ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΟΠΤΕΙΑ

ΚΑΝΗΡΑ ΚΑΛΛΙΟΠΗ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα, Ιανουάριος 2004

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΟΠΤΕΙΑ

ΚΑΝΗΡΑ ΚΑΛΛΙΟΠΗ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα, Ιανουάριος 2004

Εγκρίνουμε τη διατριβή της **Κανηρά Καλλιόπης**

<u>Όνομα υπεύθυνου καθηγητή:</u>

Επίσκοπος Αθανάσιος
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

<u>Όνομα εξεταστή καθηγητή:</u>

Γάτσιος Κωνσταντίνος
Καθηγητής
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΟΠΑ)

Αθήνα, Ιανουάριος 2004

Περίληψη

Η ραγδαία εξέλιξη των χρηματοοικονομικών αγορών έχει οδηγήσει τους σύγχρονους επενδυτές στην ανάγκη να στραφούν σε ολοένα και πιο σύγχρονα επενδυτικά προϊόντα τα οποία προσφέρονται στην αγορά. Η ανάγκη αυτή των επενδυτών δημιούργησε τα «σύνθετα επενδυτικά προϊόντα» τα οποία ονομάζονται και «εξωτικά δικαιώματα» και θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή αναφορικά με την παρούσα χρηματοοικονομική κατάσταση και τους παράγοντες που καλούνται να σταθμίσουν οι επενδυτές προκειμένου να επιλέξουν το κατάλληλο για αυτούς είδος επένδυσης που θα ακολουθήσουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρατίθενται οι κατηγορίες των επενδυτικών προϊόντων οι οποίες διακρίνονται στα επενδυτικά προϊόντα εγγυημένου κεφαλαίου και εγγυημένης απόδοσης, εγγυημένου κεφαλαίου, και μη εγγυημένου κεφαλαίου και απόδοσης. Στη συνέχεια ακολουθεί μία συνοπτική ανάλυση των δύο πρώτων κατηγοριών και η επόμενη κατηγορία θα αναλυθεί εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο τρίτο κεφάλαιο έχουμε την αναλυτική παρουσίαση των εξωτικών προϊόντων τα οποία χωρίζονται στα δικαιώματα εξαρτημένης πορείας, τα συσχετιζόμενα δικαιώματα και τα λοιπά δικαιώματα με σκοπό την καλύτερη μελέτη και παρουσίασή τους. Επιπλέον, με βάση το υπόδειγμα των Black & Scholes (1973) γίνεται η τιμολόγηση των εξωτικών δικαιωμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, υπάρχει η παρουσίαση ενός εναλλακτικού τρόπου τιμολόγησης των εξωτικών δικαιωμάτων -η προσομοίωση Monte Carlo- ο οποίος αποτελεί και το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσας εργασίας. Τέλος, ακολουθεί η τιμολόγηση ενός εξωτικού προϊόντος -lookback δικαιώματος- με τη χρήση του «πακέτου Mathematica 4.0».

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το διεθνές επενδυτικό περιβάλλον έχει στις μέρες μας καταστεί πολύπλοκο και συνεχώς μεταβαλλόμενο, και απαιτεί τη συνεχή παρακολούθηση των εξελίξεων αλλά και την πλήρη κατανόηση των διαφόρων παραγόντων που το επηρεάζουν (πολιτικοί, οικονομικοί και νομικοί).

Όπως είναι φυσικό, οι διάφοροι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί έχουν αναπτύξει πέρα από τις συνήθεις υπηρεσίες που προσφέρουν στο επενδυτικό κοινό[1], μία σειρά από επενδυτικά προϊόντα τα οποία έχουν τη δυνατότητα να ανταποκρίνονται σε κάθε επενδυτικό προφίλ (διαφύλαξη των κεφαλαίων, εξασφάλιση σταθερού εισιδήματος, εξασφάλιση σημαντικών υπεραξιών) και να καλύπτουν τις ανάγκες των επενδυτών με τον κάλύτερο δυνατό τρόπο.

Η άριστη σύνθεση του χαρτοφυλακίου συμβάλλει στην επιλογή σωστού συνδιασμού μετρητών, ομολόγων, μετοχών, παραγώγων και γενικά οποιονδήποτε επενδυτικών προϊόντων στοχεύοντας στη μείωση των διακυμάνσεων της αξίας των επενδύσεων. Οι διαφορετικές κατηγορίες επενδύσεων αποδίδουν κατά διαφορετικό τρόπο ακόμη και κάτω από τις ίδιες συνθήκες αγοράς. Για το λόγο αυτό, είναι η επιλογή της κατάλληλης επένδυσης που διαδραματίζει πρωταρχικό ρόλο στη μετέπειτα απόδοση του εκάστοτε επενδυτικού προϊόντος.

Ανάλογα με τον κίνδυνο που είναι διατεθειμένος να αναλάβει ο εκάστοτε επενδυτής υπάρχουν διαφόρων ειδών επενδύσεις οι οποίες καλύπτουν όλες σχεδόν τις απαιτήσεις και ανάγκες του. Οι επενδύσεις γενικά διακρίνονται στις επενδύσεις που παρέχουν εγγυημένο κεφάλαιο και αποδόσεις, στις επενδύσεις που παρέχουν μόνο εγγυημένο κεφάλαιο και οι αποδόσεις τους είναι αβέβαιες, εξαρτώμενες από τις οικονομικοπολιτικές εξελίξεις και, τέλος, στις επενδύσεις οι οποίες δεν εγγυώνται ούτε το κεφάλαιο ούτε την απόδοση και οι οποίες ενέχουν και το μεγαλύτερο κίνδυνο.

Ο λόγος που υπάρχουν οι παραπάνω κατηγορίες επενδυτικών προϊόντων έγκειται στο γεγονός ότι τα άτομα έχουν διαφορετικές προτιμήσεις ως προς τον κίνδυνο. Υπάρχουν άτομα τα οποία αρέσκονται στον κίνδυνο (risk lovers) και άτομα

[1] Οι τράπεζες προσφέρουν στο επενδυτικό ένα ευρύ φάσμα από προϊόντα και υπηρεσίες, όπως τραπεζικές καταθέσεις, χρήση πιστωτικών καρτών, καταναλωτικά δάνεια, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια και πολλά άλλα προϊόντα .

τα οποία τον απεχθάνονται (risk averse). Τα άτομα τα οποία απεχθάνονται τον κίνδυνο επιλέγουν σταθερές αποδόσεις έχοντας εξασφαλισμένο το αρχικό τους κεφάλαιο και είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι οι αποδόσεις από την επένδυση κυμαίνονται εντός πολύ συγκεκριμένων ορίων. Αντίθετα, τα άτομα τα οποία αρέσκονται στον κίνδυνο έχουν τη δυνατότητα να αποκομίσουν πολλά οφέλη από μία επένδυση, εάν βέβαια προβλέψουν τις εξελίξεις της αγοράς με επιτυχία, χωρίς να απαιτείται σε αυτού του είδους τις επενδύσεις η κατοχή μεγάλων χρηματικών ποσών. Το γεγονός αυτό καθιστά τα επενδυτικά προϊόντα αυτού του τύπου πολύ ελκυστικά για το επενδυτικό κοινό και επιπλέον αποτελεί την αιτία για την οποία οι διάφοροι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί δημιουργούν ολοένα και περισσότερα προϊόντα τα οποία να ανταποκρίνονται ολοένα και περισσότερο στις ανάγκες των επενδυτών.

Τα ευέλικτα αυτά επενδυτικά προϊόντα αποκαλούνται εξωτικά προϊόντα και η μελέτη τους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Εξαιτίας του γεγονότος ότι δημιουργούνται ανάλογα με τις ανάγκες και επιθυμίες των επενδυτών, δεν είναι εύκολη η κατηγοριοποίησή τους. Παρόλα αυτά διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξωτικών προϊόντων: τα δικαιώματα εξαρτημένης πορείας, τα συσχετιζόμενα δικαιώματα, και τα λοιπά δικαιώματα.

Τα δικαιώματα εξαρτημένης πορείας είναι παράγωγα προϊόντα των οποίων η συνολική απόδοση εξαρτάται και από το μονοπάτι το οποίο θα ακολουθήσει η τιμή του υποκείμενου προϊόντος και όχι μόνο από την τελική τιμή στην οποία θα διαμορφωθεί το προϊόν. Υπάρχουν τέσσερεις κατηγορίες δημοφιλών δικαιωμάτων εξαρτημένης πορείας: τα ασιατικά δικαιώματα, τα δικαιώματα με φράγματα, τα lookback δικαιώματα και τα forward-start δικαιώματα. Στην παρούσα εργασία θα γίνει αναλυτική παρουσίαση των δικαιωμάτων αυτών και επιπλέον θα γίνει αποτίμηση με βάση το υπόδειγμα των Black & Scholes (1973). Ειδικά για τα lookback δικαιώματα θα γίνει και τιμολόγηση με την προσομοίωση Monte Carlo η οποία παρέχει ορισμένα πλεονεκτήματα που την καθιστούν ενδιαφέρουσα περίπτωση για την αξιολόγηση ενός προϊόντος και όχι μόνο[2].

Η επόμενη κατηγορία εξωτικών προϊόντων περιλαμβάνει τα συσχετιζόμενα δικαιώματα τα οποία εξαρτώνται από δύο προϊόντα των οποίων οι τιμές συσχετίζονται μεταξύ τους. Διακρίνουμε στα συσχετιζόμενα προϊόντα τα δικαιώματα χαρτοφυλακίου, τα out-performance δικαιώματα, τα δικαιώματα ανταλλαγής και τα

[2] Η προσομοίωση Monte Carlo απότελεί την πιο δυναμική μέθοδο για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου σε χαρτοφυλάκιο.

rainbow δικαιώματα τα οποία θα αναλύσουμε και θα τιμολογίσουμε στη συνέχεια βασιζόμενοι στο υπόδειγμα των Black-Scholes.

Τα δικαιώματα εξαρτημένης πορείας και τα συσχετιζόμενα δικαιώματα κατατάχθησαν με βάση ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά. Επειδή δεν είναι εύκολος ο διαχωρισμός σε μικρές ομάδες ανάλογα με ορισμένα ειδικά χαρακτηριστικά που ενδέχεται να παρουσιάζουν τα υπόλοιπα εξωτικά προϊόντα, τα τοποθετούμε σε μία κατηγορία που τιτλοφορείται ως «λοιπά εξωτικά προϊόντα» και περιελαμβάνει τα compound δικαιώματα προαίρεσης και τα δικαιώματα επιλογής για τα οποία θα αναφερθούμε αργότερα και θα προβούμε και στην αποτίμησή τους.

Αξίζει τέλος να τονισθεί πως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσας διατριβής είναι η αποτίμηση των εξωτικών προϊόντων με τη μέθοδο Monte Carlo. Συγκεκριμένα θα ακολουθήσει η αποτίμηση των lookback δικαιωμάτων αγοράς αλλά και πώλησης με αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιώντας το πακέτο Mathematica 4.0.

2. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές κατηγορίες επενδυτικών προϊόντων, με την πάροδο του χρόνου παρατηρείται αύξηση των κατηγοριών αυτών εξαιτίας των αυξανόμενων απαιτήσεων των επενδυτών και της συνεχόμενης ανάπτυξης των αγορών. Για αυτό το λόγο τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα δημιουργούν κάθε φορά νέα επενδυτικά προϊόντα τα οποία, είναι σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ανταπόκρίνονται ολοένα και περισσότερο στις εκάστοτε ανάγκες των επενδυτών, με σκοπό βέβαια να γίνονται όλο και πιο ελκυστικά προς αυτούς και να προτιμώνται έναντι εναλλακτικών τρόπων επένδυσης.

Τα επενδυτικά προϊόντα διακρίνονται σε :

2.1. Επενδυτικά Προϊόντα Εγγυημένου Κεφαλαίου και Εγγυημένης Απόδοσης

2.2. Επενδυτικά Προϊόντα Εγγυημένου Κεφαλαίου

2.3. Επενδυτικά Προϊόντα Μη Εγγυημένου Κεφαλαίου και Απόδοσης

Τα επένδυτικά προϊόντα τα οποία παρέχουν ορισμένη εγγύηση είτε ως προς την απόδοση και το κεφάλαιο, είτε μόνο ως προς το κεφάλαιο, είναι μία κατηγορία αρκετά γνωστή στο ευρύ επενδυτικό και εξαιτίας αυτού του γεγονότος η μελέτη τους δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Τα επενδυτικά προϊόντα τα οποία δεν εγγυώνται ούτε το κεφάλαιο ούτε την απόδοση παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον, γιατί είναι πιο ευέλικτα από τα συνηθισμένα και μπορούν να προσαρμοστούν ανάλογα με τις ανάγκες των επενδυτών. Παρέχουν τη δυνατότητα όχι μόνο ζημιών όπως αρκετά άτομα υποστηρίζουν αλλά και υψηλών αποδόσεων, χωρίς να είναι απαραίτητη η κατοχή μεγάλων χρηματικών ποσών, χαρακτηριστικό το οποίο δεν έχουν τα υπόλοιπα επενδυτικά προϊόντα. Επιπλέον, οι μεγάλες επιχειρήσεις δεν είναι υποχρεωμένες να δημοσιεύουν στους ισολογισμούς τους τις επενδύσεις που κάνουν σε επενδυτικά προϊόντα μη εγγυημένου κεφαλαίου και απόδοσης με αποτέλεσμα να εκπίπτουν σε φορολογικές απαλλαγές εξαιτίας του ότι δε φορολογούνται τα κέρδη από τις επενδύσεις αυτού του είδους.

Με την κατηγορία αυτή των επενδυτικών προϊόντων θα ασχοληθούμε εκτενέστερα και θα προσπαθήσουμε να τιμολογήσουμε ορισμένα από αυτά τα προϊόντα με τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo.

2.1 Επενδυτικά Προϊόντα Εγγυημένου Κεφαλαίου και Εγυημένης Απόδοσης

Τα επενδυτικά προϊόντα εγγυημένου κεφαλαίου και εγγυημένης απόδοσης είναι τίτλοι συγκεκριμένης διάρκειας με τακτική απόδοση βάσει σταθερού επιτοκίου και εγγυούνται πλήρως τόσο την προκαθορισμένη απόδοση όσο και το αρχικό κεφάλαιο το οποίο έχει επενδυθεί.

Η κατηγορία αυτή των επενδυτικών προϊόντων συνδυάζει εισόδημα σε τακτά χρονικά διαστήματα -τα τοκομερίδια τα οποία δίνονται- και επιπλέον εγγυάται την καταβολή του αρχικού κεφαλαίου στο άρτιο.

Υπάρχουν δύο κατηγορίες προϊόντων για τις οποίες γίνεται λόγος, τα προϊόντα με κουπόνι και τα ποϊόντα με έκπτωση.

2.1.1. Στα προϊόντα με κουπόνι ανήκουν:

- *Οι καταθέσεις χρηματαγοράς:*

Είναι οι καταθέσεις στη διατραπεζική αγορά οι οποίες διακρίνονται στις σταθερές καταθέσεις (fixed deposits) και τις μη σταθερές (notice/call deposits). Οι πρώτες αναφέρονται σε καταθέσεις στις οποίες τόσο το επιτόκιο όσο και η διάρκεια-λήξη είναι αυστηρά καθορισμένα. Στις δεύτερες, το επιτόκιο μπορεί να μεταβληθεί ή η λήξη να τροποποιηθεί κατόπιν προειδοποιήσεως ορισμένες ημέρες πριν. Οι διατραπεζικές καταθέσεις δεν είναι διαπραγματεύσιμες.

- *Πιστοποιητικά καταθέσεων:*

Τα πιστοποιητικά καταθέσεων δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία απόδειξη ενός ποσού στην τράπεζα για καθορισμένο χρονικό διάστημα και με καθορισμένο επιτόκιο.

- *Συμφωνίες επαναγοράς*

Οι συμφωνίες επαναγοράς χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον από τις κεντρικές τράπεζες για να ελέγχουν την προσφορά χρήματος στην οικονομία, ως μία μορφή δηλαδή χρηματοδότησης.

Μία συμφωνία επαναγοράς είναι η συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων μερών με την οποία το πρώτο μέρος συμφωνεί να πωλήσει ένα προϊόν στο άλλο μέρος, σε συγκεκριμένη τιμή και ημερομηνία, κα ταυτόχρονα το πρώτο μέρος συμφωνεί να αγοράσει πάλι το προϊόν από το δεύτερο μέρος σε μία μελλοντική ημερομηνία και σε συγκεκριμένη τιμή η οποία συμφωνείται από την αρχή.

Μία αντίστροφη συμφωνία επαναγοράς είνα μία συμφωνία αγοράς ενός προϊόντος, με την ταυτόχρονη συμφωνία επαναπώλησης του προϊόντος σε μία συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε συγκεκριμένη τιμή.

2.1.2 <u>Στα προϊόντα με έκπτωση ανήκουν :</u>

- *<u>Τα έντοκα γραμμάτια</u>*

Τα έντοκα γραμμάτια είναι βραχυπρόθεσμα χρηματοοικονομικά εργαλεία (προϊόντα, τίτλοι) που εκδίδονται από την κυβέρνηση για χρηματοδότηση του δημόσιου χρέους. Τα έντοκα γραμμάτια εκδίδονται σε μία ορισμένη ονομαστική τιμή κα διαπραγματεύονται με έκπτωση πάνω στην ονομαστική τιμή. Η έκπτωση αυτή ισοδυναμεί με κάποιο επιτόκιο που παίρνει ο επενδυτής που αγοράζει το γραμμάτιο.

2.2 Επενδυτικά Προϊόντα Εγγυημένου Κεφαλαίου

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η σύγχρονη ανταγωνιστική οικονομία χαρακτηρίζεται από αυξημένη μεταβλητότητα σε όλες σχεδόν τις αγορές της, καθώς επίσης και τα επιτόκια βρίσκονται σε πολύ χαμηλά επίπεδα, η σχέση κινδύνου-απόδοσης της επένδυσης στα προϊόντα εγγυημένου κεφαλαίου γίνεται πολύ ανταγωνιστική.

Τα προϊόντα εγγυημένου καφαλαίου αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο τοποθέτησης των χρημάτων των επενδυτών ο οποίος συνδυάζει την κάλυψη του επενδυτικού κινδύνου με το μεγαλύτερο δυνατό όφελος.

Τα προϊόντα εγγυημένου κεφαλαίου επιτρέπουν τη διεύρυνση και τη διασπορά του χαρτοφυλακίου των επενδυτών. Παράλληλα, παρέχουν τη δυνατότητα επίτευξης υψηλότερων αποδόσεων από τις παραδοσιακές καταθέσεις και κυρίως εγγυώνται το αρχικά επενδεδυμένο κεφάλαιο.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η εγγύηση του αρχικού κεφαλαίου ισχύει μόνο στην περίπτωση που η επένδυση διατηρηθεί έως τη λήξη της. Σε περίπτωση επιθυμίας πρόωρης ανάληψης του κεφαλαίου δεν επιστρέφεται αυτούσιο το αρχικό κεφάλαιο, αλλά υπάρχουν κρατήσεις.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι μετά από καθορισμένο χρονικό διάστημα μετά την αποδοχή της επένδυσης αυτής, ο ενδιαφερόμενος αποκομίζει και ορισμένες φορολογικές απαλλαγές, όπως για παράδειγμα μπορεί να εκπέσει από το φαρολογητέο εισόδημά του ένα ποσοστό επί του ποσού της επένδυσης που έχει αναλάβει.

2.3 Επενδυτικά προϊόντα μη εγγυημένου κεφαλαίου και απόδοσης

Στην κατηγορία αυτή ανήκει ο μεγαλύτερος όγκος των επενδυτικών προϊόντων. Κύριο χαρακτηριστικό, εκτός από την ποικιλία που χαρακτηρίζει τα επενδυτικά προϊόντα αυτής της κατηγορίας, είναι και οι μεγάλες αποδόσεις τις οποίες μπορεί να αποκομίσει ο επενδυτής με ταυτόχρονη βέβαια ανάληψη μεγάλων κινδύνων.

<u>Στην κατηγορία αυτή ανήκουν</u> :

2.3.1. Οι μετοχές

2.3.2. Τα παράγωγα

2.3.3 Τα σύνθετα επενδυτικά προϊόντα (ή όπως ονομάζονται, εξωτικά προϊόντα)

Για τις δύο πρώτες κατηγορίες θα αναφέρουμε συνοπτικά ορισμένα χαρακτηριστικά στο παρόν εδάφιο, γιατί σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των σύνθετων επενδυτικών προϊόντων τα οποία είναι σχετικά καινούρια στο χρηματοοικονομικό χώρο και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

2.3.1 Οι ***<u>μετοχές</u>*** είναι τίτλοι που αντιπροσωπεύουν μερίδιο ιδιοκτησίας των επιχειρήσεων και οι οποίοι, δικαιούνται μέρισμα από τα κέρδη. Τις διακρίνουμε σε κοινές και προνομιούχες.

Είναι τίτλοι στα κυριότερα νομίσματα και Διεθνή Χρηματιστήρια, χωρίς ημερομηνία λήξης, με ετήσιο εισόδημα από μερίσματα (σε ρευστά ή τίτλους), χωρίς να απαιτείται ελάχιστο ποσό επένδυσης, και επιπλέον δεν παρέχουν εγγύηση επιστροφής κεφαλαίου.

2.3.2 Τα ***<u>παράγωγα</u>*** χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι κάθε τύπος συναλλαγής η αξία της οποίας εξαρτάται από την αξία ενός άλλου προϊόντος, του ονομαζόμενου υποκείμενου προϊόντος.

Τα παράγωγα προϊόντα διακρίνονται σε :

- *Προθεσμιακά συμβόλαια.*

Είναι ιδιωτικές συμβάσεις οι οποίες πραγματοποιούνται εκτός χρηματιστηρίου και αφορούν αγορά ή πώληση συγκεκριμένης ποσότητας ενός προϊόντος σε συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε τιμή η οποία είναι προκαθορισμένη.

- *Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης.*

Είναι συμβόλαια τυποποιημένα όσον αφορά το μέγεθος και τη διάρκειά τους και είναι διαπραγματεύσιμα στα επίσημα οργανωμένα χρηματιστήρια παραγώγων προϊόντων. Το χρηματιστήριο εγγυάται να αναλάβει θέση αντισυμβαλλόμενου σε περίπτωση που ο ένας από τα δύο μέρη αθετίσει το συμβόλαιό του.Τα περισσότερα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης δεν καταλήγουν στην παράδοση αλλά κλείνονται πριν τη λήξη τους με άνοιγμα αντίθετης θέσης με την αρχική.

- Τα *swaps* ή «ανταλλαγές»

Είναι παράγωγα προϊόντα που διαπραγματεύονται στην αγορά "over the counter" (OTC)[3] μεταξύ δύο συμβαλλομένων που ενδιαφέρονται να ανταλλάξουν πληρωμές του ίδιου ποσού σε προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον. Οι δύο συμβαλλόμενοι υπογράφουν μία συμφωνία στην οποία κάθε συμβαλλόμενος συμφωνεί να κάνει στον άλλον μία σειρά από πληρωμές σε συγκεκριμένες ημερομηνίες στο μέλλον, έως την καταληκτική ημερομηνία.

Μία τυπική συμφωνία swap αφορά ανταλλαγή πληρωμών τόκου, στη βάση ενός σταθερού επιτοκίου και ενός ποσού κεφαλαίου, με πληρωμές τόκου στη βάση ενός κυμαινομένου επιτοκίου και του ίδιου ποσού.

Τα swaps διακρίνονται συνήθως στα επιτοκιακά swaps, τα οποία αφορούν ανταλλαγές σταθερών και κυμαινόμενων επιτοκίων, στα συναλλαγματικά swaps τα οποία αφορούν ανταλλαγές ποσών σε διαφορετικά νομίσματα, στα swaps αγαθών που αφορούν ανταλλαγές χρηματικών ροών σε προκαθορισμένες χρονικές περιόδους με βάση τις τιμές δύο αγαθών (έστω σιτάρι και πετρέλαιο), καθώς επίσης και στα swaps

[3]. Οι αγορές "over the counter"(OTC) δεν είναι επίσημα χρηματιστήρια, είναι αγορές που δημιουργούνται μεταξύ των χρηματιστών, οι οποίοι μεταξύ τους προβαίνουν σε συναλλαγές, με τηλεφωνικές συνήθως επαφές.

μετοχικού τύπου τα οποία περιλαμβάνουν ανταλλαγή ποσών βάσει ορισμένων επιτοκίων με χρηματικές ροές που στηρίζονται στην απόδοση κάποιου χρηματιστηριακού δείκτη.

- *Δικαιώματα*

Τα **δικαιώματα αγοράς (call options)** είναι τυποποιημένα συμβόλαια τα οποία δίδουν το δικαίωμα, αλλά όχι και την υποχρέωση να αγοράσει ο επενδυτής την υποκείμενη αξία (μετοχή, δείκτη, ισοτιμία, επιτόκιο) σε μια συγκεκριμένη τιμή (τιμή άσκησης) στο μέλλον. Αν η εξάσκηση μπορεί να γίνει πριν την εκπνοή του δικαιώματος, το δικαίωμα ονομάζεται αμερικανικό, αν όχι, ευρωπαϊκό.

Τα **δικαιώματα πώλησης (put options)** είναι αντίστοιχα συμβόλαια τα οποία παρέχουν το δικαίωμα πώλησης της υποκείμενης αξίας σε μία ορισμένη τιμή στο μέλλον.

Για να ολοκληρωθούν τα παραπάνω συμβόλαια απαιτείται η λήψη αντίθετης θέσης από αντισυμβαλλόμενους ή από το ίδιο το χρηματιστήριο δικαιωμάτων. Διακρίνουμε τις εξής θέσεις :

- Αγορά δικαιώματος αγοράς (Παίρνουμε θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς)
- Πώληση δικαιώματος αγοράς (Παίρνουμε θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς)
- Αγορά δικαιώματος πώλησης (Παίρνουμε θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα πώλησης)
- Πώληση δικαιώματος πώλησης (Παίρνουμε θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα πώλησης).

Για να αγοράσει ο ενδιαφερόμενος ένα δικαίωμα, καλείται να πληρώσει την αξία του δικαιώματος (option price, option premium). Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει την τιμή αυτή και υποχρεούται να πωλήσει ή να αγοράσει την υποκείμενη αξία όταν ο αντισυμβαλλόμενος εξασκήσει το δικαίωμά του. Προφανώς το κέρδος για τον αγοραστή ενός δικαιώματος αγοράς στη λήξη του είναι το μέγιστο μεταξύ του μηδενός και της διαφοράς της τιμής εξάσκησης από την υποκείμενη αξία.

Η αξία ενός δικαιώματος πάνω σε μία μετοχή εξαρτάται:

- Από την τρέχουσα τιμή της μετοχής
- Από την τιμή άσκησης
- Από το χρόνο έως την εκπνοή του δικαιώματος
- Από το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο
- Από την αστάθεια της τιμής της μετοχής

Η χρησιμότητα των δικαιωμάτων καλύπτει ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, κυμαίνεται από την κερδοσκοπία έως την αντιστάθμιση κινδύνων. Ο κάθε επενδυτής ή το οποιοδήποτε χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει τη δυνατότητα με κατάλληλο συνδυασμό των θέσεων που λαμβάνει όσον αφορά τα δικαιώματα να εξασφαλίζει ένα ευρύτατο φάσμα από συναρτήσεις κέρδους.

Η **συνολική απόδοση ενός δικαιώματος αγοράς (*EC*)** είναι :

$$EC = Max\ [S(\tau) - K,\ 0] \tag{1}$$

Η **συνολική απόδοση ενός δικαιώματος πώλησης (*EP*)** είναι :

$$EP = Max\ [K - S(\tau),\ 0] \tag{2}$$

όπου K ορίζεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος (exercise price), $S(\tau)$ η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος (spot price) και *max[.,.]* είναι η μαθηματική συνάρτηση η οποία δίδει το μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς.

2.3.3. Τα παράγωγα τα οποία έχουν πιο σύνθετες πληρωμές από τα παραδοσιακά ευρωπαϊκά και αμερικανικά δικαιώματα αγοράς και πώλησης ονομάζονται ***εξωτικά δικαιώματα.*** Τα περισσότερα εξωτικά δικαιώματα δε διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές, αλλά σε "over the counter"(OTC) αγορές.

Τα εξωτικά δικαιώματα έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να καλύπτουν τις ιδιαίτερες ανάγκες κάθε εταιρείας και γενικότερα κάθε επενδυτή. Παρά το γεγονός ότι τα σύνθετα επενδυτικά ποϊόντα έχουν τις ιδιαιτερότητές τους και είναι δύσκολη η κατηγοριοποίησή τους, διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξωτικών δικαιωμάτων, οι οποίες θα αναλυθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

- **Δικαιώματα εξαρτημένης πορείας (path dependent options)**
- **Συσχετιζόμενα δικαιώματα (correlation options)**
- **Λοιπά δικαιώματα (other options)**

3. ΕΞΩΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Τα σύνθετα επενδυτικά προϊόντα είναι σχετικά νέα στη χρηματοοικονομική αγορά διεθνώς και ακόμη περισσότερο στην ελληνική αγορά. Ονομάζονται εξωτικά δικαιώματα και προτιμώνται ολοένα και περισσότερο από τους επενδυτές επειδή παρέχουν αυξημένες αποδόσεις σε σχέση με άλλες εναλλακτικές επενδύσεις, όπως είναι οι επενδύσεις εγγυημένου κεφαλαίου και απόδοσης. Τα εξωτικά δικαιώματα είναι ιδιαίτερα ευέλικτα και έχουν τη δυνατότητα προσαρμογών ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες των επενδυτών. Εξαιτίας του χαρακτηριστικού αυτού, αλλά και της πολυπλοκότητας που τα διακρίνει δημιουργούνται και αναπτύσσονται με ραγδαίους ρυθμούς με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολα κατανοητός στο ευρύ κοινό και όχι μόνο, ο τρόπος με τον οποίο αποτιμώνται τα εξωτικά προϊόντα και ο τρόπος με τον οποίο αποφέρουν τις αποδόσεις που υπόσχονται στους επενδυτές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ακολουθήσει αναλυτική παρουσίαση και αποτίμηση των εξωτικών δικαιωμάτων με τη μέθοδο των Black&Scholes και επιπλέον θα γίνει και αποτίμηση με βάση την προσομοίωση Monte Carlo.

Τα εξωτικά δικαιώματα διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

3.1. Δικαιώματα εξαρτημένης πορείας

Γενικά στοιχεία

Τα δικαιώματα εξαρτημένης πορείας είνα σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν το μέσο όρο των τιμών των υποκείμενων προϊόντων. Υπάρχουν τέσσερεις σημαντικές κατηγορίες :

3.1.1. Ασιατικά ή μέσου όρου δικαιώματα (Asian or average-price options)

3.1.2. Δικαιώματα με φράγματα (Barrier options)

3.1.3. Forward-start δικαιώματα (Forward-start options)

3.1.4. Lookback δικαιώματα (Lookback options)

Τα *ασιατικά δικαιώματα* είναι δικαιώματα με πληρωμές οι οποίες καθορίζονται από ορισμένους μέσους όρους των τιμών των υποκείμενων προϊόντων, κατά τη διάρκεια μίας καθορισμένης χρονικής περιόδου πριν την ημερομηνία λήξης τους.

Χρησιμοποιούνται από εταιρείες οι οποίες αντιμετωπίζουν αναμενόμενες ταμειακές ροές ως ένα λιγότερο δαπανηρό εναλλακτικό τρόπο αντιστάθμισης των κινδύνων που καλούνται να αντιμετωπίσουν.

Παρόλο που τα ασιατικά δικαιώματα διακρίνονται σε αριθμητικά και γεωμετρικά, ανάλογα με τους μέσους όρους των τιμών, οι διαπραγματευτές χρησιμοποιούν αποκλειστικά σχεδόν αριθμητικούς μέσους για τη δημιουργία ασιατικών δικαιωμάτων.

Τα *δικαιώματα με φράγματα* είναι υποθετικά δικαιώματα τα οποία είναι βασισμένα στο εάν θα αγγίξουν ή όχι ένα προσυμφωνημένο επίπεδο κατά τη διάρκεια της ζωής τους.

Υπάρχουν δύο ειδών δικαιώματα με φράγματα, τα knock-in και τα knock-out. Στην πρώτη κατηγορία, ανήκουν τα δικαιώματα στα οποία ο κάτοχος καθορίζεται να λάβει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα εάν επιτευχθεί το προσυμφωνημένο επίπεδο ή διαφορετικά να έχει έκπτωση στη λήξη. Στη δεύτερη κατηγορία, ανήκουν τα δικαιώματα στα οποία ο κάτοχος καθορίζεται να έχει έκπτωση εάν επιτευχθεί το προσυμφωνημένο επίπεδο ή διαφορετικά να λάβει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα στη λήξη.

Ένα *lookback δικαίωμα*, είναι ένα δικαίωμα που η πληρωμή του καθορίζεται όχι μόνο από το μέσο όρο των τιμών του υποκείμενου προϊόντος αλλά και από τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές που είναι δυνατόν να λάβει το υποκείμενο προϊόν στη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.

Διακρίνουμε δύο κατηγορίες lookback δικαιωμάτων, τα lookback δικαιώματα κυμαινόμενης τιμής και τα lookback δικαιώματα σταθερής τιμής.

Τέλος, έχουμε τα *forward-start δικαιώματα* τα οποία είναι δικαιώματα τα οποία έχουν πληρωμές έως ενός ορίου και ξεκινούν σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον με τιμή άσκησης ίση με τη αρχική τιμή του υποκείμενου προϊόντος.

Θα αναλύσουμε την κάθε κατηγορία δικαιωμάτων εξαρτημένης πορείας χωριστά, αρχίζοντας από τα ασιατικά ή μέσου όρου δικαιώματα.

3.1.1. Ασιατικά ή μέσου όρου δικαιώματα (Asian or average-price options)

Τα ασιατικά δικαιώματα βασίζονται σε ορισμένους μέσους όρους τιμών υποκείμενων προϊόντων, δεικτών ή επιτοκίων και είναι από τα σημαντικότερα δικαιώματα με εξαρτημένη πορεία.

Γενικά, ένα ασιατικό δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα του οποίου η συνολική απόδοση εξαρτάται από τη μέση τιμή του υποκείμενου προϊόντος κατά τη διάρκεια μίας προκαθορισμένης περιόδου εντός της ζωής του δικαιώματος και μίας προκαθορισμένης συχνότητας παρατήρησης.

Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα ασιατικά δικαιώματα εξαρτώνται από το μέσο όρο των τιμών των υποκείμενων προϊόντων έπεται ότι είναι και λιγότερο ευαίσθητα σε πιθανές μεταβολές των τιμών τους και γενικότερα οι αποδόσεις τους χαρακτηρίζονται από λιγότερη μεταβλητότητα σε σύγκριση με τα κανονικά δικαιώματα. Το χαρακτηριστικό αυτό των ασιατικών δικαιωμάτων έχει προσελκύσει πολλούς επενδυτές και τα έχει οδηγήσει σε ραγδαία ανάπτυξη στις O.T.C. αγορές.

Τα ασιατικά δικαιώματα ονομάζονται επίσης και μέσης τιμής ή μέσου ρυθμού δικαιώματα. Ο Longstaff (1995) επισήμανε την αποτελεσματικότητα των ασιατικών δικαιωμάτων που σχετίζονται με το ρυθμό ανάπτυξης των επιτοκίων και ανέπτυξε μία κλειστού τύπου λύση βασιζόμενος στο μονέλο επιτοκιακών μεταβολών του Vasicek (1977).

Διακρίνονται σε αριθμητικά και γεωμετρικά δικαιώματα και τα χαρακτηριστικά των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων επηρεάζουν εμφανώς τις ιδιότητες των ασιατικών δικαιωμάτων. Οι αριθμητικοί μέσοι διαφέρουν σημαντικά από τους αντίστοιχους γεωμετρικούς. Η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ τους είναι ότι οι γεωμετρικοί μέσοι κατανέμονται με βάση την τυπική λογαριθμική κανονική κτανομή όταν οι τιμές των υποκείμενων προϊόντων κατανέμονται με βάση την λογαριθμική κανονική κατανομή, σε αντίθεση με τους αριθμητικούς μέσους οι οποίοι δεν κατανέμονται με βάση την τυπική λογαριθμική κατανομή ακόμη και αν οι τιμές των υποκείμενων προϊόντων κατανέμονται.

- **Γεωμετρικοί και αριθμητικοί μέσοι**

Ο αριθμητικός μέσος *(AA)*, *n* θετικών αριθμών α_1, α_2, ..., α_n ορίζεται ως

$$AA(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3}$$

όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και a_i είναι η ι παρατήρηση.

Ο πρότυπος γεωμετρικός μέσος *(GA)* n θετικών αριθμών ορίζεται ως

$$GA\ (n) = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{4}$$

όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και a_i είναι η i παρατήρηση.

Ο γεωμετρικός μέσος είναι γενικά μικρότερος από τον αντίστοιχο αριθμητικό μέσο με μόνη εξαίρεση αν όλες οι παρατηρήσεις είναι ίδιες, οπότε είναι ίσοι.

Έστω ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος $S(\tau)$ ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση του Brown[4] που δίδεται από την

$$dS = (\mu - g)\ S\ dt + \sigma\ S\ dz(t) \tag{5}$$

όπου g το ποσοστό πληρωμής του υποκείμενου προϊόντος, και $z(\tau)$ είναι η τυπική ακολουθία των Gauss-Wiener[5] και μ, σ είναι ο στιγμιαίος μέσος και η τυπική απόκλιση της τιμής ενός υποκείμενου προϊόντος, αντίστοιχα. Η στιγμιαία τυπική απόκλιση σ συνήθως ονομάζεται μεταβλητότητα του υποκείμενου προϊόντος.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρατίθεται στο Παράρτημα 1, γνωρίζουμε ότι η τιμή του προϊόντος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή T μεταξύ τρέχουσας χρονικής στιγμής t και οποιασδήποτε άλλης μελλοντικής χρονικής στιγμής t^* μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$S(T) = S\ exp[(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)\ T + \sigma\ z(T)] \tag{6}$$

[4] Πήρε το όνομά της από το βοτανολόγο R.Brown

[5] Μία τυπική διαδικασία Gauss-Wiener είναι όμοια με μία κανονική μεταβλητή με μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με τη διαφορά ανάμεσα στο μελλοντικό και στον τρέχοντα χρόνο. Συνεπώς η τυπική διαδικασία των Gauss-Wiener z(τ) κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και διακύμανση τ.

όπου $t<T<t^*$, και t και t^* αντιπροσωπεύουν τον τρέχοντα χρόνο και το χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος.

Η εξίσωση (6) περιλαμβάνει τη λύση από το αυθεντικό υπόδειγμα των Black-Scholes (1973)[6] σαν ειδική περίπτωση, όταν $g=0$. Έστω ότι οι n τιμές είναι από τη γεωμετρική κίνηση του Brown ή από την εξίσωση (6) με συχνότητα παρατήρησης h, ή

$$a_i = S[\tau-(n-i)h] = S\exp\{(r-g-\frac{1}{2}\sigma^2)[\tau-(n-i)h] + \sigma z[\tau-(n-i)h]\} \qquad (7)$$

όπου $i = 1, 2, ..., n$ και $\tau = t^* - t$ είναι ο χρόνος ως τη λήξη.

Από την εξίσωση (7) παρατηρούμε ότι η μέση περίοδος ξεκινάει με την πρώτη παρατήρηση για $T = \tau - (n-1)h$ και λήγει στην τελευταία παρατήρηση $(i=n)$ για $T = \tau$. Η μέση χρονική περίοδος είναι από $\tau - (n-1)h$, έως τ, ή $(n-1)h$.

Η τιμή ενός δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου που βασίζεται στο μέσο γεωμετρικό n τιμών του υποκείμενου πρϊόντος μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$PFGA = \max[\omega GA(n) - \omega K, 0] \qquad (8)$$

όπου K ορίζεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος, ω είναι ένας δυωνυμικός δείκτης (1 για δικαίωμα αγοράς και –1 για δικαίωμα πώλησης), και $\max[.,.]$ είναι η μαθηματική συνάρτηση η οποία δίδει το μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς.

- **Τιμολόγηση γεωμετρικών ασιατικών δικαιωμάτων**

Προκειμένου να τιμολογίσουμε το γεωμετρικό ασιατικό δικαίωμα με τιμή η οποία δίδεται από τον τύπο (8) είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την κατανομή του γεωμετρικού μέσου $GA(n)$ με δεδομένα i) το χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος τ, ii) τη συχνότητα παρατήρησης h, iii) τον αριθμό τον παρατηρήσεων n, και iv) την κατανομή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος.

Έστω $0 \le j \le n$, ο αριθμός των παρατηρήσεων που έχουμε ήδη παρατηρήσει. Όταν $j=0$, η μέση περίοδος δεν έχει αρχίσει, όταν $j=n$, το δικαίωμα έχει λήξει, όταν $1 \le j < n$, το δικαίωμα βρίσκεται εντός των ορίων της μέσης περιόδου. Γενικά, η

[6] Το υπόδειγμα των Black & Scholes παρατίθεται στο Παράρτημα 2.

αβεβαιότητα στο γεωμετρικό μέσο μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση κατανομής για το *GA(n)* είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται οι παρατηρήσεις a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ μεταξύ τους.

- **Συνεχή γεωμετρικά ασιατικά δικαιώματα**

Μελετήσαμε προηγουμένως αριθμητικούς και γεωμετρικούς μέσους σε διακριτό χρόνο. Αν υποθέσουμε υψηλές συχνότητες παρατηρήσεων προκύπτουν συνεχείς μέσοι όροι.

Πριν αρχίσουμε την ανάλυσή μας, είναι απαραίτητο να οριοθετήσουμε μία σχέση ανάμεσα στον αριθμό των παρατηρήσεων *n*, τη συχνότητα παρατηρήσεων *h*, και την μέση περίοδο *T*. Εάν γνωρίζουμε οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις παραμέτρους μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τρίτη χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ταυτότητα:

$$T_{ap} = n\,h \qquad (9)$$

το οποίο δηλώνει ότι μέση περίοδος για τα πρότυπα δικαίωματα με μία μόνο παρατήρηση είναι μηδέν.

Ο συνεχής αριθμητικός μέσος *(CAA)* της τιμής ενός υποκείμενου προϊόντος *S(τ)* μεταξύ οποιουδήποτε χρονικού διαστήματος στο μέλλον *s* και στον χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος *t** ορίζεται ως:

$$CAA(s, t^*) = \frac{1}{t^* - s}\int_s^{t^*} S(T)\,dT \qquad (10)$$

όπου *S(T)* δίδεται από τη σχέση (6).

Η ταυτότητα (9) υποδηλώνει ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων *n* προσεγγίζει το άπειρο όταν η συχνότητα παρατήρησης *h* προσεγγίζει το μηδέν στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου με δεδομένη και σταθερή τη μέση περίοδο : $T_{ap} = t^* - s$.

Ομοίως και ο συνεχής γεωμετρικός μέσος *(CGA)* της τιμής ενός υποκείμενου προϊόντος *S(τ)* ανάμεσα σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον *s* και στο χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος *t** ορίζεται ως :

$$CGA(s,\ t^*) = exp\ \{ \frac{1}{t^*-s} \int_s^{t^*} \ln[S(T)dT \} \qquad (11)$$

όπου *S(T)* δίδεται από τη σχέση (6).

Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση (11) είναι ειδική περίπτωση της σχέσης (4) όταν η συχνότητα παρατήρησης προσεγγίζει το μηδέν και ο αριθμός των παρατηρήσων προσεγγίζει το άπειρο, με δεδομένη και σταθερή τη μέση χρονική περίοδο $T_{ap} = t^* - t$. Ο ορισμός του συνεχούς γεωμετρικού μέσου δεν είναι νέος, είναι ο ίδιος γεωμετρικός μέσος όταν η συχνότητα των παρατηρήσεων γίνεται απειροστά ελάχιστη.

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο συνεχής γεωμετρικός μέσος ο οποίος δίδεται από τη σχέση (11) είναι ίσος με τον ακόλουθο εάν και εφόσος αντικαταστήσουμε τη σχέση (6) στη σχέση (11).

$$CGA(s,\ t^*) = S\ exp\ \{(r-g-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma}{t^*-s}\int^{t^*} z(T)dT \} \qquad (12)$$

όπου *z(T)* είναι η τυπική ακολουθία των Gauss-Wiener όπως και στη σχέση (6).

Τα δικαιώματα απεικονίζονται και με βάση το συνεχή γεωμετρικό μέσο δεεδομένης της σχέσης (11) και (12). Η απόδοση ενός δικαιώματος αυτού του τύπου, μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως :

$$PFCGA = max[\omega CGA - \omega K,\ 0] \qquad (13)$$

όπου *K*, *ω* και *max[.,.]* είναι ακριβώς ίδια με τα σύμβολα που έχουμε ορίσει στη σχέση (8).

Εκφράζουμε την τιμή ενός ασιατικού δικαιώματος που βασίζεται στο συνεχή γεωμετρικό μέσο με το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u> : Εάν έχουμε συνεχή μέση χρονική περίοδο και η μέση χρονική περίοδος ξεκινά από από τη στιγμή t η τιμή του συνεχούς ευρωπαϊκού γεωμετρικού μέσου δικαιώματος διδεται από:

$$C^{csa} = \omega S e^{-(r\tau+\sigma^2/6)/2} e^{-g\tau/2} N(\omega d^{csa} + \omega\sigma\sqrt{\tau/3}) - \omega K^{-\tau\tau} \mathrm{N}(\omega d^{csa}) \qquad (14)$$

όπου

$$d^{csa} = [In(\frac{S}{K}) + (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\tau}{2}]/(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}}).$$

3.1.2. <u>Δικαιώματα με φράγματα (Barrier options)</u>

Τα δικαιώματα με φράγματα είναι πιθανότατα τα παλαιότερα από όλα τα εξωτικά προϊόντα -ξεκίνησαν να διαπραγματεύονται περιστασιακά από το 1967. Ο Snyder (1969) περιέγραψε τα “down-and-out” δικαιώματα ως ειδικά διακιώματα περιορισμένου κινδύνου. Ο Donaldson, ο Lufkin και ο Jenrette ξεκίνησαν να περιγράφουν τα “down-and-out” δικαιώματα στις αρχές του 1970 και ο Hudson (1991) μίλησε για τα άνω και κάτω δικαιώματα αγοράς και πώλησης (up-and-out calls and puts). Τα δικαιώματα με φράγματα δημιουργήθηκαν προκειμένου να προστατευθούν οι εταιρείες από μεγάλους κινδύνους που καλούνταν να αναλάβουν χωρίς να απαιτούνται μεγάλα χρηματικά ποσά για να αντισταθμίσουν τους κινδύνους αυτούς.

Τα δικαιώματα με φράγματα χαρακτηρίζονται από ευκαμψία και χαμηλή χρηματική αμοιβή, γνώρισμα το οποίο τα καθιστά ιδιαίτερα ελκυστικά τόσο στους επενδυτές όσο και στους κερδοσκόπους.

Τα δικαιώματα με φράγματα χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες: στα τυπικά δικαιώματα με φράγματα, στα ασιατικά δικαιώματα με φράγματα και στα δικαιώματα με φράγματα πάνω στο μέσο όρο της τιμής του υποκείμενου προϊόντος.

❑ Τυπικά δικαιώματα με φράγματα

Τα τυπικά δικαιώματα με φράγματα διακρίνονται στα knock-in και στα knock-out δικαιώματα ή πιο απλά σε knock-ins και knock-outs. Ένα knock-in δικαίωμα με φράγμα παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα να λάβει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα εάν το φράγμα που έχει καθορισθεί προσεγγισθεί, ή να του επιστραφούν στη λήξη τα χρήματα που έδωσε αρχικά. Ένα knock-out δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα του οποίου ο κάτοχος θα λάβει στη λήξη του τα χρήματα που έδωσε να το αγοράσει εάν επιτευχθεί η τιμή του φράγματος, ή θα λάβει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα σε αντίθετη περίπτωση.

Διακρίνουμε συνολικά οκτώ κατηγορίες δικαιωμάτων με φράγματα : down-in δικαιώματα αγοράς, up-in δικαιώματα αγοράς, down-out δικαιώματα αγοράς, up-out δικαιώματα αγοράς , down-in δικαιώματα πώλησης, up-in δικαιώματα πώλησης, down-out δικαιώματα πώλησης, up-out δικαιώματα πώλησης.

Με δεδομένη την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος το φράγμα μπορεί να τοποθετηθεί είτε πάνω είτε κάτω αυτή. Εάν το φράγμα είναι κάτω (πάνω, αντίστοιχα) από την τρέχουσα τιμή, τότε το knock-in δικαίωμα ονομάζεται κάτω (αντίστοιχα, πάνω) knock-in δικαίωμα. Η συνολική απόδοση ενός κάτω knock-in δικαιώματος *(PDI)* ορίζεται ως :

$$PDI = max\{[\omega S(t^*) - \omega K, 0] | S(t) > H \text{ και } S(T) \leq H,$$
$$\text{για ορισμένα } t < T \leq t^*\} \qquad (15α)$$

ή

$$PDI = Rm(\tau) \text{ εάν } S(t) > H \text{ και } S(T) > H, \text{ για κάθε } t < T \leq t^* \qquad (15β)$$

όπου t και t^* αντιπροσωπεύουν την τρέχουσα χρονική στιγμή και το χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος αντίστοιχα, το H είναι το σταθερό φράγμα ή το knock-in όριο του δικαιώματος, το K είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος, το ω είναι ένας δυαδικός τελεστής του δικαιώματος (1 για κάθε δικαίωμα αγοράς και –1 για κάθε δικαίωμα πώλησης, το σύμβολο $A|B$ δείχνει ότι ισχύει το A με δεδομένο το B, και τέλος το $Rm(\tau)$ συμβολίζει την επιστροφή των χρημάτων που δώθηκαν για την αγορά του δικαιώματος με φράγμα στη λήξη σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου προϊόντος δεν αγγίξει το φράγμα.

Το φράγμα του δικαιώματος στη σχέση (15α) ονομάζεται κάτω δικαίωμα εξαιτίας του γεγονότος ότι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος *S(t)* είναι μεγαλύτερη από το φράγμα *H*. Παρόμοια ισχύουν και για τη συνολική πληρωμή ενός άνω knock-in *(PUI)* δικαιώματος, το οποίο ορίζεται ως :

$$PUI = max\{[\omega S(t^*) - \omega K,\ 0] | S(t) < H \text{ και } S(T) \geq H, \text{ για ορισμένα } t < T \leq t^*\} \quad (16α)$$

ή

$$PUI = Rm(\tau) \text{ εάν } S(t) < H \text{ και } S(T) < H \text{ για κάθε } t < T \leq t^* \quad (16β)$$

Εκτός από τα knock-in δικαιώματα διακρίνουμε και τα knock-out δικαιώματα Τα knock-out δικαιώματα με φράγματα είναι κάτι αντίστροφο από τα knock-in επειδή η μορφή των αποδόσεων είναι ακριβώς αντίθετη από εκείνη των knock-in δικαιωμάτων. Η συνολική απόδοση ενός κάτω knock-out δικαιώματος *(PDO)* είναι :

$$PDO = R(T) \text{ εάν } S(T) > H \text{ και } S(T) \leq H \text{ για ορισμένα } t < T \leq t^* \quad (17α)$$

ή

$$PDO = max\{[\omega S(t^*) - \omega K,\ 0] | S(t) > H \text{ και } S(T) > H, \text{ για κάθε } t < T \leq t^*\} \quad (17β)$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με τις σχέσεις (15) και (16) εκτός από τη συνάρτηση που απεικονίζει την πληρωμή χρημάτων *R(T)*. Η συνάρτηση *R(T)* είναι κυρίως μία αύξουσα συνάρτηση χρόνου η οποία ξεκινά από το μηδέν, ή *R(T)* > 0 και *R(0) = 0*.

Τα κάτω knock-out δικαιώματα ονομάζονται ορισμένες φορές και down-and-outers. Η πληρωμή χρημάτων που ορίσαμε στη σχέση (17α) καλείται και μη αναβαλλόμενη πληρωμή, επειδή αναφέρεται στο γεγονός ότι η πληρωμή επιτυγχάνεται μόλις η τιμή του υποκείμενου προϊόντος αγγίξει το φράγμα. Η πληρωμή των χρημάτων μπορεί επίσης να αναβληθεί, δηλαδή η δόση της πληρωμής μπορεί να μην πραγματοποιηθεί πριν τη λήξη του δικαιώματος. Όσον αφορά πληρωμές που δικαιούνται αναβολή, υποκαθιστούμε $R(T)$ με $Rd(\tau)$ στη σχέση (17α) και λαμβάνουμε

$$PDKO = Rd(\tau) \text{ εάν } S(t) > H \text{ και } S(T) \leq H \text{ για ορισμένα } t < T \leq t^* \qquad (18)$$

όπου $Rd(\tau)$ είναι η πληρωμή η οποία αναβάλλεται στη λήξη και το άλλο μέρος του down-outer είναι το ίδιο με τη σχέση (17β).

Η $Rd(\tau)$ είναι συνήθως μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου ως τη λήξη του δικαιώματος, *ή* $R'd(\omega) > 0$ *και* $Rd(0) = 0$. Η λεπτομερής παρουσίαση της συναρτησιακής μορφής της $Rd(\tau)$ δεν είναι απαραίτητη για την παραγωγή του τύπου αποτίμησης των δικαιωμάτων με φράγματα.

Ένα άνω knock-out δικαίωμα ονομάζεται επίσης και up-and-out δικαίωμα. Η συνολική αμοιβή ενός up knockout δικαιώματος *(PUO)* είναι :

$$PUO = R(T) \text{ εάν } S(t) < H \text{ και } S(T) \geq H \text{ για ορισμένα } t < T \leq t^* \qquad (19α)$$

ή

$$PUO = max\{[\omega S(t^*) - \omega K, 0] | S(t) < H \text{ και } S(T) < H, \text{ για κάθε } t < T \leq t^*\} \qquad (19β)$$

Ομοίως, η πληρωμή των χρημάτων ενός up-outer δικαιώματος μπορεί να μετατραπεί σε :

$$PUKO = Rd(\tau) \text{ εάν } S(t) < H \text{ και } S(T) \geq H, \text{ για ορισμένα } t < T \leq t^* \qquad (20)$$

Η συνάρτηση πληρωμής $R(T)$, μπορεί να απεικονισθεί και με τη μεταβλητή του χρόνου, ώς εξαρτημένη μεταβλητή. Ορίζουμε τη συναρτησιακή της μορφή ώς:

$$R(T) = (\xi e^{nT} - 1)R \qquad (21)$$

Η μη αρνητική παράμετρος n στη σχέση (21) μπορεί να ερμηνευτεί και ως ο ρυθμός αύξησης της πληρωμής. Όταν ο ρυθμός αύξησης n είναι μηδενικός και η παράμετρος

ζ=2, η συνάρτηση πληρωμής, που δίδεται από τη σχέση (21) μετατρέπεται σε μια σταθερά, η οποία ισούται με R. Γενικά, ο ρυθμός αύξησης $\zeta>0$, η παράμετρος $\zeta=1$, και η συνάρτηση πληρωμής, που δίδεται από την (21) είναι φανερό ότι, πληρούν τις προϋποθέσεις μιας συνάρτησης πληρωμής γενικής μορφής, καθώς $R(0)=0$ και R'(T)= $n\zeta Re^{nT}>0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι η πληρωμή ξεκινά τη χρονική στιγμή $T=0$ και αυξάνεται μονοτονικά με την πάροδο του χρόνου.

- **Αποτίμηση τυπικών δικαιωμάτων με φράγματα.**

Για ευκολία, για την αποτίμηση των τυπικών δικαιωμάτων με φράγματα, παραθέτουμε τον τύπο των Black-Scholes, δηλαδή

$$C_{bs}(S,K)=\omega Se^{-g\tau}N[\omega d_{1bs}(S,K)] \qquad (22)$$
$$-\omega Ke^{-r\tau}N[\omega d_{bs}(S,K)]$$
όπου
$$d_{bs}(S,K)=\frac{\ln(S/K)+(r-g-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=\frac{\ln(S/K)+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$
$$d_{1bs}(S,K)=d_{bs}(S,K)+\sigma\sqrt{\tau},$$

ω είναι ένας δυαδικός τελεστής (1 για το δικαίωμα αγοράς, και –1 για το δικαίωμα πώλησης), K είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος, r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ είναι η μεταβλητότητα της απόδοσης ενός υποκείμενου προϊόντος, e^x είναι η εκθετική συνάρτηση με δύναμη x, $e^{-x}=1/e^x$, $ln(x)$ είναι η φυσική λογαριθμική συνάρτηση και $N(x)$ είναι η τιμή της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής.

Knock-In δικαιώματα

Πρώτα θα προβούμε σε αποτίμηση των κάτω Knock-In δικαιωμάτων. Η εξίσωση (16) δείχνει πως υπάρχουν δύο μέρη στη συνολική απόδοση ενός down-in δικαιώματος με φράγμα. Το ένα μέρος περιλαμβάνει την απόδοση ενός αντίστοιχου δικαιώματος, εάν το φράγμα προσεγγισθεί, οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος Το άλλο μέρος περιλαμβάνει την πληρωμή χρημάτων σε περίπτωση που το φράγμα δεν προσεγγισθεί ποτέ κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.

Η αναμενόμενη απόδοση ενός down-in δικαιώματος αγοράς με φράγμα ως επί τω πλείστον περιλαμβάνει δύο μέρη, επειδή με την ολοκλήρωση ενδεχομένως χρειάζεται να χωρισθεί σε δύο μέρη, όταν η τιμή άσκησης είναι μικρότερη από το κάτω φράγμα. Για ευκολία, θα εξετάσουμε αρχικά την απλή περίπτωση όταν $K>H$.

Η αναμενόμενη συνολική απόδοση δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E[PUKI \mid S(t) < H \kappa\alpha\iota S(T) \geq H, \gamma\iota\alpha t < T \leq t^*]$$

$$= \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} \begin{Bmatrix} S\left(\frac{H}{S}\right)^2 e^{(r-g)^{\tau}} \mathrm{N}[d_{1bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)] \\ -KN[d_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right) \end{Bmatrix} \tag{23}$$

χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με περιορισμό[7] αντί της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, χωρίς περιορισμό[8].

Η αξία ενός down-in δικαιώματος αγοράς *(VDIC)* χωρίς αποπληρωμή εάν το φράγμα προσεγγισθεί και επιπλέον ισχύει K>H, επιτυγχάνεται με την προεξόφληση της αναμενόμενης συνολικής απόδοσης που δίδεται από τη σχέση (23) και βέβαια όπου επιτόκιο απόδοσης, αναφέρεται στο επιτόκιο απόδοσης χωρίς κίνδυνο.

$$VDIC = \left(\frac{Hh}{S}\right)^{2u/\sigma^2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{H^2}{S}\right) e^{-g\tau} N\left[d_{1bs}\left(\frac{H^2}{S}\right), K\right] \\ -Ke^{-r\tau} N[d_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)] \end{Bmatrix}, \tag{24}$$

$$VDIC = \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma} C_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)$$

[7] Η συνάρτηση πυκνότητας υπό περιορισμό για ένα άνω φράγμα είναι η

$\phi(x \mid Y_a \geq a) = e^{2u/\sigma^2} f(x-2a) = \left(\frac{U}{S}\right)^{2u/\sigma^2} f(x-2a)$ για x<α,

$\phi(x Y_\tau \geq \alpha) = f(x) \geq a$ και η συνάρτηση πυκνότητας υπό περιορισμό για ένα κάτω φράγμα είναι η

$\phi(x \mid Y_\tau \leq b) = e^{bu/\sigma^2} f(x-2b) = \left(\frac{L}{S}\right)^{2u/\sigma^2} f(x-2b), \gamma\iota\alpha x > b,$

$\phi(x \mid Y_\tau \geq b) = f(x), \gamma\iota\alpha x \leq b.$

[8] Η συνάρτηση πυκνότητας χωρίς περιορισμό είναι η $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(x-u\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right]$

όπου C_{bs} είναι το διευρυμένο μοντέλο των Black-Scholes, το οποίο δίδεται από τη σχέση (22).

Το υπόδειγμα τιμολόγησης, που εμφανίζεται στη σχέση (24), παρόλο που φαίνεται καινούργιο μέχρι στιγμής συναντάται σε όλα τα υποδείγματα τιμολόγησης δικαιωμάτων με φράγματα. Ως απόρροια των ανωτέρω, η λογαριθμική απόδοση του πρώτου όρου της σχέσης (24) είναι $\ln(H^2/S^2) = 2a$ και αποτελεί την πρότυπη πηγή «image source», που αντικατοπτρίζει την προέλευση των δικαιωμάτων με φράγματα και ο όρος $ln[H^2/(SK)]$ είναι προφανώς ο συμμετρικός μετασχηματισμός του όρου *ln (K/S)* επειδή

$$ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) = 2\ln\left(\frac{H}{S}\right) - \ln\left(\frac{K}{S}\right) = 2a - \ln\left(\frac{K}{S}\right)$$

Εφόσον το τυπικό υπόδειγμα των Black-Scholes για αποτίμηση δικαιωμάτων αγοράς $C_{bs}(S,K)$ ξεκινά από το S άνω του K ή από την αρχή του *ln (K/S)*, το υπόδειγμα αποτίμησης $C_{bs}(H^2/S,K)$ ξεκινά από την πρότυπη πηγή *2a* από όπου προήλθε πάνω από το συμμετρικό μετασχηματισμό της τιμής άσκησης K ή από $ln(H^2/S^2) = 2a$ άνω του $ln[H^2/(SK)] = 2a - \ln(K/S)$ Συνεπώς, το υπόδειγμα αποτίμησης, που παρουσιάζεται στη σχέση (24) μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας τύπος αποτίμησης, ο οποίος ξεκινά από την «πρότυπη πηγή» προεξοφλημένος με το συντελεστή δύναμης της «πρότυπης αυτής πηγής».

Ο τύπος (24) δίδει την αξία ενός down-in δικαιώματος αγοράς χωρίς απόπληρωμή, όταν η τιμή άσκησης είναι μεγαλύτερη από το φράγμα. Όταν τώρα, η τιμή άσκησης K είναι μικρότερη από το φράγμα $H=L$ απαιτείται η διαίρεση όλου του φάσματος ολοκλήρωσης (K, ∞) σε (K, H) και (H, ∞), επειδή οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι διαφορετικές στις δύο υποπεριοχές (K, H) και (H, ∞).

Για το εύρος (H, ∞) η αξία του down-in δικαιώματος αγοράς *(VDNUP)* ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την εξαγωγή της σχέσης (24) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που δίδεται από τη σχέση στην παραπόμπή 5 είναι η ακόλουθη:

$$VDNUP = \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} \{\left(\frac{H^2}{S}\right) e^{-g\tau} N[d_{1bs}(\frac{H^2}{S}, H)] \tag{25}$$
$$- Ke^{-r\tau} Nn[d_{bs}(\frac{H^2}{S}, H)]\}$$
$$= (\frac{H}{S})^{2u/\sigma^2} \{C_{bs}(\frac{H^2}{S}, H) + (H-K)e^{-r\tau} N[d_{bs}(H,S)]\}$$

όπου *Cbs* είναι η διευρυμένη φόρμουλα των Black-Scholes, που δίδεται από τη σχέση (22).

Ενώ για το εύρος *(K, H)* η αξία του down-in δικαιώματος αγοράς *(VDNIC)* δίδεται από τη σχέση (25α) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που δίδεται από τη σχέση στην παραπομπή 7.

$$VDIC = P_{bs}(S,K) - P_{bs}(S,H) + (H-K)e^{-r\tau} N[-d_{bs}(S,H)] \tag{25α}$$

όπου $P_{bs}(S,K)$ είναι η τιμή του δικαιώματος πώλησης που δίδεται από την (22) όταν $\omega = -1$.

Up in Barrier Call Options

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με περιορισμό για τα up-barrier δικαιώματα, επιτυγχάνουμε τη δημιουργία ενός μαθηματικού τύπου αποτίμησης των up-in δικαιωμάτων αγοράς με φράγμα *(UINC)* χωρίς απόπληρωμή. Αυτός είναι:

$$\begin{aligned} UINC = &\left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} \{P_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right) - P_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, H\right) \\ &+ (H-K)e^{-r\tau} N[-d_{bs}(H,S)]\} B_{H>K} \\ &+ C_{bs}[S, \max(H,K)] \\ &+ [\max(H,K) - K]e^{-r\tau} N\{d_{bs}[S, \max(H,K)]\}, \end{aligned} \tag{26}$$

όπου *max(H, K)* είναι η συνάρτηση που δίδει το μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς *H* και *K*, όλες οι παράμετροι και οι ενδιάμεσες συναρτήσεις είναι όμοιες με τη σχέση (25).

Down-In δικαιώματα πώλησης με φράγματα

Χρησιμοποιούμε τώρα, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με περιορισμό για τα down-barrier. Όπως και στην περίπτωση αποτίμησης των down-in δικαιωμάτων αγοράς, θα αποτιμήσουμε κι εδώ τα down-in δικαιώματα πώλησης ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση συνολικής απόδοσης ενός τυπικού δικαιώματος πώλησης που δίδεται από τη σχέση (2).

Παρόλα αυτά, δεν θα ακολουθήσουμε τα βήματα αυτά προκειμένου να εξάγουμε τον τύπο που αποτιμά τα down-in δικαιώματα. πώλησης, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε τη «συμμετρία» ανάμεσα σε ένα down-in δικαίωμα πώλησης και σε ένα up-in δικαίωμα. αγοράς. Εφόσον το ολοκλήρωμα για ένα down-in δικαίωμα πώλησης ορίζεται πάντα για το διάστημα από -∞ έως το *min (H,K)* και για ένα up-in δικαίωμα αγοράς ορίζεται πάντα για το διάστημα από *max (H,K)* έως +∞, μπορούμε να έχουμε ένα τύπο για τα down-in δικαιώματα πώλησης με φράγμα *(DINP)* χωρίς αποπληρωμή υποκαθιστώντας:

(i) τις τιμές όλων των δικαιωμάτων αγοράς με εκείνες των αντίστοιχων δικαιωμάτων πώλησης της σχέσης (26),

(ii) τη συνάρτηση *max (H,K)* της σχέσης (26) με τη συνάρτηση *min (H,K),*

(iii) τον αριθμό $B_{H>K}$ της σχέσης (26) με τον αριθμό $B_{K>H}$

(iv) την υπόθεση d_{bs} με - d_{bs} και

(v) ένα θετικό πρόσημο της σχέσης (26) με ένα αρνητικό πρόσιμο και ένα αρνητικό πρόσιμο της (26) με ένα θετικό πρόσημο

Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$DINP = \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} \{C_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, K\right) - C_{bs}(\frac{H^2}{S}, H)$$

$$-(H-K)e^{-r\tau} N[d_{bs}(H,S)]\} B_{K>H} \qquad (27)$$

$$+(P_{bs}[S, \min(H,K)] - \min(H,K) - K]e^{-r\tau}$$

$$* N\{-d_{bs}[S, \min(H,K)]\}$$

όπου P_{bs}(A, B) απεικονίζει την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης με τρέχουσα τιμή A και τιμή άσκησης B και P_{bs}(A,B) δίδεται από την σχέση (22) με $\omega=-1$ και όλες οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με τη σχέση (26).

Up-In δικαιώματα πώλησης με φράγματα

Για την αποτίμηση ενός up-in διακιώματος πώλησης με φράγμα χωρίς απόπληρωμή κάνουμε τις ίδιες 5 υποκαταστάσεις που κάναμε και παραπάνω και προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$UINP = \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma} \{P_{bs}[\frac{H}{S}, \min(H,K)] - [\min(H,K) - K]e^{-rt}$$

$$* N[-d_{bs}\left(\frac{H^2}{S}, \min(H,K)\right)]\} \tag{28}$$

$$+\{C_{bs}(S,K) - C_{bs}(S,H) - (H-K)e^{-rt}N[d_{bs}(S,H)]\}B_{K>H,}$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες όπως και στη σχέση (27).

Knock-out δικαιώματα

Τα knock-out δικαιώματα παρουσιάζουν μια αντιστοιχία με τα knock-in δικαιώματα ως προς τη συνολική απόδοση. Με άλλα λόγια, η συνολική απόδοση ενός knock-in δικαιώματος ισούται με την απόδοση που προσφέρει ένα απλό δικαίωμα αγοράς ή πώλησης μόλις προσεγγισθεί το φράγμα, που έχει καθορισθεί ή με την απόπληρωμή του δικαιώματος σε περίπτωση που το φράγμα δεν προσεγγισθεί. Ακριβώς το αντίστροφο συνεπάγεται για τα knock-out δικαιώματα, δηλαδή η συνολική τους απόδοση ισούται με την αποπληρωμή τους μόλις προσεγγισθεί το φράγμα ή με την τιμή ενός αντίστοιχου απλού δικαιώματος αν το φράγμα δεν προσεγγισθεί ποτέ.

Προκειμένου να προβούμε σε τιμολόγηση των knock-out δικαιωμάτων με φράγματα, θα ακολουθήσουμε όμοια πορεία με εκείνη των in δικαιωμάτων με φράγματα. Αρχικά, θα πρέπει να ανακαλύψουμε τις αξίες των απλών δικαιωμάτων αν τα φράγματα, τα οποία εμείς έχουμε ορίσει δεν προσεγγισθούν ποτέ, και στη συνέχεια θα προβούμε στην εύρεση των παρουσών αξιών τόσο των μη διαφορίσιμων όσο και των διαφορίσιμων αποπληρωμών που προκύπτουν από την προσέγγιση των φραγμάτων.

Αξίες των out δικαιωμάτων χωρίς αποπληρωμή

Διακρίνονται δύο μέρη από τη συνολική απόδοση ενός «down-outer» στη σχέση, που μας δίδει το γενικό σταθμισμένο μέσο (GWA)[9] και η οποία περιλαμβάνει τη μή διαφορίσιμη αποπληρωμή εάν το φράγμα προσεγγισθεί κάποια χρονική στιγμή εντός της ζωής του δικαιώματος και το άλλο μέρος αφορά την συνολική απόδοση του αντίστοιχου απλού διακιώματος εάν το φράγμα δεν προσεγγισθεί ποτέ κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με περιορισμό, για ένα κάτω φράγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός κάτω out δικαιώματος αγοράς με φράγμα χωρίς αποπληρωμή *(DOTC)* ως:

$$DOTC = C_{bs}[S, \max(H,K)] - \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} C_{bs}\left[\frac{H^2}{S}, \max(H,K)\right]$$

$$+ [\max(H,K) - K]e^{-r\tau}(N\{d_{bs}[S, \max(H,K)]\} \tag{29}$$

$$-\left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} N\left\{d_{bs}\left[\frac{H^2}{S}, \max(H,K)\right]\right\}).$$

όπου C_{bs} είναι ο εκτεταμένος τύπος των Black-Scholes, που δίδεται από τη σχέση (22) και όλες οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες όπως και στις σχέσεις (24) έως (28)

Χρησιμοποιώντας πάλι τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότατα με περιορισμό για ένα άνω φράγμα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την αξία ενός άνω out δικαιώματος αγοράς χωρίς απόπληρωμή *(UOTC)* η οποία δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$UOTC = B_{H>K}\left\{\begin{aligned}&C_{bs}(S,K) - C_{bs}(S,H) - (H,K)e^{-r\tau}N[d_{bs}(S,H)]\\ &-\left(\frac{H}{S}\right)^{2u^2/\sigma^2}[C_{bs}\left(\frac{H^2}{S},K\right) - C_{bs}\left(\frac{H^2}{S},H\right)\\ &-(H-K)e^{-r\tau}N[d_{bs}(H,S)]\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με εκείνες των σχέσεων (22) έως (28).

---

[9] $GWA(n,a) = \sum_{i=1}^{n} W(n,i)a_i$, *i=1, 2, ...,n* όπου a_i συμβολίζει την *i* παρατήρηση.

Είναι φανερό πώς η αξία ενός άνω out δικαιώματος αγοράς χωρίς καμία αποπληρωμή είναι μηδενική, όταν η τιμή άσκησης K είναι μεγαλύτερη ή ίση με το άνω φράγμα. Αυτό είναι σύμφωνο με το ότι το δικαίωμα αγοράς δεν έχει καμία απόδοση εξαιτίας του γεγονότος ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τιμές μεγαλύτερες του K είναι μηδενική πάνω από το άνω φράγμα. Μόνη περίπτωση που το άνω out δικαιώματος αγορά χωρίς αποπληρωμή έχει αξία είναι όταν η τιμή άσκησης είναι μικρότερη από το φράγμα, επειδή η αναμενόμενη συνολική απόδοση ισούται με το ολοκλήρωμα από K έως H.

Εξαιτίας της συμμετρίας, που εμφανίζεται ανάμεσα σε ένα άνω out δικαιώματος πώλησης και σε ένα κάτω out δικαιώματος αγοράς, και σε συνδυασμό με τον τύπο για την τιμολόγηση ενός κάτω out δικαιώματος αγοράς, που δίδεται από τη σχέση (29), μπορούμε να εξαγάγουμε την τιμή ενός άνω out δικαιώματος πώλησης με φράγμα χωρίς απόπληρωμή (*UOTP)* ως

$$UOTP = P_{bs}[S,\min(H,K)] - \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} P_{bs}\left[\frac{H^2}{S},\min(H,K)\right] \tag{31}$$

$$-[\min(H,K)-K]e^{-r\tau}(N\{-d_{bs}[S,\min(H,K)]\} - \left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2}$$

$$* N\{-d_{bs}\left[\frac{H^2}{S},\min(H,K\right]\})$$

όπου C_{bs} είναι η εκτεταμένη φόρμουλα των Black-Scholes, που δίδεται από τη σχέση (22) και με όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους να είναι όμοιες με εκείνες των σχέσεων (24) έως (28).

Ο τύπος για τη τιμολόγηση ενός κάτω out δικαιώματος πώλησης χωρίς αποπληρωμή *(DOTP)* όμοια με τη σχέση (30) επιτυγχάνεται με τη χρήση της συμμετρίας, ανάμεσα σε ένα κάτω out δικαιώματος πώλησης και ενός άνω out δικαιώματος αγοράς και φυσικά με τη χρησιμοποίηση του τύπου τιμολόγησης, που δίδεται από την (30). Δηλαδή,

$$DOTP = B_{K>H}\{P_{bs}(S,K) - P_{bs}(S,H) \\ +(H-K)e^{-r\tau}N[-d_{bs}(S,H)] \\ -\left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2}[P_{bs}\left(\frac{H^2}{S},K\right) - P_{bs}\left(\frac{H^2}{S},H\right) \\ +(H-K)e^{-r\tau}N[-d_{bs}(H,S)]]\} \quad (32)$$

όπου P_{bs} απεικονίζει τον τύπο τιμολόγησης ενός δικαιώματος πώλησης των Black-Scholes με τις υπόλοιπες παραμέτρους να είναι ίδιες με τη σχέση (29).

Παρούσες αξίες των αποπληρωμών των out δικαιωμάτων

Οι αποπληρωμές των δικαιωμάτων με φράγματα είναι δημοφιλείς στην αγορά επειδή έχουν τη δυνατότητα να μετριάσουν το χαρακτηριστικό «όλα -ή τίποτα» που ενέχει ο κίνδυνος των φραγμάτων.

Η αναμενόμενη μη διαφορίσιμη αποπληρωμή, μπορεί να επιτευχθεί με την ολοκλήρωση του *R(T),* που συναντάμε στη σχέση (21) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας[10]. Η παρούσα αξία ενός χρονικά εξαρτημένου μέρους της αποπληρωμής για ένα out δικαίωμα *(RBTOT)* που δίδεται από την (21) είναι:

$$RBTOT(\eta,\theta,\tau) = \mathrm{Re}\{e^{\eta T} \mid S(t) < HandS(t) \geq H, \gamma\iota\alpha t < T \leq t^*\} \\ = R\{\left(\frac{H}{S}\right)^{q_1(r-n)} N[\theta Q_1(r-n)] \\ +\left(\frac{H}{S}\right)^{q_{-1}(r-n)} N[\theta Q_{-1}(r-n)]\},$$

εάν

$$\gamma \leq r + u^2/(2\sigma^2), \quad (33a)$$

$$\psi(s) = \sqrt{u^2 + 2s\sigma^2},$$

$$Q_v(s) = \frac{In(H/S) + v\tau\psi(s)}{\sigma\sqrt{\tau}}, v = 1,-1,$$

$$q_v(s) = \frac{u + v\psi(s)}{\sigma^2}$$

και

---

[10] $h(T) = \dfrac{\theta In(S/H)}{\sigma\sqrt{2\pi T^3}}\exp\left\{-\dfrac{[In(H/S) - uT]^2}{2\sigma^2 T}\right\},$

$$RBTOT(n\vartheta,\tau) = R\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{H}{S}\right)^{q'_1(r-n)} N[\vartheta Q'_1(r-n)]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{H}{S}\right)^{q'_1(r-n)} N[\vartheta Q'_1(r-n)]\right\},$$

όπου

και $n > r + u^2/(2\sigma^2),$ (33β)

$$\psi'(s) = i\sqrt{-u^2 - 2s\sigma^2},$$

$$Q'_v(s) = \frac{\ln(H/S) + v\tau_e\psi'(s)}{\sigma\sqrt{\tau_e}}, v = 1\acute{\eta} - 1,$$

$$q'_v(s) = \frac{u + v\psi'(s)}{\sigma^2},$$

$i=\sqrt{-1}$ είναι η τυπική μονάδα ενός φανταστικού αριθμού, $Re(\alpha+\beta_i)=\alpha$ είναι η συνάρτηση που επιλέγει το πραγματικό μέρος ενός φανταστικού αριθμού $\alpha+\beta_i$ $(\alpha, \beta,$ είναι πραγματικοί αριθμοί).

Όταν ο ρυθμός αύξησης της αποπληρωμής n είναι μικρότερος από $r+u^2/(2\sigma^2)$, η παρούσα αξία μιας χρονικά, εξαρτημένης αποπληρωμής μπορεί να υπολογισθεί απευθείας χρησιμοποιώντας την κλειστού τύπου λύση, που δίδεται από την (33α). Όταν ο ρυθμός αύξησης της αποπληρωμής είναι μεγαλύτερος από $r+u^2/(2\sigma^2)$, υπάρχει άλλο ένα στάδιο, που περιλαμβάνεται επειδή ο τύπος που δίδεται από τη σχέση (33β) περιλαμβάνει φανταστικούς αριθμούς. Η παρούσα αξία της χρονικά εξαρτημένης αποπληρωμής είναι το πραγματικό μέρος του φανταστικού αριθμού, που δίδεται από την (33β). Η συνάρτηση που επιλέγει το πραγματικό μέρος ενός φανταστικού αριθμού μπορεί να ευρεθεί στα περισσότερα συστήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μπορούμε να προβούμε εύκολα στην εύρεση τετριμμένων περιπτώσεων σταθερών απόπληρωμών $R(T)=R$, ώς ειδική περίπτωση της (33α) για μηδενικό ρυθμό ανάπτυξης ίσο με το μηδέν. Αντικαθιστώντας n=0 στη σχέση (32) προκύπτει η παρούσα αξία της χρονικά ανεξάρτητης μεταβλητής της αποπληρωμής ή της σταθερής αποπληρωμής (*CRBOT*):

$$CRBOT\,(\theta)=R\left\{\left(\frac{H}{S}\right)^{q_1(r)} N[\vartheta Q_1(r)]+\left(\frac{H}{S}\right)^{q-1(r)} N[\theta Q_{-1}(r)]\right\}, \tag{34}$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με εκείνες της σχέσης (33α).

Με την παρούσα αξία της χρονικά εξαρτημένης αποπληρωμής στην (33) και της σταθερής αποπληρωμής στην (35) για ένα out δικαίωμα με φράγμα, μπορούμε να εκφράσουμε την παρούσα αξία της αποπληρωμής ενός out δικαιώματος *(RBOT)*, που δίδεται στη (21) για $\xi=1$ ως ακολούθως:

$$RBOT(n,\theta) = RBTOT(\eta,\theta) - RBTOT(0,\theta), \tag{35}$$

όπου *RBOT* αντιπροσωπεύει την παρούσα αξία της χρονικά εξαρτημένης αποπληρωμής με ρυθμό ανάπτυξης *n* που δίδεται στη (33).

Η αποπληρωμή, ορισμένες φορές, μπορεί να είναι διαφορίσιμη, δηλαδή μπορεί να πληρωθεί στη λήξη του δικαιώματος εάν το φράγμα προσεγγισθεί κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Εάν η αποπληρωμή ενός out διακιώματος είναι διαφορίσιμη στη λήξη του δικαιώματος, η παρούσα αξία της διαφορίσιμης αποπληρωμής *(DRB)* προκύπτει ως:

$$DRB = E(PUKO)$$
$$= e^{-r\tau} Rd(\tau)\left\{\begin{matrix}\left(\frac{H}{S}\right)^{2u/\sigma^2} N\left[\theta\left(\frac{a+u\tau}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \\ + N\left[\theta\left(\frac{a-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]\end{matrix}\right\}, \tag{36}$$

όπου *Rd(τ)*, είναι η αμοιβαία διαφορίσιμη αποπληρωμή, που πληρώνεται στη λήξη του δικαιώματος.

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή ενός κάτω out δικαιώματος αγοράς με φράγμα *(PDOTC)* και την τιμή ενός άνω out δικαιώματος αγοράς με φράγμα *(PUOTC)* συνοψίζοντας τις αξίες των out δικαιωμάτων με φράγμα χωρίς αποπληρωμές και τις παρούσες αξίες των αποπληρωμών. Συνεπώς έχουμε:

$$PDOTC = DOTC + RBTOT \;\; (\theta=1) \tag{37}$$

και

$$PUOTC = UOTC + RBTOT \quad (\theta=-1) \tag{38}$$

όπου DOTC συμβολίζει την αξία ενός κάτω–out δικαιώματος αγοράς χωρίς αποπληρωμή, που δίδεται από την (29), το *UOTC* συμβολίζει την αξία του άνω–out δικαιώματος αγοράς χωρίς φράγμα, που δίδεται από την (30) και το *RBTOT* είναι η αξία της αποπληρωμής που δίδεται από την (33).

Σχέση μεταξύ των τιμών ενός In δικαιώματος και του αντίστοιχου Out δικαιώματος

Ας συγκρίνουμε ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο αποτελείται από ένα in δικαίωμα και το αντίστοιχό του out δικαίωμα χωρίς αποπληρωμή. Εάν το φράγμα δεν προσεγγισθεί ποτέ, τότε το in δικαίωμα θα λήξει χωρίς καμία αξία και το out δικαίωμα θα έχει τη συνολική απόδοση του αντίστοιχου απλού δικαιώματος. Από την άλλη μεριά, εάν το φράγμα προσεγγισθεί οποιαδήποτε άλλη στιγμή κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, το in δικαίωμα θα έχει τη συνολική απόδοση του αντίστοιχου απλού δικαιώματος, ενώ το out δικαίωμα θα λήξει χωρίς αξία. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο το οποίο περιλαμβάνει ένα out δικαίωμα και το αντίστοιχό του in δικαίωμα θα έχει την ίδια συνολική απόδοση με το αντίστοιχο απλό δικαίωμα, ανεξάρτητα αν το φράγμα προσεγγισθεί ή όχι. Εφόσον το χαρτοφυλάκιο και το αντίστοιχο απλό δικαίωμα έχουν ακριβώς την ίδια συνολική απόδοση στη λήξη του δικαιώματος, η θεωρία του αρμπιτράζ εγγυάται ότι η τιμή του χαρτοφυλακίου και του απλού δικαιώματος πρέπει να είναι ίδιες. Αλγεβρικά, απεικονίζεται ως εξής:

$$PI + POT = C_{bs}(S,K) \tag{39}$$

όπου *PI* και *POT* συμβολίζουν αντίστοιχα τις τιμές ενός in δικαιώματος και του αντίστοιχου out δικαιώματος και $C_{bs}(S,K)$, είναι η τιμή των αντίστοιχων απλών δικαιωμάτων.

Εξωτικά δικαιώματα με φράγματα

Τα εξωτικά δικαιώματα με φράγματα συμβάλλουν στην επέκταση των συναρτήσεων των τυπικών δικαιωμάτων με φράγματα και επιπλέον αυξάνουν την ευκαμψία τους. Παρόλο που είναι διαφορετικά μεταξύ τους έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: είναι φθηνά στην απόκτησή τους (low premiums).

Κυμαινόμενα δικαιώματα με φράγματα

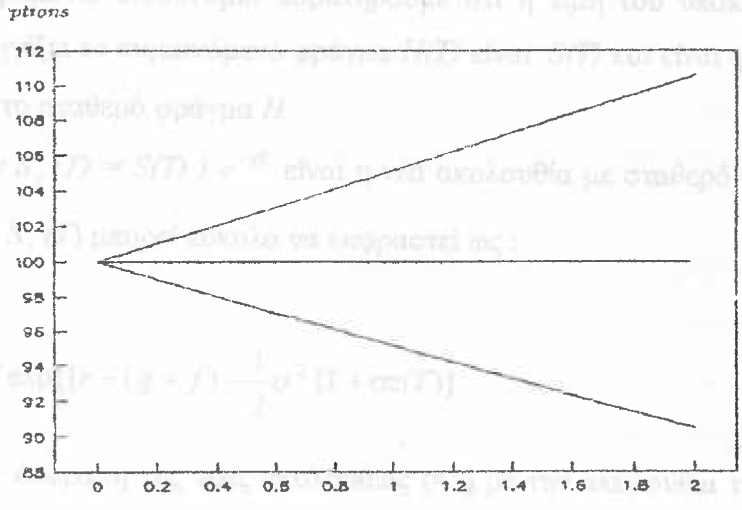
Ένα δικαίωμα με φράγμα, παρόλο που θεωρείται σταθερό κατά τη διάρκεια της ζωής του, υπάρχουν πολλές εφαρμογές οι οποίες αποδεικνύουν ότι μπορεί να μεταβληθεί με τον καιρό. Γενικά, το δικαίωμα με φράγμα μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί αντίστοιχα κατά τη διάρκεια του χρόνου είτε να ακολουθήσει κάποιο συγκεκριμένο και προβλεπόμενο μονοπάτι.

Υποθέτουμε ότι το δικαίωμα με φράγμα μεταβάλλεται εκθετικά :

$$H(T) = He^{\gamma T} \quad , \qquad H > 0 \qquad (40)$$

όπου H είναι ένας σταθερός συντελεστής του κυμαινόμενου δικαιώματος ή ένα σταθερό φράγμα, το γ είναι ο ρυθμός μεταβολής ή η κυμαινόμενη τιμή του δικαιώματος με φράγμα, και $0 < T < \tau$ είναι οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τις μεταβολές ενός κυμαινόμενου δικαιώματος με φράγμα για $\gamma \geq 0$ και $\gamma < 0$.



Παρατηρούμε ότι είναι πιο δύσκολο για την τιμή ενός υποκείμενου προϊόντος να αγγίξει ένα άνω φράγμα κυμαινομένου δικαιώματος από κάτω, αν αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου και είναι πιο δύσκολο για την τιμή ενός υποκείμενου προϊόντος να αγγίξει ένα κάτω φράγμα κυμαινομένου δικαιώματος από πάνω εάν μειώνεται με το φράγμα. Έτσι, πάνω-εσωτερικά δικαιώματα με φράγματα πρέπει να είναι φθηνότερα εάν τα φράγματά τους αυξάνονται με το χρόνο και τα κάτω-εσωτερικά δικαιώματα με φράγματα πρέπει να είναι φθηνότερα εάν τα φράγματά τους μειώνονται με το χρόνο.

Η κυμαινόμενη τιμή του φράγματος που δίδεται από τη σχέση (40) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εάν η τιμή του είναι θετική, το φράγμα αυξάνεται με το χρόνο και αντίστοιχα εάν η τιμή του είναι αρνητική, το φράγμα μειώνεται με το χρόνο. Εάν τώρα, η τιμή του είναι μηδενική, τότε εκφυλίζεται και ισούται με το σταθερό φράγμα *H*. Προκειμένου να αποτιμήσουμε τα κυμαινόμενα δικαιώματα με φράγματα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε την ακόλουθη ισοδυναμία για κάθε $0 < T < \tau$:

$$\text{Η πιθανότητα του } \{S(T) = S\, exp[(r\text{-}g\text{-}\frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{T} + \sigma z(T)] hits H(t) = He^{\gamma\mathrm{T}}\}$$
$$= \text{πιθανότητα του } [S(T)e^{-\gamma\mathrm{T}} \ hits\ H].$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία παρατηρούμε ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος αν προσεγγίζει το κυμαινόμενο φράγμα *H(T)* είναι *S(T)* και είναι η ίδια με $S(T)\, e^{-\gamma T}$ αν αγγίζει το σταθερό φράγμα *H*.

Έστω λοιπόν $S_\gamma(T) = S(T)\,)\, e^{-\gamma T}$ είναι η νέα ακολουθία με σταθερό φράγμα *H*. Η νέα ακολουθία $S_\gamma(T)$ μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως :

$$S_\gamma(T) = S(T)e^{-\gamma T} = S\exp\{[r-(g+f)-\frac{1}{2}\sigma^2]\mathrm{T} + \sigma z(T)\} \qquad (41)$$

Αν συγκρίνουμε την έκφραση της νέας ακολουθίας (41) με την ακολουθία της *S(T)* που απεικονίζεται στη σχέση (6), μπορούμε να δούμε ότι η καινούρια ακολουθία $S_\gamma(\mathrm{T})$ προκύπτει από την έκφραση της *S(T)* εύκολα αν αλλάξουμε στην (6) το ρυθμό πληρωμής από *g* σε $g_\gamma = g + f$.

- **Ασιατικά δικαιώματα με φράγματα**

Τα περισσότερα δικαιώματα με φράγματα πωλούνται απευθείας πάνω σε ένα υποκείμενο προϊόν. Η τιμή του υποκείμενου προϊόντος μπορεί να διαμορφωθεί και να επηρεάσει δραματικά την τελική απόδοση σε οποιοδήποτε χρονική στιγμή πριν τη λήξη. Συνεπώς, οι αποδόσεις των δικαιωμάτων με φράγματα μπορούν διαδοχικά να επηρεαστούν και να τροποποιηθούν. Προκειμένου να παρακαμφθεί το μέγεθος της αβεβαιότητας των αποδόσεων που δημιουργείται εξαιτίας των μεταβαλλόμενων και σε ορισμένες περιπτώσεις απροσδόκητων συνθηκών της αγοράς, πολλοί χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί διαπραγματεύονται δικαιώματα με φράγματα τα οποία βασίζονται σε μέσους όρους των τιμών του υποκείμενου προϊόντος παρά σε απλές τιμές του προϊόντος. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι, ώστε να αποφευχθεί η πιθανότητα λάθους, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των ασιατικών δικαιωμάτων τα οποία διαπραγματεύονται πάνω σε μέσους όρους τιμών ενός υποκείμενου προϊόντος. Εξαιτίας της ομοιότητάς τους με τα ασιατικά δικαιώματα ονομάζονται ασιατικά δικαιώματα με φράγματα.

Οι μέσοι όροι των ασιατικών δικαιωμάτων με φράγματα μπορούν να είναι είτε αριθμητικοί είτε γεωμετρικοί, όπως και στην περίπτωση των ασιατικών δικαιωμάτων.

Εύκαμπτα γεωμετρικά ασιατικά δικαιώματα με φράγματα

Τα εύκαμπτα γεωμετρικά ασιατικά δικαιώματα με φράγματα είναι δικαιώματα με φράγματα τα οποία διαμορφώνονται πάνω σε εύκαμπτους γεωμετρικούς μέσους των τιμών του υποκείμενου προϊόντος, παρά σε απευθείας τιμές του υποκείμενου προϊόντος.

Οι τυπικοί γεωμετρικοί μέσοι οι οποίοι δίνουν ακριβώς την ίδια βαρύτητα σε όλες τις παρατηρήσεις αποτελούν ειδική περίπτωση των εύκαμπτων γεωμετρικών μέσων. Συνεπώς, η κατηγορία των εύκαμπτων γεωμετρικών ασιατικών δικαιωμάτων με φράγματα περιελαμβάνει επίσης την κατηγορία των τυπικών γεωμετρικών ασιατικών δικαιωμάτων με φράγματα ως ειδική κατηγορία.

Ο εύκαμπτος γεωμετρικός μέσος *(FGA)* επιτυγχάνεται μέσω της επέκτασης του τυπικού γεωμετρικού μέσου ο οποίος δίδεται από τη σχέση (4) ως ακολούθως :

$$FGA(n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{w(i)} = (\alpha_1)^{w(1)} (\alpha_2)^{w(2)} \ldots\ldots (\alpha_n)^{w(n)} \tag{42}$$

όπου n είναι ο άριθμός των παρατηρήσεων, S_i είναι η ι παρατήρηση, και $w(i)$ μπορεί να είναι είτε της μορφής $W(n, i)$ είτε της μορφής $W(n,\alpha, i)$ *με* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ο πιο γενικός εύκαμπτος μέσος δίδεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$W(n, i) = \frac{q(i)}{\sum_{i=1} q(i)} \tag{43}$$

όπου $q(i)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε μη αρνητική συνάρτηση της i παρατήρησης και n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Η συνάρτηση $q(i)$ η οποία δίδεται στη (43) μπορεί να είναι μία λογαριθμική συνάρτηση, μία εκθετική ή οποιασδήποτε άλλης μορφής. Εάν επιλέξουμε $q(i) = \varepsilon^i$, όπου $|\varepsilon| <= 1$ και $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε η συνάρτηση βάρους η οποία δίδεται από τη (15) θα πάρει εκθετική μορφή. Εάν τώρα επιλέξουμε $q(i) = i^\alpha$ (αν και το α μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, το περιορίζουμε στο να είναι μη αρνητικός για ευκολία) η σχέση (43) γίνεται ως εξής :

$$W(n, a, i) = \frac{i^{\alpha}}{\sum_{i=1} i^{\alpha}}, \quad i = 1, 2, ...,n, \tag{44}$$

που είναι ακριβώς ο γενικός σταθμισμένος μέσος *(GWMA)*.

Έστω τώρα ότι ο εύκαμπτος γεωμετρικός μέσος δίδεται από τη σχέση (42) και η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ορίζεται από τη σχέση (6). Σύμφωνα με το θεώρημα το οποίο αναφέρει πως αν οι μέσοι αριθμοί ορίζονται από τη σχέση (6) τότε ο φυσικός λογάριθμος του *FGA(n)/S ή ln[FGA(n)/S]* κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή με μέσο $(r - g - \sigma^2/2)T^f_{\mu,-n-j} + lnB^f(j)$ και διακύμανση $\sigma^2 T^f_{n-j}$,

όπου

$$B^f(0) = 1,\ B^f(j) = \prod_{i=1}^{n} = \prod_{i=1}^{n} \{S[\tau - (n-i)h]/S\}^{w(i)}, \text{ για } i \le j \le n$$

$$T^f_{\mu,-n-j} = \sum_{i=j+1}^{n} w(i)[\tau - (n-i)h]$$

$$T^f_{n-j} = \sum_{i=j+1}^{n} w^2(i)[\tau - (n-i)h] + 2\sum_{i=j+1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} w(i)w(k)[\tau - (n-k)h]$$

και $B^f(j)$ είναι ο σταθμισμένος γεωμετρικός μέσος των ακαθάριστων αποδόσεων εκείνων των παρατηρήσεων οι οποίες έχουν ήδη περάσει, *τ* είναι ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος, *n* είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων που ορίζονται στο συμβόλαιο, *h* είναι η συχνότητα παρατηρήσεων ή ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο παρατηρήσεις, *j* είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων που έχουν ήδη περάσει, *w(i)* είναι το βάρος το οποίο δίδεται στην *i* παρατήρηση.

Εύκαμπτα αριθμητικά ασιατικά δικαιώματα

Οι τυπικοί αριθμητικοί μέσοι σταθμισμένοι ισάριθμα σε όλες τις παρατηρήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις των εύκαμπτων αριθμητικών μέσων. Δυστυχώς, τα εύκαμπτα αριθμητικά ασιατικά δικαιώματα με φράγματα περιλαμβάνουν τυπικά αριθμητικά ασιατικά δικαιώματα με φράγματα ως ειδικές περιπτώσεις. Όμως, τα εύκαμπτα αριθμητικά ασιατικά δικαιώματα με φράγματα δεν κατανέμονται με βάση τη λογαριθμική κατανομή, με απότέλασμα να μην μπορούν να δώσουν λύση σε περιβάλλον που επικρατεί το μοντέλο των Black-Scholes. Η μόνη λύση η οποία υπάρχει είναι να προσεγγίσουμε τις τιμές τους από τα αντίστοιχα γεωμετρικά δικαιώματα.

Έστω ότι ένας εύκαμπτος αριθμητικός μέσος ορίζεται από τη σχέση (43) και η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ορίζεται από τη σχέση (6). Σύμφωνα με θεώρημα, ο εύκαμπτος αριθμητικός μέσος *(FAA)* μπορεί να συσχετισθεί με τον αντίστοιχό του γεωμετρικό μέσο *(FGA)* ως ακολούθως :

$$FAA(\tau) \cong k^f FGA(\tau),$$
όπου (45)
$$k^f = 1 + 1/2E(u^f) + 1/4\{[E(u^f)]^2 + Var(u^f)\}$$

$$E(v^f) = v^2 h^2 Var(i/w_i) + \sigma^2 h [\sum_{i=1}^{n} iw_i(1-w_i) - 2\sum_{i=1}^{n} iw_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tag{46}$$

$$Var(i/w_i) = \sum_{i=1}^{n}(i - M^2)w_i \tag{47}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} iw_i, \; v = (r - g - \sigma^2/2) \tag{48}$$

Η σχέση (45) μπορεί να εκφραστεί με τη χρησιμοποίηση της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου προϊόντος $S(t) = S$, του ποσοστού αποτελεσματικής πληρωμής του εύκαμπτου αριθμητικού μέσου g_{faa} και της αποτελεσματικής μεταβλητότητας του εύκαμπτου αριθμητικού μέσου σ_{faa} :

$$FAA(\tau) = S\exp\left[\left(r - g_{faa} - \frac{1}{2}\sigma^2_{faa}\right)\tau + \sigma_{faa}s(\tau)\right], \tag{49}$$

$$\sigma_{faa} = \sigma_{fga}, \tag{49α}$$

$$g_{faa} = g_{fga} - (Ink^f)/\tau \tag{49β}$$

όπου $\sigma_{fga} = \sigma \sqrt{\dfrac{T^f_{n-j}}{\tau}}$ απεικονίζει την αποτελεσματική μεταβλητότητα του εύκαμπτου γεωμετρικού μέσου και

$$g_{fga} = r - \frac{1}{2\tau}\sigma^2 T^f_{n-j} - \frac{1}{\tau}[uT^f_{\mu,n-j} + lnB^f(j)]$$

Εάν συγκρίνουμε τη σχέση (49) με την (6), ανακαλύπτουμε ότι η (49) προκύπτει από την (6) αν αντικαταστήσουμε όπου g και σ με g_{faa} και σ_{fga} αντίστοιχα.

3.1.3. <u>Forward-Start δικαιώματα</u>

Τα απλά δικαιώματα γίνονται αποδοτικά αμέσως μετά την αγορά ή την πώλησή τους. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποια εξωτικά δικαιώματα, όπως τα forward-start δικαιώματα, τα οποία είναι αποδοτικά μόνο μετά από κάποιο χρονικό διάστημα μετά την αγορά ή πώλησή τους. Τα forward-start δικαιώματα είναι δικαιώματα τα οποία αρχίζουν σε κάποιο δεδομένο χρονικό διάστημα στο μέλλον με την τιμή άσκησης να ισούται με την τιμή του υποκείμενου προϊόντος τη στιγμή που ξεκινά. Τα forward-start δικαιώματα συνήθως χρησιμοποιούνται σε αγορές παραγώγων οι οποίες διαπραγματεύονται με ρυθμούς επιτοκίων, επειδή προβάλλουν ένα φθηνό τρόπο να αντισταθμίζουν τον κίνδυνο ή να συμβάλλουν στην κερδοσκοπία των επιτοκίων ή οποιονδήποτε άλλων προϊόντων τα οποία είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα σε μεταβολές των επιτοκίων. Καθώς τα standard caps (αντίθετα από τα floors) είναι strings των τυπικών calls (αντίθετα από τα puts) με προκαθορισμένες τιμές εξάσκησης αυτά τα caps και floors μπορεί να είναι ιδιαίτερα ακριβά, όταν σημειώνονται δραματικές μεταβολές στους ρυθμούς των επιτοκίων. Στις μέρες μας, οι διαχειριστές κινδύνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν περιοδικά caps, όπου ο ρυθμός άσκησης του κάθε δικαιώματος αγοράς ορίζεται ως συγκεκριμένο άνοιγμα πάνω από την προηγούμενη επιτοκιακή αναφορά.

- **Τιμολόγηση forward-start δικαιωμάτων**

Η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού τύπου forward-start δικαιώματος μπορεί να εκφραστεί ώς:

$$PFST = max\{\omega[S(\tau)-S(\tau_1)],\ 0\} \tag{50}$$

όπου $\tau_1 = t_1 - t$, είναι ο χρόνος στο μέλλον, όταν το δικαίωμα γίνεται έγκυρο $\tau=t^*-t$, είναι ο χρόνος έως τη λήξη του δικαιώματος, *max(.,.)* είναι η συνάρτηση, η οποία δίδει το μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς, και ω είναι ένας δυωνυμικός τελεστής (1 συμβολίζει ένα δικαίωμα αγοράς και –1 συμβολίζει ένα δικαίωμα πώλησης).

Είναι φανερό, ότι, το forward-start δικαιώματα είναι at-the-money τη χρονική στιγμή $t=t_1$. Αυτό αποτελεί πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό για τα forward-start δικαιώματα

Αρχικά, η τιμολόγηση των forward-start δικαιωμάτων φαίνεται δύσκολη, εξαιτίας του γεγονότος ότι η τιμή άσκησης $K=S(t_1)$ δεν είναι γνωστή στο παρόν. Η αβεβαιότητα του $K=S(t_1)$ δημιουργεί μεν ορισμένες δυσκολίες αλλά θα τις υπερκεράσουμε. Εφόσον οποιοδήποτε forward-start δικαίωμα είναι at-the-money[11] δικαίωμα τη χρονική στιγμή που οι τιμές του υποκείμενου προϊόντος παρατηρούνται, γνωρίζουμε τις αξίες τους μετά το χρόνο παρατήρησης. Έστω ότι, με το πέρασμα του χρόνου, η τιμή του υποκειμένου προϊόντος, στη χρονική στιγμή που γίνεται η παρατήρηση $S(t_1)$ είναι γνωστή, η αξία του forward-start δικαιώματος τη χρονική στιγμή της παρατήρησης μπορεί να γραφεί αντικαθιστώντας το $K=S(t_1)$ στον τύπο των Black & Scholes[12]

$$FST = \omega S(t_1)\ [e^{-g(\tau-\tau_1)} N(\omega d_{1fst}) - e^{-r(\tau-\tau_1)} N(\omega d_{fst})]$$

$$d_{fst} = \frac{\nu}{\sigma}\sqrt{\tau - \tau_1}$$

---

[11] Ένα δικαίωμα είναι at-the-money(A-T-M) όταν η τιμή άσκησης είναι ίση με την τρέχουσα τιμή της μετοχής.

[12]
$$C = Se^{-g\tau} N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$
όπου
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - g + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$$
$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - g - \sigma^2/2)\tau}{2\tau}$$

$d_{1fst} = d_{fst} + \sigma\sqrt{\tau - \tau_1}$

$v = r - g - \sigma^2/2$ (50)

ω είναι ένας δυωνυμικός τελεστής (1 για ένα δικαίωμα αγοράς και –1 για ένα δικαίωμα πώλησης), S είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος, v είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, σ είναι η μεταβλητότητα της απόδοσης του υποκειμένου προϊόντος, g είναι η ετήσια απόδοση των μερισμάτων του υποκείμενου προϊόντος και $N(\chi)$ είναι η αξία της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής.

Ο τύπος (50) είναι ο ίδιος με τον τύπο τιμολόγησης του at-the-money απλού δικαιώματος με την εξαίρεση ότι ο χρόνος έως τη λήξη είναι ο αποτελεσματικός χρόνος τ-τ_1. Παρόλο που δεν γνωρίζουμε επακριβώς την τιμή του υποκείμενου προϊόντος στο χρόνο που παρατηρούμε $S(t_1)$ γνωρίζουμε την κατανομή του από τη σχέση (6) όπου $t<T<t^*$ και t και t^* συμβολίζουν τον τρέχοντα χρόνο και το χρόνο ώς τη λήξη του δικαιώματος αντίστοιχα και $z(T)$ είναι η τυπική ακολουθία των Gauss-Wiener. Καθώς το $S(t_1)$ κατανέμεται με βάση τη λογαριθμική κατανομή με μέσο $v\tau_1$ και διακύμανση $\sigma^2\tau_1$, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη αξία του $S(t_1)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση:

$$E[S(t_1)] = Se^{(r-g)\tau_1} \quad (51)$$

όπου S είναι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (51) στην (50) προκύπτει η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος

$$E(FST) = \omega S e^{(r-g)\tau_1}[e^{-g(\tau-\tau_1)}N(\omega d_{1fst}) - e^{-r(\tau-\tau_1)}N(\omega d_{fst}) \quad (52)$$

Η θεωρία του αρμπιτράζ μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της μεθόδου ουδέτερου κινδύνου[13] προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση ενός δικαιώματος στη λήξη με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Καθώς η μέθοδος ουδέτερου κινδύνου εγγυάται ότι όλα τα προϊόντα αναμένονται να εκτιμηθούν με το ίδιο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r, έχουμε τη δυνατότητα να επιτύχουμε ένα τύπο

[13] Η μέθοδος ουδέτερου κινδύνου βασίζεται στην αρχή ότι οποιοδήποτε αξιόγραφο το οποίο εξαρτάται από άλλα αξιόγραφα τα οποία είναι διαπραγματεύσιμα μπορεί να αποτιμηθεί βασιζόμενο στην υπόθεση ότι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο.

τιμολόγησης ενός forward-start δικαιώματος προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση της (52) με τη χρήση του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Προεξοφλώντας την *E(FST)* με το συνεχές χωρίς κίνδυνο επιτόκιο *r*, καταλήγουμε στην τιμή του forward-start δικαιώματος *(FSTOPP)*, η οποία δίδεται από:

$$\text{FSTOPP} = \omega S[e^{-g\tau} N(\omega d_{1fst}) - e^{-r(\tau-\tau_1)-g\tau_1} N(\omega d_{fst})] \tag{53}$$

$$d_{fst} = \frac{v}{\sigma}\sqrt{\tau - \tau_1}$$

$$d_{1fst} = d_{fst} + \sigma\sqrt{\tau - \tau_1}$$

$$v = r - g - \sigma^2/2$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με εκείνες των σχέσεων (50) και (52).

3.1.4 Lookback δικαιώματα

Ένα lookback δικαίωμα, είναι ένα δικαίωμα του οποίου η συνολική απόδοση προσδιορίζεται τόσο από την settlement price[14] όσο και από τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος, κατά τη διάρκεια ζωής του. Τα lookback δικαιώματα είναι ιδιαίτερα ελκυστικά στους επενδυτές, επειδή, λαμβάνοντας υπόψην τους τα γεγονότα του παρελθόντος επιτρέπουν στους κατόχους τους να εκμεταλλεύονται ενδεχόμενες κινήσεις της αγοράς. Τα lookback δικαιώματα έχουν τη δυνατότητα να «παγιδεύσουν τη φαντασία των επενδυτών» ώστε να αγοράσουν δικαιώματα σε χαμηλές τιμές και να τα πωλήσουν σε υψηλές, όπως χαρακτηριστικά ισχυρίζονται οι Goldman, Sosin και Gatto (1979).

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες lookback δικαιωμάτων -κυμαινόμενης εξάσκησης lookback δικαιώματα (floating strike lookback options), σταθερής εξάσκησης lookback δικαιώματα (fixed strike), μονομερή lookback δικαιώματα (partial), αμερικάνικα lookback δικαιώματα και αρκετά άλλα. Οι Goldman, Sosin και Gatto (1979) ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν τα lookback δικαιώματα. Στη συνέχεια ο Garman (1989) επέκτεινε τη θεωρία δίδοντας περισσότερη έμφαση στα lookback δικαιώματα που αφορούσαν στο συνάλλαγμα. Οι Conze και Viswanathan (1991) ανέλυσαν τα ευρωπαϊκού τύπου, αμερικανικού τύπου και τα partial ευρωπαϊκού και

[14] Είναι ο μέσος όρος των τιμών ενός διαπραγματεύσιμου προϊόντος μέσα σε μία ακριβώς ημέρα διαπραγμάτευσής του.

αμερικανικού τύπου δικαιώματα και, επιπλέον, επέκτειναν την ανάλυση του Merton (1973) μελετώντας τα "down-and-out" δικαιώματα. Η συνολική απόδοση μιας κυμαινόμενης εξάσκησης lookback δικαιώματος αγοράς είναι η διαφορά ανάμεσα στην settlement price και στην ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος, κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, ενώ η συνολική απόδοση μιας κυμαινόμενης εξάσκησης lookback δικαιώματος πώλησης είναι η διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος, κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, και της settlement price του υποκείμενου προϊόντος. Τα lookback δικαιώματα έχουν τη δυνατότητα να αιχμαλωτίσουν τη φαντασία του επενδυτή αγοράζοντας φθηνά, πωλώντας υψηλά και ελαχιστοποιώντας τις πιθανότητες ζημιών. Παρά το γεγονός ότι μπορούν να εξασφαλίσουν σχετικά ασφαλή κέρδη, τα δικαιώματα αυτά είναι ακριβά για κάποιον επενδυτή να τα αγοράσει. Τα υψηλά αντίτιμα για την απόκτηση αυτών των δικαιωμάτων αποτελούν εμπόδιο για τους επενδυτές και με αυτόν τον τρόπο δεν χρησιμοποιούνται ευρέως.

Ένα σταθερής εξάσκησης lookback δικαίωμα είναι παρόμοιο με τα απλά δικαιώματα, στα οποία η υποκείμενη τιμή στη λήξη αντικαθίσταται με το μέγιστο ή το ελάχιστο της τιμής του υποκειμένου προϊόντος, κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Η συνολική απόδοση ενός σταθερής εξάσκησης lookback δικαιώματος αγοράς (αντίστοιχα πώλησης) είναι η διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος και της σταθερής τιμής άσκησης (αντίστοιχα η διαφορά ανάμεσα στη σταθερή τιμή άσκησης και την ελάχιστη τιμή).

Προκειμένου να υπερκεράσουμε τον περιορισμό εξαιτίας των υψηλών αντιτίμων για την απόκτηση ενός τυπικού lookback δικαιώματος έχουμε την εμφάνιση των «μονομερών» (partial) lookback δικαιωμάτων. Τα partial lookback δικαιώματα είναι παρεμφερή με τα τυπικά lookback δικαιώματα, με τη διαφορά ότι μόνο η πλειοψηφία των lookback δικαιωμάτων είναι ευρωπαϊκού τύπου και κυρίως ανήκουν στις δύο προηγούμενες κατηγορίες που αναφέραμε. Παρόλα αυτά υπάρχει και ένας μικρός αριθμός lookback δικαιωμάτων τα οποία μπορεί να είναι αμερικάνικου τύπου ή να έχουν τη δυνατότητα άσκησης πρίν τη λήξη τους.

- **Κατανομές των ακραίων τιμών**

Εφόσον όλα τα είδη των lookback δικαιωμάτων εξαρτώνται από τις μέγιστες ή τις ελάχιστες αξίες των τιμών των υποκείμενων προϊόντων, χρειάζεται να ορίσουμε δύο μεταβλητές οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά στα στοχαστικά μαθηματικά.

$$M_t^{t^*} = \max\{S(s) \mid s \in [t, t^*]\}$$
$$\text{και} \qquad (54)$$
$$m_t^{t^*} = \min\{S(s) \mid s \in [t, t^*]\}$$

όπου $x \in X$ συμβολίζει ότι το x ανήκει στο X, $[t, t^*]$ συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών αρχίζοντας από το t και τελειώνοντας στο t* συμπεριλαμβανομένων και των ακραίων τιμών t και t*, ενώ το max και το min αντιπροσωπεύουν τις συναρτήσεις που δίδουν το μέγιστο και το ελάχιστο ενός συνόλου αριθμών αντίστοιχα.

Οι δύο μεταβλητές που δίδονται από την (54) είναι το μέγιστο και το ελάχιστο όλων των τιμών των υποκείμενων προϊόντων εντός της ζωής του δικαιώματος.

Τα γραφήματα 12.1 και 12.2. που απεικονίζονται παρακάτω απεικονίζουν πώς οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές μεταβάλλονται με το χρόνο.

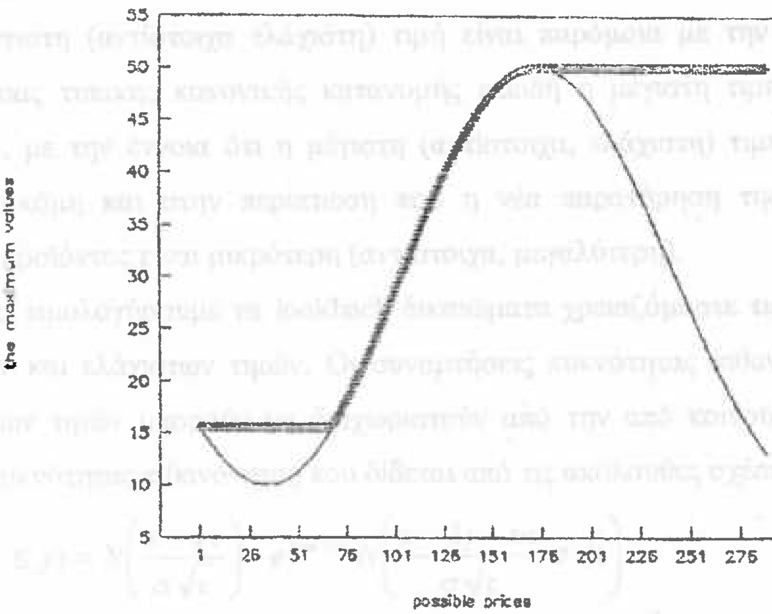


Fig. 12.1. Distribution of maximum prices.

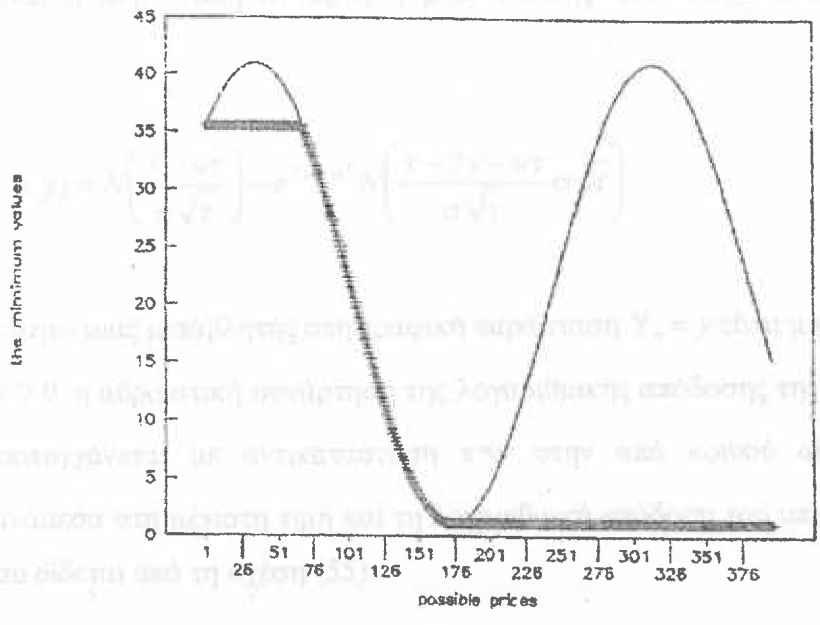


Fig. 12.2. Distribution of minimum prices.

Η μέγιστη (αντίστοιχα ελάχιστη) τιμή είναι παρόμοια με την αθροιστική συνάρτηση μιας τυπικής κανονικής κατανομής επειδή η μέγιστη τιμή είναι κάτι «αθροιστικό», με την έννοια ότι η μέγιστη (αντίστοιχα, ελάχιστη) τιμή παραμένει αμετάβλητη ακόμη και στην περίπτωση που η νέα παρατήρηση της τιμής του υποκειμένου προϊόντος είναι μικρότερη (αντίστοιχα, μεγαλύτερη).

Για να τιμολογήσουμε τα lookback δικαιώματα χρειαζόμαστε τις κατανομές των μέγιστων και ελάχιστων τιμών. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των ακραίων αυτών τιμών μπορούν να διαχωριστούν από την από κοινού αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις για $y \geq 0$

$$F(X_\tau \leq x, Y_\tau \leq y) = N\left(\frac{x-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2yu/\sigma^2} N\left(\frac{x-2y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{t}\right) \tag{55}$$

όπου N(.) είναι η αθροιστική συνάρτηση μιας τυπικής κανονικής κατανομής ή ισοδύναμα

$$F(X_\tau \leq x, Y_\tau < y) = N\left(\frac{x-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2yu/\sigma^2} N\left(\frac{x-2y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{t}\right) \tag{56}$$

γιατί η πιθανότητα μιας μεταβλητής στη γραφική παράσταση $Y_\tau = y$ είναι μηδενική.

Για $y \geq 0$ η αθροιστική συνάρτηση της λογαριθμικής απόδοσης της μέγιστης τιμής Y_τ επιτυγχάνεται με αντικαταστάση $x=y$ στην από κοινού αθροιστική συνάρτηση ανάμεσα στη μέγιστη τιμή και τη λογαριθμική απόδοση του υποκείμενου προϊόντος που δίδεται από τη σχέση (55).

$$P(Y_\tau \leq y) = N\left(\frac{x-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2yu/\sigma^2} N\left(\frac{x-2y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{t}\right) \tag{57}$$

Ομοίως, η αθροιστική συνάρτηση της λογαριθμικής απόδοσης της ελάχιστης τιμής y_τ επιτυγχάνεται με αντικατάσταση $x=y$ στην από κοινού αθροιστική συνάρτηση ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή και τη λογαριθμική απόδοση του υποκείμενου προϊόντος, που δίδεται από τη σχέση:

$$F(X_\tau \geq x, y_\tau \geq y) = N\left(\frac{-x+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2yu/\sigma^2} N\left(\frac{-x+2y+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{t}\right) \tag{58}$$

για $y \geq 0$ και

$$P(y_\tau \geq y) = N\left(\frac{-y+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2yu/\sigma^2} N\left(\frac{y+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{\tau}\right) \tag{59}$$

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής προκύπτουν με τη λήψη παραγώγων πρώτης τάξης για τις σχέσεις (57) και (59) ως προς y αντίστοιχα:

$$g_{\max}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} f\left(\frac{y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2u}{\sigma^2} e^{2yu/\sigma^2} N\left(-\frac{y+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \tag{60}$$

$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{2yu/\sigma^2} f\left(\frac{y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

για

$y \geq 0$

και

$$g_{\max}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} f\left(\frac{y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \frac{2u}{\sigma^2} e^{2yu/\sigma^2} N\left(-\frac{y+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \tag{61}$$

$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{2yu/\sigma^2} f\left(\frac{y-u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

Με αυτές τις συναρτήσεις πυκνότητας, θα αποτιμήσουμε τα lookback δικαιώματα στη συνέχεια.

- **Κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιωμάτων**

Η αποτίμηση μιας κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος εξαρτάται από το αν το δικαίωμα είναι αγοράς ή πώλησης σύμφωνα με τους Goldman, Sosin και Gatto (1979). Ένα δικαίωμα πώλησης στο μέγιστο *Pmax* και ένα δικαίωμα αγοράς στο ελάχιστο *Cmin* μπορεί άριστα να αντισταθμιστεί και να λάβει μια κλειστή μορφή έκφρασης (closed form solution) αποτίμησης, χωρίς να ληφθεί υπόψη η συνολική απόδοση του υποκείμενου προϊόντος.

Υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος κατανέμεται όπως και στο εκτεταμένο υπόδειγμα των Black & Scholes με ποσοστό πληρωμής του υποκείμενου προϊόντος g, που δίδεται από τη σχέση (5). Η λύση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $S(t)=S$ δίδεται από τη σχέση (6). Όπως υποδηλώνει και το όνομά τους, τα κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματα είναι δικαώματα με κυμαινόμενες τιμές άσκησης. Η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στο ελάχιστο *(PCmin)* της τιμής του υποκειμένου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος μπορεί επίσημα να εκφραστεί ώς:

$$PC_{\min} = \max[S(t^*) - m_t^{t^*}, 0] = S(t^*) - m_t^{t^*} \quad (62)$$

όπου t και t* είναι ο τρέχων χρόνος και ο χρόνος ώς τη λήξη του δικαιώματος αντίστοιχα, και $m_t^{t^*}$ συμβολίζει την ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από την περίοδο *t* έως το *t** (και το *t* και το *t** περιλαμβάνονται στο διάστημα) που δίδεται από την (54).

Ομοίως, η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στο μέγιστο *(PPmax)* της τιμής ενός υποκείμενου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος μπορεί επίσημα να εκφραστεί ως:

$$PP_{\max} = \max[M_t^{t^*} - S(t^*), 0] = S(t^*) - M_t^{t^*} \quad (63)$$

όπου $M_t^{t^*}$ συμβολίζει τη μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από *t* έως *t** που δίδεται από τη σχέση (54).

Στις σχέσεις συνολικής απόδοσης (62) και (63) η ελάχιστη τιμή $m_t^{t^*}$ και η μέγιστη τιμή $M_t^{t^*}$ είναι στις ίδιες ακριβώς θέσεις όπως οι τιμές άσκησης στη συνολική απόδοση ενός τυπικού ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, που δίδεται από την (1) και εκείνο του τυπικού ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, που δίδεται από τη (2) αντίστοιχα. Αυτός είναι και ο λόγος που τα ευρωπαϊκού τύπου lookback δικαιώματα, που περιγράφονται στις σχέσεις (62) και (63), ονομάζονται κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματα επειδή αυτές οι ακραίες τιμές $M_t^{t^*}$, $m_t^{t^*}$ δεν είναι σταθερές όπως οι τιμές άσκησης στις σχέσεις (1) και (2). Οι συνολικές αποδόσεις των κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιωμάτων, που δίδονται από τις (62) και (63) είναι οι μεγαλύτερες συνολικές αποδόσεις ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης, που βασίζονται σε ιστορικά στοιχεία εντός της ζωής των δικαιωμάτων.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει το υποκείμενο προϊόν εντός της διάρκειας ζωής του δικαιώματος, που δίδεται από την (61), επιτυγχάνουμε την εύρεση της τιμής ενός ευρωπαϊκού κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος αγοράς $C_{\min}$ για $r \neq g$ [15]

$$C_{\min} = e^{-r\tau} E[S(t^*) - m_t^{t^*}] = e^{-r\tau}\{E[S(t^*) - E(m_t^{t^*})\}$$

$$= C_{bs}(S, m_{\tau_1}^0) + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)}\left\{-e^{g\tau}N\left[-d_{bs1}(S, m_{\tau_1}^0)\right] + e^{-r\tau}\left(\frac{S}{m_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[d_{bs}(m_{\tau_1}^0, S]\right\} \quad (64)$$

όπου $C_{bs}(S, m_{\tau_1}^0)$ είναι η εκτεταμένης μορφής απεικόνιση της τιμολόγησης ενός δικαιώματος αγοράς (ω=1) στην (22) με τιμή άσκησης $K = m_{\tau_1}^0$, και $m_{\tau_1}^0$ είναι η τρέχουσα ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος ή η ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από τον αρχικό χρόνο του δικαιώματος τ_1 έως το παρόν.

Ο τύπος (64) περιλαμβάνει ένα παράγοντα, ο οποίος είναι νέος μέχρι την παρούσα ανάλυσή μας: η τρέχουσα ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από το χρόνο τ_1 ως το παρόν. Η τρέχουσα ελάχιστη τιμή εξαρτάται από το πόσο μεγάλο είναι το χρονικό διάστημα που το δικαίωμα είναι έγκυρο. Εάν $\tau_1 = 0$, η τρέχουσα ελάχιστη τιμή ισούται με την τρέχουσα τιμή *S*. Όσο πιο μακριά είμαστε στο παρελθόν, τόσο μικρότερη είναι η αξία της τρέχουσας ελάχιστης τιμής. Ο τύπος (64) αναφέρει πως η τιμή ενός ευρωπαϊκού κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος αγοράς Cmin είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την αντίστοιχη τιμή ενός απλού δικαιώματος αγοράς.

Ας εξετάσουμε τώρα την ειδική περίπτωση $r=g=0$. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζονται κυρίως εφαρμογές οι οποίες έχουν σχέση με παράγωγα σταθερού εισοδήματος και με βάση τη σχέση (64) δημιουργούμε τον τύπο:

---

[15] Υπάρχουν δύο όροι στη σχέση των προσδοκιών που αποδίδουν στην ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος επειδή $E(m_t^{t^*}) = E[\min(m_\tau^o, m_0^\tau)] = m_\tau^o \Pr ob(m_t^{t^*} \geq m_\tau^o) + E(m_t^{t^*} \mid m_t^{t^*} < m_\tau^o)$

$$Cmin(r{=}g) = C_{bs}(S, m^0_{\tau 1}) + \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S e^{-r\tau} f[d_{bs1}(S, m^0_{\tau 1})], \tag{65}$$

όπου *f(.)* είναι η συνάρτηση πυκνότητας για μία τυπική κανονική κατανομή με τις υπόλοιπες παραμέτρους να είναι ίδιες με εκείνες της (64).

Ακριβώς την ίδια διαδικασία ακολουθούμε για να εξετάσουμε την τιμή ενός ευρωπαϊκού κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος πώλησης *Pmax*, χρησιμοποιώντας τώρα τη συνάρτηση πυκνότητας για το μέγιστο που δίδεται από την (60). Δηλαδή,

$$\begin{aligned} P\max &= e^{-r\tau} E[M_t^{t^*} - S(t^*)] = e^{-r\tau} E(M_t^{t^*}) - E[S(t^*)] \\ &= P_{bs}(S, M^0_{\tau_1}) + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)} \begin{Bmatrix} e^{-r\tau} N[d_{bs_1}(S, M^0_{\tau_1})] \\ - e^{-r\tau} \left(\frac{S}{M^0_{\tau_1}}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs}(M^0_{\tau_1}, S)] \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

όπου $P_{bs}(S, M^0_{\tau 1})$ είναι ο τύπος αποτίμησης εκτεταμένης μορφής των Black&Scholes για ένα δικαίωμα πώλησης *(ω= -1)* στην (22) με τιμή άσκησης $K = M^0_{\tau_1}$ *και* $M^0_{\tau_1}$ είναι η τρέχουσα μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το υποκείμενο προϊόν ή η μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από τη χρονική στιγμή τ_1 έως σήμερα.

Ο τύπος (66) ισχύει για $r \neq g$. Όταν *r=g,* δεν μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε απευθείας. Μπορούμε να εισάγουμε τον ακόλουθο αντίστοιχο τύπο αποτίμησης για *r=g* χρησιμοποιώντας την (66) :

$$Pmax{=}(r{=}g){=}P(S, m^0_{\tau_1}) + \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S e^{-r\tau} f[d_{bs_1}(S, m^0_{\tau_1})], \tag{67}$$

όπου *f(.)* είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

- **Σταθερής άσκησης lookback δικαιώματα**

Τα σταθερής άσκησης lookback δικαιώματα είναι δικαιώματα με τιμές άσκησης σταθερές και στη λήξη οι τιμές του υποκείμενου προϊόντος αντικαθιστώνται με τις μέγιστες ή ελάχιστες τιμές του. Πιο συγκεκριμένα, η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού lookback δικαιώματος αγοράς με σταθερή τιμή άσκησης *K* *(PLCK)* δίδεται από :

$$PLCK = Max(M_t^{t^*} - K,\ 0) \tag{68}$$

όπου $M_t^{t^*}$ είναι η μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από *t* έως t* και δίδεται από τη σχέση (54).

Επίσης, η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού lookback δικαιώματος πώλησης με σταθερή τιμή άσκησης *K* *(PLPK)* δίδεται από :

$$PLPK = Max(K - m_t^{t^*},\ 0) \tag{69}$$

όπου $m_t^{t^*}$ συμβολίζει την ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος από *t* έως *t**.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας για τη μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος που δίδεται από την (60), μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός ευρωπαϊκού lookback δικαιώματος αγοράς σταθερής άσκησης *(LCK)* για $r \neq g$ από τη σχέση :

$$\begin{aligned} LCK &= e^{-r\tau} E[\max(M_t^{t^*} - K, 0)] \\ &= C_{bs}(S,K) + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)}\{e^{-g\tau} N[d_{bs_1}(S,K)] \\ &- e^{-r\tau}\left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs}(K,S)]\} \end{aligned} \tag{70}$$

στην περίπτωση που $K \geq M_{\tau_1}^0$ όπου $C_{bs}(S,\ K)$ είναι η εκτεταμένης μορφής απεικόνιση της αποτίμησης των Black&Scholes για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς $(\omega = 1)$ που δίδεται από την (22) με τρέχουσα τιμή *S* και τιμή άσκησης *K*, και

$$LCK = e^{-r\tau} E[\max(M_t^{t^*} - K, 0)]$$
$$= e^{-r\tau}(M_{\tau_1}^0 - K) + C_{bs}(S, M_{\tau_1}^0 + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)}\{e^{-g\tau} N[d_{bs_1}(S, M_\tau^0)] \quad (71)$$
$$- e^{-r\tau}\left(\frac{S}{M_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs}(M_{\tau_1}^0, S)]\}$$

Οι τύποι (70) και (71) ισχύουν για $r \neq g$. Για r=g ο τύπος είναι ο ακόλουθος :

$$LCK(r{=}g) = C_{bs}(S,K) + \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S e^{-r\tau} f[d_{bs_1}(S,K)] \quad (72)$$

Σε περίπτωση που $K \geq m_{\tau_1}^0$, και

$$LCK(r{=}g) = e^{-r\tau}(m_{\tau_1}^0, -K) + C_{bs}(S, m_{\tau_1}^0) + \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S e^{-r\tau} f[d_{bs_1}(S, m_{\tau_1}^0)] \quad (73)$$

για $K < m_{\tau_1}^0$.

Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός ευρωπαϊκού σταθερής άσκησης lookback δικαιώματος πώλησης (LPK) :

$$LPK = e^{-r\tau} E[\max(K - m_t^{t^*}, 0)]$$
$$= P_{bs}(S,K) + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)}\{-e^{-g\tau} N[-d_{bs_1}(S,K)] \quad (74)$$
$$+ e^{-r\tau}\left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[d_{bs}(K,S)]\},$$

για $K < m_{\tau_1}^0$, όπου $P_{bs}(K)$ είναι ο εκτεταμένης μορφής τύπος των Black&Scholes για την αποτίμηση ενός δικαιώματος πώλησης $(\omega = -1)$ που δίδεται από την (22) με τιμή άσκησης K και

$$LPK = e^{-r\tau} E[\max(K - m_t^{t^*}, 0)]$$
$$= e^{-r\tau}(K - m_{\tau_1}^0) + P_{bs}(S, m_{\tau_1}^0) + \frac{S\sigma^2}{2(r-g)}\{-e^{-g\tau} N[-d_{bs_1}(S, m_{\tau_1}^0)] \quad (75)$$
$$+ e^{-r\tau}\left(\frac{S}{m_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[d_{bs}(m_{\tau_1}^0, S)]\},$$

για $K > m_{\tau_1}^0$.

- **«Μερικά» (partial) lookback δικαιώματα**

Τα partial lookback δικαιώματα σχεδιάστηκαν με σκοπό να μειώσουν τα υψηλά αντίτιμα των τυπικών lookback δικαιωμάτων. Είναι όμοια με τα απλά lookback δικαιώματα και παραμένουν φθηνότερα από αυτά. Διακρίνουμε κι εδώ δύο κατηγορίες δικαιωμάτων: τα partial κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματα και τα partial σταθερής άσκησης lookback δικαιώματα.

Όπως και στην περίπτωση της συνολικής απόδοσης ενός ευρωπαϊκού κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαώματος αγοράς που απεικονίζεται από τη σχέση (62), έτσι και η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού partial κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος αγοράς *(PPCmin)* είναι:

$$PPCmin = max\ [S(t^*) - \lambda m_t^{t^*}, 0] \quad (76)$$

Παρόμοια έχουμε και την τιμή ενός partial κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος πώλησης *PPPmax*:

$$PPP\max = e^{-r\tau} \mathrm{E}[\lambda \mathrm{M}_t^{t^*} - S(t^*)]$$
$$= P_{bs}(S, \lambda \mathrm{M}_{\tau_1}^0) + \frac{\lambda S\sigma^2}{2(r-g)}\{e^{-g\tau}(\lambda)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} \mathrm{N}[d_{bs_1}(\lambda S, M_{\tau_1}^0)] \quad (77)$$
$$- e^{-r\tau}\left(\frac{S}{M_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} \mathrm{N}[-d_{bs}(M_{\tau_1}^0, \lambda S)]\}$$

όπου $0<\lambda \le 1$ είναι μία σταθερά που αντιπροσωπεύει το βαθμό μεροληψίας. Είναι φανερό, πως αν η σταθερή παράμετρος μεροληψίας είναι ίση με τη μονάδα (λ=1), οι συνολικές αποδόσεις των (76) και (77) είναι ακριβώς οι ίδιες με τις συνολικές αποδόσεις των τυπικών κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιωμάτων που δίδονται στις (62) και (63) αντίστοιχα. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου μεροληψίας λ στην (76), τόσο μικρότερες είναι οι συνολικές αποδόσεις ενός partial lookback δικαιώματος αγοράς, και τόσο πιο μικρές οι αναμενόμενες συνολικές αποδόσεις. Επιπλέον, όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου μεροληψίας λ στην (77), τόσο μεγαλύτερες είναι οι συνολικές αποδόσεις ενός partial lookback δικαιώματος πώλησης, και τόσο πιο μεγάλες οι αναμενόμενες αποδόσεις. Συνεπώς όσο μικρότερη (μεγαλύτερη) η παράμετρος μεροληψίας λ, συνεπάγεται και υψηλότερη (χαμηλότερη) τιμή για τα partial lookback δικαιώματα.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας για την ελάχιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος, που δίδεται από τη συνάρτηση πυκνότητας χωρίς περιορισμό, καταλήγουμε στην τιμή ενός partial lookback δικαιώματος αγοράς κυμαινόμενης άσκησης *PCmin* για $r \neq g$:

$$PC_{\min} = e^{-r\tau} E[S(t^*) - \lambda m_t^{t^*}]$$

$$= C_{bs}(S, \lambda m_{\tau_1}^0) + \frac{\lambda S \sigma^2}{2(r-g)} \left\{ \begin{array}{l} -e^{-g\tau}(\lambda)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs1}(\lambda S, m_{\tau_1}^0)] \\ +e^{-r\tau}\left(\dfrac{S}{m_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs}(,m_{\tau_1}^0, \lambda S)] \end{array} \right\} \tag{78}$$

Αν αντικαταστήσουμε όπου λ=1 στη σχέση (78) βλέπουμε ότι ο τύπος για την αποτίμηση ενός partial lookback δικαιώματος αγοράς κυμαινόμενης άσκησης είναι ο ίδιος με εκείνος της αποτίμησης ενός τυπικού κυμαινόμενου lookback δικαιώματος αγοράς που δίδεται από την (64).

Όμοια έχουμε και την τιμή ενός partial κυμαινόμενης άσκησης lookback δικαιώματος πώλησης *PPmax*:

$$PC\max = e^{-r\tau} E[\lambda M_t^{t^*} - S(t^*)]$$

$$= P_{bs}(S, \lambda M_{\tau_1}^0) + \frac{\lambda S \sigma^2}{2(r-g)} \left\{ \begin{array}{l} e^{-g\tau}(\lambda)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[d_{bs1}(\lambda S, M_{\tau 1}^0)] \\ -e^{-r\tau}\left(\dfrac{S}{M_{\tau_1}^0}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N[-d_{bs}(,M_{\tau_1}^0, \lambda S)] \end{array} \right\} \tag{79}$$

Έως τώρα είδαμε τους τύπους τιμολόγησης των «partial lookback» δικαιωμάτων με κυμαινόμενη τιμή άσκησης. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν και για τα «partial lookback» δικαιώματα με σταθερή τιμή άσκησης lookback δικαιώματος αγοράς που δίδονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$PLCK=max\ (\lambda M_t^{t^*}-K,0) \tag{80}$$

όπου $0<\lambda=<1$, είναι μία σταθερά που αντιπροσωπεύει το βαθμό μεροληψίας.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας για τη μέγιστη τιμή του υποκείμενου προϊόντος εντός της ζωής του δικαιώματος που δίδεται από τη σχέση (60), έχουμε τη δυνατότητα να λάβουμε την τιμή ενός ευρωπαϊκού "partial lookback" δικαιώματος αγοράς με σταθερή τιμή άσκησης *(PLCK)* για $r\neq g$:

$$\begin{aligned}
PLCK &= e^{-r\tau}\mathrm{E}[\max(\lambda M_t^{t^*}-K,0)]\\
&=\lambda e^{-r\tau}\mathrm{E}[\max(M_t^{t^*}-K/\lambda,0)]\\
&=\lambda C_{bs}(S,K/\lambda)+\frac{\lambda S\sigma^2}{2(r-g)}\Big\{e^{-g\tau}\mathrm{N}[d_{bs1}(S,K/\lambda)]\\
&-e^{-r\tau}\left(\frac{\lambda S}{\mathrm{K}}\right)^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}}\mathrm{N}[-d_{bs}(K/\lambda,S)]\Big\}
\end{aligned} \tag{81}$$

στην περίπτωση που $K>=\lambda M_{\tau 1}^0$ όπου $C_{bs}(S,K/\lambda)$ είναι ο τύπος της εκτεταμένης μορφής των Black & Scholes για ένα δικαίωμα αγοράς (ω=1) που δίδεται από:

$$C_{bs}(S,K)=\omega Se^{-g\tau}\mathrm{N}[\omega d_{1bs}(S,K)]$$
$$-\omega Ke^{-r\tau}N[\omega d_{bs}(S,K)],$$

$$d_{bs}(S,K)=\frac{In(S/K)+(r-g-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=\frac{In(S/K)+u\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_{1bs}(S,K)=d_{bs}(S,K)+\sigma\sqrt{\tau}.$$

με τρέχουσα τιμή S και τιμή άσκησης K/λ και

$$
\begin{aligned}
PLCK &= e^{-r\tau}\mathrm{E}[\max(\lambda \mathrm{M}_t^{t^*} - K,0)] \\
&= e^{-r\tau}(\lambda \mathrm{M}_{\tau_1}^0 - \mathrm{K}) + \lambda C_{bs}(S/\lambda, \mathrm{M}_{\tau_1}^0) \\
&+ \frac{\lambda S\sigma^2}{2(r-g)}\left\{ e^{-g\tau}\mathrm{N}[d_{bs_1}(\frac{S}{\lambda}, \mathrm{M}_{\tau_1}^0)] \right\} \\
&- e^{-r\tau}(\frac{S}{\lambda \mathrm{M}_{\tau_1}^0})^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}}\mathrm{N}[-d_{bs}M_{\tau_1}^0, \frac{S}{\lambda})]\}
\end{aligned} \tag{82}
$$

για $K<\lambda M_{\tau 1}^0$.

3.2. Συσχετιζόμενα δικαιώματα

Γενικά στοιχεία

Η δεύτερη κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων περιλαμβάνει τα συσχετιζόμενα δικαιώματα, των οποίων οι συνολικές αποδόσεις επηρεάζονται από περισσότερα από ένα υποκείμενα προϊόντα σε αντίθεση με τα απλά δικαιώματα τα οποία επηρεάζονται μόνο από ένα. Αυτά τα υποκείμενα προϊόντα υπάρχει περίπτωση να ανήκουν στην ίδια ή σε διαφορετικές κατηγορίες, για παράδειγμα ίδια κεφάλαια, ομόλογα, ξένο νόμισμα, εμπορεύματα κ.λ.π. Εάν τα δύο υποκείμενα προϊόντα ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες, τότε τα συσχετιζόμενα δικαιώματα συνήθως αποκαλούνται δικαιώματα «διαγώνιων» προϊόντων. Με την ανάπτυξη των διεθνών χρηματαγορών, τα «διαγώνια» προϊόντα γίνονται ολοένα και πιο σημαντικά. Η ολοκλήρωση της αγοράς έχει συμβάλλει στην ανάπτυξη των διαγώνιων προϊόντων και η παγκοσμιοποίηση της χρηματοοικονομικής αγοράς έχει επιταχύνει τις επενδύσεις κατά μήκος των διεθνών συνόρων.

Τα συσχετιζόμενα δικαιώματα χωρίζονται στα 1ης και 2ης τάξης συσχετιζόμενα δικαιώματα, σύμφωνα βέβαια με τους τρόπους που η συσχέτιση επηρεάζει τις συνολικές αποδόσεις των δικαιωμάτων Η συσχέτιση έχει 1ης τάξης επίδραση εάν επηρεάζει άμεσα τις συνολικές αποδόσεις των δικαιωμάτων όπως συμβαίνει με τα spread και τα out-performance δικαιώματα Η συσχέτιση έχει επίδραση 2ης τάξης εάν απλά τροποποιεί τις συνολικές αποδόσεις των δικαιωμάτων. Ένα δικαίωμα είναι δυνατόν να αντανακλά σε 1ης και 2ης τάξης αποτελέσματα συσχέτισης, όπως ένα out-performance δικαίωμα πάνω στο DAX-30[16]και CAC-40[17] σε στερλίνες Αγγλίας. Το αποτέλεσμα 1ης τάξης αφορά στη συνδιακύμανση αυτών των δεικτών και το αποτέλεσμα 2ης τάξης προέρχεται από τη σχέση που διαμορφώνουν οι κινήσεις των δύο δεικτών (και της συνδιακύμανσής τους) και μεταβάλλεται με τα επιτόκια συναλλαγών Γαλλικών Φράγκων / Στερλίνας και Γερμανού Μάρκου /Στερλίνας.

Τα spread δικαιώματα είναι απλά συσχετιζόμενα δικαιώματα. Ένα spread δικαίωμα συνάπτεται βασιζόμενο στη διαφορά δύο δεικτών, τιμών ή επιτοκίων. Για παράδειγμα, το άνοιγμα (spread) ανάμεσα στις τιμές κατεργασμένου και ακατέργαστου πετρελαίου διαμορφώνεται ανάλογα με τη διεθνή οικονομική και χρηματοοικονομική πληροφόρηση. Τα δικαιώματα που συνάπτονται πάνω σε αυτό το άνοιγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα άτομα που ασχολούνται με κατεργασμένο πετρέλαιο προκυμένου να αντισταθμίσουν τους κινδύνους των ακαθάριστων κερδών τους.

Τα spread δικαιώματα συνάπτονται στη βάση σε περισσότερα από δύο υποκείμενα προϊόντα ή δείκτες και είναι γνωστά σε πολύ μικρό αριθμό ατόμων που ασχολούνται με εξωχρηματιστηριακά [over-the-counter (OTC)] εξωτικά προϊόντα. Για παράδειγμα, δικαιώματα είναι δυνατόν να συνάπτονται πάνω στο άνοιγμα ανάμεσα στο x_1+x_2 και x_3+x_4 όπου x_i είναι είτε τιμή προϊόντος, είτε δείκτης. Αυτή την κατηγορία spread δικαιωμάτων την αποκαλούμε πολλαπλά spread δικαιώματα (multiple spread options) ώστε να διαφοροποιούνται από τα τυπικά spread δικαιώματα που συνάπτονται σε δύο υποκείμενα προϊόντα. Πολλαπλό άνοιγμα σημαίνει, πως το άνοιγμα είναι μεταξύ τουλάχιστον τριών υποκειμένων προϊόντων. Τα πολλαπλά spread δικαιώματα χρησιμοποιούνται από πολύ λίγους οργανισμούς στην OTC αγορά. Με την εξέλιξη της παγκοσμιοποίησης, όμως, των διεθνών κεφαλαιακών αγορών, τα πολλαπλά spread δικαιώματα θα αναπτυχθούν κατά κόρον.

Μια άλλη κατηγορία συσχετιζόμενων δικαιωμάτων είναι τα out-performance δικαιώματα τα οποία είναι ειδικά δικαιώματα αγοράς που επιτρέπουν στους επενδυτές να εκμεταλλεύονται τις αναμενόμενες διαφορές στη σχετική εκτέλεση των

[16] Ο γερμανικός δείκτης μετοχών (Deutscher Aktienindex or DAX) των 30 πιο σημαντικών μετοχών του χρηματιστηρίου της Φρανκφούρτης που αντιπροσωπεύουν το 75% περίπου των γερμανικών κεφαλαίων.

[17] Ο γαλλικός δείκτης μετοχών (Cotation Assistee en Continue or CAC) περιλαμβάνει τις 240 μετοχές με τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση από τις 700 που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο του Παρισίου (Bourse de Paris).

δύο υποκειμένων εργαλείων ή δεικτών. Η συνολική απόδοση ενός εργαλείου μείον την εκτέλεση ενός δεύτερου εργαλείου πολλαπλασιασμένο με ένα σταθερό ποσό. Η εκτέλεση μετράται κανονικά με το ρυθμό της απόδοσης ως ποσοστό. Τα υποκείμενα εργαλεία μπορεί να είναι συνδυασμοί μετοχών, ομολόγων, νομισμάτων, εμπορευμάτων ή δεικτών. Ένα δημοφιλές out-performance δικαίωμα χρησιμοποιείται επίσης, προκυμένου να κεφαλαιοποιήσει τη σχετική εκτέλεση δύο μετοχων της αγοράς όπως της Αμερικανικής αγοράς (μετριέται από τη Standard & Poor's 500). Συμπεραίνουμε από τα ανωτέρω ότι ένα out-performance δικαίωμα εμφανίζεται ως ένα spread δικαίωμα ανάμεσα στις αποδόσεις 2 εργαλείων, παρά στις αυτές καθεαυτές τιμές των εργαλείων.

Ένα δικαίωμα ανταλαγής είναι ένα δικαίωμα το οποίο μπορεί να ανταλλάξει ένα υποκείμενο προϊόν για κάποιο άλλο. Ένα δικαίωμα ανταλαγής μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως ένα δικαίωμα αγοράς πάνω στο προϊόν από τη μία με τιμή άσκησης ίση με τη μελλοντική τιμή του προϊόντος και από την άλλη ίση με την τιμή λήξης, είτε ως ένα δικαίωμα πώλησης πάνω στο προϊόν από τη μία με τιμή άσκησης ίση με τη μελλοντική τιμή του προϊόντος και από την άλλη, ίση με την τιμή στη λήξη του.

Τα basket δικαιώματα συνάπτονται ως επί τω πλείστον με βάση ένα καλάθι προϊόντων παρά ένα μεμονομένο προϊόν. Γι'αυτό το λόγο ονομάζονται και δικαιώματα χαρτοφυλακίου. Τα πιο δημοφιλή δικαιώματα χαρτοφυλακίου είναι εκείνα που συνάπτονται πάνω σε καλάθια νομισμάτων. Καθώς το καλάθι προσδιορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις συσχετίσεις ανάμεσα στα ποικίλα στοιχεία που τα απαρτίζουν, έπεται ότι τα δικαιώματα χαρτοφυλακίου ανήκουν στα συσχετιζόμενα δικαιώματα. Χρησιμοποιούνται από χρηματοοικονομικούς οργανισμούς με σκοπό είτε την αντιστάθμιση κινδύνου είτε την κερδοσκοπία βασιζόμενοι πάντα στη διαθέσιμη πληροφόρηση που έχουν.

3.2.1. Δικαιώματα ανταλλαγής

Τα δικαιώματα ανταλαγής είναι δικαιώματα τα οποία παρέχουν τη δυνατότητα στους κατόχους τους να ανταλλάξουν κάποιο προϊόν με κάποιο άλλο. Παρόλο που τα δικαιώματα αυτά μελετήθηκαν αρχικά από το William Margrabe (1978), μόλις τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να επεκτείνονται και να γίνονται γνωστά. Ο κάτοχος ενός δικαιώματος ανταλλαγής έχει το δικαίωμα να λάβει στη λήξη ένα υποκείμενο προϊόν αφού πρώτα πληρώσει την αξία του άλλου υποκείμενου προϊόντος.

Παρόλα αυτά, ένα τυπικό δικαίωμα ανταλλαγής ερμηνεύεται είτε ως ένα δικαίωμα αγοράς πάνω σε ένα προϊόν από τη μία με τιμή άσκησης ίση με τη μελλοντική τιμή του προϊόντος και από την άλλη ίση με την τιμή στη λήξη του, είτε ως ένα δικαίωμα πώλησης πάνω σε ένα προϊόν με τιμή άσκησης ίση με την τιμή του δικαιώματος στη λήξη.

Έστω ότι οι τιμές δύο υποκείμενων προϊόντων $I_1(\tau) \kappa \alpha \iota I_2(\tau)$ ακολουθούν την τυπική γεωμετρική Μπραουνιανή κίνηση $dI_i = (\mu_i - g_i)I_i dt + \sigma_i I_i dz_i(t)$.

Για i=1 και 2, οι αποδόσεις των προϊόντων συσχετίζονται σύμφωνα με το συντελεστή συσχέτισης ρ. Η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού-τύπου δικαιώματος ανταλλαγής να ανταλλάξει το δεύτερο προϊόν με το πρώτο *(PFEX)* εκφράζεται ως εξής:

$$PFEX = max[I_1(\tau) - I_2(\tau), 0] \tag{84}$$

όπου max (. ; .) είναι η συνάρτηση που δίδει το μέγιστο από τους δύο αριθμούς.

Η συνολική απόδοση της παραπάνω σχέσης, καλείται ως η συνολική απόδοση του δικαιώματος ανταλλαγής να ανταλλάξει το δεύτερο προϊόν με το πρώτο. Είναι ακριβώς ο ίδιος τύπος με το απλό δικαίωμα αγοράς που δίδεται από:

$$EC=Max\ [S(\tau)-K, 0]$$

εάν αντικαταστήσουμε με την τιμή άσκησης K με την τιμή του δεύτερου προϊόντος $I_2(\tau)$. Συνεπώς το δικαίωμα ανταλλαγής χαρακτηρίζεται ως ένα δικαίωμα αγοράς που συνάπτεται πάνω στο πρώτο προϊόν με τιμή άσκησης ίδια με τη μελλοντική τιμή του δεύτερου προϊόντος. Η συνολική απόδοση της σχέσης (84) είναι ίδια με εκείνη ενός απλού δικαιώματος πώλησης που δίδεται από την (2) εάν λάβουμε τη μελλοντική τιμή του πρώτου προϊόντος ως την τιμή άσκησης. Με αυτόν τον τρόπο το δικαίωμα ανταλλαγής εμφανίζεται ως ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης ίδια με την μελλοντική τιμή του πρώτου προϊόντος.

Η συνολική απόδοση του δικαιώματος ανταλλαγής εναλλακτικά μπορεί να εκφραστεί ως:

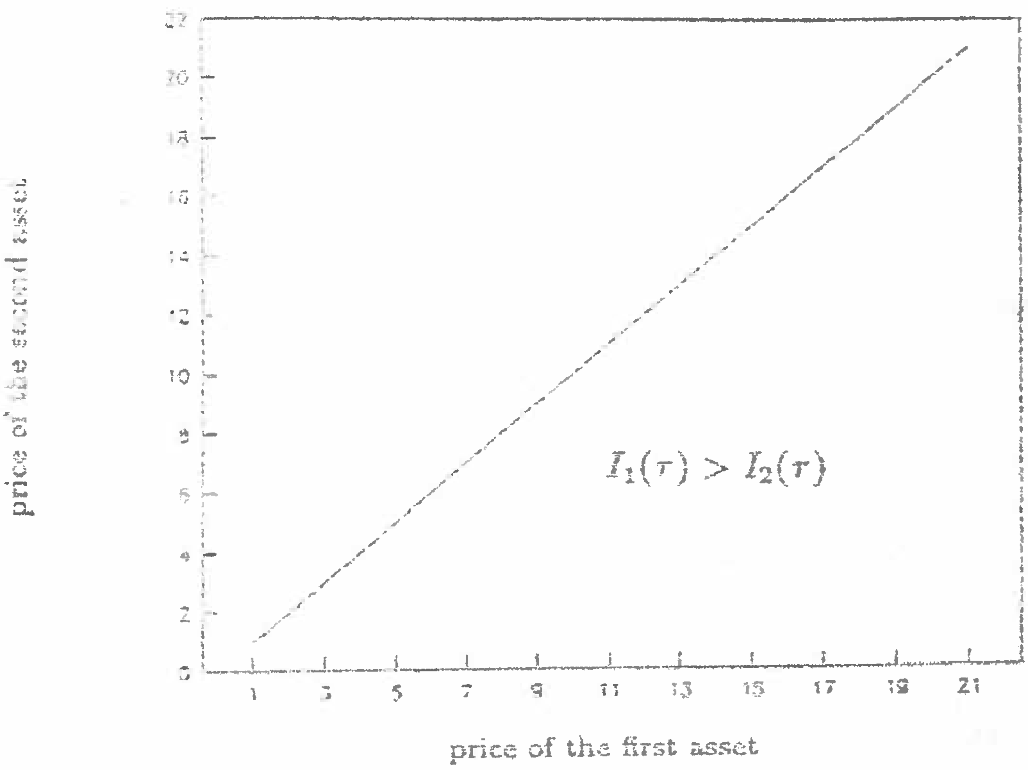
$$Max[I_1(\tau) - I_2(\tau),0] = \max[I_1(\tau), I_2(\tau)] - I_2(\tau) \tag{85}$$

ή

$$Max[I_1(\tau) - I_2(\tau),0] = I_1(\tau) - \min[\mathrm{I}_1(\tau), I_2(\tau)] \tag{86}$$

- **Αποτίμηση δικαιωμάτων ανταλλαγής**

Η πολυπλοκότητα των δικαιωμάτων ανταλλαγής εξαρτάται από το ολοκλήρωμα που είναι μέρος των αναμενόμενων αποδόσεων στο περιβάλλον των Black - Scholes. Τα δικαιώματα ανταλλαγής είναι τα πιο απλά συσχετιζόμενα δικαιώματα εξαιτίας του γεγονότος ότι τα ορισμένα ολοκληρώματά τους απαρτίζονται από το πιο απλό σχήμα.



Εάν οι τιμές των πρώτων και δεύτερων προϊόντων απεικονίζονται στον οριζόντιο και κάθετο άξονα στο χώρο των δύο διαστάσεων αντίστοιχα, το ορισμένο ολοκλήρωμα ή η περιοχή στην οποία το δικαίωμα ανταλλαγής έχει θετική συνολική απόδοση είναι απλά η περιοχή κάτω από τη γραμμή των 45° ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων.

Χρησιμοποιώντας τις δυωνυμικές κατανομές

$$f(x,y)=f(y)f(x|y) \tag{A}$$

και

$$f(x,y)=f(x)f(y|x) \tag{B}$$

όπου $f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)$

$$f(x\mid y)=\frac{1}{\sigma_x\ \sqrt{\tau}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{(u-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

$$f(y\mid x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{(u-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

καταλήγουμε στην αναμενόμενη συνολική απόδοση του δικαιώματος ανταλλαγής που είδαμε στη σχέση (84) με διπλή ολοκλήρωση. Δηλαδή:

$$E(PFEX)=I_1e^{(\mu_1-g_1)\tau}\mathrm{A}_{e_1}-I_2e^{(\mu_2-g_2)\tau}\mathrm{A}_{e_2} \tag{87}$$

όπου

$$A_{e_1}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u-\sigma_\chi)\mathrm{N}\left\{\frac{In(I_1/I_2)+(\mu_x-\mu_y)]/\sigma_y-[\rho-(\sigma_x/\sigma_y)]u}{\sqrt{1-p^2}}\right\}du,$$

$$A_{e_2}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u-p_y)N \tag{88}$$

$$*\left\{\frac{In(I_1/I_2)+(\mu_x-\mu_y)]/\sigma_y-[p-(\sigma_x/\sigma_y)]u}{\sqrt{1-p^2}}\right\}du$$

Οι δύο συντελεστές $A_{e_1} και A_{e_2}$ είναι όροι μονομεταβλητών ολοκληρωμάτων. Μπορούν εύκολα να υπολογισθούν με οποιεσδήποτε αριθμητικές μεθόδους χρησιμοποιώντας έναν Η/Υ, επειδή η συνάρτηση πυκνότητας f(.) και η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής N(.) είναι εύκολα υπολογίσιμη. Παρόλα αυτά, αυτοί οι δύο συντελεστές μπορούν να απλοποιηθούν σε λύση κλειστού τύπου με τη χρήση μαθηματικών ταυτοτήτων. Αρχικά, επιλέγουμε τη μεταβλητή που επιθυμούμε να ολοκληρώσουμε $z=u-\sigma_x$, ή $u=z+\sigma_x$ στην (88) και μπορούμε να την απλοποιήσουμε στην:

$$Ael = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)N$$

$$* \left\{ \frac{In[(I_1/I_2)+(\mu_x - \mu\ )]/\sigma_y - [p-(\sigma_x/\sigma_y)]\sigma_x[p-(\sigma_x/\sigma_y)]z}{\sqrt{1-p^2}} \right\} dz \tag{89}$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε περαιτέρω τη σχέση (89), χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μαθηματική ταυτότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)N(A+Bz)dz = N\left(\frac{A}{\sqrt{1+B^2}}\right) \tag{90}$$

όπου A και B, είναι σταθεροί, πραγματικοί αριθμοί.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την (90), είμαστε σε θέση να απλοποιήσουμε την (89) στην $A_{e_1} = N(d_{e_1})$ και ακολουθώντας μπορούμε να απλοποιήσουμε και την $A_{e_2} = N(d_{e_2})$. Συνεπώς η (89) γίνεται:

$$E(PFEX) = I_1 e^{(\mu_1 - g_1)\tau} \mathrm{N}(d_{e_1}) - I_2 e^{(\mu_2 - g_2)\tau} \mathrm{N}(d_{e_2})$$

όπου

$$d_{e_2} = \left\{ In\left(\frac{I_1}{I_2}\right) + [(\mu_1 - g_1) - (\mu_2 - g_2)]\tau - \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 \tau \right\} / (\sigma_\alpha \sqrt{\tau}) \tag{91}$$

$$d_{e_1} = d_{e2} + \sigma_\alpha \sqrt{\tau}, \sigma_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

και ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στις αποδόσεις των δύο υποκείμενων προϊόντων.

Επιχειρήματα που αφορούν το arbitraze μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε την ουδέτερου κινδύνου προσέγγιση αξιολόγησης προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση ενός δικαιώματος στην επινόηση του συμβολαίου με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο *r*. Εφόσον η προσέγγιση αξιολόγησης ουδέτερου κινδύνου εγγυάται πως όλα τα προϊόντα αναμένεται να εκτιμηθούν με βάση το ίδιο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο $\mu_1 = \mu_2 = r$, επιτυγχάνουμε με αυτόν τον τρόπο την τιμή ενός δικαιώματος ανταλλαγής με ανταλλαγή του δεύτερου προϊόντος για απόκτηση του πρώτου *(PEXOP12)* προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση που δίδεται στην (91) με βάση το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Δηλαδή,

$$PEXOP12 = I_{1e}^{-g_1\tau}\,\mathrm{N}(d_{e1}) - I_2 e^{-g_2\tau}\,\mathrm{N}(d_{e2})$$

όπου (92)

$$d_{e_2} = [In(\frac{I_1}{I_2}) + (g_2 - g_1 - \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2)\tau]/(\sigma_\alpha\sqrt{\tau})$$

$$d_{e_1} = d_{e_2} + \sigma_\alpha\sqrt{\tau}$$

Ο τύπος αποτίμησης στη σχέση (92), ανήκει στην κατηγορία των Black-Scholes, καθώς η τιμή εκφράζεται ως συνάρτηση των αθροιστικών συναρτήσεων των τυπικών μονομεταβλητών κανονικών κατανομών. Οι συναρτήσεις $d_{e_1} και d_{e_2}$, μοιάζουν αρκετά με τις αθροιστικές συναρτήσεις που εμφανίζονται στο υπόδειγμα των Black & Scholes. Η βασική τους διαφορά σημειώνεται στη συνάρτηση μεταβλητότητας (volatility) την οποία θα αποκαλούμε και συνολική μεταβλητότητα επειδή είναι η αποτελεσματική μεταβλητότητα που χρησιμοποιείται στο υπόδειγμα. Η συνολική συνάρτηση μεταβλητότητας δεν προσδιορίζεται μόνο, από τις μεταβλητότητες των δύο υποκείμενων προϊόντων αλλά και από το βαθμό που τα δύο αυτά προϊόντα συσχετίζονται μεταξύ τους.

Ο τύπος (92) μας δίδει την τιμή του δικαιώματος ανταλλαγής που πληρώνει ο κάτοχός του προκειμένου να ανταλλάξει το δεύτερο προϊόν για το πρώτο. Όμοια, υπολογίζουμε και την τιμή που πληρώνει ο κάτοχος για να ανταλλάξει το πρώτο για το δεύτερο προϊόν, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ταυτότητα:

$$max[I_1(\tau)-I_2(\tau)]=I_2(\tau)-I_1(\tau)+\max[I_1(\tau)-I_2(\tau)] \tag{93}$$

Παίρνοντας αναμενόμενες προσδοκίες και στις δύο πλευρές της (93), και προεξοφλώντας τη σχολική απόδοση με το επιτόκιο που δεν ενέχει κανένα κίνδυνο, καταλήγουμε στην τιμή του δικαιώματος ανταλλαγής του πρώτου προϊόντος για το δεύτερο *(PEXOP21)*.

$$\begin{aligned}PEXOP21 &= I_2e^{-g_2\tau}-I_1e^{-g_1\tau}\\ &+[I_1e^{-g_1\tau}N(d_{e1})-I_2e^{-g_2\tau}N(d_{e2})]\end{aligned} \tag{94}$$

Ο πρώτος όρος από τη δεξιά πλευρά της σχέσης (94), είναι απόρροια της προεξόφλησης της αναμενόμενης τιμής του πρώτου προϊόντος $I_1\exp[(r-g)\tau]$ με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο *r*.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα *N(-z)=1-N(z)*, για κάθε πραγματικό αριθμό *z*, απλοποιούμε αυτόματα την (94) σε:

$$PEXOP21 = I_2e^{-g_2\tau}N(-d_{e2})-I_{1e}^{-g_1\tau}N(-d_{e1}) \tag{95}$$

3.2.2. <u>Out-performance δικαιώματα</u>

Ένα out-performance δικαίωμα είναι μία ειδική περίπτωση δικαιώματος αγοράς, το οποίο επιτρέπει στους επενδυτές να εκμεταλλεύονται την αναμενόμενη διαφορά της σχετικής εκτέλεσης των δύο υποκείμενων προϊόντων ή δεικτών. Η συνολική απόδοση ενός out-performance δικαώματος στη λήξη, είναι ίση με την τιμή ενός προϊόντος μείον την τιμή ενός δεύτερου συν ένα προκαθορισμένο ποσό πολλαπλασιασμένο με ένα ποσοστό. Τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι οποιοσδήποτε συνδυασμός μετοχών, ομολόγων, νομισμάτων, εμπορευμάτων ή δεικτών που βασίζονται σε αυτά τα προϊόντα.

Ένα out-performance δικαίωμα είναι διαφορετικό σε σύγκριση με τα περισσότερα δικαιώματα. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι παρέχει κάποιο ρυθμό απόδοσης και όχι μία σταθερή συνολική απόδοση σε ευρώ ή δολλάρια όπως συμβαίνει, στα περισσότερα δικαιώματα Από αυτή τη σημαντική διαφορά ένα out-performance δικαίωμα περιλαμβάνει πάντοτε έναν εναλλακτικό συντελεστή ή παράμετρο που καλείται φανταστικό ποσό. Η συνολική απόδοση ενός out-performance δικαιώματος σε όρους νομίσματος είναι απλά το προϊόν του φαινομενικού ποσού συν το ρυθμό της απόδοσης στη λήξη. Εφόσον το φαινομενικό ποσό είναι προκαθορισμένο, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο ρυθμό απόδοσης του out-performance δικαιώματος.

Καθώς ο τρόπος εκτέλεσης μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας είτε τις καθαρές αποδόσεις, είτε τις λογαριθμικές αποδόσεις, ο τύπος αποτίμησης των out-performance δικαιωμάτων θα διαφέρει βασιζόμενος στον τρόπο υπολογισμού της εκτέλεσης.

Ο ρυθμός της συνολικής απόδοσης ενός ευρωπαϊκού- τύπου out-performance δικαιώματος *(PROUT)* που συνάπτεται στο άνοιγμα της σχετικής εκτέλεσης των δύο υποκείμενων εργαλείων δίδεται από:

$$PROUT = max\left\{\omega\left[\frac{I_1(\tau)}{I_1}-\frac{I_2(\tau)}{I_2}\right]-\omega k,0\right\} \tag{96}$$

όπου I_1 και I_2, αντιπροσωπεύουν τις τρέχουσες αξίες των υποκείμενων εργαλείων, $I_1(\tau) \kappa\alpha\iota I_2(\tau)$, είναι οι αξίες των δύο εργαλείων στη λήξη του δικαιώματος, $\tau=t^*-t$, είναι ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος και ω είναι ένας δυωνυμικός τελεστής (1 για το δικαίωμα αγοράς και –1 για το δικαίωμα πώλησης).

Η έκφραση του ρυθμού απόδοσης (96) παρόλο που εμφανίζει πολλά κοινά στοιχεία με τους ρυθμούς απόδοσης των προηγούμενων δικαιωμάτων, ουσιαστικά διαφέρει στο γεγονός ότι αναφέρεται σε ρυθμό απόδοσης και όχι στην απόδοση βασισμένη σε κάποιο νόμισμα.

Υποθέτουμε ότι τα δύο υποκείμενα εργαλεία ακολουθούν τη στοχαστική διαδικασία και τα δύο εργαλεία συσχετίζονται μεταξύ τους με συντελεστή ρ. Έστω ότι $x=ln[I_1(\tau)/I_1]$ και $y=ln[I_2(\tau)/I_2]$. Είναι απλό να αποδειχθεί πως και η μεταβλητή x και η μεταβλητή y κατανέμονται κανονικά με μέσους $\mu_\chi=(\mu_1-\sigma_1^2/2)\tau$ *και* $\mu_y=(\mu_2-\sigma_2^2/2)\tau$ και διακυμάνσεις $\sigma_x^2=\sigma_1^2\tau$ *και* ${}_y^2=\sigma_2^2\tau$ αντίστοιχα.

Επίσης τα x και y κατανέμονται με βάση τη δυωνυμική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης ρ. Ο ρυθμός απόδοσης ενός out-performance δικαιώματος μπορεί να εκφραστεί σε όρους ακαθάριστων αποδόσεων των δύο εργαλείων.

$$PROUT = max[\omega(e^{x} - e^{y} - \omega k, 0] \tag{97}$$

όπου *k* είναι ο ρυθμός άσκησης του δικαιώματος.

Ο ακαθάριστος ρυθμός οποιουδήποτε προϊόντος είναι πάντοτε ίσος με τη μονάδα συν την αντίστοιχη καθαρή απόδοση, δηλαδή η ακαθάριστη απόδοση είναι:

$$S(\tau)/S = 1 + [S(\tau) - S]/S = 1 + \textit{καθαρή απόδοση}$$

όπου $S(\tau)$ και S συμβολίζουν τη μελλοντική και την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος αντίστοιχα. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο ακαθάριστες αποδόσεις στις σχέσεις (96) και (97) είναι ίδια με τη διαφορά τις αντίστοιχες καθαρές αποδόσεις. Εκτός από την ακαθάριστη απόδοση υπάρχει και η λογαριθμική απόδοση, ο λογαριασμός της ακαθάριστης απόδοσης. Εφόσον οι καθαρές αποδόσεις είναι συνήθως μικρά ποσοστά, οι λογαριθμικές αποδόσεις μπορούν να γραφούν με βάση τις σειρές του Taylor ως εξής:

$$ln(1+v) \cong v + 0(v^2) \tag{98}$$

όπου v αντιπροσωπεύει την καθαρή απόδοση και $O(v^2)$, αντιπροσωπεύει το άθροισμα όλων των όρων των δυνάμεων που είναι ίσοι ή μεγαλύτεροι από δύο.

Από τη σχέση (98), οι λογαριθμικές αποδόσεις συνήθως δε διακρίνονται από τις καθαρές αποδόσεις. Η μεταβλητότητα συνεπώς του υποκείμενου προϊόντος σ στο μοντέλο των Black-Scholes δεν είναι η μεταβλητότητα του υποκείμενου προϊόντος αλλά εκείνη της λογαριθμικής απόδοσης. Εάν χρησιμοποιούμε τις λογαριθμικές αποδόσεις αντί των ακαθάριστων αποδόσεων, ο ρυθμός απόδοσης ενός out-performance δικαιώματος *(PROUTLG)* που δίδεται από την (97) εκφράζεται εναλλακτικά ως εξής:

$$PROUTLG = max[\omega(x - y0 - \omega k, 0] \tag{99}$$

όπου *k*, είναι η τιμή άσκησης.

- **Αποτίμηση των Out-Performance δικαιωμάτων με ακαθάριστες αποδόσεις ως μέτρο εκτέλεσης**:

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των δύο υποκειμένων προϊόντων κατανέμονται λογαριθμικά, οι λογαριθμικές αποδόσεις των δύο προϊόντων κατανέμονται με βάση τη δυωνυμική κανονική κατανομή.

Χρησιμοποιώντας τη δυωνυμική κανονική συνάρτηση πυκνότητας και το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίδεται από το ακόλουθο γράφημα:

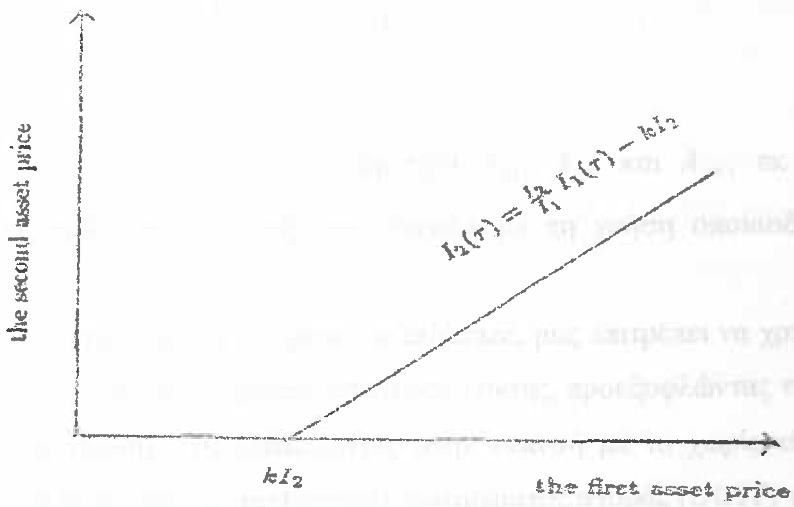


Fig. 25.1. The integration domain for an out-performance option.

προκύπτει με διπλή ολοκλήρωση ο ρυθμός της αναμενόμενης απόδοσης ενός out-performance δικαιώματος αγοράς. Αυτός είναι ο ακόλουθος:

$$E(PROUT) = e^{\mu_2\tau} A_{01} - e^{\mu_2\tau} A_{02} - kA_{03} \qquad (100)$$

όπου

$$A_{01} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N\left[\frac{\varsigma_1 + \sigma_1\sqrt{\tau} + \rho\upsilon + \phi_0(\upsilon + \rho\sigma_1\sqrt{\tau})}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] du$$

$$A_{02} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N \left[\frac{\varsigma_1 + \rho\sigma_2\sqrt{\tau} + \rho\upsilon + \phi_0(\upsilon + \sigma_2\sqrt{\tau})}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] du$$

$$A_{03} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N \left[\frac{\varsigma_1 + \rho\upsilon + \phi_0(\upsilon)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] du$$

$$\varsigma_1 = \frac{\mu_x}{\sigma_x} = \sqrt{\tau}\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) / \sigma_1$$

και

$$\phi_0(u) = -\frac{1}{\sigma_1\sqrt{\tau}} \ln\left\{k + e^{(\mu_2 - \sigma_2^2/2)\tau + u\sigma_2\sqrt{\tau}}\right\}$$

Παρόλο που οι τρείς παράμετροι A_{01}, A_{02} και A_{03}, εκ πρώτης όψεως φαίνονται σύνθετοι, υπολογίζονται εύκολα με τη χρήση οποιασδήποτε μεθόδου ολοκλήρωσης μέσω Η/Υ.

Επιχειρήματα που αφορούν το arbitraze, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ουδέτερου κινδύνου προσέγγιση αξιολόγησης, προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση ενός δικαιώματος στην εκπνοή με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Συνεπώς, η τιμή ενός out-performance δικαιώματος αγοράς *(OUTP)* επιτυγχάνεται αν αντικαταστήσουμε $\mu_i = r - g_i$, (g_1 και g_2, είναι αντίστοιχα οι ρυθμοί απόδοσης των δύο υποκείμενων προϊόντων) και στη συνέχεια προεξοφλήσουμε τον αναμενόμενο ρυθμό συνολικής απόδοσης που δίδεται από την (100) με το επιτόκιο που δεν ενέχει κανένα κίνδυνο, *r*.

$$OUTP = e^{-g_1\tau}\mathrm{A}_{01} - e^{-g_2\tau}\mathrm{A}_{02} - ke^{-r\tau}\mathrm{A}_{03}$$

όπου

$$\zeta_1 = \frac{\mu_x}{\sigma_x} = \sqrt{\tau}\left(r - g_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)/\sigma_1, \tag{101}$$

και

$$\phi_0(u) = -\frac{1}{\sigma_1\sqrt{\tau}}\ln[k + e^{(r-g_2-\sigma_2^2/2)\tau+u\sigma_2\sqrt{\tau}}]$$

Αξίζει να σημειωθεί πως ο τύπος (101), είναι απαλλαγμένος από τις τρέχουσες αξίες των δύο εργαλαίων $I_1 και I_2$. Ο θεωρητικός τύπος της αποτίμησης ουδέτερου κινδύνου για out-performance δικαιώματα δεν εξαρτάται από τα δύο επίπεδα τιμών και είναι συνάρτηση (i) του επιτοκίου, r, (ii) των ρυθμών απόδοσης των δύο υποκείμενων προϊόντων $g_1 και g_2$, (iii) του ρυθμού εξάσκησης *k*, (iv) του χρόνου ως τη λήξη, τ, (v) των μεταβλητοτήτων των αποδόσεων των υποκείμενων προϊόντων και (vi) του συντελεστή συσχέτισης ρ μεταξύ των αποδόσεων των δύο προϊόντων. Παρόλα αυτά, δεν πρέπει να μας διαφεύγει πως οι πραγματικοί ρυθμοί απόδοσης υπολογίζονται στη λήξη του δικαιώματος με τη χρήση της (96) τόσο με τη βάση τις τρέχουσες τιμές όσο και τις τιμές των υποκείμενων προϊόντων στη λήξη επειδή οι αποδόσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες.

Ο τύπος (101) δεν είναι κλειστής μορφής επειδή οι τρείς παράμετροι A_{01}, A_{02} και A_{03}, γενικά δεν μπορούν να εκφραστούν σε όρους των αθροιστικών συναρτήσεων της τυπικής κανονικής κατανομής. Για ειδικές περιπτώσεις στις οποίες ο ρυθμός άσκησης είναι μηδενικός *(k=0),* αυτές οι τρείς παράμετροι εκφράζονται σε όρους των τυπικών κανονικών αθροιστικών κατανομών. Αντικαθιστώντας όπου *k=0* στη φ_0 συνάρτηση που δίδεται από την (101) έχουμε:

$$\phi_{o0}(u) = -\zeta_2 - u\beta_{o0}, \tag{102}$$

όπου

$$\zeta_2 = \frac{\mu_y}{\sigma_x} = \sqrt{\tau}(r - g_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)/\sigma_1 και \beta_{o0} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Αντικαθιστώντας τη γραμμική έκφραση της σχέσης (102) στην (101) προκύπτει:

$$OUTP(k=0) = e^{-g_1\tau}\mathrm{A}_{o10} - e^{-g_2\tau}\mathrm{A}_{o20},$$

όπου

$$\mathrm{A}_{o10} = \mathrm{N}\left[\frac{\zeta - \zeta_2 + (1-\rho\beta_{o0})\sigma_{11}\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-2\rho\beta_{o0}+\beta_{o0}^2}}\right] \qquad (103)$$

και

$$\mathrm{A}_{o20} = \mathrm{N}\left[\frac{\zeta_1 - \zeta_2 + (\rho-\beta_{o0})\sigma_2\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-2\rho\beta_{o0}+\beta_{o0}^2}}\right]$$

- **Αποτίμηση out-performance δικαιωμάτων με λογαριθμικές αποδόσεις ως μέτρο εκτέλεσης**

Χρησιμοποιώντας τη δυωνυμική συνάρτηση πυκνότητας μπορούμε να αντλήσουμε το ρυθμό αναμενόμενης συνολικής απόδοσης ενός out-performance δικαιώματος ο οποίος είναι:

$$E(PROUTLG) = w(\mu_x - \mu_y - k)N(w\gamma i_r) + w\sigma_\alpha\sqrt{\tau}f(\gamma i_r),$$

όπου (104)

$$\gamma i_r = \frac{\mu_x - \mu_y - k}{\sigma_\alpha\sqrt{\tau}}$$

και *N(.)* και *f(.)* είναι οι αθροιστικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις πυκνότητας μίας τυπικής κανονικής κατανομής.

Ο ρυθμός της αναμενόμενης συνολικής απόδοσης που δίδεται στην (104) είναι ουσιαστικά η αναμενόμενη συνολική απόδοση για κάθε μονάδα του φαινομενικού ποσού του out-performance δικαιώματος. Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή του out-performance διακιώματος *(OUTP)* αντικαθιστούμε

$$\mu_x = (r - g_1 - \sigma_1^2/2)\tau,$$

$$\mu_y = (r - g_2 - \sigma_2^2/2)\tau,$$

$$\sigma_x = \sigma_1\sqrt{\tau}$$

και

$$\sigma_y = \sigma_2\sqrt{\tau}$$

στην (104) και προεξοφλούμε με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο *r:*

$$OUTOP = we^{-r\tau}\left(\left\{\left[g_2 - g_1 + \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{2}\right]\tau - k\right\}N(w\gamma i_r) + w\sigma_\alpha\sqrt{\tau}\, f(\gamma i_r)\right)$$

όπου (105)

$$\gamma i_r = \left[\left(g_1 - g_2 + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2}\right)\tau - k\right]/(\sigma_\alpha\sqrt{\tau})$$

Ο τύπος αποτίμησης (105), είναι μία ακριβής λύση κλειστού τύπου, η οποία με βάση το θεωρητικό πρότυπο της αποτίμησης ουδέτερου κινδύνου για τα out-performance δικαιώματα δεν εξαρτάται από τα επίπεδα των δύο τρεχουσών τιμών.

3.2.3. Basket δικαιώματα

Τα basket δικαιώματα ή δικαιώματα χαρτοφυλακίου είναι δικαιώματα τα οποία συνάπτονται πάνω σε καλάθια ή χαρτοφυλάκια προϊόντων τα οποία ενέχουν κίνδυνο. Επιτρέπουν στους τελικούς δικαιούχους να αποφεύγουν την επένδυση σε μεμονωμένα υποκείμενα δικαιώματα, επειδή ένα δικαίωμα πάνω σε ένα καλάθι υποκείμενων προϊόντων με αρνητική ή ατελή συσχέτιση έχει μικρότερη μεταβλητότητα. Συνεπώς, τα basket δικαιώματα όχι μόνο μειώνουν την εργασία για τους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς διότι δεν απαιτείται η μεμονωμένη παρακολούθηση προϊόντων σε ένα καλάθι αλλά, επιπλέον, συμβάλουν αισθητά και στη μείωση του κόστους. Επίσης, αποτελούν προστατευτικές δικλείδες σε ενδεχόμενες κινήσεις της αγοράς για πετρελαιακές μετοχές ή μετοχές μεγάλων τεχνολογικών εταιρειών. Είναι ακόμη χρήσιμα για τον έλεγχο της έκθεσης στον κίνδυνο ενός συγκεκριμένου συνδυασμού χαρτοφυλακίων τα οποία είναι δημιούργημα διαφορετικών παραγόντων στην αγορά.

Τα δικαιώματα τα οποία συνάπτονται σε καλάθια με προϊόντα που ενέχουν κίνδυνο, μπορουν να χρησιμοποιηθούν από ειδικούς που ασχολούνται με επενδύσεις χαρτοφυλακίου, προκειμένου να αντισταθμίζουν τους κινδύνους των χαρτοφυλακίων τους. Παρόλο που τα basket δικαιώματα είναι δυνατόν να συνάπτονται σε οποιαδήποτε είδους χαρτοφυλάκια, τα πλέον διαδεδομένα είναι αυτά που αφορούν νομίσματα και εμπορεύματα.

Αυτά τα δικαιώματα αγοράζονται από μεγάλους επενδυτές προκειμένου να προστατεύσουν τα χαρτοφυλάκιά τους από ενδεχόμενες ανεπιθύμητες μεταβολές της αγοράς. Για δικαιώματα που αφορούν δείκτες και συνάπτονται με βάση τις σταθμισμένες αξίες των δεικτών όπως η περίπτωση της Standard & Poors 500, τα καλάθια αποτελούνται από προϊόντα με σταθμισμένα βάρη ανάλογα με τις αγοραίες αξίες τους.

Σε ένα τυπικό περιβάλλον Black-Scholes, οι τιμές των υποκείμενων προϊόντων υποθέτουμε ότι ακολουθούν τη λογαριθμική διαδικασία. Έστω ότι είναι είτε υποκείμενα προϊόντα είτε δείκτες I_i, με *i=1,2,....n,* κάθε ένα από τα οποία ακολουθεί την τυπική στοχαστική διαδικασία που δίδεται από την:

$$dI_i = (\mu_i - g_i)I_i dt + \sigma_i I_i dz_i(t), i = 1,2,...n, \tag{106}$$

όπου $z_i(t)$, είναι η τυπική διαδικασία των Gauss-Wiener, μ_i και σ_i, είναι ο στιγμιαίος μέσος και τυπική απόκλιση του *i* προϊόντος ή δείκτη αντίστοιχα, g_i είναι ο ρυθμός απόδοσης του προϊόντος *i* και $z_i(t)$ και $z_j(t)$ υποθέτουμε ότι συσχετίζονται με συντελεστή συσχέτισης $-1 \le \rho_{ij} \le 1$ και $\rho_{ii} = 1$, για κάθε $i,j=1,2,...n$.

Επιλύοντας την εξίσωση (106) χρησιμοποιώντας την τυπική μέθοδο του παραρτήματος 1 έχουμε :

$$I_i(\tau) = \mathrm{I}_i \exp\left[\left(r - g_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau + \sigma_i z_i(\tau)\right], i = 1,2,...n \tag{107}$$

όπου I_i είναι η τρέχουσα τιμή του *i* προϊόντος, $\tau=t^*-t$ και t και t^* είναι ο τρέχων χρόνος και ο χρόνος ως την εκπνοή του δικαιώματος αντίστοιχα.

Έστω $x_i = \ln[I_i(\tau)/I_i]$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το x_i κατανέμεται κανονικά με μέσο $\mu_{xi} = (r - g_i - \sigma_i^2/2)\tau$ και διακύμανση $\sigma_{xi}^2 = \sigma_i^2\tau$, αντίστοιχα.

Έστω ότι ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως ακολούθως:

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^{n} W_i I_i(\tau), \tag{108}$$

όπου $I_i(\tau)$ είναι η τιμή ενός *i* προϊόντος στη λήξη του δικαιώματος και W_i είναι το ποσοστό της συνολικής επένδυσης του *i* προϊόντος και $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$.

Η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος σε ένα χαρτοφυλακίου που ορίζεται από τη σχέση (108), εκφράζεται ως ακολούθως:

$$PBSKT=max\{\omega[I(\tau)-k],0\} \qquad (109)$$

όπου k είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος και *max(, .)* είναι συνάρτηση που δίδει το μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς και ω είναι ένας δυωνυμικός τελεστής (1 για ένα δικαίωμα αγοράς και –1 για ένα δικαίωμα πώλησης).

- **Basket δικαιώματα δύο προϊόντων**

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις πυκνότητας που δίδονται από τις σχέσεις (A) και (B) και το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίδεται από το ακόλουθο γράφημα

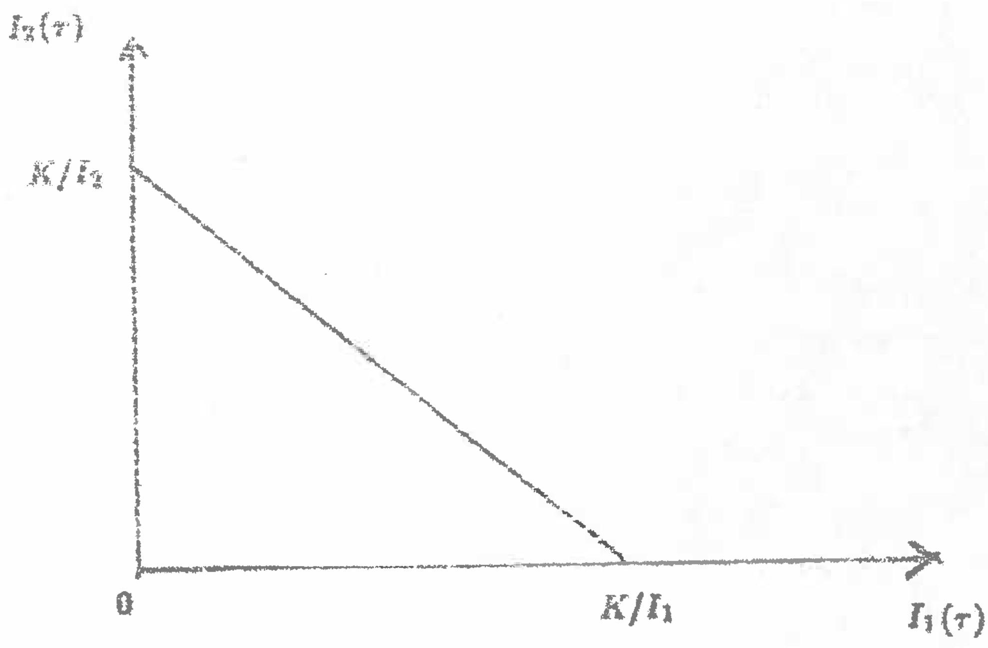


Fig. 27.1. Integration domain for a two-asset basket option.

προκύπτει με διπλή ολοκλήρωση η τιμή του δικαιώματος πώλησης του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο προϊόντα μετά από προεξόφληση της αναμενόμενης συνολικής απόδοσης με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, *r*. Δηλαδή:

$$P_{bk} = -aI_1 e^{-g_2\tau} A_{b1} - bI_2 e^{-g_2\tau} \mathrm{A}_{b2} + Ke^{-r\tau} \mathrm{A}_{b3}$$

όπου

$$A_{b1} = \int_{-\infty}^{-d(b)-\rho\sigma_1\tau} f(u) N\left[\frac{-\phi(u+\rho\sigma_1\sqrt{\tau}) - d(a) - \sigma_1\sqrt{\tau} - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] du, \tag{110}$$

$$A_{b2} = \int_{-\infty}^{-d(b)-\sigma_2\sqrt{\tau}} f(u)\left[\frac{-\phi(u+\sigma_2\sqrt{\tau}) - d(a) - \rho\sigma_2\sqrt{\tau} - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] du,$$

$$A_{b3} = \int_{-\infty}^{-d(b)} f(u) N\left[\frac{-\phi(u) - d(a) - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] du,$$

$$\phi(u) = \frac{-1}{\sigma_1\sqrt{\tau}} \ln\left\{1 - \frac{bI_2}{K}\exp\left[\left(r - g_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\tau + u\sigma_2\sqrt{\tau}\right]\right\},$$

$$d(a) = d(aI_1, K, \sigma_1, g_1, \tau, r) = \left[\ln\left(\frac{aI_1}{K}\right) + \left(r - g_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\tau\right] / (\sigma_1\sqrt{\tau}),$$

$$d(b) = d(bI_2, K, \sigma_2, g_2, \tau, r) = \left[\ln\left(\frac{bI_2}{K}\right) + \left(r - g_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\tau\right] / (\sigma_2\sqrt{\tau}).$$

3.3. Λοιπά εξωτικά δικαιώματα

Δεν είναι εύκολο να κατηγοριοποιήσουμε τα υπάρχοντα εξωτικά προϊόντα ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους. Εκτός από τις δύο προηγούμενες κατηγορίες που έχουμε αναλύσει υπάρχουν και ορισμένα άλλα εξωτικά προϊόντα τα οποία είναι δημοφιλή στις εξωχρηματιστηριακές αγορές.

Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα ψηφιακά δικαιώματα απαρτίζονται από απλότητα στον τρόπο υπολογισμού των συνολικών τους αποδόσεων καθώς επίσης και ότι έχουν μοναδικά χαρακτηριστικά, τα καθιστούν ιδιαίτερα ελκυστικά σε πολλούς επενδυτές των εξωχρηματιστηριακών αγορών. Επιπλέον ονομάζονται και δυωνυμικά δικαιώματα ή bet δικαιώματα. Ένα ψηφιακό δικαίωμα είναι είτε ένα σταθερό ποσό από μετρητά, από ένα προϊόν ή η διαφορά ανάμεσα στην τιμή ενός προϊόντος και μία καθορισμένη τιμή η οποία είναι συνήθως διαφορετική από την τιμή άσκησης (strike price). Αυτά τα digital δικαιώματα αποκαλούνται συνήθως μετρητά ή τίποτα, προϊόν ή τίποτα και κενά διακιώματα αντίστοιχα. Τα μετρητά ή τίποτα (cash-or-nothing) και προϊόν ή τίποτα (asset-or-nothing) δικαιώματα είναι όμοια με το (betting) στην καθημερινή τους χρήση. Όταν το κενό είναι μηδενικό, ένα κενό δικαίωμα γίνεται ακριβώς το ίδιο με ένα απλό δικαίωμα. Με άλλα λόγια, τα απλά δικαιώματα είναι κενά δικαιώματα με μηδενικά κενά. Σε γενικές γραμμές, τα digital δικαιώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να κεφαλαιοποιήσουν τις απόψεις-θέσεις των επενδυτών σύμφωνα με τις κινήσεις της αγοράς.

Τα digital δικαιώματα παρόλο που είναι σχετικά εύκολα στη χρήση τους, δεν είναι ιδιαίτερα δημοφιλή εξαιτίας της περιορισμένης ρευστότητας που έχουν.

Τα compound δικαιώματα είναι δικαιώματα τα οποία συνάπτονται πάνω σε άλλα τυπικά δικαιώματα Εφόσον υπάρχουν δύο είδη απλών δικαιώματα αγοράς και πώλησης, έχουμε τέσσερεις κατηγορίες compound δικαιωμάτων: ένα δικαίωμα αγοράς που συνάπτεται πάνω σε ένα δικαίωμα αγοράς, ένα δικαίωμα αγοράς που συνάπτεται πάνω σε ένα δικαίωμα πώλησης, ένα δικαίωμα πώλησης που συνάπτεται πάνω σε ένα δικαίωμα αγοράς, και ένα δικαίωμα πώλησης που συνάπτεται πάνω σε ένα δικαίωμα πώλησης. Τα compound δικαιώματα συνήθως χρησιμοποιούνται για να αντισταθμίσουν δύσκολες επενδύσεις οι οποίες είναι πιθανές σε ορισμένες συνθήκες.

Τα δικαιώματα επιλογής ή κατά-βούληση δικαιώματα είναι δικαιώματα τα οποία επιτρέπουν στους κατόχους τους να επιλέξουν ανάμεσα σε ένα απλό δικαίωμα αγοράς και ένα απλό δικαίωμα πώλησης μέσα σε ορισμένο χρονικό διάστημα της ζωής του δικαιώματος. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος πληρώνει κάποιο ποσό για την αγορά του δικαιώματος αλλά δεν είναι διατεθειμένος να διευκρινίσει εάν το δικαίωμα είναι αγοράς ή πώλησης πριν το καθορισμένο χρονικό διάστημα. Εκείνο το δεδομένο χρονικό διάστημα μπορεί να αποφασίσει ο κάτοχος για το αν θα είναι δικαίωμα πώλησης ή αγοράς. Για το λόγο αυτό τα δικαιώματα επιλογής ονομάζονται και «πληρώνω τώρα επιλέγω μετά» δικαιώματα. Είναι φανερό πως τα δικαιώματα επιλογής μειώνουν τις πιθανότητες απώλειας αποδόσεως από ανεπιθύμητες μεταβολές στην αγορά υποκείμενων προϊόντων.

3.3.1. Compound δικαιώματα

Η συνολική απόδοση ενός ευρωπαϊκού compound δικαιώματος με τιμή άσκησης *k* και χρόνο ως τη λήξη τ_1, το οποίο συνάπτεται με βάση ένα απλό δικαίωμα (CMPD) με τιμή άσκησης *k* και χρόνο ως τη λήξη $\tau > \tau_1$, εκφράζεται ως εξής:

$$CMPDOC=max\{\omega C[S(\tau_1), K, \sigma, r, g, \tau- \tau_1, \omega']-\omega k,0\} \qquad (111)$$

όπου $C[S(\tau_1), K, \sigma, r, g, \tau- \tau_1,\omega']$, συμβολίζει την τιμή του υποκείμενου δικαιώματος με τιμή του υποκείμενου προϊόντος $S(\tau_1)$ στο χρόνο τ_1, τιμή άσκησης *K*, μεταβλητότητα σ, επιτόκιο *r*, ρυθμό συνολικής απόδοσης του υποκείμενου προϊόντος *g*, και χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος από τ_1 έως τη λήξη του δικαιώματος, $\tau- \tau_1$, αντίστοιχα.

Υπάρχουν δύο ειδών δυωνυμικοί τελεστές δικαιωμάτων στη σχέση (111): ω είναι ο δυωνυμικός τελεστής για το compound δικαίωμα και ω' για το υποκείμενο δικαίωμα. Επειδή κάθε ένας από τους δύο δυωνυμικούς τελεστές των διακιωμάτων έχει δύο τιμές, υπάρχουν τέσσερις δυνατοί συνδιασμοί δικαιωμάτων: $\omega=\omega'$, για ένα compound δικαίωμα αγοράς που συνάπτεται πάνω σε ένα απλό δικαίωμα αγοράς, $\omega=-1$ και $\omega'=1$ για ένα compound δικαίωμα πώλησης που συνάπτεται πάνω σε ένα απλό δικαίωμα αγοράς, $\omega=1$ και $\omega'=-1$ *για ένα* compound δικαίωμα αγοράς που συνάπτεται πάνω σε ένα απλό δικαίωμα πώλησης και $\omega=\omega'=-1$, για ένα compound δικαίωμα πώλησης που συνάπτεται πάνω σε ένα απλό δικαίωμα πώλησης, αντίστοιχα.

- **Αποτίμηση compound δικαιωμάτων**

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ακολουθεί τη γεωμετρική Μπραουνιανή κίνηση μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή ενός απλού δικαιώματος σε κλειστή μορφή. Έστω ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος στο χρόνο τ_1 είναι γνωστή, τότε η τιμή του απλού δικαιώματος αγοράς προκύπτει από την (22).

$C[S(\tau_1),\mathrm{K},\sigma,r,g,\tau-\tau_1,\omega'] = \omega' S(\tau_1) e^{-g(\tau-\tau_1)} \mathrm{N}\{\omega' d_{1bs}[S(\tau_1)]\}$
$-\omega' \mathrm{K} e^{-r(\tau-\tau_1)} \mathrm{N}\{\omega' d_{bs}[S(\tau_1)]\},$

όπου

$$d_{bs}[S(\tau_1)] = \frac{\ln[S(\tau_1)/\mathrm{K} + u(\tau-\tau_1)}{\sigma\sqrt{\tau-\tau_1}}, d_{1bs}[S(\tau_1)] = d_{bs}[S(\tau_1)] + \sigma\sqrt{\tau-\tau_1}, \quad (112)$$

και

$u = r - g - \sigma^2/2$

Η λύση που μας δίδει την τιμή της τυπικής γεωμετρικής Μπραουνιανής κίνησης με απόδοση g στη χρονική στιγμή τ_1 είναι:

$$S(\tau_1) = S\, exp\, [u\tau_1 + \sigma z(\tau_1)] \quad (113)$$

όπου τ_1 είναι ο χρόνος ως τη λήξη του compound δικαιώματος $S=S(t)$, είναι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος, και $z(\tau_1)$, είναι η τυπική διαδικασία των Gauss-Wiener.

Η τιμή του υποκείμενου προϊόντος $S(\tau_1)$, κατανέμεται με βάση τη λογαριθμική κατανομή.

Έστω

$x = ln\, [S(\tau_1)/S]$

όπου x κατανέμεται κανονικά με μέσο $u\,\tau_1$ και διακύμανση $\sigma^2\ \tau_1$. Έστω

$u=(x-u\ \tau_1)/\sigma\sqrt{\tau_1}$, συμβολίζει την τυπική κανονική μεταβλητή για τη μακροχρόνια απόδοση του συνολικού προϊόντος τη χρονική στιγμή τ_1.

Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική μεταβλητή, u, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος τ_1, και τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή $S(\tau_1)$. Και όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του υποκείμενου δικαιώματος αγοράς τη χρονική στιγμή τ_1 από τη σχέση (112), τόσο περισσότερο in-the-money είναι το compound δικαίωμα αγοράς. Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει μία κριτική τιμή για το *u*, τέτοια ώστε η τιμή του υποκείμενου δικαιώματος αγοράς που δίδεται από την (112) να ισούται με την τιμή άσκησης του compound δικαιώματος. Στο κριτικό αυτό σημείο, το compound δικαίωμα είναι at-the-money. Το κριτικό αυτό σημείο, είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει από την επίλυση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$C[Se^{u\tau_1+u\sigma\sqrt{\tau_1}},\mathrm{K},\sigma,r,g,\tau-\tau_1,\omega']=k, \tag{114}$$

όπου το αριστερό σκέλος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει την τιμή του δικαιώματος αγοράς που δίδει από την (112), και το k, που αποτελεί το δεξιό σκέλος της εξίσωσης είναι η τιμή άσκησης του compound δικαώματος.

Η επίλυση της εξίσωσης (114) μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της δοκιμής και λάθους η οποία είναι δυνατόν να προγραμματισθεί σε οποιοδήποτε Η/Υ, καθώς επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διάφορων ειδών αλγόριθμοι οι οποίοι διευκολύνουν και επιταχύνουν τους υπολογισμούς.

Έστω $y=y(s,\kappa,k,\sigma,r,g,\tau_1,\tau,\omega')$

$$=\mathrm{u}(s,\kappa,k,\sigma,r,g,\tau_1,\tau,\omega') \tag{115}$$

είναι η λύση της εξίσωσης (114), πολλαπλασιασμένη με –1. Με βάση αυτή τη λύση, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο ενός compound δικαιώματος που συνάπτεται πάνω σε ένα απλό δικαίωμα (CMPD) προεξοφλώντας την αναμενόμενη συνολική απόδοση του compound δικαιώματος που δίδεται από την (111).

$$CMPD=\omega' Se^{-g\tau}\mathrm{N}_2[\omega\omega'(y+\sigma\sqrt{\tau_1}),\omega' d_1(\tau),\omega\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}]$$

$$-\omega\omega'\mathrm{K}e^{-r\tau}\mathrm{N}_2[\omega\omega' y,\omega' d(\tau),\omega\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}]$$

$$-\omega k e^{-r\tau_1}\mathrm{N}(\omega y), \tag{116}$$

όπου

$$d(\tau)=\frac{\ln(S/K)+r-g-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d_1(\tau)=d(\tau)+\sigma\sqrt{\tau},$$

και $N_2(a,b,c)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση μιάς τυπικής δυωνυμικής κανονικής κατανομής με άνω όριο a και b και με συντελεστή συσχέτισης c και y, που δίδεται από την (115).

4. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

4.1. Εισαγωγή

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μία εναλλακτική μέθοδος αποτίμησης των επενδυτικών προϊόντων. Περιλαμβάνει τη δημιουργία μεγάλων αριθμών οι οποίοι είναι ουσιαστικά φαινομενικοί και ακολουθούν τυχαία μονοπάτια (random walks) ως προς τη συμπεριφορά τους.

4.2. Περιγραφή της μεθόδου

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι απλή και ευέλικτη με την έννοια ότι μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί προκειμένου να τιμολογίσει τα διάφορα υποκείμενα προϊόντα. Έχει τη δυνατότητα κάλυψης ενός μεγάλου εύρους πιθανών τιμών για οικονομικές μεταβλητές, λαμβάνοντας υπόψην τις συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Η μέθοδος εκτελείται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο καθορίζεται μία στοχαστική συνάρτηση μεταβολής των οικονομικών μεταβλητών και στη συνέχεια ακολουθεί επεξεργασία των μεταβλητών με βάση αυτή τη συνάρτηση. Οι παράμετροι της μεταβλητότητας και των συσχετίσεων προκύπτουν συνήθως από ιστορικά δεδομένα ή από ορισμένες θεωρητικές τιμές. Κατόπιν αυτού, οι μεταβολές των τιμών προασομοιώνονται για όλες τις μεταβλητές που έχουν συμπεριληφθεί στο σενάριο. Στο χρονικό ορίζοντα που έχουμε θέσει, το υποκείμενο προϊόν αποτιμάται χρησιμοποιώντας ένα εύρος τιμών από το οποίο θα γίνει επιλογή για το ποια τιμή θα πάρει. Συνεπώς, δεν έχουμε μία κατανομή, αλλά ένα εύρος τιμών συνδυασμένο με τη πιθανότητα να πάρει το προϊόν την τιμή αυτή. Αυτή την κατανομή χρησιμοποιούμε ούτως ώστε να υπολογίσουμε ό,τι επιθυμούμε ανάλογα με τους περιορισμούς που έχουμε κάθε φορά θέσει.

Η ουσία της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι το σφάλμα της τυπικής απόκλισης μίας εκτίμησης είναι αντίστροφα ανάλογο με τη ρίζα του αριθμού των προσομοιωμένων δοκιμών. Παρόλο που το οποιοδήποτε επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας είναι δυνατόν να επιτευχθεί με την αύξηση του αριθμού των προσομοιωμένων δοκιμών, υπάρχουν πιο αποτελεσματικοί τρόποι μείωσης του σφάλματος της τυπικής απόκλισης. Υπάρχουν δύο τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε προσομοιώσεις οι οποίες έχουν τη δυνοτότητα γρήγορης μείωσης των διακυμάνσεων. Η μία μέθοδος ονομάζεται μέθοδος ελέγχου των μεταβλητών τυχαίων τιμών και η άλλη μέθοδος των αντίθετων μεταβλητών τυχαίων τιμών.

Η μέθοδος ελέγχου των μεταβλητών τυχαίων τιμών χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση προβλημάτων τα οποία έχουν κοινά χαρακτηριστικά και η λύση ενός προβλήματος τοποθετείται στο επόμενο ώστε να επιλυθεί και αυτό. Η αποτελεσματικότητα της μείωσης του σφάλματος της τυπικής απόκλισης εξαρτάται από το βαθμό που η μεταβλητή ελέγχου απεικονίζει τη συμπεριφορά του άλλου προβλήματος. Για παράδειγμα, η τιμή οποιουδήποτε γεωμετρικού ασιατικού δικαιώματος μπορεί να εκφραστεί ως κλειστός τύπος και η λύση της συνήθως χρησιμοποιείται ως μεταβλητή ελέγχου για το αντίστοιχο αριθμητικό ασιατικό δικαίωμα του οποίου ο κλειστός τύπος πρέπει να υπολογισθεί.

Η μέθοδος των αντίθετων μεταβλητών των τυχαίων τιμών πάντοτε υπολογίζει δύο τιμές ενός παράγωγου αξιογράφου, το ένα υπολογίζεται κανονικά, και το άλλο με αλλαγή των προσήμων όλων των δειγμάτων των τυπικών κανονικών κατανομών. Η τελική εκτίμηση της αξίας του παράγωγου αξιογράφου είναι ο μέσος όρος όλων των μέσων από τα ζευγάρια των τιμών.

4.3. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου

Η ανάλυση Monte Carlo αποτελεί μία δυναμική μέθοδο για τον υπολογισμό των εξωτικών δικαιωμάτων, κυρίως αυτών τα οποία χαρακτηρίζονται από εξαρτημένη πορεία. Είναι αρκετά ευέλικτη μέθοδος για να ενσωματώσει τη διαφοροποίηση της μεταβλητότητας στο χρόνο, τη μεγάλη συγκέντρωση στα άκρα και τα ακραία σενάρια. Έχουμε επίσης τη δυνατότητα να κάνουμε με ακρίβεια τους υπολογισμούς μας επιλέγοντας όποιο ποσοστημόριο της κατανομής επιθυμούμε.

Η προσομοίωση Monte Carlo έχει τη δυνατότητα να ενσωματώσει το πέρασμα του χρόνου το οποίο θα δημιουργήσει αλλαγές στην τιμή του παράγωγου προϊόντος.

Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά καθώς ο χρονικός ορίζοντας αυξάνεται κα ιαυτό διαδραματίζει ιδιαίτερη σημασία για την αποτίμηση των προϊόντων.

Εκτός από τα πλεονεκτήματα τα οποία παρουσιάζει η προσομοίωση Monte Carlo έχει και ορισμένα σημαντικά μειωνεκτήματα τα οποία την καθιστούν δύσχρηστη. Το μεγαλύτερό της μειονέκτημα είναι ο μεγάλος χρόνος για τον υπολογισμό της καθώς επίσης και η αύξηση της διακύμανσης της εκτίμησης που μας ενδιαφέρει.

4.4. Εφαρμογή της προσομοίωσης Monte Carlo

Με τη βοήθεια του πακέτου Mathematica 4.0 θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο αποτίμησης των lookback δικαιωμάτων βασιζόμενοι στην προσομοίωση Monte Carlo.

Θεωρούμε δεδομένο για την περαιτέρω ανάλυσή μας ότι οι τιμές των δικαιωμάτων είναι δεδομένες και προέρχονται από την αναμενόμενη προεξοφλημένη παρούσα αξία της συνολικής απόδοσης η οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κατανομή ουδέτερου κινδύνου.

Για την καλύτερη ανάλυση της μεθόδου θα προβούμε σε ορισμένες υποθέσεις προκειμένου να αποτιμήσουμε όσο το δυνοτόν καλύτερα τα δικαιώματα.

1. Τα δικαιώματα είναι ευρωπαϊκού τύπου, με την έννοια ότι η πρόωρη εξόφληση δεν επιτρέπεται
2. Το δικαίωμα περιλαμβάνει χαρακτηριστικά εξαρτημένης πορείας
3. Δεν υπάρχει αναλυτικός χαρακτηρισμός

Προκειμένου να ξεκινήσουμε τη προσομοίωση είναι βασικό να αναφέρουμε πως οι τυχαίοι αριθμοί οι οποίοι χρησιμιποιούνται κατανέμονται κανονικά. Επιπλέον σκοπός μας είναι η δημιουργία μονοπατιών ώστε να έχουμε μία συνάρτηση συνολικής απόδοσης.

Αρχικά «φορτώνουμε» ένα πακέτο[18] το οποίο συμβάλει στον υπολογισμό των μέσων και των τυπικών αποκλίσεων. Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση από την οποία παίρνουμε δείγμα το οποίο κατανέμεται κανονικά.

Στην παρούσα ανάλυση, θα ασχοληθούμε με την αποτίμηση των lookback δικαιωμάτων.

---

[18] Βλέπε Παράρτημα 3

Η τιμή ενός lookback δικαιώματος αγοράς (πώλησης) είναι συνάρτηση της αρχικής τιμής του προϊόντος, *p*, της ελάχιστης (μέγιστης) τιμής του προϊόντος, *pmin (pmax)*, της τυπικής απίκλισης, *sd*, του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, *r*, της μερισματικής απόδοσης, *q*, και του χρόνου ως τη λήξη, *t*.

Στο παράδειγμα που παρατίθεται στο Παράρτημα 3 ισχύουν οι ακόλουθες τιμές για τις ανωτέρω μεταβλητές:

p = pmin = pmax = 50

sd = 20%

r= 5%

q= 0

t= 1

Αν τιμολογίσουμε (χωρίς τη μέθοδο Monte Carlo) το lookback δικαίωμα αγοράς (πώλησης) με ελάχιστη τιμή ίση με την αρχική τιμή του προϊόντος, τότε το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι 8.6084 (αντίστοιχα, 7.14528).

Αν τώρα, τιμολογίσουμε το lookback δικαίωμα αγοράς (πώλησης) με βάση τη μέθοδο Monte Carlo, η τιμή του δικαιώματος θα εξαρτάται και από δύο ακόμη μεταβλητές: τον αριθμό του δείγματος του μονοπατιού, *navg*, και τον αριθμό των μονοπατιών, *n*.

Αρχικά, υπολογίζουμε την τιμή του lookback δικαιώματος αγοράς (πώλησης) με *navg*=10 και *n*=10. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι πως η τιμή του lookback δικαιώματος αγοράς (πώλησης) ισούται με 8.0404 (αντίστοιχα, 4.86046) και το σφάλμα υπολογισμού είναι ίσο με 1.36975 (αντίστοιχα, 0.719). Το σφάλμα που έχουμε σε αυτή την περίπτωση είναι πολύ μεγάλο και για το λόγο αυτό δοκιμάζουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των μονοπατιών σε 1000 από 10 που είχαμε προηγουμένως. Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα μας μειώθηκε αλλά μειώθηκε και η τιμή του lookback δικαιώματος αγοράς. Κατόπιν αυτού, αυξάνουμε και τον αριθμό των μονοπατιών από 1000 σε 2000, και τον αριθμό του δείγματος του κάθε μονοπατιού από 10 σε 100. Τώρα, παρατηρούμε ότι το σφάλμα μειώθηκε σε 0.0792859 (αντίστοιχα, 0.0552326) και η τιμή του lookback δικαιώματος αγοράς (πώλησης) πλησιάζει την αρχική μας αποτίμηση, 8.05555 (αντίστοιχα, 6.52941).

Από την προσομοίωση Monte Carlo καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι απαραίτητη η χρήση μεγάλου δείγματος αριθμών προκειμένου να αποφύγουμε σφάλματα υπολογισμού και έτσι να αποτιμήσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα τα δικαιώματα. Με άλλα λόγια,, να έχουμε τη δυνατότητα να προβλέψουμε καλύτερα τις τιμές των δικαιωμάτων και τελικά να προβούμε στην όσο το δυνατόν πιο άριστη επένδυση.

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η ραγδαία ανάπτυξη των χρηματαγορών και το συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον συνέβαλλαν απόφασιστικά στην ανάπτυξη και δημιουργία σύνθετων επενδυτικών προϊόντων τα οποία είναι αρκετά ευέλικτα και έχουν τη δυνατότητα προσαρμογής στις απαιτήσεις του επενδυτικού κοινού το οποίο με την πάροδο του χρόνου γίνεται ολοένα και πιο απαιτητικό.

Τα εξωτικά προϊόντα είναι αποτέλεσμα της ανάγκης των επενδυτών να επενδύσουν σε προϊόντα τα οποία είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις ανάγκες και προσδοκίες τους. Έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόζονται στις απαιτήσεις των επενδυτών και να τους παρέχουν την ελευθερία να επιλέξουν ανάμεσα σε πολλαπλούς συνδυασμούς αποδόσεων και ανάληψης κινδύνων. Επιπλέον, έχουν τη δυνατότητα να λάβουν υψηλές αποδόσεις χωρίς να έχουν απαραίτητα επενδύσει υπέρογκα ποσά, στοιχείο που δεν εμφανίζεται σε κανένα άλλο είδος επένδυσης.

Βέβαια, αυτά τα προϊόντα είναι εξαιρετικά πολύπλοκα και ενέχουν πολλούς κινδύνους. Οι επενδυτές οι οποίοι επελέγουν να επενδύσουν σε εξωτικά προϊόντα θα πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί με τις αποφάσεις τους και να επιλέγουν εκείνα τα προϊόντα τα οποία ταιριάζουν στις απαιτήσεις και τις δυνατότητες που έχουν. Προς διευκόλυνση των επενδυτών και λόγω της πολυπλοκότητας που διακατέχει τα εξωτικά προϊόντα υπάρχουν διάφορες μέθοδοι αποτίμησης -όπως για παράδειγμα η μέθοδος των Black & Scholes και η προσομοίωση Monte Carlo που μελετήσαμε παραπάνω- προκειμένου να μειώνονται όσο είναι δυνατόν οι πιθανότητες λανθασμένων αποφάσεων και να υπάρχει μόνο ο κίνδυνος της αγοράς και τα απρόβλεπτα γεγονότα τα οποία δεν είναι δυνατό να είναι γνωστά εκ των προτέρων.

Παράρτημα 1:

Επίλυση της εξίσωσης (5)

Έστω y(t) = ln[S(t)]. Σύμφωνα με τη λήμμα του Itò, η μεταβολή του y(t) έχει ως εξής:

$$dy(t) = y_s dS(t) + y_{ss}[dS(t)]^2 = \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2}\frac{[dS(t)]^2}{S^2(t)} \qquad \text{(I)}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην (I) την τρέχουσα τιμή της μετοχής *S* με την τιμή του δικαιώματος αγοράς *C* και έχουμε:

$$dy(t) = \mu dt + \sigma dz(t) - \frac{1}{2}[\mu dt + \sigma dz(t)]^2$$

ή (II)

$$dy(t) = \mu dt + \sigma dz(t) - \frac{1}{2}\{\mu^2 (dt)^2 + 2\mu dt \sigma dz(t) + \sigma^2 [dz(t)^2\}$$

Σε τυπικούς στοχαστικούς υπολογισμούς, ο όρος $[dz(t)]^2$ συμπεριφέρεται όπως το *d(t)*, και όλοι οι υπόλοιποι όροι που είναι μεγαλύτερου βαθμού θεωρούνται ίσοι με το μηδέν. Αντικαθιστούμε, λοιπόν, $[dz(t)]^2 = dt$, $(dt)^2 = 0$, και $dtdz(t) = 0$ στη (II) και έχουμε:

$$dy(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz(t) \qquad \text{(III)}$$

Η εξίσωση (III), είναι μία τυπική στοχαστική εξίσωση η οποία μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση στοχαστικής ολοκλήρωσης ως εξής:

$$y(\tau) - y(t) = \int_{t}^{t^*}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\int_{t}^{t^*}dz(t)$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma dz(t)$$

ή

$$\ln S(\tau) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma dz(\tau) \qquad \text{(IV)}$$

Από τη σχέση (IV) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$S(\tau) = S\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma z(\tau)\right]$$

Παράρτημα 2:

Το μοντέλο των Black & Scholes

1. Υπάρχει ένα αξιόγραφο αξίας S, το οποίο μπορεί να αγοραστεί ή πωληθεί σε οποιαδήποτε ποσότητα.Το αγαθό αυτό δεν παρέχει έσοδα με μορφή μερισμάτων ή άλλων χρηματικών καταβολών.

2. Ο επενδυτής μπορεί να δανείσει και να δανειστεί με ένα συγκεκριμένο επιτόκιο r. Με συνεχή ανατοκισμό το επιτόκιο αυτό γίνεται $R=e^r$.

3. Τα δικαιώματα είναι ευρωπαϊκού τύπου.

4. Δεν υπάρχουν εξωτερικοί παράγοντες για να επηρεάζουν τις αποδόσεις, όπως φόροι, έξοδα συναλλαγών κ.λ.π.

5. Η πορεία της αξίας αγαθού ή νομίσματος και γενικά ενός τίτλου ακολουθεί την πορεία που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Leftrightarrow dS / S = \mu dt + \sigma dz \qquad \text{(I)}$$

όπου,

μ είναι η μέση απόδοση του τίτλου σε ποσοστιαία μορφή ανά περίοδο

σ η τυπική απόκλιση της τιμής του τίτλου

dS μία στοιχειώδης αλλαγή της τιμής του τίτλου

dt μία στοιχειώδης χρονική μεταβολή

dz η αλλαγή της τυχαίας μεταβλητής z κατά τη χρονική διάρκεια dt.

Η μεταβλητή z ακολουθεί τη μέθοδο Wiener που είναι μία ειδική μορφή της μεθόδου Markov. Το dz σχετίζεται με το dt μέσω της σχέσης $dz=\varepsilon\sqrt{dt}$, όπου ε είναι ένα τυχαίο δείγμα από μία κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Η μέση τιμή του dz είναι 0 και η διακύμανση dt. Πράγματι:

$$\begin{aligned} &E(dz) = E(\varepsilon\sqrt{dt}) = \sqrt{dt}E(\varepsilon) = \sqrt{dt}\times 0 = 0\ \& \\ &Var(dz) = \mathrm{var}(\varepsilon\sqrt{dt}) = (\sqrt{dt})^2\ \mathrm{var}(\varepsilon) = dt\times 1 = dt\ \&\ \sigma = \sqrt{\mathrm{var}(dz)} = \sqrt{dt} \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

όπου E(.) παριστάνει τη μέση τιμή και Var(.) τη διακύμανση.

Έστω ότι η μεταβολή του z κατά τη διάρκεια μιας μεγάλης χρονικής περιόδου ιούται με T. Τότε αυτή η μεταβολή θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μεταβολών που συντελούνται τις χρονικές στιγμές dt. Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν N τέτοιες στιγμές όπου N=T/ dt, ισχύει:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{dt}$$

$$E[z(T) - z(0)] = 0$$

$$Var[z(T) - z(0) = Ndt = T$$

$$\sigma = \sqrt{T}$$

Με τις υποθέσεις αυτές για το dz εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η απόδοση της μετοχής (dS/S) για κάθε χρονική περίοδο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μdt και απόκλιση $\sigma\sqrt{T}$ και η τιμή της (S) τη λογαριθμική κανονική κατανομή. Ένα χαρακτηριστικό της κατανομής αυτής είναι ότι το μέγεθος της μέσης αλλαγής της τιμής είναι μεγαλύτερο για μεγαλύτερα επίπεδα τιμών. Επίσης, η τιμή S δεν μπορεί να γίνει 0 ή αρνητική. Μειονέκτημα της λογικής αυτής είναι η υπόθεση της συνέχειας που ακολουθεί η τιμή με το χρόνο. Σε αντίθεση με αυτές τις μεθόδους – που είναι γνωστές σαν μέθοδοι διάχυσης (diffusion processes)- οι μέθοδοι Poisson επιτρέπουν απότομες μεταβολές των τιμών που είναι πιο ρεαλιστικές στον πραγματικό κόσμο των χρηματαγορών.

Μέθοδοι στις οποίες οι μέσες τιμές και αποκλίσεις των μεταβλητών εξαρτώνται από τις τρέχουσες τιμές και το χρόνο ονομάζονται μέθοδοι Ito [π.χ. dx= μ(x,t)dt+σ(x,t)dz με f(x,t) να παρουσιάζει γενικά συνάρτηση ως προς x, t]. Η μέθοδος που ακολουθεί η μεταβολή μιας μετοχής, έτσι όπως περιγράφεται από την εξίσωση (I) είναι μία μέθοδος Ito. O Ito απέδειξε ότι αν μία μεταβλητή ακολουθεί τη μέθοδο Ito και μία συνάρτηση της μεταβλητής αυτής και του χρόνου f(x,t) είναι διπλά διαφορίσιμη, τότε:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dz$$

Έστω ότι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς είναι συνάρτηση της τιμής της μετοχής και του χρόνου και γνωρίζοντας ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής ακολουθεί τη μέθοδο Ito όπως αυτή δίδεται από την εξίσωση (I) εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito και έχουμε:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S dz \qquad \text{(II)}$$

Έστω, τώρα, ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο απαρτίζεται από ένα δικαίωμα αγοράς και την πώληση $\frac{\partial C}{\partial S}$ μετοχών. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι:

$$\Pi = C - \frac{\partial C}{\partial S} S$$

Μία στοιχειώδης αλλαγή στην τιμή της μετοχής προκαλέι αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή:

$$d\Pi = d\,C - \frac{\partial C}{\partial S} dS$$

και αντικαθιστώντας τα dC και dS από τις σχέσεις (II) και (I) προκύπτει:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)dt \qquad \text{(III)}$$

Καθώς ο παράγοντας dz έχει απαλληφθεί από την εξίσωση (III) το χαρτοφυλάκιο είναι απαλλαγμένο από κάθε κίνδυνο και συνεπώς πρέπει να έχει απόδοση όσο και ένα ομόλογο του δημοσίου που προσφέρει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free-rate), r. Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε την εμφάνιση αρμπιτράζ. Συνεπώς έχουμε:

$$d\Pi = r\Pi dt \qquad \text{(IV)}$$

Συνδιάζοντας τις (III) και (IV) προκύπτει η βασική εξίσωση αξιολόγησης των δικαιωμάτων αγοράς[19], η οποία είναι:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(C-\frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt \Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial t}+rS\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=rC \qquad \text{(V)}$$

Για την επίλυση της (V) χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους τρεις περιορισμούς:

1. Η αξία του δικαιώματος αγοράς κατά την ημερομηνία της λήξης του είναι $\max[0, S_T - X]$.
2. Όταν $S_t = 0$ η αξία του δικαιώματος αγοράς είναι 0
3. Καθώς το S προσεγγίζει το άπειρο το $\frac{\partial C}{\partial S}$ τείνει στο 1.

Επιλύοντας την (V) με τους τρεις ανωτέρω περιορισμούς προκύπτει η εξίσωση Black & Scholes για ένα δικαίωμα αγοράς:

$$C = S_o N[d] - Xe^{-rT} N[d-\sigma\sqrt{T}]$$

όπου

$$d = \frac{\ln(S_o X)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

και για ένα δικαίωμα πώλησης:

$$P = -S_o N[-d] + Xe^{-rT} N[-d+\sigma\sqrt{T}]$$

όπου

$$d = \frac{\ln(S_o X)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

---

[19] Ο αντίστοιχος τύπος για το put είναι: $\frac{\partial P}{\partial t}+\left(r-\sigma^2/2\right)\frac{\partial P}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}=rP$

Παράρτημα 3:

```
Needs["Derivatives`BlackScholes`"]

aone[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] :=
  (Log[p/pmin] + (r - q + sd^2/2) * t) / (sd * Sqrt[t]);

atwo[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] :=
  aone[p, pmin, sd, r, q, t] - sd * Sqrt[t];

athree[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] :=
  (Log[p/pmin] + (q - r + sd^2/2) * t) / (sd * Sqrt[t]);

yone[p_, pmin_, sd_, r_, q_] :=
  -2 * (r - q - sd^2/2) * Log[p/pmin] / sd^2;

bone[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] :=
  (Log[pmax/p] + (-r + q + sd^2/2) * t) / (sd * Sqrt[t]);


btwo[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] :=
  bone[p, pmax, sd, r, q, t] - sd * Sqrt[t];

bthree[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] :=
  (Log[pmax/p] + (r - q - sd^2/2) * t) / (sd * Sqrt[t]);
ytwo[p_, pmax_, sd_, r_, q_] :=
  2 * (r - q - sd^2/2) * Log[pmax/p] sd^2;
LookBackCall[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] :=
 p * Exp[-q * t] * Norm[aone[p, pmin, sd, r, q, t]] -
  p * Exp[-q * t] * sd^2 * Norm[-aone[p, pmin, sd, r, q, t]] / (2 * (r - q)) -
  pmin * Exp[-r * t] (Norm[atwo[p, pmin, sd, r, q, t]] -
     sd^2 * Exp[yone[p, pmin, sd, r, q]] * Norm[-athree[p, pmin, sd, r, q, t]] / (2 * (r - q)))
LookBackCallDelta[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackCall[p, pmin, sd, r, q, t], p];
LookBackCallGamma[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackCall[p, pmin, sd, r, q, t], {p, 2}];
LookBackCallTheta[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[-LookBackCall[p, pmin, sd, r, q, t], t];
LookBackCallVega[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackCall[p, pmin, sd, r, q, t], sd];
LookBackCallRho[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackCall[p, pmin, sd, r, q, t], r];
LookBackPut[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] :=
 -p * Exp[-q * t] * Norm[btwo[p, pmax, sd, r, q, t]] +
  p * Exp[-q * t] * sd^2 * Norm[-btwo[p, pmax, sd, r, q, t]] / (2 * (r - q)) +
  pmax * Exp[-r * t] (Norm[bone[p, pmax, sd, r, q, t]] -
     sd^2 * Exp[ytwo[p, pmax, sd, r, q]] * Norm[-bthree[p, pmax, sd, r, q, t]] / (2 * (r - q)))
```

```
LookBackPutDelta[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackPut[p, pmax, sd, r, q, t], p];
LookBackPutGamma[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackPut[p, pmax, sd, r, q, t], {p, 2}];
LookBackPutTheta[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[-LookBackPut[p, pmax, sd, r, q, t], t];
LookBackPutVega[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackPut[p, pmax, sd, r, q, t], sd];
LookBackPutRho[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] =
  D[LookBackPut[p, pmax, sd, r, q, t], r];
dzero[p_, k_, sd_, r_, q_, t_] :=
  (Log[p/k] + (r + sd^2/2)*t)/(sd*Sqrt[t]);
done[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] := dzero[p, pmax, sd, r, q, t];
dtwo[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] := dzero[p, pmin, sd, r, q, t];
CVLookBackCall[p_, pmin_, sd_, r_, q_, t_] :=
 p*Norm[dtwo[p, pmin, sd, r, q, t]] -
  Exp[-r*t]*pmin*Norm[dtwo[p, pmin, sd, r, q, t] - sd*Sqrt[t]] +
  Exp[-r*t]*(sd^2/(2*r))*p*(
   (p/pmin)^(-2*r/sd^2)*Norm[-dtwo[p, pmin, sd, r, q, t] + 2*r*-
          Sqrt[t]/sd] -
    Exp[r*t] Norm[-dtwo[p, pmin, sd, r, q, t]])
CVLookBackPut[p_, pmax_, sd_, r_, q_, t_] :=
 -p*Norm[-done[p, pmax, sd, r, q, t]] +
  Exp[-r*t]*pmax*Norm[-done[p, pmax, sd, r, q, t] + sd*Sqrt[t]] +
  Exp[-r*t]*(sd^2/(2*r))*p*(
   -(p/pmax)^(-2*r/sd^2)*Norm[done[p, pmax, sd, r, q, t] - 2*r*-
          Sqrt[t]/sd] +
    Exp[r*t] Norm[done[p, pmax, sd, r, q, t]])
CVCallOnMax[p_, pmax_, k_, sd_, r_, q_, t_] :=
 If[k ≥ pmax,
  p*Norm[dzero[p, k, sd, r, q, t]] -
   Exp[-r*t]*k*Norm[dzero[p, k, sd, r, q, t] - sd*Sqrt[t]] +
   Exp[-r*t]*(sd^2/(2*r))*p*(
    -(p/k)^(-2*r/sd^2)*Norm[dzero[p, k, sd, r, q, t] - 2*r*Sqrt[t]/sd] +
     Exp[r*t]*Norm[dzero[p, k, sd, r, q, t]]),
  Exp[-r*t]*(pmax - k) +
   p*Norm[done[p, pmax, sd, r, q, t]] -
   Exp[-r*t]*pmax*Norm[done[p, pmax, sd, r, q, t] - sd*Sqrt[t]] +
   Exp[-r*t]*(sd^2 (2*r))*p*(-(p/pmax)^(-2*r/sd^2)*Norm[done[p, pmax, sd,
         r, q, t]
       - 2*r*Sqrt[t]/sd] +
     Exp[r*t]*Norm[done[p, pmax, sd, r, q, t]])]
```

```
p = pmin = 50;
sd = 20 %
t = 1;
r = 50 %;
q = 0.
p = pmin
CVLookBackCall[50., 50., 0.2, 0.05, 0, 1]
1000
0.
50
1.72235
LookBackCall[50., 50., 0.2, 0.05, 0, 1]
8.6084
CVLookBackCall[50., 40., 0.2, 0.05, 0, 1]
11.1358
LookBackCall[50., 40., 0.2, 0.05, 0, 1]
12.6869
p = pmax = 50;
sd = 20 %
t = 1;
r = 5 %;
q = 0.
p = pmax
CVLookBackPut[50., 50., 0.2, 0.05, 0, 1]
1000
0.
50
0.259236
LookBackPut[50., 50., 0.2, 0.05, 0, 1]
7.14528

CVLookBackPut[50, 60., 0.2, 0.05, 0, 1]
0.173376
LookBackPut[50, 60., 0.2, 0.05, 0, 1]
11.1477
p = pmax = 50;
sd = 20 %
t = 1;
r = 5 %;
q = 0.
p = pmax
CVCallOnMax[50, 50, 50, 0.2, 0.05, 0, 1]
1000
0.
50
9.58381
CVCallOnMax[50., 60., 50., 0.2, 0.05, 0, 1]
11.1502
CVCallOnMax[50., 60., 70., 0.2, 0.05, 0, 1]
```

```
0.744137
p = pmin = 50;
sd = 20 %
t = 1;
r = 5 %;
q = 0.
p = pmin
CVPutOnMin[50, 50, 50, 0.2, 0.05, 0, 1]
1000
0.
50
6.16987
CVPutOnMin[50., 45., 40., 0.2, 0.05, 0, 1]
0.736034
CVPutOnMin[50., 45., 60., 0.2, 0.05, 0, 1]
15.4371
Needs["Statistics`DescriptiveStatistics`"];
normpairat = Compile[{mu, sigma}, Module[{va, vb, rad = 2.0, den},
    While[rad ≥ 1.00, (va = 2.0 * Random[] - 1.0;
      vb = 2.0 * Random[] - 1.0; rad = va * va + vb * vb)];
    den = Sqrt[-2.0 * Log[rad] / rad];
    {mu + sigma * va * den, mu - sigma * va * den,
     mu + sigma * vb * den, mu - sigma * vb * den}]];

coarsepathpairat[s_, r_, q_, σ_, t_, n_, navg_] :=
  Module[{mpath = N[(r - q - σ^2 / 2) * t / (navg - 1)], spath = N[σ Sqrt[t / (navg - 1)]]},
   Flatten[Table[Transpose[
      NestList[# Exp[normpairat[mpath, spath]] &, {s, s, s, s}, navg - 1]],
     {i, n}], 1]];
MCCallOnMax[s_, smax_, k_, r_, q_, σ_, t_, n_, navg_] :=
 (Exp[-t * r] *
    Map[Max[0, Max[Prepend[#, smax]] - k] &,
     coarsepathpairat[s, r, q, σ, t, n, navg]]) //
  {Mean[#], StandardErrorOfSampleMean[#]} &
MCLookBackCall[s_, smin_, r_, q_, σ_, t_, n_, navg_] :=
 (Exp[-t * r] *
    Map[Last[#] - Min[Prepend[#, smin]] &,
     coarsepathpairat[s, r, q, σ, t, n, navg]]) //
  {Mean[#], StandardErrorOfSampleMean[#]} &
MCLookBackPut[s_, smax_, r_, q_, σ_, t_, n_, navg_] :=
 (Exp[-t * r] *
    Map[Max[Prepend[#, smax]] - Last[#] &,
     coarsepathpairat[s, r, q, σ, t, n, navg]]) //
  {Mean[#], StandardErrorOfSampleMean[#]} &

MCLookBackCall[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 10, 10]
```

```
{7.67051, 1.23402}
MCLookBackCall[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 1000, 10]

{7.12008, 0.11275}
MCLookBackCall[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 10]

{7.18499, 0.0813897}
MCLookBackCall[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 100]

{8.13355, 0.0809245}
MCLookBackCall[50, 40, 0.05, 0, 0.2, 1, 1000, 10]

{12.3859, 0.146052}
MCLookBackPut[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 10, 10]

{5.82136, 0.815675}
MCLookBackPut[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 1000, 10]

{5.23272, 0.0776251}
MCLookBackPut[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 10]

{5.23317, 0.0544848}
MCLookBackPut[50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 100]

{6.50046, 0.0551474}
MCCallOnMax[50, 50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 10, 10]

{7.51131, 1.23708}
MCCallOnMax[50, 50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 1000, 10]

{7.69654, 0.120915}
MCCallOnMax[50, 50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 10]

{7.63355, 0.0828964}
MCCallOnMax[50, 50, 50, 0.05, 0, 0.2, 1, 2000, 100]

{9.00176, 0.0856292}
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Andersen, L.B.G., and R. Brotherton – Rathecliffe. "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach," *Journal of Computation Finance,* vol. 1, no. 2 (Winter 1997/98).

Baumol, W.J., Malkiel, B. G. and Quandt, R. E., 1966, "The Valuation of Convertible Securities," *Quarterly Journal of Economics* (February): 48-59.

Bergman, Y., 1983, "Pricing Path Contigent Claims," *Research In Finance* 5:229-241.

Black, Fisher, 1995, "Forward: The Many Faces of Derivatives," in *Handbook of Equity Derivatives.* J. C. Francis, W. W. Toy, and J. G. Whittaker, Irwin(Eds.).

Black, F. and Scholes M., 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81: 637-654.

Boyle, P., 1977 "Options: a Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Econamics* 4: 323-338.

Boyle, P., 1988, "A Lattice Framework for Option Pricing with two State Variables," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2: 241-250.

Boyle, P.P., J Evnine, and S. Gibbs. "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims," *Review of Financial Studies,* 2,2 (1998).

Boyle, P.P., and S.H.Lau. "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994).

Boyle, P. P. and Tse, Y. K., 1990, "An Algorithm for Computing Variables of Options on the Maximum or Minimum of Several Assets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*" 25: 231-237.

Brennan, M. and Schwartz, E., 1977, "The Valuation of American Put Options," *Journal of Finance* 32: 449-462.

Broadie, M., P. Glasserman, and S. G. Kou. "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options," *Mathematical Finance* 7, 4 (Octomber 1997).

Broadie M., P. Glasserman, and S. G. Kou. "Connecting Discrete and Continuous Path – Dependent Options," *Finance and Stochastics*, 2 (1998).

Chalasani, P., S. Jha, and A. Varikooty, 1997, "Accurate Approximation for European-style Asian Options."

Clewlow, L., and C. Strickland. *Exotic Options: The State of the Art*. London: Thomson Business Press, 1997.

Conze, A., and R. Viswanathan. "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options," *Journal of Finance*, 46 (1991).

Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M., 1979, "Option Pricing: "A Simplified Approach," *Journal of Financial Econamics* 7: 229-263.

Curran, M. "Beyond Average Intelligence," *RISK*, (October 1992).

Derman, E., D. Ergener, and I. Kani. "Stations Replication," *Journal of Derivatives*, 2, 4 (Summer 1995).

Derman, E., I. Kani, and N. Chriss. "Impilied Trinomial Trees of the Volatility Smile," *Journal of Derivatives*, 3, 4 (Summer 1996).

Garman, M. "Recollection in Tranquility," *RISK*, (March 1989).

Garman, M., 1994, "New Methodologies in Valuing and Hedging Lookback Options," paper presented at the Risk Magazine conference in New York on April 28-29.

Gaustineau, G., 1993b, "An Introduction to Special-Purpose Derivatives: Path-Dependent Options," *The Journal of Derivatives* 1(2): 78-86.

Geske, R. "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7 (1979).

Geske, R., and Johnson, H. E., 1984a, "The American Put Options Valued Analytical," *Journal of Finance* 39: 1511-1524.

Goldman, B., H. Sosin, and M. A. Gatto. "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979).

Haykov, J. M., 1993, "A Better Control Variate for Pricing Standard Asian Options," *Journal of Financial Engineering* 2(3): 207-216.

Heynen, R. and Kat, H., 1994b, "Partial Barrier Options," *Journal of Financial Engineering* 3(3/4): 253-274.

Huang, J., Subrahmanyam, M., G. and Yu, G. G., 1995, "Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method," Forthcoming in *Review of Financial Studies* 9(1).

Hudson, M. "The Value of Going Out," *RISK*, (March 1991).

Hull, J., and A. White. "Efficient Procedures for Valuing European and American Path –Dependent Options," *Journal of Derivatives*, (Fall 1993).

Hull, J., and A. White. "Finding the Keys," *RISK*, (September 1993).

Huynh, C. B., 1994, "Back to Baskets," RISK 7(5): 59-61.

Johnson, H. "Options on the Maximum and Minimum of Several Assets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 3 (September 1987).

Kemma, A., and A. Vorst. "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values," *Journal of Banking and Finance*, 14 (March 1990).

Krzyzak, K., 1990, "Asian Elegance," RISK (December 89-January 1990): 30-34, 49.

Levy, E. "Pricing Method for Currency Options," *Journal of International Money and Finance,* 11 (1992).

Levy, E., and S. M. Turnbull. "Average Intelligence," *RISK*, (February 1992).

Longstaff, F.A., 1995, "Hedging Interest Rate Risk with Options on Average Interest Rates," *The Journal of Fixed Income* (March): 37-45.

Margrabe, W. "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978).

Margrabe, W., 1978, "The Valuation of An Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance* 33: 177-186.

Merton, R., 1973, "The Theory of Rational Option Pricing," *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141-183.

Milevsky, M. A., and S. E. Posner. "Asian Options: The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution," *Journal of Financial and Quanitative Analysis*, 33, 3 (September 1998).

Pearson, N.D., 1995,"An Efficient Apprach For Pricing Spread Options," *Journal of Derivatives* 3(1): 76-91.

Reiner, E. and Rubinstein, M., 1991a "Breaking Down the Barrier," RISK 4(8): 28-35.

Rogers, L. and Z. Shi, 1995, "The Value of an Asian Option," *J. Appl. Prob.* 32: 1077-1088.

Ritchken, P., L. Sankarasubramanian, and A. M. Vijh. "The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average," *Management Science*, 39 (1993).

Richken, P. "On Pricingg Barrier Options," *Journal of Derivatives*, 3, 2 (Winter 1995).

Rubinstein, M. and E. Reiner. "Breaking Down the Barriers," *RISK*, (September 1991).

Rubinstein, M. "Double Trouble," *RISK*, (December 1991 – January 1992).

Rubinstein, M. "One for Another," *RISK*, (July – August 1991).

Rubinstein, M. "Options for the Undecided," *RISK*, (April 1991).

Rubinstein, M. "Pay Now, Choose Later," *RISK*, (February 1991).

Rubinstein, M. "Somewhere Over the Rainbow," *RISK*, (November 1991).

Rubinstein, M. "Two in One," *RISK*, (May 1991).

Rubinstein, M., and E. Reiner. "Unscrambling the Binary Code," *RISK*, (October 1991).

Schroder, M., 1989, "Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula," *Journal of Finance* (March): 211-219.

Shaw, W., "Modelling Financial Derivatives with Mathematica" (1998).

Snyder, G. L., 1969, "Alternative Forms of Options," *Financial Analysts Journal* 25: 93-99.

Stulz, R. "Options on the Minimum or Maximum of Two Assets," *Journal of Financial Economics*, 10 (1982).

Turnbull, S. M., and L. M. Wakeman. "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991).

Vasick, O. A., 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5: 79-93.

Whaley, R. E., 1981, "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends," *Journal of Financial Economics* 9: 207-211.

Zhang, P. G., "Exotic Options-A Guide to Second Generation Options" (August 1995).