποιείται στις *a priori* προσεγγίσεις της διάρκειας.

Στη μελέτη του Cooper η αβεβαιότητα εκφράζεται μέσω της αβέβαιης φύσης των μελλοντικών αξιών των παραμέτρων. Οι παράγωγοι της τιμής της ομολογίας ως προς κάθε μία παράμετρο, λαμβάνονται έτσι ώστε να δημιουργούν ένα διάνυσμα από παραγώγους. Αυτές οι παράγωγοι ονομάστηκαν μέτρα της διάρκειας, αν και δεν πρόκειται για «καθαρές» μονάδες χρόνου.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η κλασσική προσέγγιση της διάρκειας μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της διανυσματικής προσέγγισης του Cooper, κατά την οποία η μόνη παράμετρος που αλλάζει είναι το ύψος της καμπύλης αποδόσεων.

5.2.2. Chambers και Carleton

Όπως σημειώνουν οι Chambers, Carleton και McEnally (1988), οι Chambers και Carleton, στην έρευνα που δημοσίευσαν το 1981, επέκτειναν την δουλειά του Cooper. Υποστήριξαν ότι η καμπύλη αποδόσεων μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας πολυωνυμικής φόρμας, η οποία είναι λιγότερο περιοριστική από την αντίστοιχη του Cooper. Χρησιμοποίησαν το ανάπτυγμα του Taylor για να καταλήξουν σε ένα διανυσματικό μέτρο της διάρκειας και δούλεψαν με τις αξίες που καταγράφηκαν στο τέλος της περιόδου (end-of-period values) για να αντιμετωπίσουν τις μη απειροελάχιστες μεταβολές του επιτοκίου.

Στη συνέχεια, οι Chambers και Carleton χρησιμοποίησαν το μοντέλο της διάρκειας που δημιούργησαν στο πρόβλημα της ανοσοποίησης. Χρησιμοποιώντας μια πολυωνυμική προσέγγιση, κατέληξαν σε ένα μοντέλο απόδοσης για ομολογίες με τοκομερίδια. Το μοντέλο αυτό, το οποίο βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν υπάρχει πληρωμή μετρητών μεταξύ του χρόνου s και του χρόνου $s+1$, είναι το εξής:

$$r_{i,s+1} = k + \sum_{w=1}^{\infty} D_{i,s}(w) * q(w) \tag{17}$$

Όπου: $r_{i,s+1} = \dfrac{P_{i,s+1}}{P_{i,s}}$,

$P_{i,s} =$ η τιμή της ομολογίας i, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, στο χρόνο s,

$D_{i,s}(w) = \sum_{T=1}^{\infty} \dfrac{C_i(T) * B_s(T)}{P_{i,s}} * (T-1)^w$,

$T =$ ο χρόνος μέχρι την υποσχεθείσα πληρωμή τοκομεριδίου ή αρχικού κεφαλαίου,

$C_i(T) =$ η υποσχεθείσα απόδοση της ομολογίας i σε T περιόδους,

$B_s(T) =$ η τιμή το χρόνο s μιας \$1 ομολογίας, χωρίς τοκομερίδια, που λήγει σε T περιόδους,

$k =$ η απόδοση μιας περιόδου ομολογίας, χωρίς τοκομερίδια, από το χρόνο s ως τη λήξη της, το χρόνο $s+1$,

$q(w) =$ η τυχαία μεταβλητή, η οποία περιέχει πληροφορίες σχετικά με την αλλαγή θέσης της καμπύλης αποδόσεων, από το χρόνο s ως το χρόνο $s+1$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε δύο στοιχεία. *Πρώτον*, χρησιμοποιείται το $T-1$ αντί του T, λόγω της χρήσης των end-of-period values. *Δεύτερον*, το μοντέλο ενσωματώνει μια γενική συμπεριφορά της καμπύλης αποδόσεων με αποτέλεσμα τη χρήση ενός διανύσματικού μέτρου της διάρκειας: $[D_{i,s}(w), w = 1,.....,\infty]$.

Οι Chambers και Carleton όρισαν επίσης την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου με ομολογίες:

$$r_{p,s+1} = k + \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{i} y_i * D_{i,s}(w) * q(w) \qquad (18)$$

Όπου: $r_{p,s+1} =$ η απόδοση του χαρτοφυλακίου από το χρόνο s ως το χρόνο $s+1$, και

$y_i =$ το ποσοστό με το οποίο η ομολογία i συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο.

Βασικά, η αξία του μοντέλου έγκειται στο ότι εκφράζει την αβεβαιότητα της καμπύλης αποδόσεων, όσον αφορά την απόδοση των ομολογιών, ως ένα διανυσματικό γινόμενο του $q(w)$ και της διανυσματικής διάρκειας, για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

5.2.2.1. Στρατηγικές Ανοσοποίησης των Chambers και Carleton

Οι Chambers και Carleton ανέπτυξαν δύο στρατηγικές ανοσοποίησης για χαρτοφυλάκια ομολογιών, των οποίων η απόδοση περιγράφεται από τη σχέση (18).

1) Στρατηγική ανοσοποίησης μιας περιόδου: επιλέγουμε το y_i έτσι ώστε η αξία του σταθμισμένου αθροίσματος της συνάρτησης $D_{i,s}(w)$ να είναι μηδέν. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιεί τη διάρκεια που αναμένεται στο τέλος της περιόδου και όχι την τρέχουσα διάρκεια. Επομένως, η διανυσματική διάρκεια μιας ομολογίας που λήγει σε μία περίοδο, είναι ένα διάνυσμα του μηδενός. Όταν ένα χαρτοφυλάκιο έχει διανυσματική διάρκεια ίση με ένα διάνυσμα του μηδενός, η ευαισθησία του ως προς τις μεταβολές του επιτοκίου εξαφανίζεται. Αυτό σημαίνει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη αποδόσεων. Ένα συνηθισμένο παράδειγμα αυτής της στρατηγικής είναι η επένδυση όλων των χρημάτων του επενδυτή σε ομολογία του Δημοσίου που λήγει σε μία περίοδο.

Η στρατηγική αυτή είναι χρήσιμη μόνο όταν ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσης είναι ακριβώς μία περίοδος και η απόφαση επένδυσης στηρίζεται αποκλειστικά στη χρήση ονομαστικών αξιών. Παρόλα αυτά όμως, η στρατηγική αυτή, θεωρητικά τουλάχιστον, εξαλείφει την αβεβαιότητα λόγω του $q(w)$ και υπόκειται εύκολα σε εμπειρικά τεστ.

2) Στρατηγική ανοσοποίησης πολλαπλών περιόδων: υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο επενδυτής ενδιαφέρεται για την ανοσοποίηση του χαρτοφυλακίου του για ένα χρονικό διάστημα που περιλαμβάνει περισσότερες από μία περιόδους. Η στρατηγική που εξετάζουμε τώρα, λαμβάνει υπόψη της την ανάγκη ανακατανομής του χαρτοφυλακίου όταν υπάρχει πληρωμή τόκου.

Η διαδικασία στη στρατηγική αυτή έχει ως εξής: επιλέγουμε το y_i έτσι ώστε αξία του σταθμισμένου αθροίσματος κάθε παράγοντα της συνάρτησης $D_{i,s}(w)$ να είναι ίσο με την αξία κάθε παράγοντα της συνάρτησης $D_{i,s}(w)$ που θα εξασφάλιζε ο επενδυτής αν επένδυε σε κάποιο ιδεώδες περιουσιακό στοιχείο. Για παράδειγμα, αν ο στόχος του επενδυτή είναι να ανοσοποιήσει την αξία του χαρτοφυλακίου για n περιόδους, το ιδεώδες περιουσιακό στοιχείο θα ήταν αυτό που λήγει σε ακριβώς n περιόδους και δεν έχει ενδιάμεσες πληρωμές τόκου.

Ένα χαρτοφυλάκιο με τέτοια περιουσιακά στοιχεία ανοσοποιείται για πολλαπλές περιόδους ενάντια στον κίνδυνο του επιτοκίου. Αυτό συμβαίνει γιατί το χαρτοφυλάκιο κατασκευάζεται έτσι, ώστε να έχει τις ίδιες αξίες $D_{i,s}(w)$ με το ιδεώδες περιουσιακό στοιχείο. Επομένως, θα συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Άρα, το χαρτοφυλάκιο θα έχει τις ίδιες ανοσοποιητικές ιδιότητες όπως και το ιδεώδες. Κάθε φορά που θα πληρώνεται ή θα λαμβάνεται κάποια ταμειακή ροή, το χαρτοφυλάκιο θα «αναπροσαρμόζεται», έτσι ώστε να παραμένει πανομοιότυπο με το ιδεώδες περιουσιακό στοιχείο.

5.3. Συμπεράσματα

Σε αντίθεση με τα Single Factor Duration Models (SFDMs), αναπτύχθηκαν και διανυσματικά μοντέλα της διάρκειας. Ο Cooper (1978) ήταν αυτός που έθεσε τις βάσεις, ενώ οι Chambers και Carleton (1981) επέκτειναν τη μελέτη του και διατύπωσαν την απόδοση μιας ομολογίας, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, ως ένα γραμμικό συνδυασμό ενός διανύσματος της διάρκειας και ενός διανύσματος των μεταβολών της καμπύλης αποδόσεων. Στη συνέχεια, δημιούργησαν στρατηγικές ανοσοποίησης χαρτοφυλακίου, βασιζόμενοι στο μοντέλο τους. Ο εμπειρικός έλεγχος έδειξε ότι η κλασσική προσέγγιση της διάρκειας (Macaulay) οδηγεί σε «ισχυρότερη» ανοσοποίηση σε σχέση με την προσέγγιση του χρόνου ως τη λήξη (maturity). Παρόλα αυτά όμως, η προσέγγιση της διανυσματικής διάρκειας βελτιώνει ακόμα περισσότερο τα αποτελέσματα της ανοσοποίησης.

6. Σταθμική Διάρκεια Ομολογιών με Κίνδυνο Χρεοκοπίας της Εκδότριας Επιχείρησης

6.1. Εισαγωγή

Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε, τα μοντέλα της διάρκειας, τα χαρακτηριστικά και οι χρήσεις του μέτρου, οι στρατηγικές ανοσοποίησης χαρτοφυλακίων, αφορούν σε ομολογίες χωρίς να υπάρχει ο κίνδυνος αθέτησης (default – free bonds).

Μια ομολογία χαρακτηρίζεται από κίνδυνο αθέτησης, όταν υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με την ικανότητα της επιχείρησης, που την έχει εκδώσει, να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της απέναντι στους ομολογιούχους και να πληρώσει τα τοκομερίδια και το αρχικό κεφάλαιο.

Μέχρι τη δεκαετία του 1980, όλες οι έρευνες πάνω στο θέμα της διάρκειας εξέταζαν ομολογίες, αγνοώντας την πιθανότητα κινδύνου αθέτησης. Όταν οι διαχειριστές χαρτοφυλακίου υπολογίζουν τη διάρκεια ομολογιών, βασιζόμενοι στις υποσχόμενες ταμειακές ροές χωρίς να τις προσαρμόζουν στον κίνδυνο αθέτησης, τότε «σιωπηλά» υποθέτουν ότι το σφάλμα, το οποίο αναμφίβολα εισάγεται, είναι πολύ μικρό. Η υπόθεση αυτή είναι λογική μόνο για ομολογίες υψηλής κατάταξης (π.χ. κατάταξη ΑΑΑ ή ΑΑ), αλλά όχι για ομολογίες χαμηλής κατάταξης (π.χ. CC, C ή D).

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη μας τον κίνδυνο αθέτησης πληρωμής των ταμειακών ροών των ομολογιών, η διάρκειά τους διαφέρει από την κλασσική διάρκεια όπως την όρισε ο Macaulay. Είναι επίσης αυτονόητο, ότι οι στρατηγικές που αναπτύχθηκαν με βάση τη διάρκεια ομολογιών χωρίς κίνδυνο αθέτησης, δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε αγορές που είναι επιρρεπείς στον κίνδυνο αυτό. Αυτό συμβαίνει γιατί στις αγορές αυτές, οι επενδυτές και οι διαχειριστές των χαρτοφυλακίων τους καλούνται να αντιμετωπίσουν όχι μόνο τον κίνδυνο του επιτοκίου αλλά και τον πιστωτικό κίνδυνο.

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τη διάρκεια ομολογιών με κίνδυνο αθέτησης, παρουσιάζοντας τις μελέτες των ερευνητών που ασχολήθηκαν με αυτό το ζήτημα.

6.2. Bierwag και Kaufman

Η έρευνά τους το 1988 αποτελεί μία από τις πρωταρχικές έρευνες πάνω στο εξεταζόμενο θέμα, καθώς και τη βάση των μετέπειτα μελετών.

Υποθέτοντας επίπεδη καμπύλη αποδόσεων, ανέπτυξαν μία φόρμουλα για τη διάρκεια - προσαρμοσμένη στον κίνδυνο αθέτησης, για διάφορες μορφές αναμενόμενης αθέτησης. Αποδεικνύουν ότι ο χρόνος της αθέτησης, καθώς και το μέγεθος και το είδος της ανάκαμψης από την αθέτηση, είναι κριτικής σημασίας στοιχεία στη «μοντελοποίηση» της διάρκειας – προσαρμοσμένης στον κίνδυνο αθέτησης.

6.3. Chance

Η δουλειά του Chance (1990) αποτελεί μεγάλη συνεισφορά στο υπό εξέταση θέμα. Μελέτησε τη διάρκεια ομολογιών, χωρίς τοκομερίδια αλλά με κίνδυνο αθέτησης, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση ενδεχόμενων απαιτήσεων (contingent claims approach).

Στις ενότητες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε διεξοδικά την έρευνα του Chance.

6.3.1. Το Μοντέλο του Merton

Η θεωρία των contingent claims βοήθησε, σε μεγάλο βαθμό, την έρευνα σχετικά με τον ρόλο και την τιμολόγηση του κινδύνου αθέτησης. Ο Merton (1974) απέδειξε ότι η καμπύλη αποδόσεων, όταν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος, μπορεί να «μοντελοποιηθεί» με τη βοήθεια της θεωρίας των contingent claims. Το μοντέλο αυτό του Merton αποτελεί τη βάση του μοντέλου του Chance.

Ας θεωρήσουμε τους εξής συμβολισμούς:

i = το επιτόκιο όταν δεν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης,

y = η απόδοση ομολογίας, υποκείμενης σε κίνδυνο αθέτησης,

F = η ονομαστική αξία του χρέους,

T = ο χρόνος ως τη λήξη (maturity),

A = η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εκδότριας επιχείρησης.

Το επιτόκιο i δε θα πρέπει να θεωρηθεί ως ντετερμινιστικό. Αντιθέτως, προσδιορίζει τη στοχαστική τιμή μιας 1$ ομολογίας, με κίνδυνο αθέτησης, ως εξής:

$$P = e^{-it} \tag{19}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν φόροι και κόστη συναλλαγής και ότι η εκδότρια εταιρεία έχει εκδώσει ως χρέος μόνο μία ομολογία, χωρίς τοκομερίδια. Η τιμή της ομολογίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$B = F * e^{-yt} \tag{20}$$

Όταν η ομολογία είναι ληξιπρόθεσμη, τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης αξίζουν A_T. Αν ισχύει:

- ✓ $A_T \leq F$, τότε η εταιρεία αθετεί επί της ομολογίας και ο ομολογιούχος λαμβάνει τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης,

- ✓ $A_T > F$, τότε η ομολογία αποπληρώνεται και ο ομολογιούχος λαμβάνει F.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτά, η μετοχή της εταιρείας είναι ισοδύναμη με ένα call option με υποκείμενο τίτλο τα περιουσιακά στοιχεία της.

Ας υποθέσουμε επίσης, ότι ο ομολογιούχος αγοράζει ένα ευρωπαϊκό put option πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας, ως ασφάλιση ενάντια στον κίνδυνο της αθέτησης. Η τιμή άσκησης είναι ίση με F και η τιμή του put είναι $p(A,F,T)$. Αν ισχύει:

- ✓ $A_T < F$, τότε η επιχείρηση αθετεί επί της ομολογίας, αλλά ο ομολογιούχος ασκεί το put και λαμβάνει A_T από την ομολογία, και $F - A_T$ από το put. Άρα, συνολικά λαμβάνει F.

- ✓ $A_T \geq F$, τότε η ομολογία αποπληρώνεται και το put λήγει ανεκμετάλλευτο. Ο ομολογιούχος λαμβάνει F από την ομολογία και μηδέν από το put. Άρα, συνολικά λαμβάνει F.

Εφόσον το χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει την επικίνδυνη ομολογία και το put είναι χωρίς κίνδυνο, η τρέχουσα αξία του πρέπει να είναι:

$$R = F * P(i,t) \qquad (21)$$

έτσι ώστε:

$$B + p(A,F,T) = R \tag{22}$$

και λύνοντας ως προς την τιμή της ομολογίας, έχουμε:

$$B = R - p(A,F,T) \tag{23}$$

Όπως φαίνεται από την τελευταία εξίσωση, η ομολογία με κίνδυνο είναι ισοδύναμη με μία ομολογία χωρίς κίνδυνο και μία short θέση σε ένα put πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης. Επομένως, ο κάτοχος της ομολογίας με κίνδυνο, αποδέχεται τον κίνδυνο των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης, και λαμβάνει αποζημίωση με τη μορφή του premium του put.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το πανομοιότυπο χαρτοφυλάκιο που δημιουργείται, είναι μόνο ένα από τους πολλούς συνδυασμούς αξιόγραφων και options, που μπορούν να «αναπαράγουν» το χρέος με κίνδυνο. Το χαρτοφυλάκιο που χρησιμοποιείται εδώ είναι ιδιαίτερα ελκυστικό γιατί δε χρειάζεται να αναπροσαρμόζεται καθώς περνάει ο χρόνος ή καθώς αλλάζουν οι αξίες των περιουσιακών στοιχείων.

6.3.2. Διάρκεια Ομολογίας Χωρίς Τοκομερίδια, με Κίνδυνο Αθέτησης (Το Μοντέλο του Chance)

Ο Chance μελέτησε τη διάρκεια ομολογιών χωρίς τοκομερίδια, με κίνδυνο αθέτησης, οι οποίες δε φορολογούνται. Για να μπορέσει να δημιουργήσει τη φόρμουλα βασίστηκε στην έρευνα του Garman.

Ο Garman[7](1985) εξέτασε τη διάρκεια των options και απέδειξε ότι η διάρκεια τους είναι μέτρο της ευαισθησίας τους ως προς το επιτόκιο. Η πηγή της διάρκειας ενός option είναι η συνιστώσα των ομολογιών που υπάρχει σε ένα πανομοιότυπο χαρτοφυλάκιο.

Στο μοντέλο του Garman, τα options τιμολογούνται σύμφωνα με το μοντέλο των Black – Schloles[8] (1973). Οι Black – Schloles υποθέτουν ένα ντετερμινιστικό, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, επιτόκιο: το r. Ο Garman, για να προσδιορίσει τη διάρκεια του option, υπολογίζει το $(-\frac{\partial W}{\partial r}W)$, όπου W είναι η τιμή του option. Ωστόσο, παρουσιάζεται μια ασυνέπεια. Από τη μια μεριά, εξετάζουμε τη συμπεριφορά του W όταν μεταβάλλεται το r, αλλά από την άλλη μεριά χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο που θεωρεί το r σταθερό.

Το πρόβλημα αυτό λύνεται χρησιμοποιώντας το εναλλακτικό μοντέλο του Merton (1973) για την τιμολόγηση των options. Υποθέτει, ότι εκτός από το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, και η τιμή της ομολογίας χωρίς κίνδυνο αθέτησης, $P(i,T)$, αλλά και τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, ακολουθούν μια λογαριθμική κανονική διαδικασία διάχυσης. Σύμφωνα με όλα αυτά, η λύση για την τιμή του put δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$p(A,F,T) = F * P(i,T) * [1 - N(d_2)] - A * [1 - N(d_1)] \tag{24}$$

[7] Για λεπτομερή παρουσίαση της έρευνας του, βλέπε παράρτημα 1.
[8] Το μοντέλο τους παρουσιάζεται στο παράρτημα 2.

Όπου:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{A}{F}) - \ln P(i,T) + \frac{\sigma^2}{2} * T}{\sigma * \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T},$$

και $N(.)=$ η συσσωρευτική κανονική πιθανότητα.

Επίσης: $$\sigma^2 * \mathrm{T} = \int_0^T [\sigma_A^2 + \sigma_{P(t)}^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_{P(t)}]dt$$

Όπου: $\sigma_A^2 =$ η διακύμανση της λογαριθμικής απόδοσης του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου,

$\sigma_{P(t)}^2 =$ η τοπική διακύμανση της λογαριθμικής απόδοσης της ομολογίας χωρίς κίνδυνο αθέτησης, και

$\rho =$ ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και της ομολογίας.

Αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο, ότι η διακύμανση της ομολογίας χωρίς κίνδυνο αθέτησης, παίζει ρόλο στον προσδιορισμό της διάρκειας του option. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς σημαίνει ότι η αβεβαιότητα, ως προς το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο αθέτησης, θα εισχωρήσει στο μοντέλο της διάρκειας.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της διάρκειας, εφαρμόζουμε την προσέγγιση του Garman στο μοντέλο του Merton και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\frac{\partial B}{\partial i} = -R * T + R * T[1 - N(d_2)] = -R * T * N(d_2) \qquad (25)$$

Η διάρκεια D_B υπολογίζεται ως εξής:

$$D_B = -(\frac{\partial B}{\partial i}) / B = T * N(d_2) * \frac{R}{B} \qquad (26)$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να εκφράσουμε τη διάρκεια ως το σταθμισμένο μέσο όρο της διάρκεια της ομολογίας χωρίς κίνδυνο αθέτησης, D_R, και της διάρκειας του put, D_P :

$$D_B = w_R * D_R + w_P * D_P \qquad (26^{\alpha})$$

Όπου: $w_R = \frac{R}{B}$,

$w_P = 1 - \frac{R}{B}$,

$D_R = T$,

$D_P = \frac{T * R[1 - N(d_2)]}{p(A, F, T)}$

6.3.3. Τα Χαρακτηριστικά του Μέτρου της Διάρκειας του Chance

Τα βασικά χαρακτηριστικά της διάρκειας του Chance είναι τα εξής:

1) Όπως είναι ήδη γνωστό, το $N(d_2)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα άσκησης του call option, και ισχύει ότι $0 \leq N(d_2) \leq 1$. Όμως, το γεγονός ότι $\frac{R}{B} > 1$ υποδηλώνει ότι ίσως η διάρκεια είναι μεγαλύτερη του T. Ωστόσο, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο. Γνωρίζουμε ότι $D_B > T$ αν και μόνο αν $N(d_2) * \frac{R}{B} > 1$. Όμως, το $N(d_2) * \frac{R}{B}$ μπορεί να εκφραστεί ως: $\frac{N(d_2) * F * P(i,T)}{A[1 - N(d_1)] + P(i,T) * N(d_1)}$. Αυτή η έκφραση είναι μεγαλύτερη του μηδενός μόνο αν $N(d_1) > 1$, το οποίο, ως γνωστό, δεν ισχύει. Άρα, η ομολογία, χωρίς τοκομερίδια με κίνδυνο αθέτησης, έχει διάρκεια η οποία είναι πάντοτε θετική και μικρότερη από τη λήξη της ($D_B < T$), και επομένως είναι λιγότερο ευαίσθητη ως προς το επιτόκιο σε σχέση με τις αντίστοιχες ομολογίες χωρίς κίνδυνο αθέτησης.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάρκεια ως συνάρτηση του quasi – debt ratio της επιχείρησης, $\frac{R}{A}$. Η διάρκεια τείνει να μειώνεται απότομα για χαμηλά επίπεδα χρέους, αλλά σταθεροποιείται σε υψηλότερα επίπεδα. Αυτή η συμπεριφορά αντανακλά το γεγονός ότι σε υψηλά επίπεδα χρέους το put έχει μικρή χρονική αξία (time value), καθώς η αθέτηση είναι πιθανή, και η τιμή του επηρεάζεται και κατευθύνεται από τη διαφορά μεταξύ της αξίας του περιουσιακού στοιχείου και της ονομαστικής αξίας των ομολογιών. Για αυτό το λόγο άλλωστε, ομολογίες με διαφορετικές λήξεις (maturities) συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, για quasi – debt ratio $= 0{,}5$, η διάρκεια μιας πενταετούς ομολογίας είναι 3,5 χρόνια, ενώ η διάρκεια μιας τριανταετούς ομολογίας είναι 25,5 χρόνια.

2) Η διάρκεια σχετίζεται και με το επίπεδο του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο αθέτησης. Η διάρκεια αυξάνεται καθώς αυξάνεται το επίπεδο του επιτοκίου, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των ομολογιών χωρίς κίνδυνο αθέτησης.. Παρόλα αυτά όμως, για ομολογίες σύντομης λήξης (maturity), η διάρκεια αυξάνεται με πολύ χαμηλότερο ρυθμό. Οι διάρκειες όμως όλων των ομολογιών προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τη λήξη, T. Για επιτόκιο ίσο με 7%, η διάρκεια μιας πενταετούς ομολογίας είναι περίπου 4,5 χρόνια, ενώ η διάρκεια μιας τριανταετούς ομολογίας είναι περίπου 27,8 χρόνια.

3) Τέλος, θα εξετάσουμε τη διάρκεια ως συνάρτηση της μεταβλητότητας. Για τυπική απόκλιση γύρω στο 0,15, η διάρκεια σχεδόν ισούται με τη λήξη. Καθώς η μεταβλητότητα αυξάνεται, η διάρκεια μειώνεται γρήγορα, αλλά μετά σταθεροποιείται όταν η μεταβλητότητα αγγίξει το επίπεδο του 0,6 – 0,7. Όταν η τυπική απόκλιση είναι 0,6, η διάρκεια μιας πενταετούς ομολογίας είναι περίπου 3,3 χρόνια, ενώ η διάρκεια μιας τριανταετούς ομολογίας είναι περίπου 19,3 χρόνια. Η πολύ μεγάλη διαφορά μεταξύ της λήξης (maturity) και της διάρκειας οφείλεται στη μεγαλύτερη χρονική αξία και, επομένως, στη μεγαλύτερη ευαισθησία του put ως προς το επιτόκιο.

6.3.4. Διάρκεια του Chance και Ανοσοποίηση

Εφόσον ο Chance ανέπτυξε τη φόρμουλα για τη διάρκεια μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια αλλά με κίνδυνο αθέτησης, ήταν λογικό να εξετάσει αν το μέτρο που βρήκε μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για στράτηγικές ανοσοποίησης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ομολογία με κίνδυνο αθέτησης είναι ισοδύναμη με ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μία ομολογία με κίνδυνο αθέτησης και ένα short put πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης. Ένας επενδυτής που αγοράζει την ομολογία με κίνδυνο αθέτησης αλλά την πουλάει πριν λήξει, θα διαπιστώσει ότι αν τα επιτόκια αυξηθούν (μειωθούν), τότε η ομολογία χωρίς κίνδυνο αθέτησης θα μειώσει (αυξήσει) τον πλούτο του, ενώ το short put θα αυξήσει (μειώσει) τον πλούτο του. Ωστόσο, όπως φαίνεται από την εξίσωση (26), δεν υπάρχει περίοδος διακράτησης, μικρότερη της λήξης T, που μπορεί να ανοσοποιήσει το χαρτοφυλάκιο. Αυτό συμβαίνει γιατί ο επενδυτής θα είναι πάντοτε σε χειρότερη (καλύτερη) θέση αν τα επιτόκια αυξηθούν (μειωθούν). Συνεπώς, η ομολογία χωρίς κίνδυνο αθέτησης υπερισχύει του put, όσον αφορά την ευαισθησία ως προς το επιτόκιο.

Παρόλα αυτά όμως, θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός, ότι αν και η διάρκεια δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανοσοποίηση, διατηρεί το χαρακτηριστικό της ως μέτρο της μεταβλητότητας της τιμής της ομολογίας λόγω των μεταβολών του επιτοκίου.

6.3.5. Διάρκεια του Chance και σχέση με το Subordinated Debt

Το μοντέλο του Chance μπορεί να επεκταθεί για να εξηγήσει το ρόλο του subordinated debt. Ας θεωρήσουμε τους εξής συμβολισμούς:

F^J = η ονομαστική αξία των junior ομολογιών, και

F^S = η ονομαστική αξία των senior ομολογιών.

Ας υποθέσουμε ότι και τα δύο είδη ομολογιών λήγουν ταυτοχρόνως. Οι senior ομολογίες δεν επηρεάζονται από το subordinated debt. Με βάση αυτά, οι πληρωμές που δίνουν οι junior ομολογίες είναι οι εξής:

- ✓ αν $A_T < F^S$, τότε 0,
- ✓ αν $F^S \le A_T \le F^S + F^J$, τότε $A_T - F^S$,
- ✓ αν $A_T > F^S + F^J$, τότε F^J.

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από junior ομολογίες, ένα short call πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, με τιμή άσκησης ίση F^S, και ένα long call πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, με τιμή άσκησης $F^S + F^J$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό, δίνει πληρωμή ίση με το μηδέν, σε όλες τις περιπτώσεις.

Αν συμβολίσουμε με B^J την αγοραία αξία (market value) του subordinated debt, τότε ισχύει:

$$B^J = -c(A, F^S + F^J, T) + c(A, F^S, T) \tag{27}$$

Συμβολίζοντας $R^S = F^S * P(i,T)$ και $R^J = F^J * P(i,T)$, η διάρκεια του subordinated debt, D^J, υπολογίζεται ως εξής:

$$D^J = -(\frac{\partial B^j}{\partial i}) / B^j = T * \{\frac{R^j}{B^j} * N(d_{2,Sj}) + \frac{R^S}{B^j} * [N(d_{2,Sj}) - N(d_{2,s})]\} \tag{28}$$

Όπου: $d_{2,SJ} = \dfrac{\ln(\dfrac{A}{F^S + F^j}) - \ln P(i,T) + \dfrac{\sigma^2}{2} * T}{\sigma * \sqrt{T}}$, και

$$d_{2,S} = \frac{\ln(\frac{A}{F^S}) - \ln P(i,T) - \frac{\sigma^2}{2} * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$

Η εξίσωση (28) είναι μια πιο γενική μορφή της εξίσωσης (26). Αυτό συμβαίνει, γιατί αν δεν υπάρχει subordinated debt, τότε $F^S = 0, R^S = 0$ και $N(d_{2,Sj}) = N(d_{q,S})$, και η εξίσωση (28) γίνεται ίδια με την εξίσωση (26).

Το subordinated debt μπορεί να εκφραστεί ως μία long θέση στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, μία short θέση στη μετοχή και μία short θέση στις senior ομολογίες. Θεωρώντας αυτά ως αρχή, μπορούμε να εκφράσουμε τη διάρκεια του subordinated debt σε όρους της διάρκειας του senior χρέους:

$$D^j = T * [\frac{(R^j + R^S)}{B^j} * N(d_{2,Sj}) - D^S * \frac{B^S}{B^j}] \qquad (28^{\alpha})$$

Όπου: D^S είναι η διάρκεια και B^S η αξία του senior χρέους. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διάρκεια του junior χρέους περιέχει έναν όρο που ρυθμίζει τη διάρκεια του senior χρέους. Λύνοντας την εξίσωση (26) ως προς το D^S, έχουμε:

$$D^j = \frac{T * [(R^j + R^S) * N(d_{2,Sj}) - R^S * N(d_{2,S})]}{B^j} \qquad (28^{\beta})$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να ερμηνευτεί υποθέτοντας ότι ισχύει risk neutrality. Η διάρκεια είναι ο χρόνος ως τη λήξη (maturity), σταθμισμένος με την παρούσα αξία της αναμενόμενης, πλήρους πληρωμής του συνολικού χρέους μείον την παρούσα αξία της αναμενόμενης, πλήρους πληρωμής του senior χρέους, διαιρούμενων με την τιμή. Με άλλα λόγια, η διάρκεια του junior χρέους είναι ο χρόνος ως τη λήξη (maturity), σταθμισμένος με την παρούσα αξία της αναμενόμενης, πλήρους πληρωμής του junior χρέους, $[(R^j + R^S) * N(d_{,Sj}) - R^S * N(d_{2,S})]$, διαιρούμενος με την τιμή του junior χρέους. Η ερμηνεία αυτή, είναι συνεπής με ό,τι ήδη γνωρίζουμε ότι ισχύει για τη διάρκεια των ομολογιών χωρίς τοκομερίδια – η διάρκειά τους είναι η λήξη σταθμισμένη με την παρούσα αξία της πληρωμής.

6.4. Nawalkha

Η μελέτη του Nawalkha (1996) αποτελεί επέκταση του μοντέλου της διάρκειας του Chance. Ο Nawalkha κατέληξε σε ένα νέο μέτρο της διάρκειας μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια αλλά με κίνδυνο αθέτησης, χρησιμοποιώντας λιγότερο περιοριστικές υποθέσεις.

Υποθέτει ότι τα αξιόγραφα της επιχείρησης τιμολογούνται σύμφωνα με το μοντέλο του Merton (1973). Στον χρόνο t, παραμένουν T περίοδοι μέχρι τη λήξη της ομολογίας. Έστω ότι $P(t,T)$ είναι η τιμή της αντίστοιχης pure discount bond, η οποία στο χρόνο t έχει T περιόδους μέχρι τη λήξη της. Σύμφωνα με το put – call parity, η τιμή της ομολογίας με κίνδυνο αθέτησης, $B(t)$, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$B(t) = F * P(t,T) - p(A,F,T) \tag{29}$$

Όπου: $p(A,F,T) = F * P(t,T) * [1 - N(f_2)] - A(t) * [1 - N(f_1)] =$ η τιμή του ευρωπαϊκού put option,

$F =$ η ονομαστική αξία του χρέους,

$$f_1 = \frac{\ln[\frac{A(t)}{F}] - \ln[P(t,T)] + \frac{V}{2}}{\sqrt{V}} \quad \text{και} \quad f_2 = f_1 - \sqrt{V},$$

$$V = -\int_0^T [\sigma^2{}_A + \sigma^2{}_r * H(T-v)^2 + 2 * \sigma_A * \sigma_r * H(T-v)]dv$$, και

$$H(t) = \frac{1-\exp(-aT)}{a}$$

Με βάση αυτά, η $B(t)$ μπορεί να απλοποιηθεί και να γραφτεί ως εξής:

$$B(t) = F * P(t,T) * N(f_2) + A(t) * [1 - N(f_1)] \qquad (30)$$

Η διάρκεια της ομολογίας ορίζεται ως εξής:

$$D_B = -(\frac{\partial B(t)}{\partial r(t)}) / B(t) = -(\frac{\partial A(t)}{\partial r(t)}) - F * (\frac{\partial P(t,T)}{\partial r(t)}) * \frac{N(f_2)}{B(t)} \qquad (31)$$

Η εξίσωση (31) μπορεί να απλοποιηθεί και να πάρει την εξής μορφή:

$$D_B = e_{B1} * D_A + e_{B2} * D_P \qquad (32)$$

Όπου: D_A = η διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης,

D_P = η διάρκεια της pure discount bond,

e_{B1} = η ελαστικότητα της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια, με κίνδυνο αθέτησης, ως προς τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης,

e_{B2} = η ελαστικότητα της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια, με κίνδυνο αθέτησης, ως προς την pure discount bond.

6.4.1. Χαρακτηριστικά της Διάρκειας του Nawalkha

Εξετάζοντας το μοντέλο του Nawalkha μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής:

1) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (30) μπορούμε να δούμε ότι $e_{B1} + e_{B2} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι η διάρκεια μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια, με κίνδυνο αθέτησης, δίνεται ως ο σταθμισμένος μέσος της διάρκειας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης και της διάρκειας της pure discount bond, όπου οι σταθμίσεις είναι η ελαστικότητα της ομολογίας με κίνδυνο αθέτησης, ως προς τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης και την pure discount bond, αντιστοίχως.

2) Επίσης, εξ ορισμού, $e_{B1} \geq 0$ και $e_{B2} \geq 0$. Επομένως, η διάρκεια της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια και με κίνδυνο αθέτησης, βρίσκεται μεταξύ της διάρκειας της pure discount bond και της διάρκειας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης. Δηλαδή: $D_P < D_B < D_A$.

3) Η διάρκεια της ομολογίας με κίνδυνο αθέτησης είναι φθίνουσα συνάρτηση της χρηματοοικονομικής μόχλευσης (η οποία ορίζεται ως το quasi – debt ratio), όταν η διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης είναι μικρότερη από τη διάρκεια της pure discount bond, δηλαδή ισχύει: $D_A < D_P$. Αν ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $D_A > D_P$, τότε η διάρκεια της ομολογίας είναι αύξουσα συνάρτηση της μόχλευσης. Τα συμπεράσματα αυτά είναι συνεπή με το γεγονός, ότι για υπερβολικά χαμηλά επίπεδα μόχλευσης η ομολογία με κίνδυνο αθέτησης πρέπει να συμπεριφέρεται όπως η pure discount bond, ενώ για υπερβολικά υψηλά επίπεδα μόχλευσης θα πρέπει να συμπεριφέρεται όπως τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης.

4) Όσον αφορά την τυπική απόκλιση της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης, η διάρκεια της ομολογίας με κίνδυνο αθέτησης είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση αυτής, όταν η διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων είναι μικρότερη (μεγαλύτερη) της διάρκειας της pure discount bond.

6.5. Fooladi, Roberts και Skinner

Η έρευνά τους (1997) αποτελεί γενίκευση των μελετών των Bierwag & Kaufman και του Chance. Επεκτείνουν τα αποτελέσματα των Bierwag και Kaufman, εισάγοντας παραμέτρους που αντανακλούν τις ex ante πιθανότητες αθέτησης, και άρουν την υπόθεση της επίπεδης καμπύλης αποδόσεων. Επιπλέον, συμπληρώνουν την έρευνα του Chance εξετάζοντας και ομολογίες με τοκομερίδια και επιτρέποντας να υπάρξει κάποια καθυστέρηση στην τακτοποίηση του εφάπαξ που έπεται της αθέτησης.

Το μέτρο της διάρκειας που διατύπωσαν, ισχύει για ομολογίες με, αλλά και χωρίς, τοκομερίδια. Πρόκειται δε για ένα μέτρο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανοσοποίηση χαρτοφυλακίων με ομολογίες με τοκομερίδια, με την προϋπόθεση ότι οι ομολογίες με κίνδυνο αθέτησης τιμολογούνται σύμφωνα με το μοντέλο τους.

6.5.1. Διάρκεια Προσαρμοσμένη στον Κίνδυνο

Η ανάλυση των Fooladi, Roberts και Skinner βασίζεται στο μοντέλο για την καμπύλη αποδόσεων του Jonkhart (1979). Ορίζουν ως χρόνο t το τέλος της περιόδου t. Με δεδομένο ότι η επιχείρηση έχει επιζήσει $t-1$ περιόδους χωρίς να αθετήσει, υπάρχει πιθανότητα p_t ότι θα επιβιώσει και την περίοδο t και επομένως, θα είναι σε θέση να πληρώσει το τοκομερίδιο ${}_0r_N$ στο χρόνο t. Εξ ορισμού, το $1-p_t$ είναι η πιθανότητα ότι η επιχείρηση ίσως αθετήσει κατά τη διάρκεια της περιόδου t, αποτυγχάνοντας έτσι να πληρώσει το τοκομερίδιο στο χρόνο t. Αν μια ομολογία αθετηθεί στο χρόνο t, θα υπάρξει μια πληρωμή F_{ts} σε κάποιο χρόνο $t+s$, όπου το s αντιπροσωπεύει τον αριθμό των χρόνων που θα πρέπει να περάσουν, μέχρι την τελική τακτοποίηση της αθέτησης.

Επομένως, από την πλευρά του επενδυτή, οι αναμενόμενες ταμειακές ροές, στο χρόνο t, από μία ομολογία ονομαστικής αξίας \$1.000, είναι:

$$p_t *_0 r_N + (1-p_t) * F_{ts} * (1+I_{t+s})^{-s} * \prod_{j=1}^{t} p_{j-1} \tag{33}$$

Όπου: ${}_0r_N$ = το τοκομερίδιο, και

I_{t+s} = το προθεσμιακό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, της s-περιόδου, μετρώντας από το t ως το $t+s$.

Σε κάθε χρόνο t, ένας επενδυτής που είναι risk – averse είναι αδιάφορος μεταξύ του να λάβει μια επικίνδυνη ταμειακή ροή, με την παραπάνω αναμενόμενη αξία, και του να λάβει το certainty equivalent, CEC_t, αυτής της ροής. Το CEC_t υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την αναμενόμενη ταμειακή ροή με το certainty equivalent factor, Q_t.

Η τιμή μιας επικίνδυνης ομολογίας είναι σύνθετη αξία του certainty equivalent των ταμειακών ροών, οι οποίες επανεπενδύονται στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, και στη συνέχεια προεξοφλούνται στο παρόν. Δηλαδή:

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{CEC_t * (1 +_t I_N)^{N-t}}{(1 +_0 I_N)^N} + \frac{CEF}{(1 +_0 I_N)^N} \qquad (34)$$

Όπου: $CEC_t = Q_t * [p_t *_0 r_N + (1 - p_t) * F_{ts} * (1 +_t I_{t+s})^{-s}] * \prod_{j=1}^{t} p_{j-1}$ είναι το certainty equivalent των αναμενόμενων ταμειακών ροών στο χρόνο t,

$CEF_t = Q_N * \prod_{j=1}^{t} p_t$ είναι η certainty equivalent αξία της ονομαστικής αξίας του $1,

$Q_t =$ ο certainty equivalent factor, στο χρόνο t, για τον οριακό επενδυτή, και

${}_tI_N =$ το προθεσμιακό επιτόκιο, χωρίς κίνδυνο, της περιόδου $N-t$, το χρόνο t.

Για να υπολογίσουμε τη διάρκεια της ομολογίας, της οποία η τιμή δίνεται από την εξίσωση (34),υιοθετούμε την τυπική προσέγγιση της ελαστικότητας ως προς την τιμή, και υποθέτουμε ότι $[\frac{d({}_tI_N)}{d({}_0I_N)}] = 1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{I +_0 I_N}{P} * \frac{dP}{d_0 I_N} \\ &= \frac{1}{P * (1 +_0 I_N)^N} * \{N * [\sum_{t=1}^{N} (CEC_t) * (1 +_t I_N)^{N-t} + CEF] \\ &- \sum_{t=1}^{N} (N - t) * (CEC_t) * (1 +_t I_N)^{N-t-1} * (1 +_0 I_N) \\ &+ \sum (s) * Q_t * (1 - p_t) * (F_{ts}) * (1 +_t I_N)^{N-t} * (1 +_t I_{t+s})^{-s-1} \\ &* (\prod_{j=1}^{t} p_{j-1}) * (1 +_0 I_N)\} \end{aligned} \qquad (35)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάρκεια μιας ομολογίας, με κίνδυνο αθέτησης, για επενδυτές οι οποίοι αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk – averse), όταν η καμπύλη αποδόσεων δεν είναι αναγκαστικά επίπεδη και η τακτοποίηση ίσως καθυστερήσει.

Η διάρκεια, όπως δίνεται από τη σχέση (35), γενικεύει τις προγενέστερες έρευνες γιατί εισάγει προσαρμογές για την αποστροφή των επενδυτών ως προς τον κίνδυνο, πιθανότητες αθέτησης, καθυστερήσεις στην τακτοποίηση και μη επίπεδη καμπύλη αποδόσεων.

Αν η τακτοποίηση λάβει χώρα αμέσως μετά την αθέτηση, $s = 0$ όπως και ο τρίτος όρος της εξίσωσης (35). Αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη, τότε η διάρκεια υπολογίζεται ως εξής:

$$D = \frac{1}{P} * \{\sum_{t=1}^{N} \frac{t * (CEC_t)}{(1 +_0 I_N)^t} + \frac{N * CEF}{(1 +_0 I_N)^t} \qquad (36)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το certainty equivalent της διάρκειας του Macaulay.

6.5.2. Συμπεράσματα από τα Αριθμητικά Παραδείγματα

Οι Fooladi, Roberts και Skinner διεξήγαγαν διάφορα αριθμητικά παραδείγματα προκειμένου να βγάλουν κάποια συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της προσαρμοσμένης στον κίνδυνο διάρκειάς τους.

Υπολόγισαν το γενικό μέτρο της διάρκειας, όπως αυτό δίνεται από την εξίσωση (35), την προσαρμοσμένη διάρκεια του Macaulay, όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση (36) και το απλό μέτρο της διάρκειας του Macaulay. Τα συμπεράσματά τους είναι τα εξής:

1) Όλα τα μέτρα της διάρκειας, για ομολογίες υποκείμενες στον κίνδυνο αθέτησης, μειώνονται καθώς η αντιλαμβανόμενη «πιστωτική ποιότητα», όπως αυτή αντιπροσωπεύεται από τις πιθανότητες επιβίωσης, χειροτερεύει.

2) Το απλό μέτρο της διάρκειας του Macaulay είναι υψηλότερο από κάθε άλλο μέτρο. Η διαφορά αυτή αυξάνεται καθώς η αντιλαμβανόμενη «πιστωτική ποιότητα» μειώνεται. Είναι φανερό λοιπόν, ότι αγνοώντας τον κίνδυνο αθέτησης, εισάγουμε μεροληψία στους υπολογισμούς της διάρκειας.

3) Το γενικό μέτρο της διάρκειας είναι το πιο σύνθετο από όλα τα μέτρα που έχουν προσαρμοστεί για τον κίνδυνο αθέτησης. Λαμβάνει υπόψη και τη μορφή της καμπύλης αποδόσεων αλλά και το χρόνο της τακτοποίησης της αθέτησης. Υπάρχει μια πολύ μικρή αύξηση στη διάρκεια καθώς η τακτοποίηση καθυστερεί. Επίσης, καθώς μειώνεται η πιθανότητα επιβίωσης, αυξάνεται η διάρκεια.

4) Συγκρίνοντας την προσαρμοσμένη διάρκεια του Macaulay με τη γενική διάρκεια, φαίνεται ότι η πρώτη είναι υψηλότερη της δεύτερης, γεγονός που αποδεικνύει το συνδυασμένο αποτέλεσμα της αγνόησης του χρόνου τακτοποίησης της αθέτησης και της μορφής της καμπύλης αποδόσεων.

5) Μία αύξηση στο F_{ts} οδηγεί σε αύξηση της γενικής διάρκειας, ενώ μια μείωση του Q_t οδηγεί σε μείωσή της. Επιπρόσθετα, το χαμηλότερο Q_t μειώνει την αλλαγή που προκαλείται στη γενική διάρκεια από μία καθυστέρηση στην τακτοποίηση της αθέτησης. Παρόλα αυτά όμως, αυτή η αύξηση της γενικής διάρκειας που προκαλείται από την καθυστέρηση, ενισχύεται από ένα αυξημένο ποσό τακτοποίησης, χαμηλότερες πιθανότητες επιβίωσης και υψηλότερα certainty equivalents.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι ο χρόνος και το ποσό της τακτοποίησης, οι υποθέσεις για την καμπύλη αποδόσεων και ο βαθμός της αποστροφής προς τον κίνδυνο (risk – aversion) είναι σημαντικοί παράγοντες στη μέτρηση της διάρκειας. Ωστόσο, ο πιο σημαντικός παράγοντας είναι ο κίνδυνος αθέτησης αυτός καθαυτός. Η προσαρμοσμένη διάρκεια του Macaulay διαφέρει σημαντικά από την απλή διάρκεια του Macaulay, αλλά διαφέρει λίγο από την πιο γενική διάρκεια.

6.5.3. Γενική Διάρκεια και Ανοσοποίηση

Υποθέτοντας επίπεδη καμπύλη αποδόσεων, η διάρκεια του Macaulay θα αποτύχει να ανοσοποιήσει το χαρτοφυλάκιο αν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης. Η γενική διάρκεια όμως, είναι ανοσοποιητικό μέτρο σε όλες τις ex ante και στις περισσότερες ex post περιπτώσεις. Σε μερικές ex post περιπτώσεις, δεν οδηγεί σε τέλεια ανοσοποίηση, αλλά παρέχει μια πολύ στενή προσέγγιση της τέλειας ανοσοποίησης.

6.6. Συμπεράσματα

Μια ομολογία υπόκειται βασικά σε δύο είδη κινδύνου: του επιτοκίου και της αθέτησης. Από την ανάλυση που προηγήθηκε, πρέπει να είναι σαφές πόσο σημαντικό είναι να λαμβάνουμε υπόψη μας τον κίνδυνο αθέτησης όταν υπολογίζουμε τη διάρκεια μιας ομολογίας. Η αγνόησή του οδηγεί σε λανθασμένο υπολογισμό της διάρκειας, και επομένως, σε λανθασμένες επενδυτικές αποφάσεις, μη αποτελεσματική ανοσοποίηση και μη αποτελεσματική διαχείριση χαρτοφυλακίου.

7. Εμπειρική Εφαρμογή του Μοντέλου του Chance

7.1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μερικές από τις πιο βασικές έρευνες πάνω στο θέμα της διάρκειας των ομολογιών όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης από την πλευρά της εκδότριας επιχείρησης. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια εμπειρική εφαρμογή της φόρμουλας που διατύπωσε ο Chance για τον υπολογισμό της διάρκειας (σχέση 26$^{\alpha}$).

Αρχικά, θα γίνει μια γενική περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για τη συλλογή των στοιχείων καθώς και της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την επεξεργασία τους. Παρατίθενται επίσης οι βασικές υποθέσεις και παραδοχές στις οποίες στηρίχθηκε η ανάλυση που ακολουθεί. Τέλος, γίνεται μια σύγκριση μεταξύ της διάρκειας του Macaulay και της διάρκειας του Chance και εξάγονται κάποια βασικά συμπεράσματα.

7.2. Περιγραφή της Διαδικασίας – Βασικές Υποθέσεις

Σκοπός της εμπειρικής εφαρμογής είναι να υπολογίσουμε τη διάρκεια μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια αλλά με κίνδυνο αθέτησης, χρησιμοποιώντας τον τύπο που ανέπτυξε ο Chance. Στα πλαίσια αυτά, επιλέξαμε πέντε επιχειρήσεις, οι οποίες είναι εισηγμένες στο Χρηματιστήριο Αξιών και οι οποίες αποτελούν μέρος της σύνθεσης του δείκτη FTSE/ASE – 20. Οι επιχειρήσεις αυτές είναι οι εξής:

- ✓ COSMOTE Κινητές Τηλεπικοινωνίες Α.Ε.,
- ✓ Ελληνική Τεχνοδομική ΤΕΒ Α.Ε.,

- ✓ Coca - Cola, Ελληνική Εταιρεία Εμφιαλώσεως Α.Ε.,
- ✓ ΟΤΕ Α.Ε.,
- ✓ Intracom Α.Ε..

Ακολουθώντας τη λογική της μελέτης του Chance, χρησιμοποιήσαμε τους ισολογισμούς της 31ης Δεκεμβρίου 2002 των πέντε εταιρειών, με σκοπό να υπολογίσουμε το συνολικό τους χρέος για το έτος 2002. Θεωρήσαμε ως συνολικό χρέος (F) κάθε επιχείρησης, το άθροισμα των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων υποχρεώσεών της. Υποθέσαμε δε, ότι το συνολικό αυτό χρέος F, «ισοδυναμεί» με μια ομολογία χωρίς τοκομερίδια, η οποία λήγει σε 5 έτη. Αυτό σημαίνει ότι θεωρήσαμε ότι ο χρόνος ως τη λήξη της ομολογίας (δηλαδή το maturity: T) ισούται με 5 χρόνια. Στη συνέχεια, επαναλάβαμε τη διαδικασία χρησιμοποιώντας ως maturity τα 10 χρόνια.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο του Chance, χρειαζόμαστε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk – free rate: i). Για να το υπολογίσουμε, χρησιμοποιήσαμε τις ημερήσιες τιμές (offered rate) του EURIBOR, με χρόνο ως τη λήξη (maturity) το 1 έτος, όπως καταγράφτηκαν από το Reuters κατά τη διάρκεια του 2002. Υπολογίσαμε το μέσο όρο αυτών των τιμών και το αποτέλεσμα ($i = 0{,}035445$) το χρησιμοποιήσαμε στους υπολογισμούς στη θέση του επιτοκίου i.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο Chance «ανέλυσε» την ομολογία με κίνδυνο αθέτησης σε δύο τμήματα: μια ομολογία χωρίς κίνδυνο αθέτησης και μία short θέση σε ένα put πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της εκδότριας επιχείρησης. Για να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη διάρκεια του Chance, θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του put. Απαραίτητα στοιχεία για τον υπολογισμό της τιμής του put είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης (A) καθώς και η τυπική απόκλιση της αξίας αυτής (s). Ωστόσο, οι δύο αυτές μεταβλητές (A και s) είναι άγνωστες.

Προκειμένου να προσδιοριστούν οι δύο άγνωστες μεταβλητές, θα πρέπει να προηγηθεί ο υπολογισμός την αγοραίας αξίας του equity (market value of equity: mev) καθώς και της τυπικής απόκλισης του equity (standard deviation of equity: seq). Ο ορισμός του market value of equity είναι ο εξής:

$$mev = (\text{Αριθμός Μετοχών}) * (\text{Τιμή Μετοχής}) \tag{37}$$

Ως αριθμό μετοχών χρησιμοποιήσαμε αυτό που δήλωσε η εκάστοτε επιχείρηση στον ισολογισμό της 31ης Δεκεμβρίου 2002, και θεωρήσαμε ότι παρέμεινε σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια του έτους 2002. Χρησιμοποιώντας το Reuters, βρήκαμε την τιμή κλεισίματος της μετοχής κάθε επιχείρησης, για κάθε ημέρα διαπραγμάτευσης του 2002. Με τη βοήθεια της σχέσης (37) και χρησιμοποιώντας το Excel, υπολογίσαμε την αγοραία αξία του equity (market value of equity: mev) και την τυπική του απόκλιση seq[9].

Έχοντας βρει την αγοραία αξία του equity και την τυπική του απόκλιση (mev και seq), προχωρήσαμε στον υπολογισμό της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης και της τυπικής τους απόκλισης (A και s αντιστοίχως). Εφόσον οι άγνωστοι είναι δύο, χρησιμοποιήσαμε ένα σύστημα εξισώσεων δύο αγνώστων[10], και με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica 4.2 προσδιορίσαμε το A και το s.

---

[9] Η τυπική απόκλιση που προκύπτει με τη χρήση του Excel είναι εκφρασμένη σε Euros. Αφού τη μετατρέψαμε σε ποσοστό, την πολλαπλασιάσαμε με « $\sqrt{256}$ » για να την εκφράσουμε σε ετήσια βάση.
[10] Βλέπε παράρτημα 3.

Αφού βρήκαμε τους δύο αγνώστους, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (19), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή του put option[11] με βάση τη σχέση (24). Αξίζει να σημειώσουμε μια βασική υπόθεση την οποία κάναμε, προκειμένου να διευκολυνθούμε στους υπολογισμούς. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το $N(d_1)$, και το $N(d_2)$, πρέπει να γνωρίζουμε το $\sigma * \sqrt{T}$, το οποίο δίνεται από τη σχέση: $\sigma * T = \int_0^T [\sigma^2{}_A + \sigma^2{}_P(t) - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_P(t)]dt$. Στο σημείο αυτό λοιπόν, χάριν ευκολίας, υποθέσαμε ότι το $\sigma_P(t)$ (η τοπική διακύμανση της λογαριθμικής απόδοσης της ομολογίας χωρίς κίνδυνο αθέτησης), είναι πολύ μικρό, δηλαδή: $\sigma_P(t) \to 0$. Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, ισχύει: $\sigma^2 * T \simeq \sigma^2{}_A * T$. Δηλαδή, όπου συναντάμε το $\sigma^2 * T$ θα αντικαθιστούμε το σ^2 με το $\sigma^2{}_A$, δηλαδή με την τυπική απόκλιση της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης, την οποία έχουμε συμβολίσει, για τους υπολογισμούς στο Mathematica 4.2, ως s.

Έχοντας υπολογίσει και την τιμή του put option και με τη χρήση των σχέσεων (21) και (23), μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τη διάρκεια του Chance[12], όπως δίνεται από τον τύπο (26$^{\alpha}$).

7.3. Παρουσίαση των Αποτελεσμάτων της Εμπειρικής Εφαρμογής

Πριν προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εμπειρικής εφαρμογής για κάθε επιχείρηση ξεχωριστά, παραθέτουμε τους

[11] Βλέπε παράρτημα 4.
[12] Βλέπε παράρτημα 5.

ακόλουθους πίνακες., οι οποίοι συνοψίζουν τα βασικά αποτελέσματα, στα οποία βασίζονται και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε στο τέλος του κεφαλαίου.

Βασικά Αποτελέσματα της Εμπειρικής Εφαρμογής, με Δεδομένα: $T = 5$ **και** $i = 0,035445$				
	D_B	D_R [13]	Απόκλιση D_B, D_R (έτη)	Απόκλιση D_R, D_B (%)
COSMOTE	3,0304	5	1,96966	39,3932
Ελληνική Τεχνοδομική	3,86434	5	1,13566	22,7132
Coca - -Cola	2,88116	5	2,11884	42,3768
ΟΤΕ	0,56912	5	4,4088	88,6176
Intracom	2,60131	5	2,39869	47,9738

Πίνακας 3

[13] Όπου D_R: η διάρκεια σύμφωνα με το Macaulay.

Βασικά Αποτελέσματα της Εμπειρικής Εφαρμογής, με Δεδομένα: $T = 10$ **και** $i = 0,035445$				
	D_B	D_R	Απόκλιση D_B, D_R (έτη)	Απόκλιση D_R, D_B (%)
COSMOTE	5,64105	10	4,35895	43,5895
Ελληνική Τεχνοδομική	6,70865	10	3,29135	32,9135
Coca - -Cola	5,3526	10	4,6474	46,474
OTE	3,63811	10	6,36189	63,6189
Intracom	5,69148	10	4,30852	43,0852

Πίνακας 4

7.3.1. Η Διάρκεια του Chance για την COSMOTE

Η πρώτη επιχείρηση, για την οποία υπολογίσαμε τη διάρκεια του Chance, είναι η COSMOTE. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία και τις υποθέσεις που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, βρήκαμε τα εξής αποτελέσματα:

$F = 811.688.042$ €

$mve = 3.301.013.028$ €

$seq = 1,47824$

Χρησιμοποιώντας αυτά, και έχοντας ως δεδομένο ότι $T = 5$ και $i = 0,035445$, υπολογίσαμε το A και το s και βρήκαμε τις εξής τιμές:

$A = 3{,}45254 * 10^9$ €

$s = 1{,}43823$

Με βάση αυτές τις τιμές υπολογίσαμε την τιμή του put option:

$p = 5{,}28339 * 10^8$ €

Έχοντας υπολογίσει όλα αυτά, μπορέσαμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Chance για τη διάρκεια και βρήκαμε το εξής αποτέλεσμα:

$D_B = 3{,}03034$ χρόνια

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αλλά χρησιμοποιώντας ως χρόνο ως τη λήξη (maturity) τα 10 χρόνια (δηλ. $T = 10$), αλλάζουν οι τιμές που βρήκαμε για το A, s, p και D_B, και διαμορφώνονται ως εξής:

$A = 3{,}32698 * 10^9$ €

$s = 1{,}47171$

$p = 5{,}43478 * 10^8$ €

$D_B = 5{,}64105$ χρόνια

Παρατηρούμε, ότι και στις δύο περιπτώσεις η διάρκεια που υπολογίστηκε είναι μικρότερη από το χρόνο ως τη λήξη (maturity) της ομολογίας, δηλαδή ισχύει: $D_B < T$. Αξίζει να θυμίσουμε, ότι αυτή η ανισότητα αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό του μέτρου της διάρκειας του Chance.

Επίσης, αν υπολογίζαμε τη διάρκεια του χρέους της COSMOTE χρησιμοποιώντας το μέτρο της διάρκειας του Macaulay, διατηρώντας την υπόθεση ότι το χρέος (F) μπορεί να θεωρηθεί ως μια ομολογία χωρίς τοκομερίδια, τότε η διάρκεια θα ήταν ίση με το χρόνο ως τη λήξη (maturity). Δηλαδή, στη μεν πρώτη περίπτωση η διάρκεια θα ήταν ίση με 5 χρόνια ($D_R = 5$ χρόνια) στη δε δεύτερη περίπτωση θα ήταν ίση με 10 χρόνια ($D_R = 10$ χρόνια). Με άλλα λόγια, θα υπήρχε μια απόκλιση μεταξύ D_R και D_B κατά 1,96966 χρόνια (ή κατά 39,3932%), και κατά 4,35895 χρόνια (ή κατά 43,5895%) αντιστοίχως.

7.3.2. Η Διάρκεια του Chance για την Ελληνική Τεχνοδομική

Ακολουθώντας την ίδια πορεία όπως και προηγουμένως, και έχοντας ως δεδομένα τα εξής:

$F = 217.357.193$ €

$mve = 664.413.026$ €

$seq = 0,769062$,

και θεωρώντας $T = 5$ χρόνια, καταλήξαμε στα εξής αποτελέσματα

$A = 8,07573 * 10^8$ €

$s = 0,659274$

$p = 3,88963 * 10^7$ €

$D_B = 3,86434$ χρόνια

Σύμφωνα με το Macaualy, η διάρκεια του χρέους είναι 5 χρόνια, δηλαδή υπάρχει μια απόκλιση από τον Chance του 1,13566 έτους ή του 22,7132%.

Αν θεωρήσουμε ως χρόνο ως τη λήξη (maturity) τα 10 χρόνια, τότε θα έχουμε:

$A = 7{,}40225 * 10^8$ €

$s = 0{,}714378$

$p = 7{,}66769 * 10^7$ €

$D_B = 6{,}70865$ χρόνια

Σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η διαφορά με τη διάρκεια του Macaulay είναι 3,29135 χρόνια, δηλαδή 32,9135%.

7.3.3. Η Διάρκεια του Chance για την Coca – Cola

Σύμφωνα με τα δεδομένα και τους μετέπειτα υπολογισμούς, η Coca – Cola, το έτος 2002, είχε χρέος (F) 3.116.400.000 €, η αγοραία αξία του equity (market value of equity: mev) ήταν 3.688.523.186 €, και είχε τυπική απόκλιση (seq) 1,06229.

Όταν χρησιμοποιήσαμε ως χρόνο ως τη λήξη (maturity) το $T = 5$ χρόνια, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

$A = 4{,}74947 * 10^9$ €

$s = 0{,}911254$

$p = 1{,}31258 * 10^9$ €

$D_B = 2{,}88116$ χρόνια

Για $T = 10$ χρόνια, τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται ως εξής:

$A = 3{,}81995 * 10^9$ €

$s = 1{,}0412$

$p = 1{,}9028 * 10^9$ €

$D_B = 5{,}3526$ χρόνια

Όπως και στην περίπτωση των δύο προηγούμενων επιχειρήσεων, έτσι και για την Coca – Cola, ισχύει: $D_B < T$. Για $T = 5$, η διαφορά μεταξύ D_B και D_R είναι 2,11884 χρόνια (42,3768%), ενώ για $T = 10$, η διαφορά γίνεται 4,6474 χρόνια (46,474%).

7.3.4. Η Διάρκεια του Chance για τον ΟΤΕ

Το 2002, ο ΟΤΕ παρουσίασε χρέος 5.102.600.000 €. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς μας, το market value of equity (mev) ήταν 752.161.483 € και η τυπική του απόκλιση (seq) ήταν 3,03235.

Αν θεωρήσουμε ως χρόνο ως τη λήξη (maturity) τα 5 χρόνια, τα αποτελέσματα είναι:

$A = 2{,}66118 * 10^9$ €

$s = 0{,}159947$

$p = 1{,}66424 * 10^9$ €

$D_B = 0{,}56912$ χρόνια

Αν υπολογίσουμε τη διάρκεια του χρέους, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Macaulay, τότε $D_R = 5$ χρόνια. Η διαφορά από τη D_B είναι 4,4088 χρόνια (ή 88,6176%).

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως T τα 10 χρόνια, οι υπολογισμοί στο Mathematica, δίνουν τα εξής αποτελέσματα:

$A = 1{,}65254 * 10^9$ €

$s = 0{,}502184$

$p = 2{,}59447 * 10^9$ €

$D_B = 3{,}63811$ χρόνια

Και πάλι παρατηρούμε ότι ισχύει $D_B < T = D_R = 10$. Η διαφορά μεταξύ των δύο μέτρων είναι 6,36189 χρόνια (63,6189%).

7.3.5. Η Διάρκεια του Chance για την Intracom

Για την Intracom, για το έτος 2002, τα δεδομένα που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της D_B είναι:

$F = 809.624.551$ €

$mve = 1.087.691.864$ €

$seq = 4{,}66315$

Θεωρώντας $T = 5$, καταλήγουμε στα αποτελέσματα:

$A = 1,76557 * 10^9$ €

$s = 2,85331$

$p = 6,76593 * 10^8$ €

$D_B = 2,60131$ χρόνια

Παρατηρούμε, ότι αν υπολογίσουμε τη διάρκεια του χρέους ακολουθώντας τη μελέτη του Macaulay, θα έχουμε D_R τα 5 χρόνια. Η απόκλιση από τη διάρκεια του Chance είναι 2,39869 χρόνια (47,9738%).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε ως T τα 10 χρόνια, τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

$A = 9,96045 * 10^8$ €

$s = 0,660676$

$p = 3,49502 * 10^8$ €

$D_B = 5,69148$ χρόνια

Ακολουθώντας την ίδια λογική, βλέπουμε ότι ενώ η $D_R = 10$ χρόνια, η $D_B = 5,69148$ χρόνια. Σημειώνουμε ότι η διαφορά είναι στα 4,30852 χρόνια (43,0852%).

7.4. Συμπεράσματα

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της εμπειρικής εφαρμογής, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1) Και για τις πέντε επιχειρήσεις που εξετάσαμε, τα αποτελέσματα που βρήκαμε επαληθεύουν τη σχέση $D_B < T$, η οποία, όπως ήδη προαναφέρθηκε, αποτελεί το βασικότερο χαρακτηριστικό γνώρισμα της διάρκειας του Chance. Κατά επέκταση, η ανισότητα αυτή μπορεί να εκφραστεί και ως εξής: $D_B < D_R$, εφόσον, σύμφωνα με το Macaulay, η διάρκεια μιας ομολογίας χωρίς τοκομερίδια ισούται με το χρόνο ως τη λήξη (maturity).

2) Παρατηρώντας τις ποσοστιαίες αποκλίσεις μεταξύ της D_B και της D_R, βλέπουμε ότι η απόκλιση είναι μεγαλύτερη όταν χρησιμοποιούμε ως χρόνο ως τη λήξη (maturity: T) τα 10 χρόνια. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση των επιχειρήσεων της COSMOTE, της Ελληνικής Τεχνοδομικής και της Coca - Cola. Δε συμβαίνει όμως για τις επιχειρήσεις ΟΤΕ και Intracom, όπου παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση όταν χρησιμοποιούμε ως T τα 5 χρόνια.

3) Εξετάζοντας προσεκτικά τα αποτελέσματα για τις πέντε επιχειρήσεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο ΟΤΕ παρουσιάζει τη μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ D_B και D_R (88,6% για $T = 5$ και 63,6% για $T = 10$). Τις μικρότερες αποκλίσεις εμφανίζει η Ελληνική Τεχνοδομική (22,7% για $T = 5$ και 32,9% για $T = 10$).

Επίλογος

Βασικό θέμα της παρούσας εργασίας ήταν η σταθμική διάρκεια ομολόγων όταν υπάρχει κίνδυνος χρεοκοπίας της εκδότριας εταιρείας.

Η διάρκεια είναι ένα ζήτημα που έχει απασχολήσει, σε μεγάλο βαθμό, αρκετούς ερευνητές και διαχειριστές χαρτοφυλακίων με ομολογίες. Τις τελευταίες έξι δεκαετίες, η βιβλιογραφία, όσον αφορά τη διάρκεια, έχει αναπτυχθεί από μία απλή εξήγηση της ιδιότητάς της ως μέτρο του μέσου χρόνου ως τη λήξη (maturity) της ομολογίας, σε περίπλοκες στρατηγικές ανοσοποίησης χαρτοφυλακίων. Ωστόσο, δεν πρέπει να παραβλέψουμε το γεγονός ότι έχει δεχτεί και έντονη κριτική. Παρ' όλους τους περιορισμούς όμως, η διάρκεια ειδικών κατηγοριών ομολογιών, (διηνεκείς ομολογίες και ομολογίες χωρίς τοκομερίδια), τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες του μέτρου, καθώς και οι βασικές του χρήσεις, το καθιστούν εξαιρετικά δημοφιλές στους διαχειριστές χαρτοφυλακίων ομολογιών, οι οποίοι το χρησιμοποιούν για την ανάπτυξη και εφαρμογή στρατηγικών, οι οποίες θα ικανοποιούν τους στόχους των κατόχων των χαρτοφυλακίων.

Παρά το έντονο ενδιαφέρον των ερευνητών ως προς το θέμα της διάρκειας, αρχικά η έρευνα επικεντρωνόταν μόνο στις ομολογίες χωρίς κίνδυνο αθέτησης (default – free bonds). Μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1990, μπορούμε να πούμε ότι υπήρχε ένα κενό στη βιβλιογραφία, καθώς η επίδραση του πιστωτικού κινδύνου στη διάρκεια των ομολογιών ήταν άγνωστη. Η διαρκώς αυξανόμενη αγορά για ομολογίες με κίνδυνο αθέτησης, έκανε πολλούς ερευνητές να εξετάσουν το ζήτημα αυτό, καθώς ήταν σαφές ότι οι μέχρι τότε στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίου δε θα λειτουργούσαν αποτελεσματικά υπό την επήρεια του κινδύνου χρεοκοπίας των επιχειρήσεων. Έτσι λοιπόν, αναπτύχθηκε η βιβλιογραφία για τη σταθμική διάρκεια ομολόγων όταν υπάρχει κίνδυνος χρεοκοπίας της εκδότριας εταιρείας, τα κυριότερα άρθρα της οποίας παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 6 της παρούσας εργασίας.

Ως γενικό συμπέρασμα της εργασίας αυτής, και λαμβάνοντας υπόψη το διεθνές οικονομικό σύστημα, τη ραγδαία και ταχύτατη ανάπτυξή του, μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο της διάρκειας είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη διαχείριση χαρτοφυλακίων, το οποίο θα συνεχίσει να χρησιμοποιείται. Ωστόσο, οι διεθνείς τάσεις και κρίσεις του οικονομικού συστήματος, αυξάνουν την ένταση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί, οδηγώντας τους διαχειριστές των χαρτοφυλακίων να λαμβάνουν υπόψη τους τον πιστωτικό κίνδυνο όταν υπολογίζουν τη διάρκεια των χαρτοφυλακίων και διαμορφώνουν στρατηγικές. Τα αποτελέσματα δε της εμπειρικής εφαρμογής της παρούσας εργασίας, ενισχύουν το συμπέρασμα αυτό.

Παραρτήματα

1. Garman

Ο Garman (1985) ασχολήθηκε με την εκτίμηση της ευαισθησίας ως προς το επιτόκιο των χαρτοφυλακίων ευρωπαϊκών options και υπολόγισε τη διάρκεια αυτών των χαρτοφυλακίων.

Ο Garman εξέτασε ευρωπαϊκά put και call option, σε short και long θέσεις, διαφορετικών λήξεων και τιμών άσκησης. Υπέθεσε επίσης, ότι η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη.

Η βασική πηγή κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου με options είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Αν ο επενδυτής επιθυμεί να κάνει hedging του χαρτοφυλακίου του κατά της διακύμανσης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και κατά της μεταβολής του επιτοκίου, θα πρέπει να αγοράσει ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, που θα έχει την κατάλληλη λήξη. Το ερώτημα που τίθεται είναι ποια λήξη θα πρέπει να επιλέξει. Η απάντηση είναι, ότι η κατάλληλη λήξη είναι αυτή που ισούται με τη διάρκεια του χαρτοφυλακίου των options.

Διάρκεια του χαρτοφυλακίου των options

Βασική υπόθεση είναι ότι κάθε option τιμολογείται βάσει της φόρμουλας του Black (1976). Σε αυτήν την περίπτωση, η διάρκεια ενός χαρτοφυλακίου με options είναι η εξής:

$$D \equiv \frac{\sum_j a_j * V_j * T_j}{\sum_j a_j * V_j} \tag{1}$$

Όπου: a_j = ο αριθμός των μονάδων του option j που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο,

V_j = η τιμή του option j, σύμφωνα με το μοντέλο του Black (1976), και

T_j = ο χρόνος που απομένει ως τη λήξη του option j.

Ο Garman απέδειξε ότι, όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο του Black (1976), η ποσοστιαία ευαισθησία του χαρτοφυλακίου των options ως προς το επιτόκιο, ισούται με τη διάρκειά του:

$$D = (-\frac{\partial V}{\partial r}) / V \qquad (2)$$

Σύμφωνα με όλα αυτά, αν ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου επιθυμεί να μηδενίσει την ευαισθησία του χαρτοφυλακίου ως προς το επιτόκιο (δηλαδή, να θέσει τη σχέση 2 ίση με το μηδέν), θα πρέπει να «κάνει» τη διάρκεια μηδέν. Αν θέλει να κάνει hedging του χαρτοφυλακίου, τότε θα αγοράσει (ή θα πουλήσει) κάποιο χρηματοοικονομικό προϊόν (π.χ. forward contract) ώστε να κάνει το hedge ratio ίσο με το μηδέν. Θα πρέπει .όμως να επιλέξει το προϊόν με εκείνη τη λήξη που θα προστατεύσει καλύτερα το χαρτοφυλάκιο από τις μεταβολές του επιτοκίου. Υπό αυτές τις υποθέσεις, θα επιλέξει το προϊόν με εκείνη τη λήξη που είναι ακριβώς ίση με τη διάρκεια του χαρτοφυλακίου.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα options τιμολογούνται με βάση το μοντέλο των Black – Scholes (1973), τότε για να υπολογίσουμε τη διάρκεια του χαρτοφυλακίου των options, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση ενός ισοδύναμου χαρτοφυλακίου, το οποίο θα αποτελείται από ομολογίες και από κάποιο άλλο χρηματοοικονομικό προϊόν. Σε αυτήν την περίπτωση, η διάρκεια του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως εξής:

$$D \equiv \frac{\sum_j a_j * W_j * T_j}{W} \qquad (3)$$

Όπου: $W_j =$ η τιμή του option j, σύμφωνα με το μοντέλο των Black – Scholes (1973), και

$W \equiv \sum_j a_j * W_j$, η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου των options, σύμφωνα με το μοντέλο των Black – Scholes (1973).

Εφόσον το χαρτοφυλάκιο των options μπορεί να «αναπαρασταθεί» με ένα ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο από ομολογίες και προθεσμιακά συμβόλαια (forwards), τότε και η διάρκειά του μπορεί να διαχωριστεί σε δύο τμήματα. Το ένα θα αναπαριστά τη διάρκεια των ομολογιών, και το άλλο τη διάρκεια των προθεσμιακών συμβολαίων.

Ο Garman έδειξε ότι η διάρκεια των ομολογιών στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο δίνεται από τον εξής τύπο:

$$B \equiv \frac{\sum_j a_j * U_j * T_j}{\sum_j a_j * U_j} \qquad (4)$$

Όπου: $B =$ η διάρκεια των ομολογιών στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο, και

$U_j =$ η αξία των ομολογιών στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο.

Η διάρκεια των προθεσμιακών συμβολαίων δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E \equiv \frac{\sum_j a_j * (V_j - U_j) * T_j}{\sum_j a_j * (V_j - U_j)} \tag{5}$$

Όπου: $E =$ η διάρκεια των προθεσμιακών συμβολαίων στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο, και

$(V_j - U_j =$ η αξία των προθεσμιακών συμβολαίων στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο.

Είναι φανερό, ότι η διάρκεια του χαρτοφυλακίου των options θα είναι η σταθμισμένη διάρκεια των ομολογιών και των προθεσμιακών συμβολαίων:

$$D = \gamma * B + (1 - \gamma) * E \tag{6}$$

Όπου: $\gamma =$ η αναλογία των ομολογιών στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο.

Ο Garman απέδειξε ότι όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο των Black – Scholes (1973), η ποσοστιαία ευαισθησία του χαρτοφυλακίου των options ως προς το επιτόκιο, ισούται με τη σταθμισμένη διάρκεια των ομολογιών του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου:

$$(-\frac{\partial W}{\partial r})/W = D - (1 - \gamma) * E = \gamma * B \tag{7}$$

2. Το Μοντέλο των Black – Scholes

Η τιμή, στο χρόνο μηδέν, ενός ευρωπαϊκού call option και ενός ευρωπαϊκού put option, με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα, δίνεται από τον εξής τύπο (Hull, 2003):

$$c = S * N(d_1) - X * e^{-r*T} * N(d_2)$$
$$p = X * e^{-r*T} * N(-d_2) - S * N(-d_1)$$

Όπου:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) * T}{\sigma * \sqrt{T}} = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

Όπου: $N(.) =$ η συσσωρευτική κατανομή πιθανότητας,

$S =$ η τιμή της μετοχής το χρόνο μηδέν,

$X =$ η τιμή άσκησης,

$r =$ το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο,

$\sigma =$ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, και

$T =$ ο χρόνος ως τη λήξη του option.

3. Σύστημα Εξισώσεων για τον Υπολογισμό του A και s

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τους δύο αγνώστους, A και s, θα πρέπει να λύσουμε, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, ένα σύστημα εξισώσεων. Ως ήδη γνωστές παραμέτρους, θεωρούμε το συνολικό χρέος της επιχείρησης (F), το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (i), το χρόνο ως τη λήξη (maturity: T), την αγοραία αξία του equity (market value of equity: mev) και την τυπική απόκλιση του equity (seq), όπως υπολογίζονται με τη βοήθεια του Excel.

Για να μπορέσει το Mathematica να λύσει το σύστημα εξισώσεων, θα πρέπει αρχικά να ορίσουμε τη στατιστική κανονική κατανομή, καθώς και τον τύπο υπολογισμού του d_1, ώστε να μπορέσει το πρόγραμμα να υπολογίσει το $N(d_1)$.

Σύμφωνα με το Merton, η αξία του equity δίνεται από ένα call option πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης. Δηλαδή:

$$mve = c = f(A, F, T, s, i) \qquad (1)$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο αγνώστους (A και s). Χρειαζόμαστε λοιπόν ακόμη μία εξίσωση. Από το λήμμα του Ito γνωρίζουμε ότι:

$$seq = \left(\frac{A}{mev}\right) * \left(\frac{\partial c}{\partial A}\right) * s \qquad (2)$$

Όπου: $\dfrac{\partial c}{\partial A} = N(d_1)$.

Λύνοντας ως προς s έχουμε:

$$s = \frac{seq * mve}{A * N(d\ )} \qquad (2^{\alpha})$$

Στο Mathematica, η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων έχει την ακόλουθη μορφή:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
ndist = NormalDistribution[0, 1]
F = 811688042;
T = 5;
i = 0.035445;
mve = 3301013028;
seq = 1.47824;
```

$$d1 = \frac{Log[\frac{A}{F}] + (i + 0.5 * s^2) * T}{s * \sqrt{T}}$$

$$FindRoot[\{mve == A * CDF[ndist, d1] - F * Exp[-i * T] * CDF[ndist, d1 - s * \sqrt{T}], s == \frac{seq * mve}{A * CDF[ndist, d1]}\}, \{A, 1.1 * F\}, \{s, 0.2 * seq\}]$$

Όπου: *«Statistics `ContinuousDistributions` ndist = NormalDistribution[0,1]*, είναι ο ορισμός της κανονικής κατανομής στο Mathematica,

CDF[ndist, d₁] = ο συμβολισμός του Mathematica για το $N(d_1)$, και

FindRoot = η εντολή για την επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

4. Υπολογισμός της Τιμής του Put Option

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή του put option, χρησιμοποιούμε ως δεδομένα τις παραμέτρους F, T, i, A και s.

Επίσης, για να είναι το Mathematica σε θέση να κάνει τον υπολογισμό της τιμής του put, θα πρέπει να ορίσουμε τον τύπο για το d_1 καθώς και τον τύπο για την τιμή μιας ομολογίας \$1, με κίνδυνο αθέτησης. Οι τύποι αυτοί είναι:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{A}{F}) - \ln P(i,T) + (\frac{\sigma^2}{2}) * T}{\sigma * \sqrt{T}} \quad \text{και άρα} \quad d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T} \tag{1}$$

$$P = e^{-i*T} \tag{2}$$

Ο τύπος για τον υπολογισμό της τιμής του put option είναι:

$$p(A,F,T) = F * P(i,T) * [1 - N(d_2)] - A * [1 - N(d_1)] \tag{3}$$

Όπως ήδη αναφέραμε στο κεφάλαιο 7, υποθέτουμε ότι $\sigma * \sqrt{T}$ ισούται με το $s * \sqrt{T}$.

Στο Mathematica η διαδικασία επίλυσης του τύπου υπολογισμού της τιμής του put option έχει την εξής μορφή:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
ndist = NormalDistribution[0, 1]
F = 811688042;
T = 5;
i = 0.035445;
A = 3.45254 * 10^9;
s = 1.43823;
P = Exp[-i * T];
d1 = (Log[e, A/F] - Log[e, P] + 0.5 * s^2 * T) / (s * √T)
```

```
p = F*P*(1 - CDF[ndist, d1 - s*√T]) - A*(1 - CDF[ndist, d1])
```

Όπου: *«Statistics `ContinuousDistributions` ndist = NormalDistribution[0,1]*, είναι ο ορισμός της κανονικής κατανομής στο Mathematica,

CDF[ndist, d_1] = ο συμβολισμός του Mathematica για το $N(d_1)$, και

$p =$ η τιμή του put option.

5. Υπολογισμός της Διάρκειας του Chance

Εφόσον έχει προηγηθεί η διαδικασία που περιγράφτηκε στις προηγούμενες ενότητες, είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της διάρκεια του Chance: D_B.

Ως γνωστές παραμέτρους χρησιμοποιούμε το συνολικό χρέος (F), την αγοραία αξία του equity (market value of equity: mev),·την τυπική απόκλιση του equity (seq), το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο αθέτησης (i), το χρόνο ως τη λήξη (maturity: T), την τιμή μιας ομολογίας $1, με κίνδυνο αθέτησης ($P$) και την τιμή του put option (p).

Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε τη διαδικασία υπολογισμού της D_B θα πρέπει να ορίσουμε τον τύπο για την τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει την επικίνδυνη ομολογία και το put, καθώς και τον τύπο για την τιμή της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια αλλά με κίνδυνο αθέτησης:

$$R = F * P(i,T) \qquad (1)$$

$$B + p(A,F,T) = R \Rightarrow B = R - p(A,F,T) \qquad (2)$$

Ο τύπος για τον υπολογισμό της D_B είναι:

$$D_B = w_R * D_R + w_P * D_P \qquad (3)$$

Όπου: $w_R = \dfrac{R}{B}$,

$w_P = 1 - \dfrac{R}{B}$,

$D_R = T$, και

$$D_P = \frac{T * R[1 - N(d_2)]}{p(A,F,T)}.$$

Για να λειτουργήσει σωστά το πρόγραμμα του Mathematica, και να μπορέσει να αντικαταστήσει τις τιμές στη σχέση (3) και να δώσει μια τιμή στη D_B, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τα w_R, w_P, D_R, D_P.

Στην συνέχεια, για την καλύτερη δυνατή κατανόηση, παραθέτουμε το output της διαδικασίας υπολογισμού της D_B από το Mathematica:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
ndist = NormalDistribution[0, 1]
F = 811688042;
A = 3.45254 * 10^9;
s = 1.43823;
i = 0.035445;
T = 5;
P = Exp[-i * T];
p = 5.28339 * 10^8;
d1 = (Log[e, A/F] - Log[e, P] + 0.5 * s^2 * T) / (s * √T);
R = F * Exp[-i * T]

B = R - p



wR = R / B;
DR = T;
wP = 1 - R/B;
DP = (T * R (1 - CDF[ndist, d1 - s * √T])) / p;
DB = wR * DR + wP * DP
```

Όπου: *«Statistics `ContinuousDistributions` ndist = NormalDistribution[0,1]*, είναι ο ορισμός της κανονικής κατανομής στο Mathematica, *CDF[ndist, d_1]* = ο συμβολισμός του Mathematica για το $N(d_1)$, και

οι υπόλοιπες μεταβλητές όπως ορίζονται στο κείμενο.

Βιβλιογραφία

🕮 Ελληνική Βιβλιογραφία

Βασιλείου Δ., (2001), «Ανάλυση και Διαχείριση Επενδύσεων», Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Επίσκοπος Α., (Νοέμβριος 2000), «Τραπεζική Θεωρία και Πρακτική», Σημειώσεις Παραδόσεων.

Παπαδάκης Κ. Ε., (1999), «Οδηγός για το Mathematica». Πολυτεχνική Σχολή, Γενικό Τμήμα, Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής, Πανεπιστήμιο Πατρών.

🕮 Ξένη Βιβλιογραφία

Hull J. C., (2003), «Options, Futures and Other Derivatives: Fifth Edition». Prentice Hall. Pearson Education International.

Saunders A., (2000), «Financial Institutions Management: A modern perspective. Third Edition». McGraw – Hill Companies.

🕮 Ξένη Αρθρογραφία

Bierwag G. O., Kaufman G. G., (1988), "Durations of non – default free securities". Financial Analysts Journal, 39 – 46.

Bierwag G. O., Kaufman G. G., Khang C., (1978), "Duration and Bond Portofolio Analysis: An Overview". The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, No. 4, 671 – 681.

Bierwag G. O., Kaufman G. G., Khang C., (1978), "Immunization Strategies and their Implications". Center for Capital Market Research, University of Oregon.

Bierwag G. O., Kaufman G. G, Toevs A. L., (1982), "Single Factor Duration Models in a Discrete General Equilibrium Framework". The Journal of Finance, Vol. 37, no. 2, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Finance Association, Wahington, D.C., December 28 – 30,1981, 325 – 338.

Bierwag G. O., Khang C., (1979), "Immunization Strategy Is Mini – Max Strategy". Journal of Finance, 389 – 414.

Black F., (1976), "The Pricing of Commodity contracts". Journal of Financial Economics 3, 167 – 179.

Blach F., Scholes M., (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy. 637 – 654.

Blocher E., Stickney C., (1978), "Duration and the Risk Assessment in Capital Budgeting". University of North Carolina. Working Paper (forthcoming in the Accounting Review).

Boquist J. A., Racette G. A., and Schlarbaum, (1975), "Duration and Risk Assessment for Bonds and Common Stock". Journal of Finance

Carr J. L., Halpern P. J., McCallum J. S., (1974), "Correcting the Yield Curve: A Re – Interpretation of the Duration Problem". Journal of Finance, Vol XXIX, 1287 – 1294.

Chambers D. R., Carleton W. T., (1981), "A More General Duration Approach". In *Research in Finance*, A. H. Chen, ed., JAI Press, 7 (forthcoming).

Chambers D. R., Carleton W. T., McEnally R. W., (1988), "Immunizing Default – Free Bond Portfolios with a Duration Vector". The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 23, No.1, 89 – 104.

Chance D. M. (1990), "Default Risk and the Duration of Zero Coupon Bonds". The Journal of Finance, Vol. 45, Issue 1, 265 – 274.

Cooper I. A., (1978), "Asset Values, Interest Rate Changes, and Duration". Journal of Financial and Quantitative Analysis, 701 – 723.

Cox J. C., Ingersoll J., Ross S., (1977), "Duration and the Measurement of Basis Risk". Stanford / Chicago / Yale Working Paper. Forthcoming in Journal of Business.

Durand D., (1957), "Growth Stocks and the Petersburg Paradox". Journal of Finance, Vol. 12, No.3, 348 – 363.

Durand D., (1974), "Payout Period, Time Spread, and Duration Aids to Judgment in Capital Budgeting". Journal of Bank Research.

Fisher L., (1966), "An Algorithm for Finding Exact Rates of Return". Journal of Business, Vol. 39, No. 1, 111 – 118.

Fisher L., Weil R. L., (1971), "Coping with the Risk of Interest – Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies". Journal of Business, Vol. 44, No. 4, 408 – 431.

Fooladi I. J., Roberts G. S., Skinner F., (1997), "Duration for Bonds with Default Risk". Journal of Banking and Finance, Vol.21, 1 – 16.

Garman M. B., (1984), "The Duration of Option Portfolios". Journal of Financial Economics, Vol. 14, 309 – 315.

Grove M. A., (1966), "A Model of the Maturity Profile of the Balance Sheet". Metroeconomica 18, No. 1, 40 – 55.

Grove M. A., (1974), "On Duration and the Optimal Maturity Structure of the Balance Sheet". Metroeconomica, 40 – 55.

Haugen R. A., Wichern D. W., (1974), "The Elasticity of Financial Assets". Journal of Finance, 1229 – 1240.

Hicks J. R., (1939), "Value and Capital". Oxford University Press, 185 – 188.

Hopewell M. H., Kaufman G. G., (1973), "Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification". American Economic Review, 479 – 453.

Ingersoll J. E., Skelton J., Weil R. L., (1978), "Duration Forty Years Later". The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, No. 4, 627 – 650.

Kaufman G. G., (1978), "Measuring Risk and Return for Bonds: A New Approach". Journal of bank Returns, 82 – 90.

Kaufman G. G., (1978), "Duration, Planning Period, and Tests of the Capital Asset Pricing Model". Paper prepared for the annual meeting of the eastern Finance Association, Atlanta.

Keintz R., Stickney C., (1977), "Immunization of Pension Funds from Interest Rate Changes". Dartmouth College. Working Paper.

Livingston M., Caks J., (1977), "A "Duration" Fallacy". The Journal of Finance, Vol. 32, No. 1, 185 – 187.

Macaulay F. R., (1938), "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856." New York: National Bureau of Economic Research.

Merton R. C., (1973), "Theory of Rational Option Pricing". Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141 – 183.

Merton R. C., (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". The Journal of Finance, Vol. 29, No. 2, 449 – 470.

Nawalkha S. K., (1994), "A Contingent Claims Analysis of the Interest Rate Risk Characteristics of Corporate Liabilities". Journal of Banking and Finance, Vol. 20, 227 – 245.

Redington F. M., (1952), "Review of the Principle of Life Office Valuations". Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 18, 286 – 340.

Samuelson P. A. (1945), «The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System». American Economic Review, 16 – 27.

Tito D., Wagner W., (1977), "Definitive New Measures of Bond Performance and Risk". Wilshire Associates.

Wallas G. E., (1960), "Immunization". Journal of the Institute of Actuaries Students' Societies, Vol. 15, 345 – 357.

Wehrle L. S., (1961), "Life Insurance Investment – The Experience of Four Companies". Yale Economic Essays 1, 70 – 136.

Weil R. L., (1973), "Macaulay's Duration: An Appreciation". The Journal of Business, Vol. 46, No. 4, 589 – 592.

Whittaker J., (1969), "Minimizing the Burden of the Dollar Premium". Investment Analyst, 26 – 33.

Whittaker J., (1970), "The Relevance of Duration". Journal of Business Finance, Vol. 2, 1 – 8.