

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



«Σύγκριση Υποδειγμάτων Ετεροσκεδαστικότητας και Markov
Switching Υποδειγμάτων»

Ονοματεπώνυμο: Λούζης Δημήτριος

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των απαραίτητων
προϋποθέσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

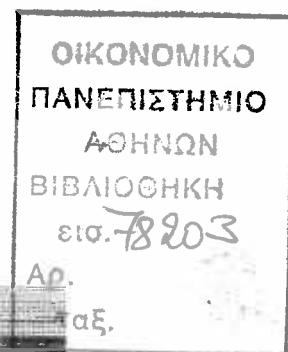
Αθήνα

Οκτώβριος, 2004



ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



«Σύγκριση Υποδειγμάτων Ετεροσκεδαστικότητας και Markov
Switching Υποδειγμάτων»

Ονοματεπώνυμο: Λούζης Δημήτριος

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των απαραίτητων
προϋποθέσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης



Αθήνα

Οκτώβριος, 2004



Εγκρίνουμε τη διατριβή του Δημήτριου Λούζη

[Όνομα Υπεύθυνου Καθηγητή]

Ιωάννης Βρόντας

[Υπογραφή]



[Πανεπιστήμιο]

[Όνομα Εξεταστή Καθηγητή]

Πέτρος Δελφίνης

[Υπογραφή]



[Πανεπιστήμιο]

[Ημερομηνία]

21/1/05

Περιεχόμενα

Περίληψη της Εργασίας

σελ. 5



Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

7

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών (Financial Time Series) 10

2.1 Οι Χρηματοοικονομικές Χρονολογικές Σειρές (Financial Time Series, FTS)	10
2.2 Εμπειρικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών (FTS)	10
2.2.1 Unit root property των τιμών και των λογαρίθμων των FTS	10
2.2.2 Αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των αποδόσεων μιας FTS	12
2.2.3 «Παχιές Ουρές» (Fat Tails) στις κατανομές των FTS	12
2.2.4 Μεγάλα «άλματα» (“Large jumps”) στις τιμές των FTS	14
2.2.5 “Volatility clustering” phenomenon	15
2.2.6 Μη-συμμετρική αντίδραση των FTS σε μη αναμενόμενα νέα-shocks	16
2.2.7 Non-trading days or “Holiday effect”	17
2.2.8 Ασυμμετρία στην κατανομή των αποδόσεων	17
2.2.9 Άλλα χαρακτηριστικά των FTS	18

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα 20

3.1 Οι λόγοι που οδήγησαν στην μοντελοποίηση της υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας	20
3.1.1 Ο ρόλος και η σημασία του κινδύνου και της αβεβαιότητας στη χρηματοοικονομική θεωρία	20
3.1.2 Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των FTS	21
3.2 Υποδείγματα ARCH	22
3.2.1 Ορισμός μιας ARCH διαδικασίας (ARCH process)	22
3.3 Υποδείγματα GARCH	25



3.4 Χαρακτηριστικά και ιδιότητες των ARCH και GARCH υποδειγμάτων	26
3.4.1 Τα ARCH και GARCH ως AR και ARMA	26
3.4.2 Στασιμότητα ARCH και GARCH διαδικασιών	28
3.4.3 Το φαινόμενο “fat tails”	31
3.4.4 Εκτίμηση των παραμέτρων των ARCH και GARCH υποδειγμάτων	31
3.5 Προβλέψεις με ARCH και GARCH υποδείγματα	36
 Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα	38
4.1 Εισαγωγικά	38
4.1.1 Γενικά: Time-varying parameters υποδείγματα	38
4.1.2 Μαρκωβιανή Αλυσίδα (Markov chain)	40
4.2 Το Απλό Markov regime-switching υπόδειγμα (Simple Markov Regime-Switching model, SMRS)	41
4.3 Τα Markov Switching ARCH (MS-ARCH) υποδείγματα	42
4.4 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση των Markov switching υποδειγμάτων και την εξαγωγή πιθανολογικών συμπερασμάτων (probabilistic inference)	45
4.4.1 Περιγραφή του αλγορίθμου για N-states και το γενικό Markov Switching υπόδειγμα	45
4.4.2 Περιγραφή του αλγορίθμου σε βήματα	47
4.4.3 Το πρόβλημα των αρχικών τιμών	48
4.4.4 Η μεγιστοποίηση της log-likelihood ως φυσικό παράγωγο του αλγορίθμου	59
4.5 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση του απλού Markov regime-switching υποδείγματος (SMRS model) για 2 states	50
4.5.1 Περιγραφή του αλγορίθμου και της διαδικασίας εκτίμησης των παραμέτρων	54
4.6 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση του απλού Markov regime-switching υποδείγματος (SMRS model) για 3 states	57
4.7 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση των Markov switching ARCH (MS-ARCH) υποδειγμάτων για 2 states	61
4.8 Προβλέψεις με Markov switching υποδείγματα	62
4.8.1 Forecasted Probabilities	62
4.8.2 Προβλέψεις για τη παρατηρούμενες μεταβλητές	63

4.8.3 Προβλέψεις για την υπό-συνθήκη διακύμανση με MS-ARCH υποδείγματα	65
Κεφάλαιο 5: Μέτρα σύγκρισης των υποδειγμάτων	67
Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα	69
6.1 Τα δεδομένα και η μεθοδολογία	69
6.2 Η εκτίμηση των υποδειγμάτων	69
6.2.1 Εκτίμηση του GARCH(1,1) υποδείγματος	70
6.2.2 Εκτίμηση του απλού Markov Regime-Switching υποδείγματος (SMRS) για 2 states	71
6.2.3 Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) common b υποδείγματος	74
6.2.4 Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) υποδείγματος	77
6.2.5 Εκτίμηση του απλού Markov Regime-Switching υποδείγματος (SMRS) για 3 states	79
6.2.6 Εκτίμηση του MS-ARCH(3,1) common B υποδείγματος για το δείκτη DAX	82
6.3 Σύγκριση των υποδειγμάτων με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητα	83
6.4 Συμπεράσματα	90
Βιβλιογραφία – Αρθρογραφία	92

Περίληψη της Εργασίας

Αντικείμενο της εργασίας είναι τα GARCH και Markov Regime –Switching υποδείγματα που εφαρμόζονται σε χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές και στόχος της είναι η σύγκριση των δύο αυτών κατηγοριών υποδειγμάτων με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητα. Η εργασία διαρθρώνεται σε 6 κεφάλαια εκ των οποίων το πρώτο είναι η εισαγωγή, όπου περιγράφουμε περιληπτικά τα υποδείγματα με τα οποία θα ασχοληθούμε και αναφέρουμε το σκοπό της εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά των χρονολογικών χρηματοοικονομικών σειρών όπως το “volatility clustering” φαινόμενο, οι «παχιές» ουρές (“fat tails”) των κατανομών των χρηματοοικονομικών σειρών, τα «μεγάλα άλματα» στις τιμές των σειρών, το leverage effect και άλλα.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε πότε μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί μια ARCH ή GARCH διαδικασία, εκφράζουμε τα ARCH και GARCH ως ένα AR και ARMA αντίστοιχα και ασχολούμαστε με το θέμα της στασιμότητας μιας ARCH-GARCH διαδικασίας. Παράλληλα αναφερόμαστε στη μέθοδο εκτίμησης των υποδειγμάτων, η οποία είναι η μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (MLE) καθώς και στον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούμε προβλέψεις με ένα GARCH υπόδειγμα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στα time-varying parameters υποδείγματα και αναφερόμαστε στη Μαρκωβιανή Αλυσίδα (Markov Chain) που είναι ο πιο απλός τρόπος να περιγράψουμε τη διαδικασία που ακολουθεί μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει διακριτές τιμές. Στη συνέχεια αναφέρουμε τα Markov Switching υποδείγματα που θα ασχοληθούμε, όπως το απλό Markov Regime Switching υπόδειγμα στο οποίο υποθέτουμε ότι ο μέσος και η διακύμανση μεταβάλλονται ανάλογα με το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία και τα Markov Switching ARCH υποδείγματα. Επίσης περιγράφουμε τον αλγόριθμο που ανέπτυξε ο Hamilton για την εξαγωγή πιθανοθεωρητικών συμπερασμάτων σχετικά με το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία αλλά και για την εκτίμηση των παραμέτρων των υποδειγμάτων με MLE. Ο αλγόριθμος αναπτύσσεται για 2 και 3 states για τα υποδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ακόμη αναφερόμαστε στον τρόπο με τον οποίο κάνουμε προβλέψεις με ένα Markov Switching υπόδειγμα.



Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρουμε τα κριτήρια με βάση τα οποία θα συγκρίνουμε τα υποδείγματα. Τα κριτήρια αυτά είναι το Mean Squared Error και το Mean Absolute Deviation και για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούμε τη realized volatility.

Στο έκτο κεφάλαιο εκτιμούμε ένα GARCH(1,1) και πέντε Markov Switching υποδείγματα τα οποία και τα συγκρίνουμε με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητα. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε είναι ο χρηματιστηριακός δείκτης του Hong Kong (δείκτης Hang Seng) και ο χρηματιστηριακός δείκτης της Φρανκφούρτης (δείκτης DAX). Το βασικό συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι τα Markov Switching υποδείγματα μας δίνουν καλύτερες προβλέψεις από το GARCH(1,1) υπόδειγμα.





Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας στηρίζεται στην έννοια του κινδύνου των χρηματοοικονομικών στοιχείων (π.χ. μετοχές) ο οποίος εκφράζεται μέσω της διακύμανσής τους. Η αναμενόμενη (προβλεπόμενη) διακύμανση των χρηματοοικονομικών στοιχείων είναι ιδιαίτερα σημαντική σε χρηματοοικονομικές αποφάσεις όπως η επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου, η διαχείριση κινδύνων και η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Τα υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούνται περισσότερο για την μοντελοποίηση της διακύμανσης των χρονολογικών σειρών είναι τα ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) υποδείγματα, τα οποία εισήχθησαν στην βιβλιογραφία από τον Engle (1982) και γενικεύτηκαν σε GARCH (Generalized ARCH) υποδείγματα από τον Bollerslev (1986). Η διάδοση των ARCH και GARCH υποδειγμάτων οφείλεται στο γεγονός ότι «συλλαμβάνουν» (“capture”) πολλά από τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, όπως επί παραδείγματι το “volatility clustering” φαινόμενο, αλλά και στο γεγονός ότι είναι εύκολα στην κατανόηση και την εκτίμησή τους. Σύμφωνα με τα υποδείγματα αυτά η διακύμανση μιας χρονολογικής σειράς αλλάζει διαχρονικά (heteroscedasticity), και εξαρτάται από τις τιμές των τυχαίων σφαλμάτων στο τετράγωνο και τις τιμές της διακύμανσης σε προηγούμενες χρονικές περιόδους (autoregressive conditional).

Η καλή στατιστική προσαρμογή των υποδειγμάτων GARCH δεν μεταφράζεται απαραίτητα σε καλές προβλέψεις στη διακύμανση των χρηματοοικονομικών σειρών. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τα «απότομα άλματα» (“sudden jumps”) που εμφανίζουν οι τιμές των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών που ίσως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά τους, οδήγησαν σε εναλλακτικούς τρόπους μοντελοποίησης της διακύμανσης. Ένας από τους τρόπους αυτούς είναι τα Markov Regime-Switching υποδείγματα. Σύμφωνα με τα υποδείγματα αυτά, η οικονομία διέπεται από διαφορά επίπεδα ανάλογα με τη φάση στην οποία βρίσκεται. Επί παραδείγματι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν δύο επίπεδα (states) στην οικονομία, η ανάπτυξη κατά την οποία θετικά νέα εισέρχονται στην αγορά και η διακύμανση των χρηματοοικονομικών σειρών είναι μικρή και η ύφεση, κατά την οποία «κακά» νέα εισέρχονται στην αγορά, οι προσδοκίες των επενδυτών είναι άσχημες και οι επενδυτικές τους αποφάσεις χαρακτηρίζονται από σύγχυση με αποτέλεσμα η διακύμανση να



Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

είναι υψηλή. Ο αναλυτής των χρηματοοικονομικών σειρών δεν παρατηρεί τα επίπεδα (states) αλλά μπορεί να εξάγει πιθανοθεωρητικά συμπεράσματα για την εμφάνιση του ενός ή του άλλου state της οικονομίας από το δείγμα που έχει στη διάθεσή του. Αν υποθέσουμε ότι τα state παίρνουν διακριτές τιμές και ακολουθούν μια Μαρκωβιανή Άλυσίδα (“Markov Chain”) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Hamilton (1989) για να εξάγουμε συμπεράσματα για την πιθανότητα εμφάνισης του ενός state της οικονομίας ή του άλλου. Ένα φυσικό παράγωγο του αλγορίθμου του Hamilton είναι η αξιολόγηση και μεγιστοποίηση της log-likelihood, η οποία θα μας δώσει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του υποδείγματος που υποθέτουμε ότι οι παράμετροί του αλλάζουν ανάλογα με το state της οικονομίας. Επί παραδείγματι μπορούμε να υποθέσουμε το εξής απλό υπόδειγμα: $r_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2)$ όπου το s_t είναι το state που βρίσκεται η οικονομία και μπορεί να πάρει διακριτές τιμές και r_t είναι οι αποδόσεις ενός χρηματιστηριακού δείκτη. Σύμφωνα με αυτό το υπόδειγμα, η διακύμανση της σειράς μεταβάλλεται διαχρονικά, όχι λόγω των τιμών των τυχαίων σφαλμάτων στο τετράγωνο σε προηγούμενες χρονικές περιόδους, όπως στα ARCH υποδείγματα, αλλά παίρνει τιμές ανάλογα με το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία. Αν για παράδειγμα έχουμε υποθέσει ότι η οικονομία διέπεται από N states, τότε η διακύμανση λαμβάνει μία από τις N δυνατές τιμές ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διακύμανση μεταβάλλεται διαχρονικά με βάση το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία μας, το οποίο αποτελεί μια μη-παρατηρήσιμη διακριτή τυχαία μεταβλητή για την οποία μπορούμε να εξάγουμε πιθανοθεωρητικά συμπεράσματα σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Hamilton. Το προαναφερόμενο υπόδειγμα είναι η απλούστερη μορφή ενός Markov Switching υποδείγματος. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διακύμανση μιας σειράς, η οποία ακολουθεί μια ARCH διαδικασία επηρεάζεται και από το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία στα πλαίσια ενός Markov Switching υποδείγματος. Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι ενός ARCH υποδείγματος αλλάζουν διαχρονικά ανάλογα με το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία.

Όπως γίνεται αντίληπτό τα GARCH και Markov Switching υποδείγματα είναι το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Ο **σκοπός της εργασίας** είναι η σύγκριση των δύο αυτών κατηγοριών υποδειγμάτων με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητα. Η σύγκριση γίνεται με βάση την προβλεπτική τους ικανότητα γιατί, όπως προαναφέραμε, η προβλεπόμενη διακύμανση είναι εξαιρετικής σημασίας στη χρηματοοικονομική θεωρία. Προτού ξεκινήσουμε τη θεωρητική παρουσίαση των υποδειγμάτων, θα αναφερθούμε σε

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

ορισμένες ιδιότητες και χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών οι οποίες καλύπτονται από τα υποδείγματα που προαναφέρθηκαν.

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών (Financial Time Series)

2.1 Οι Χρηματοοικονομικές Χρονολογικές Σειρές (Financial Time Series, FTS)

Το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας είναι οι **Χρηματοοικονομικές Χρονολογικές Σειρές (Financial Time Series, FTS)**, (από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται ως FTS για λόγους συντομίας), οι οποίες εντάσσονται στον ευρύτερο πεδίο των οικονομικών χρονολογικών σειρών και συνήθως αφορούν δεδομένα όπως: τιμές μετοχών και χρηματιστηριακών δεικτών, αποδόσεις μετοχών και χρηματιστηριακών δεικτών, επιτόκια (interest rates), συναλλαγματικές ισοτιμίες (exchange rates), τιμές παραγώγων χρηματιστηριακών προϊόντων (derivatives). Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό οι FTS αφορούν στις τιμές μίας χρηματοοικονομικής μεταβλητής και το πως αυτή διαρθρώνεται σε βάθος χρόνου. Επί παραδείγματι, FTS αποτελούν οι τιμές του βασικότερου χρηματιστηριακού δείκτη των Η.Π.Α. του S&P 500 index από το 1986 έως και το 1997 σε ημερήσια βάση.

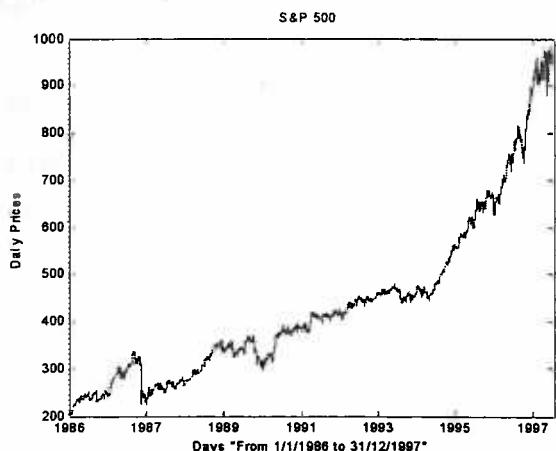
Επειδή το χρηματοοικονομικό περιβάλλον είναι εξαιρετικά ευαίσθητο στην πληροφόρηση και οι δυνατότητες διάχυσης και επεξεργασίας των πληροφοριών είναι μεγάλες, δεδομένης της τεχνολογίας και της γνώσης, οι τιμές των FTS μεταβάλλονται πολύ συχνά με αποτέλεσμα να απαιτείται η χρήση ημερησίων δεδομένων (daily data ή ακόμα και intradaily data) για την «εκμετάλλευση» όλης της δυνατής πληροφόρησης.

2.2 Εμπειρικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών (FTS)

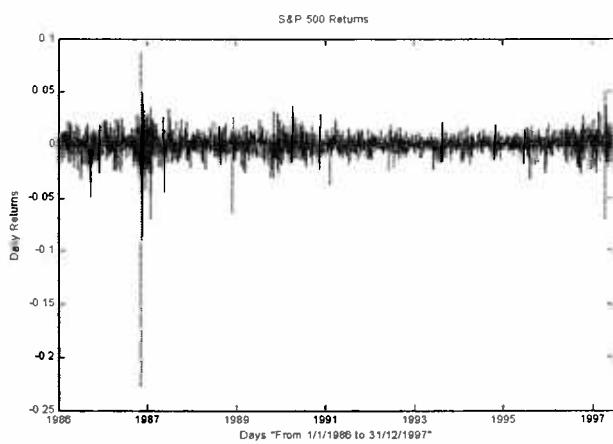
2.2.1 Unit root property των τιμών και των λογαρίθμων των FTS

Χρησιμοποιώντας τον έλεγχο Dickey-Fuller συνήθως δεν απορρίπτουμε την υπόθεση ότι μια FTS ακολουθεί ένα «τυχαίο περίπατο» (random walk). Έτσι δε μπορούμε να θεωρήσουμε μια FTS ως weakly stationary,

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών



Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 4

όπως άλλωστε φαίνεται και από το Διάγραμμα 3. Αντίθετα οι αποδόσεις (rate of return) μιας FTS (Διάγραμμα 4) όπως αυτές ορίζονται από τις διαφορές των λογαρίθμων μεταξύ τελικής και αρχικής τιμής:

$$r_{t+1} = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)$$

ή όπως ορίζονται από το λόγο τελικής μείον αρχικής τιμής προς αρχικής τιμής:

$$r_{t+1} = \left(\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \right)$$

μπορούν να θεωρηθούν στάσιμες (τουλάχιστον ως προς το μέσο) και να μοντελοποιηθούν ως μία στάσιμη διαδικασία δηλαδή ως μία διαδικασία της οποίας τα χαρακτηριστικά δεν αλλάζουν διαχρονικά.

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

2.2.2 Αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των αποδόσεων μιας FTS

Η αυτοσυσχέτιση των παρατηρήσεων μιας FTS έχει να κάνει με την εξάρτηση μιας παρατηρησης στο χρόνο t με τις άλλες παρατηρήσεις στο χρόνο $t-1, t-2, \dots, t+1, t+2, \dots$ και για να προσδιορίσουμε το μέγεθός της χρησιμοποιούμε την Sample Autocorrelation Function ή την SACF.

- Αν r_1, r_2, \dots, r_T είναι οι παρατηρήσεις μιας χρονολογικής σειράς τότε ο δειγματικός

$$\text{μέσος είναι: } \bar{r} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T r_t.$$

- Η δειγματική διακύμανση είναι: $\gamma_0 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2$
- Η Sample Autocovariance Function είναι: $\gamma_k = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T-k} (r_t - \bar{r})(r_{t-k} - \bar{r})$
- Ενώ η Sample Autocorrelation function είναι: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

Σε μια FTS η αυτοσυσχέτιση των παρατηρήσεων, όπως αυτή μετράται από την SACF, τις περισσότερες φορές είναι ελάχιστη έως ανύπαρκτη και ουσιαστικά οι αποδόσεις π.χ. ενός χρηματιστηριακού δείκτη αποτελούν «λευκό θόρυβο» (*white noise*). Σε αντίθεση με τις αποδόσεις, τα τετράγωνα των αποδόσεων παρουσιάζουν σημαντική αυτοσυσχέτιση μεταξύ τους κάτι το οποίο παραπέμπει σε μη-γραμμικές σχέσεις ανάμεσα στις παρατηρήσεις όπως αυτές διαρθρώνονται στο χρόνο (βλ. GARCH models). Παρόλα αυτά έχει παρατηρηθεί ότι οι απόλυτη τιμή των αποδόσεων $|r_t|$ παρουσιάζει το μεγαλύτερο βαθμό αυτοσυσχέτισης (Ding, 1993).

2.2.3 «Παχιές Ουρές» (Fat Tails) στις κατανομές των FTS

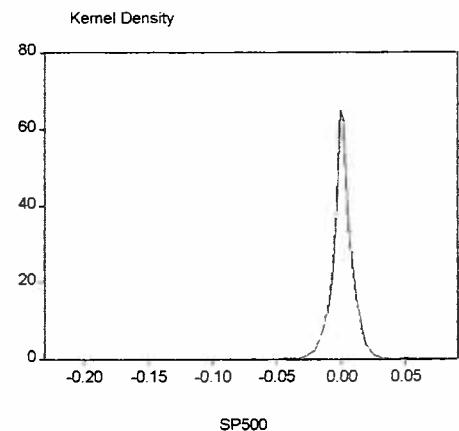
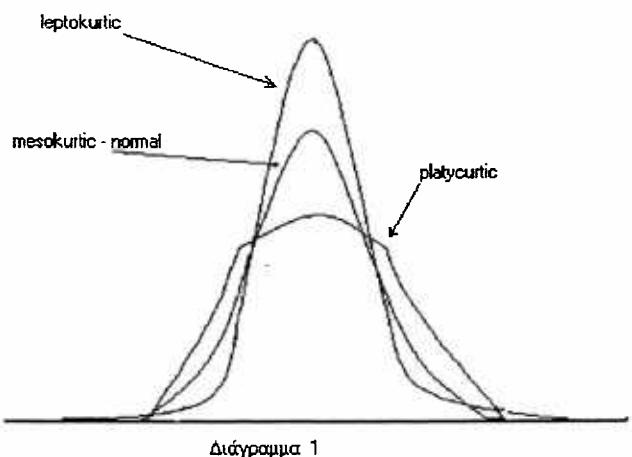
Η ορολογία “Fat Tails” χρησιμοποιείται κυρίως για να ορίσει το γεγονός ότι στις FTS η πιθανότητα παρατήρησης «ακραίων» τιμών, θετικών ή αρνητικών, είναι μεγαλύτερη από αυτή που θα παρατηρούταν αν τα δεδομένα της FTS ακολουθούσαν την κανονική (Normal

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

or Gaussian) κατανομή, $N(\mu, \sigma^2)$. Πολλοί ερευνητές όπως ο Fama (1965) και ο Sharpe (1995) έχουν παρατηρήσει την ιδιότητα των fat tails στις FTS. Η υπόθεση που γίνεται συνήθως ότι οι αποδόσεις π.χ. των μετοχών ακολουθούν την κανονική κατανομή δε φαίνεται να είναι σωστή αφού η κατανομή των αποδόσεων εμφανίζει **μεγαλύτερη κύρτωση (excess kurtosis)** σε σχέση με την κανονική ή με άλλα λόγια οι κατανομές των αποδόσεων των μετοχών είναι **λεπτόκυρτες (leptokurtic)**.

Η κύρτωση αναφέρεται στο βαθμό που οι τιμές μιας μεταβλητής είναι συγκεντρωμένες γύρω από το μέσο και στα άκρα μιας κατανομής.

Μια κατανομή είναι **λεπτόκυρτη (leptokurtic)** όταν ο βαθμός κύρτωσης είναι μεγαλύτερος από αυτόν της κανονικής, η κατανομή έχει μια υψηλή κορυφή (high peak) και παχιές ουρές (fat or heavy tails) όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1 και το Διάγραμμα 2 όπου απεικονίζεται η κατανομή του S&P 500 index.



Διάγραμμα 2

Για τη μέτρηση της κύρτωσης χρησιμοποιούμε το **συντελεστή κύρτωσης κατά Fisher** ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} - 3$$

όπου: $\mu_k = E(x - \mu)^k$, $\mu = E(x)$ είναι η ροπή κ τάξεως ως προς το μέσο και η οποία εκτιμάται από το:

$$\mu_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^k$$

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

Η κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ έχει συντελεστή κύρτωσης ίσο με το μηδέν γιατί

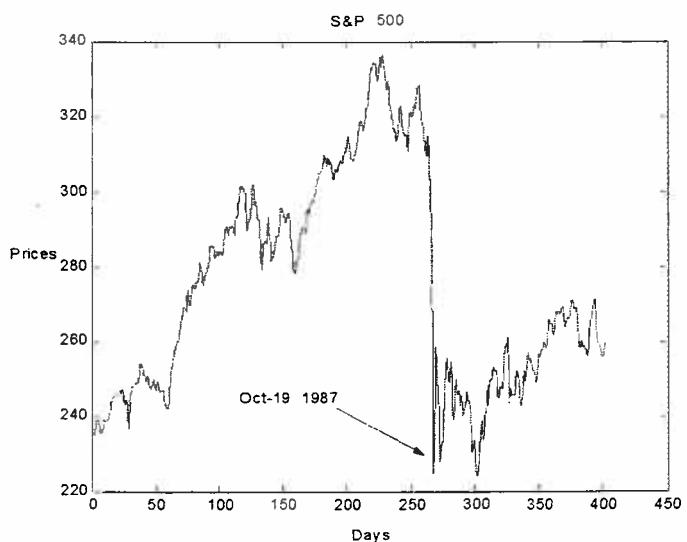
$\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3$ και άρα $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 0$. Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στα

εξής:

- **λεπτόκυρτη (leptokurtic)** κατανομή $\gamma_2 > 0$ (*excess kurtosis*)
- **μεσόκυρτη (mesokurtic)** κατανομή $\gamma_2 = 0$ (*κανονική, normal or Gaussian*)
- **πλατύκυρτη (platykurtic)** κατανομή $\gamma_2 < 0$

2.2.4 Μεγάλα «άλματα» (“Large jumps”) στις τιμές των FTS

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό που παρατηρείται σε πολλές (αν όχι σε όλες) χρηματοοικονομικές μεταβλητές είναι τα «μεγάλα άλματα» (“large jumps”) σε επίπεδο τιμών που συνεπάγονται «δραματικές αλλαγές» στη συμπεριφορά και τα γενικότερα χαρακτηριστικά της χρονολογικής σειράς και βέβαια συνδέονται άμεσα με την προαναφερθείσα ιδιότητα των FTS τις «παχιές ουρές» αφού είναι η αιτία για την εμφάνιση ακραίων τιμών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το «μίνι κραχ» της 19^{ης} Οκτωβρίου του 1987 που οδήγησε τους χρηματιστηριακούς δείκτες σε κατακόρυφη πτώση όπως γίνεται φανερό από το Διάγραμμα 5 που απεικονίζει τις ημερήσιες τιμές του S&P 500 από τις αρχές του 1986 έως το 1989 περίπου.

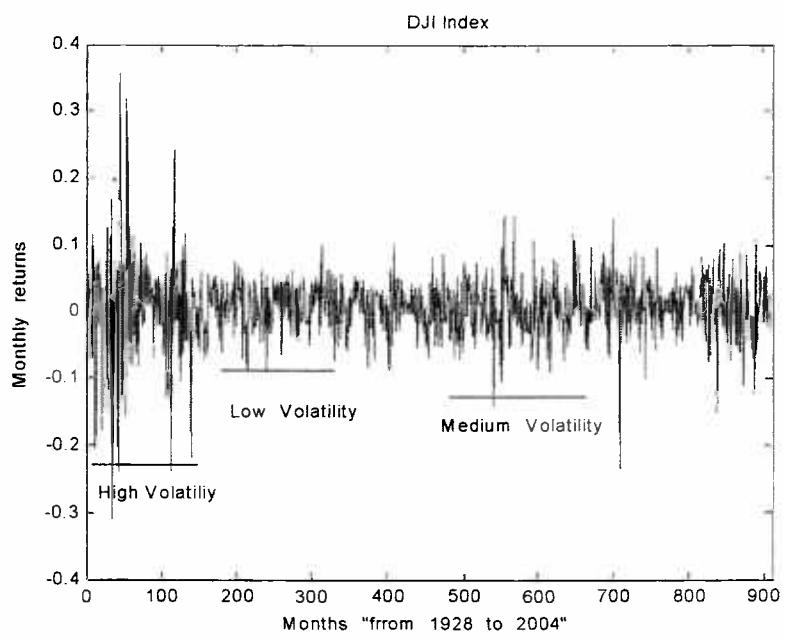


Διάγραμμα 5

Σύμφωνα με τον Hamilton (1994) τέτοιες αλλαγές (“dramatic breaks”) στη συμπεριφορά μιας χρονολογικής σειρά μπορούν να προέλθουν από γεγονότα όπως: πόλεμοι, «χρηματοοικονομικοί πανικού» (“financial panics”) ή σημαντικές αλλαγές στην κυβερνητική οικονομική πολιτική.

2.2.5 “Volatility clustering” phenomenon

Εάν οι “fat tails” ήταν ένα μόνο από τα χαρακτηριστικά των FTS, τότε θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε τις αποδόσεις μιας χρονολογική σειράς χρησιμοποιώντας “fat tailed” distributions (t-student, Generalized Error Distribution (GED)) θεωρώντας τις αποδόσεις μιας FTS ως ανεξάρτητα και αυτόνομα κατανεμημένες (independent and identically distributed, iid). Στο σύνολο, όμως, των FTS δε φαίνεται να ισχύει ότι οι αποδόσεις π.χ. των χρηματιστηριακών δεικτών είναι iid, αφού «μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές, οποιουδήποτε πρόσημου, και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές» (Mandelbrot, 1963)



Διάγραμμα 6

ή όπως αναφέρει ο McNees “large and small errors tend to cluster together (in contiguous time periods)”. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι υφίσταται μια εξάρτηση στις «ουρές» μιας κατανομής. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται “*volatility clustering phenomenon*” και είναι ουσιαστικά η τάση που υπάρχει στις FTS, η μεταβλητικότητα των αποδόσεων να είναι «συγκεντρωμένη» (“clustered”) έτσι ώστε περίοδοι με μεγάλη μεταβλητικότητα να ακολουθούνται από περιόδους με μεγάλη μεταβλητικότητα και περίοδοι με μικρή μεταβλητικότητα να ακολουθούνται από περιόδους με μικρή μεταβλητικότητα.

Αν οι αποδόσεις ήταν iid θα περίμενε κάποιος οι ακραίες τιμές που δημιουργούν τις “fat tails” να είναι ισόνομα κατανεμημένες στο χρόνο. Αυτό, όπως προαναφέραμε, δεν ισχύει και όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 6 όπου απεικονίζονται οι μηνιαίες αποδόσεις του DJI Index από το 1928 έως και 2004 οι διακυμάνσεις των πρώτων 200 μηνών είναι υψηλότερες από αυτές των επόμενων 200 μηνών. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η επίδραση ενός γεγονότος πάνω σε μία χρονολογική σειρά που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

μεταβλητικότητάς της, δημιουργεί ένα είδος «αντίλαλου» (“echo”) πάνω σε αυτή με αποτέλεσμα το volatility clustering φαινόμενο. Το αντίστοιχο συμβαίνει και με γεγονότα που δημιουργούν μικρή μεταβλητικότητα πάνω σε μια FTS.

Ένας άλλος τρόπος να ερμηνεύσουμε αυτό το φαινόμενο είναι να θεωρήσουμε ότι η οικονομία διέπεται από διάφορα «επίπεδα» (“states” or “regimes”) και η «μεταφορά» από το ένα επίπεδο στο άλλο (“regime switching”) είναι ένα τυχαίο γεγονός (στοχαστική μεταβλητή) το οποίο διέπεται από κάποιες πιθανότητες (“transition probabilities”). Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι στο Διάγραμμα 6 παρατηρούμε 3 states στην οικονομία: high volatility state, medium volatility state και low volatility state. Φυσικά τα χαρακτηριστικά της χρονολογικής σειράς αλλάζουν από state σε state και κατά ανάλογο τρόπο θα πρέπει να αλλάζει η μοντελοποίηση της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας.

2.2.6 Μη-συμμετρική αντίδραση των FTS σε μη αναμενόμενα νέα-shocks

Ο Black (1976) τόνισε τη διαφορετική, μη-συμμετρική αντίδραση των FTS στα μη αναμενόμενα νέα ή αλλιώς “shocks”. Βρήκε ότι η μεταβλητικότητα των αποδόσεων των μετοχών αυξάνεται περισσότερο όταν «κακά» νέα (“negative shocks”) (που συνεπάγονται μείωση της τιμής της μετοχής) εισέρχονται στην αγορά σε σχέση με τη μεταβλητικότητα των αποδόσεων όταν «καλά» νέα (“positive shocks”) (που συνεπάγονται αύξηση της τιμής της μετοχής) εισέρχονται στην αγορά. Με άλλα λόγια υπάρχει η τάση οι αλλαγές στις τιμές των μετοχών να είναι αρνητικά συσχετισμένες με τις αλλαγές στη μεταβλητικότητα των μετοχών.

Μπορούμε να θεωρήσουμε δύο πιθανές εξηγήσεις για αυτό το φαινόμενο οι οποίες είναι οι εξής:

- **Leverage effect:** σύμφωνα με αυτή την εξήγηση όταν οι τιμές των μετοχών μειώνονται αυξάνεται ο λόγος Ξένων προς Ιδίων κεφαλαίων (Debt/Equity ratio) ή αλλιώς αυξάνεται η χρηματοοικονομική μόχλευση (financial leverage) με αποτέλεσμα να αυξάνεται ο κίνδυνος πτώχευσης της εταιρείας. Όπως γνωρίζουμε από τη χρηματοοικονομική θεωρία ο κίνδυνος εκφράζεται από τη μεταβλητικότητα των αποδόσεων, άρα όταν αυξάνεται ο κίνδυνος αυξάνεται και η διακύμανση των αποδόσεων μιας μετοχής.
- **Time-varying risk premium effect:** σύμφωνα με αυτή τη θεωρία τα μη αναμενόμενα νέα (“unexpected news”) αυξάνουν την τρέχουσα μεταβλητικότητα και άρα την

Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

«ανταμοιβή του κινδύνου» (“risk premium”), (με τον όρο «ανταμοιβή του κινδύνου» εννοούμε την επιπλέον απόδοση που απαιτεί ο επενδυτής για τον επιπλέον κίνδυνο που αναλαμβάνει) γεγονός που οδηγεί τις τιμές προς τα κάτω και έτσι μετριάζει την επίδραση των «καλών» νέων και αμβλύνει την επίδραση των «κακών» νέων. Αυτή η διαδικασία θα συνεχιστεί μέχρι η αναμενόμενη απόδοση είναι αρκετά υψηλή έτσι ώστε να ανταμείβεται ο υψηλός κίνδυνος.

2.2.7 Non-trading days or “Holiday effect”

Η πληροφορία η οποία συγκεντρώνεται κατά τη διάρκεια των ημερών όπου οι αγορές είναι κλειστές αντανακλάται ή απελευθερώνεται στις τιμές όταν οι αγορές ανοίξουν. Αν η πληροφόρηση συσσωρεύεται με σταθερό ρυθμό κατά τη διάρκεια των ημερών όπου οι αγορές είναι ανοιχτές τότε μετά από ένα διάστημα 2 ημερών όπου οι αγορές είναι κλειστές η διακύμανση των αποδόσεων θα πρέπει να είναι κατά 2 φορές μεγαλύτερη. Οι Fama και French (1965) και ο Roll (1986) βρήκαν ότι η πληροφόρηση συσσωρεύεται με πιο αργούς ρυθμούς όταν οι αγορές είναι κλειστές σε σχέση με την πληροφόρηση που συσσωρεύεται όταν οι αγορές είναι ανοιχτές. Παρόλα αυτά μετά από αργίες ή Σαββατοκύριακα οι αποδόσεις των μετοχών παρουσιάζουν αυξημένη διακύμανση που όμως δεν είναι ανάλογη των ημερών κατά τις οποίες δεν υπήρξαν διαπραγματεύσεις στις αγορές.

2.2.8 Ασυμμετρία στην κατανομή των αποδόσεων

Μία άλλη ιδιότητα που μπορεί να παρατηρηθεί στις κατανομές των αποδόσεων μιας FTS είναι η **ασυμμετρία (skewness)**. Αν μια κατανομή είναι **συμμετρική** τότε ο αριθμητικός μέσος (\bar{x}), η διάμεσος (\tilde{x}) και η επικρατούσα τιμή (\hat{x}) συμπίπτουν, δηλαδή, ισχύει ότι $\bar{x} = \tilde{x} = \hat{x}$. Αν μια κατανομή παρουσιάζει **θετική ασυμμετρία (positive skewness)** τότε, ισχύει ότι $\hat{x} < \tilde{x} < \bar{x}$ και παρατηρούμε ότι η κατανομή παρουσιάζει μία «λοξότητα» από τα δεξιά (“skewed to the right”) που σημαίνει ότι η δεξιά «ουρά» της κατανομής είναι πιο «απλωμένη» από την αριστερή. Αντίστοιχα, αν μια κατανομή παρουσιάζει **αρνητική ασυμμετρία (negative skewness)** τότε, έχουμε ότι $\hat{x} > \tilde{x} > \bar{x}$ και παρατηρούμε ότι η κατανομή παρουσιάζει μία «λοξότητα» από τα αριστερά (“skewed to the left”) που σημαίνει ότι η αριστερή «ουρά» της κατανομής είναι πιο «απλωμένη» από τη δεξιά. Για τη μέτρηση

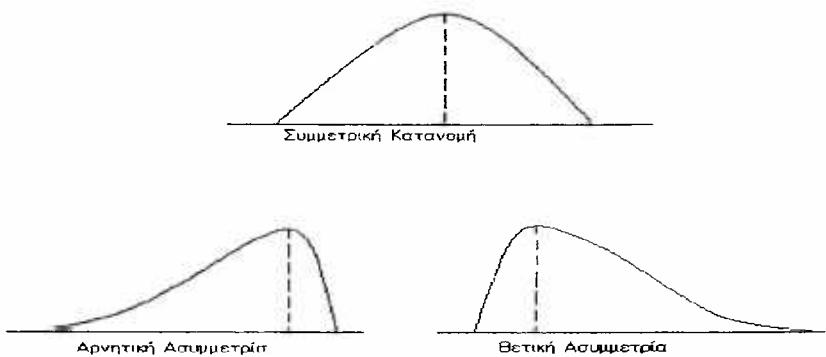
Κεφάλαιο 2: Χαρακτηριστικά των Χρηματοοικονομικών Χρονολογικών Σειρών

της ασυμμετρίας χρησιμοποιείται ο *συντελεστής ασυμμετρίας κατά Fisher* ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Όπου το μ_3 είναι η ροπή τρίτης τάξης ως προς το μέσο και το «σ» είναι η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Τελικά μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής:



Διάγραμμα 7

- αν $\gamma_1 > 0$ η κατανομή εμφανίζει **θετική ασυμμετρία**
- αν $\gamma_1 = 0$ η κατανομή είναι **συμμετρική** (κανονική κατανομή)
- αν $\gamma_1 < 0$ η κατανομή εμφανίζει **αρνητική ασυμμετρία**

2.2.9 Άλλα χαρακτηριστικά των FTS

2.2.9.1 Forecastable events

Όταν νέα πληροφόρηση εισέρχεται στην αγορά, η οποία όμως είναι αναμενόμενη, τότε έχει παρατηρηθεί ότι υφίσταται αυξημένη μεταβλητικότητα στις αποδόσεις τις ημέρες που προηγούνται της νέας πληροφόρησης.

2.2.9.2 Co-movements in volatilities

Έχει παρατηρηθεί (Black, 1976) ότι όταν η μεταβλητικότητα των αποδόσεων των μετοχών αλλάζει, τότε η αλλαγή αυτή είναι προς την ίδια κατεύθυνση για όλες τις μετοχές.

2.2.9.3 Μακροοικονομικές μεταβλητές και μεταβλητικότητα

Πολλές μακροοικονομικές μεταβλητές όπως τα επιτόκια, η βιομηχανική παραγωγή, η τιμή του πετρελαίου κτλ., βοηθούν έτσι ώστε να ερμηνευτεί η μεταβλητικότητα των αποδόσεων των μετοχών.

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

3.1 Οι λόγοι που οδήγησαν στην μοντελοποίηση της υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας

3.1.1 Ο ρόλος και η σημασία του κινδύνου και της αβεβαιότητας στη χρηματοοικονομική θεωρία

Κεντρικό ρόλο στη σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία διαδραματίζει ο κίνδυνος ή αβεβαιότητα των χρηματοοικονομικών στοιχείων (financial assets). Ως **αβεβαιότητα** μπορεί να οριστεί η μεταβλητικότητα των τιμών ή των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων γύρω από την τιμή που κατά μέσο όρο αναμένεται να επικρατήσει. Όσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα τόσο μεγαλύτερος είναι ο **κίνδυνος** που ενέχει ένα χρηματοοικονομικό στοιχείο. Κύριο μέτρο για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου αποτελεί η **ροπή δεύτερης τάξης** ως προς το μέσο δηλαδή η **διακύμανση** η οποία ορίζεται ως:

$$\mu_2 = E(x - \mu)^2, \mu = E(x) \text{ και εκτιμάται από το: } \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Η διακύμανση μαζί με τον μέσο των αποδόσεων των μετοχών αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο της **θεωρίας των χαρτοφυλακίων** που αναπτύχθηκε από τον Markowitz (1952) και πραγματεύεται την άριστη επιλογή ενός χαρτοφυλακίου από χρηματοοικονομικά στοιχεία (δηλαδή την άριστη κατανομή του κεφαλαίου (optimal weights) του επενδυτή σε αυτά) στη βάση του προβλεπόμενου κινδύνου και της αναμενόμενης απόδοσης καθενός από αυτά. Μέχρι πρόσφατα η έλλειψη υποδειγμάτων που θα μπορούσαν να προσφέρουν μία αξιόπιστη πρόβλεψη της διακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών, είχε ως αποτέλεσμα την χρησιμοποίηση της μέσης διακύμανσης (όπως αυτή εκτιμάται από τον παραπάνω τύπο) και αφορά σε ιστορικά στοιχεία. Η χρήση υποδειγμάτων (όπως τα ARCH και GARCH) που θα μπορούσαν να προσφέρουν αξιόπιστες προβλέψεις της υπό-συνθήκη διακύμανσης ίσως οδηγούσαν σε πολύ διαφορετικές κατανομές βαρών στα διάφορα assets.

Επίσης, ο συστηματικός κίνδυνος έτσι όπως εκφράζεται από το συντελεστή βήτα $\beta = \frac{\text{Cov}(R_m, r_i)}{\text{Var}(R_m)}$, εμπεριέχει τις έννοιες τις διακύμανσης και της συνδιακύμανσης και αποτελεί το κύριο συστατικό του **υποδείγματος πιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων**.

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

(C.A.P.M.) όπως αυτό αναπτύχθηκε από τους Sharpe και Lintner. Με άλλα λόγια ο κίνδυνος είναι ο καθοριστικός παράγοντας για τη διαμόρφωση της τιμής ενός asset στην ισορροπία. Ακόμη, η καλύτερη πρόβλεψη της διακύμανσης βοηθάει στην ορθότερη τιμολόγηση των *options (option pricing)* και έτσι στην καλύτερη *διαχείριση κινδύνων (risk management)*.

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να κατανοήσουμε τη σημαντικότητα της διακύμανσης στις FTS και να εξηγήσουμε το ενδιαφέρον για υποδείγματοποίηση ροπών μεγαλύτερων από της πρώτης.

3.1.2 Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των FTS

Εκτενής αναφορά των χαρακτηριστικών των FTS έγινε στο κεφάλαιο 2 όμως ορισμένα από αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά και ώθησαν τους ερευνητές σε συγκεκριμένες μορφές υποδειγμάτων έτσι ώστε να «συλλάβουν» όσο το δυνατόν περισσότερα χαρακτηριστικά των FTS που παρατηρούνται στον πραγματικό κόσμο. Δύο από αυτά τα χαρακτηριστικά τα οποία «συλλαμβάνουν» τα υποδείγματα που θα αναλύσουμε στη συνέχεια είναι τα ακόλουθα:

- “*volatility clustering*”

Όταν η διακύμανση μιας χρονολογικής σειράς παραμένει σταθερή και δεν αλλάζει σε βάθος χρόνου τότε λέμε ότι υφίσταται *ομοσκεδαστικότητα (homoskedasticity)*. Αντίθετα, όταν αναμένουμε η διακύμανση μιας χρονολογικής σειράς να είναι μεγαλύτερη σε κάποιες χρονικές περιόδους από ότι σε άλλες τότε μιλάμε για *ετεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity)*. Η διαφορετική διακύμανση σε διάφορες χρονικές περιόδους είναι ένα χαρακτηριστικό που απεικονίζεται στο Διάγραμμα 6 του κεφαλαίου 2. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχουν περίοδοι που χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερη αβεβαιότητα (με την έννοια της απόκλισης από την αναμενόμενη τιμή) σε σχέση με άλλες περιόδους που χαρακτηρίζονται από μικρότερη αβεβαιότητα και μάλιστα αυτές οι περίοδοι αυξημένης αβεβαιότητας δεν είναι τυχαία ή ισόνομα κατανεμημένες στο χρόνο αλλά τείνουν να είναι συγκεντρωμένες. Με άλλα λόγια υπάρχει ένας βαθμός αυτοσυσχέτισης στην αβεβαιότητα των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Το φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε σε όρους χρηματοοικονομικούς είναι αυτό που είχαμε ορίσει στο κεφάλαιο 2 ως “*volatility clustering*” και αποτελεί ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά που οδήγησαν στην

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

μοντελοποίηση της ετεροσκεδαστικότητας που αφορά στην χρονική περίοδο του δείγματός μας δηλαδή της **υπό-συνθήκης ετεροσκεδαστικότητας** (ARCH και GARCH υποδείγματα).

- “*fat tails*”

Τα υποδείγματα που θα αναλύσουμε στην επόμενη παράγραφο μπορούν και «πιάνουν» την επιπλέον κύρτωση που παρουσιάζουν οι κατανομές των FTS.

3.2 Υποδείγματα ARCH

Αρχικά θα πρέπει να αποδώσουμε τον όρο ARCH τα αρχικά του οποίου προέρχονται από τις λέξεις *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*. Ετσι λοιπόν ένα υπόδειγμα ARCH μπορεί να αποδοθεί στην ελληνική ορολογία ως ένα **Υπόδειγμα Αυτοπαλίνδρομης Υπό-συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας**. Για λόγους συντομίας θα αναφερόμαστε στα υποδείγματα αυτοπαλίνδρομης υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας ως ARCH, ένας όρος ο οποίος έχει επικρατήσει διεθνώς. Γενικά το υπόδειγμα ARCH έτσι όπως εισήχθη στην βιβλιογραφία από τον Engle (1982) είχε ως σκοπό να προσφέρει ένα μέτρο για τη μεταβλητικότητα (διακύμανση) η οποία άλλαξε ιδιαίτερα στις FTS.

3.2.1 Ορισμός μιας ARCH διαδικασίας (ARCH process)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις αποδόσεις ενός χρηματιστηριακού δείκτη όπως αυτές ορίζονται από το: $r_{t+1} = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)$. Αν οι αποδόσεις ακολουθούν μία ARCH διαδικασία μπορούν να μοντελοποιηθούν ως εξής:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

και επειδή ο μέσος μ στις αποδόσεις των δεικτών μακροχρόνια είναι 0 τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$r_t = \varepsilon_t \quad \text{για } t = 1 \dots T \quad (3.2)$$

Το υπόδειγμα ARCH του Engle χαρακτηρίζει την υπό-συνθήκη ή δεσμευμένη κατανομή του τυχαίου σφάλματος (stochastic error) ε_t , η οποία είναι δεσμευμένη στην πληροφόρηση που έχουμε μέχρι το $(t-1)$ δηλαδή στο $I_{t-1} = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$ όπου τα r_t είναι οι

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

πραγματοποιημένες τιμές (realized values) της μεταβλητής r_t . Άρα έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του ε_t είναι:

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (3.3)$$

όπου

$$h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_p \cdot \varepsilon_{t-p}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 = a_0 + a(L) \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.4)$$

με $a_0 > 0$ και $a_i \geq 0$ για $i = 1 \dots q$ έτσι ώστε η υπό-συνθήκη διακύμανση να είναι θετική.

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι το τυχαίο σφάλμα ε_t ακολουθεί μία κανονική κατανομή (Normal distribution) με δεδομένη την πληροφόρηση που έχουμε ως το $(t-1)$, με μέσο 0 και υπό συνθήκη διακύμανση που δίνεται από την (3.4). Η διακύμανση h_t είναι «δεσμευμένη» (conditional) στην πληροφόρηση $I_{t-1} = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$ γιατί όπως παρατηρούμε από τη μορφή της εξαρτάται από παρελθούσες τιμές των $r_t = \varepsilon_t$, οι οποίες αποτελούν το σύνολο της πληροφόρησης που έχουμε στην διάθεσή μας (information set).

Εναλλακτικά μία μεταβλητή που ακολουθεί μία ARCH διαδικασία (ARCH process) μπορεί να υποδειγματοποιηθεί ως εξής:

$$r_t = \varepsilon_t \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_t = u_t \cdot \sqrt{h_t} \quad \text{για } t = 1 \dots T \quad (3.6)$$

όπου $u_t \sim iid, N(0,1)$ και h_t όπως δίνεται από την (3.4). Άρα ο δεσμευμένος μέσος του ε_t είναι $E(\varepsilon_t | I_{t-1}) = E_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(u_t \cdot \sqrt{h_t}) = \sqrt{h_t} \cdot E_{t-1}(u_t) = 0$ αφού η h_t αποτελείται από στοιχεία του $I_{t-1} = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$ και άρα η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της είναι ένας σταθερός αριθμός (όλα τα στοιχεία της είναι γνωστά). Η δεσμευμένη διακύμανση του ε_t είναι:

$$\begin{aligned} Var(\varepsilon_t | I_{t-1}) &= Var_{t-1}(u_t \cdot \sqrt{h_t}) = E_{t-1}\left[\left(u_t \cdot \sqrt{h_t}\right)^2\right] - [E_{t-1}(u_t \cdot \sqrt{h_t})]^2 = E_{t-1}(u_t^2 \cdot h_t) - 0 = h_t \cdot E_{t-1}(u_{t-1}^2) = \\ &= h_t \cdot 1 = h_t. \end{aligned}$$

Άρα παρατηρούμε ότι το υπόδειγμα που περιγράφεται από τις (3.3) και (3.4) είναι το ίδιο με αυτό που περιγράφεται από τις (3.5), (3.6) και (3.4) και ονομάζεται *ARCH(p)*.

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υπόδειγματα

υπόδειγμα όπου το p αναφέρεται στους όρους των τυχαίων σφαλμάτων με υστερήσεις ή αλλιώς στους **ARCH όρους**.

Παρατηρώντας τη μορφή της εξίσωσης που περιγράφει την υπό-συνθήκη διακύμανση στην πιο απλή περίπτωση του ARCH το **ARCH(1)**, $h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$, παρατηρούμε ότι η διακύμανση το χρόνο t εξαρτάται από το μέγεθος του τυχαίου σφάλματος ε_t υψηλότερου στο τετράγωνο στο χρόνο $t-1$. Άρα η δεσμευμένη διακύμανση είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από το μέγεθος και όχι το πρόσημο των τυχαίων σφαλμάτων. Έτσι, αν μια μεταβλητή ακολουθεί μία ARCH διαδικασία μεγάλα σφάλματα θα τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλα σφάλματα και μικρά σφάλματα θα ακολουθούνται από μικρά σφάλματα (“*volatility clustering*”). Η τάξη (order) του ARCH, δηλαδή το μέγεθος του p , δείχνει πόσο διαρκούν τα shocks στην υπό-συνθήκη διακύμανση της χρονολογικής σειράς. Όσο μεγαλύτερο το p τόσο πιο «επίμονα» θα είναι τα shocks στη διακύμανση και έτσι θα διαρκούν περισσότερο χρόνο.

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι φανερά και αν προσομοιώσουμε δεδομένα στο Matlab. Στο διάγραμμα 8 έχουμε προσομοιώσει 500 δεδομένα που ακολουθούν την κανονική

κατανομή με μέσο 0 και

διακύμανση 1. Μπορούμε να

γράψουμε ότι $\varepsilon_t = u_t, u_t \sim N(0,1)$.

Αν τα δεδομένα μας ακολουθούν

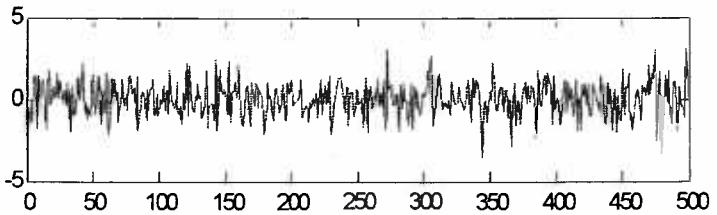
μια ARCH(1) διαδικασία τότε

μπορούμε να προσομοιώσουμε δεδομένα

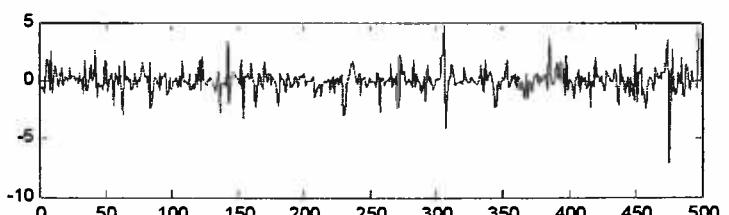
όπου

$\varepsilon_t = u_t \cdot \sqrt{h_t} = u_t \cdot \sqrt{0.1 + 0.9 \cdot \varepsilon_{t-1}^2}$ ή

αν τα δεδομένα μας ακολουθούν



Διάγραμμα 8: Προσομοίωση “white noise”



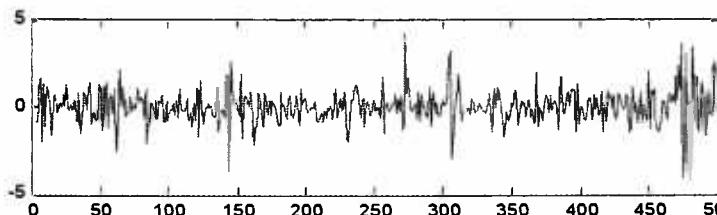
Διάγραμμα 9: Προσομοίωση ARCH(1)

ARCH(2) διαδικασία τότε

$$\varepsilon_t = u_t \cdot \sqrt{h_t} =$$

$$= u_t \cdot \sqrt{0.1 + 0.2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + 0.5 \cdot \varepsilon_{t-2}^2}.$$

Σε αυτή την περίπτωση τα shocks



Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

Διάγραμμα 9: Προσομοίωση ARCH(2)

στη διακύμανση της σειράς θα είναι πιο επίμονα. Τα παραπάνω γίνονται αντιληπτά στα διαγράμματα 8 και 9.

3.3 Υποδείγματα GARCH

Ένα από τα κύρια μειονεκτήματα των υποδειγμάτων ARCH στην εμπειρική εφαρμογή τους είναι ότι απαιτούνται πολύ ARCH όροι και έτσι η εκτίμηση των υποδειγμάτων γίνεται πολύ δύσκολη αν φυσικά λάβουμε υπόψη μας τους περιορισμούς που απαιτούνται για να είναι η υπό-συνθήκη διακύμανση θετική. Έτσι ο Bollerslev (1986) γενίκευσε τα ARCH υποδείγματα έτσι ώστε να αποκτήσουν μια πιο “parsimonious” μορφή που θα διευκόλυνε την εμπειρική εφαρμογή τους. Ο Bollerslev πρότεινε το *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)* που είναι μια γενικευμένη μορφή της αυτοπαλίνδρομης υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας η οποία ορίζεται ως:

$$h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_p \cdot \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \dots + \beta_q \cdot h_{t-q} = \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}^2 \quad (3.7)$$

με τους απαραίτητους περιορισμούς για να είναι η υπό-συνθήκη διακύμανση θετική: $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ για $i = 1 \dots p$ και $\beta_i \geq 0$ για $i = 1 \dots q$. Το παραπάνω υπόδειγμα ονομάζεται *GARCH(p,q)*. Αν χρησιμοποιήσουμε το lag operator όπου $L \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}, L^2 \varepsilon_t = \varepsilon_{t-2} \dots$ και $a(L) = (a_1 \cdot L + \dots + a_p \cdot L^p)$ και $\beta(L) = (\beta_1 \cdot L + \beta_2 \cdot L^2 + \dots + \beta_q \cdot L^q)$ τότε έχουμε:

$$h_t = a_0 + a(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) h_t \quad (3.8)$$

Αν $q = 0$ τότε έχουμε ένα ARCH υπόδειγμα ενώ αν $p = q = 0$ τότε οι αποδόσεις είναι iid και αποτελούν “white noise”.

Όπως προαναφέραμε το GARCH είναι πιο “parsimonious” από το ARCH με την έννοια ότι στο ARCH υπόδειγμα απαιτείται η εκτίμηση πολλών ARCH όρων για να μπορέσουμε να εκφράσουμε την υπό-συνθήκη διακύμανση σε σχέση με το GARCH υπόδειγμα. Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι μπορούμε να εκφράσουμε το GARCH ως ένα ARCH με άπειρους όρους, αν τα $a(L) = (a_1 \cdot L + \dots + a_p \cdot L^p)$ και $\beta(L) = (\beta_1 \cdot L + \beta_2 \cdot L^2 + \dots + \beta_q \cdot L^q)$

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

τα οποία αποτελούν πολυώνυμα ως προς το lag operator L , δεν έχουν κοινές ρίζες και οι λύση του πολυωνύμου $\beta(x) - 1 = 0$ είναι έξω από το «μοναδιαίο κύκλο». Αν πάρουμε την πιο απλή περίπτωση του GARCH υποδείγματος το GARCH(1,1) έχουμε ότι:

$$h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} = a_0 + a(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) h_t \quad (3.9)$$

όπου: $a(L) = a_1 \cdot L$ και $\beta(L) = \beta_1 \cdot L$. Το πολυώνυμο $\beta(x) - 1 = 0$ έχει την ακόλουθη λύση:

$$\beta_1 \cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta_1}. \text{ Σύμφωνα με τα παραπάνω, η λύση του πολυωνύμου πρέπει να}$$

είναι έξω από το «μοναδιαίο κύκλο» δηλαδή $|x| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\beta_1} \right| > 1 \Leftrightarrow |\beta_1| < 1 \Leftrightarrow 0 < \beta_1 < 1$. Αν

ισχύει αυτό τότε η (3.9) μπορεί να γραφτεί ως:

$$h_t = \frac{a_0}{1 - \beta(1)} + \frac{a(L)}{1 - \beta(L)} \cdot \varepsilon_t^2 = a_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 \rightarrow ARCH(\infty) \quad (3.10)$$

όπου: $a_0^* = \frac{a_0}{1 - \beta(1)}$. Το πηλίκο $\frac{a(L)}{1 - \beta(L)}$ μπορεί να γραφτεί ως $\frac{1}{1 - \beta_1 \cdot L} \cdot a(L)$. Το πρώτο

μέρος του γινομένου μπορούμε να το δούμε ως μία ως μία γεωμετρική πρόοδο η οποία συγκλίνει και μπορεί να γραφτεί ως $\frac{1}{1 - \beta_1 \cdot L} = 1 + \beta_1 \cdot L + (\beta_1 \cdot L)^2 + (\beta_1 \cdot L)^3 + \dots$ και άρα

$$\begin{aligned} \frac{a(L)}{1 - \beta(L)} &= (1 + \beta_1 \cdot L + (\beta_1 \cdot L)^2 + (\beta_1 \cdot L)^3 + \dots) \cdot (a_1 \cdot L) = \\ &= (a_1 \cdot L + (\beta_1 \cdot a_1) \cdot L^2 + (\beta_1^2 \cdot a_1) \cdot L^3 + (\beta_1^3 \cdot a_1) \cdot L^4 + \dots) = (\delta_1 \cdot L + (\delta_2) \cdot L^2 + (\delta_3) \cdot L^3 + (\delta_4) \cdot L^4 + \dots) \end{aligned}$$

Τα παραπάνω γενικεύονται και στην περίπτωση του GARCH(p,q).

3.4 Χαρακτηριστικά και ιδιότητες των ARCH και GARCH υποδειγμάτων

3.4.1 Τα ARCH και GARCH ως AR και ARMA

Παρατηρώντας κανείς τη συναρτησιακή δομή των υποδειγμάτων ετεροσκεδαστικότητας εντοπίζει πολλές ομοιότητες με τη δομή των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση του μέσου όπως είναι τα *AutoRegressive (AR) (αυτοπαλίνδρομα)* υποδείγματα και τα *AutoRegressive Moving Average (ARMA)* υποδείγματα τα οποία στη γενική τους μορφή είναι ως ακολούθως:



Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

- AR(p) model: $y_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot y_{t-i} + \varepsilon_t$ όπου $\varepsilon_t \sim iid, N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ (3.11)

- ARMA(p,q) model: $y_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$ όπου $\varepsilon_t \sim iid, N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ (3.12)

3.4.1.1 Το υπόδειγμα ARCH ως ένα AR στα τετράγωνα των ε_t

Το υπόδειγμα ARCH(1) είναι το εξής: $h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$. Μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό όρο $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - h_t$ ο οποίος έχει δεσμευμένο μέσο ίσο με το 0, $E_{t-1}(v_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2 - h_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) - h_t = h_t - h_t = 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω το ARCH(1) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varepsilon_t^2 = h_t + (\varepsilon_t^2 - h_t) = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \Leftrightarrow \varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \quad (3.13)$$

όπου είναι ένα AR(1) στα τετράγωνα του στοχαστικού όρου & ή αλλιώς είναι ένα non-Gaussian AR υπόδειγμα γιατί τα τετράγωνα των ε_t ακολουθούν την χ^2 και όχι την κανονική κατανομή όπως ακολουθούν τα ε_t . Όπως στα AR υποδείγματα η τάξη (order) δηλαδή το μέγεθος του p καθορίζεται από το ACF και το PartialACF αντίστοιχα μπορούμε να καθορίσουμε την τάξη ενός ARCH μοντέλου από τα ACF και PACF των τετραγώνων των ε_t , που στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, είναι τα τετράγωνα των αποδόσεων ενός χρηματιστηριακού δείκτη. Όπως είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2 σε πολλές FTS παρατηρείται συσχέτιση μεταξύ των τετραγώνων των αποδόσεων και όχι μεταξύ των αποδόσεων. Αυτό το χαρακτηριστικό καλύπτεται από τα ARCH υποδείγματα.

Όπως γνωρίζουμε όμως από τη θεωρία των χρονολογικών σειρών, για να περιγραφεί μια AR διαδικασία ως μία στάσιμη σειρά πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου $\theta(L) = (1 - \theta_1 \cdot L - \dots - \theta_p \cdot L^p) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο που στην απλή περίπτωση του AR(1) σημαίνει ότι $-1 < \theta_1 < 1$. Αντίστοιχα για να είναι στάσιμη η διαδικασία στα τετράγωνα των ε_t πρέπει $0 < a_1 < 1$. Τέλος, κάθε ARCH(p) υπόδειγμα μπορεί να γραφτεί ως ένα AR(p) υπόδειγμα.

3.4.1.2 Το υπόδειγμα GARCH ως ένα ARMA στα τετράγωνα των ε_t

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε το GARCH(1,1), $h_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= h_t + (\varepsilon_t^2 - h_t) = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + v_t = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot (\varepsilon_{t-1}^2 - v_{t-1}) + v_t = \\ &= a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \cdot v_{t-1} + v_t = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \cdot v_{t-1} + v_t\end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα ARMA(1,1) στα τετράγωνα των ε_t και εδώ για να διασφαλίσουμε τη στασιμότητα της διαδικασίας πρέπει να ισχύει ότι $a_1 + \beta_1 < 1$.

Ένα GARCH(p,q) μπορεί να γραφτεί ως ένα ARMA(m,p) ως εξής:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_i) \cdot \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot v_{t-i} + v_t \quad (3.14)$$

όπου $m = \max(p, q)$.

Αντίστοιχα και εδώ για να καθορίσουμε την τάξη (order) του GARCH υποδείγματος μπορούμε να δούμε την αυτοσυγχέτιση που υφίσταται τετράγωνα των ε_t όπως αυτή φαίνεται από τις ACF και PACF. Συνήθως, όμως, κατά την εμπειρική εφαρμογή των υποδειγμάτων GARCH δεν τίθεται το πρόβλημα της ταυτοποίησης των p και q γιατί η GARCH(1,1) διαδικασία αντιπροσωπεύει τις περισσότερες περιπτώσεις FTS.

3.4.2 Στασιμότητα ARCH και GARCH διαδικασιών

Πρωταρχικά θα πρέπει να ορίσουμε ότι υπάρχουν δύο είδη στασιμότητας τα οποία είναι τα εξής:

“*Weak stationarity*” σύμφωνα με την οποία ο μέσος, η διακύμανση και οι αυτοδιακυμάνσεις (autocovariances) είναι σταθεροί αριθμοί (δηλαδή ορίζονται και δεν μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου) και “*strict stationarity*” σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση κατανομής οποιουδήποτε συνόλου ε_t είναι αμετάβλητη στο χρόνο.

Οι παραπάνω συνθήκες για στασιμότητα (όπως ορίστηκαν στις παραγράφους 3.4.1.1 και 3.4.1.2 προκύπτουν από την έκφραση των ARCH και GARCH υποδειγμάτων ως AR και ARMA αντίστοιχα και γίνεται χρήση της θεωρίας των AR και ARMA υποδειγμάτων για την εξαγωγή τους. Μια ARCH ή GARCH διαδικασία για να μπορεί να θεωρηθεί στάσιμη θα πρέπει τα shocks στη διακύμανση να μην είναι μόνιμα αλλά η διακύμανση να εξασθενεί και η διαδικασία να «επιστρέφει» στην “average variance” ή αλλιώς στην “unconditional

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

variance". Με άλλα λόγια θα πρέπει η μη-δεσμευμένη διακύμανση μίας ARCH διαδικασίας να είναι ένας σταθερός αριθμός ο οποίος να ορίζεται και να μην εξαρτάται από το χρόνο.

Για να μπορέσουμε να εξάγουμε τη διακύμανση μίας ARCH διαδικασίας θα πρέπει να κάνουμε χρήση της ιδιότητας που συνδέει τη μη-δεσμευμένη αναμενόμενη τιμής με τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή και ορίζει ότι:

Low or iterated Expectations: Αν I_1 είναι ένα σύνολο πληροφοριών και I_2 είναι ένα άλλο σύνολο πληροφοριών που αναφέρεται σε διαφορετική χρονική στιγμή και ισχύει ότι $I_1 \subseteq I_2$, τότε $E(y|I_1) = E(E(y|I_2)|I_1)$ και αν $I_1 = \emptyset$ τότε $E(y) = E(E(y|I_2))$.

Κάνοντας χρήση του προαναφερόμενου «νόμου των επαναλαμβανόμενων προσδοκιών» μπορούμε να γράψουμε ότι:

- **Μη-δεσμευμένη διακύμανση μίας ARCH(p) διαδικασίας.** Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι για να είναι στάσιμη μια ARCH(1) διαδικασία πρέπει να ισχύει ότι $a_1 < 1$. Αν $a_1 = 1$ τότε τα shocks στη διακύμανση θα είναι μόνιμα και θα έχουμε ένα IARCH δηλαδή ένα Integrated ARCH κατά αντιστοιχία των Integrated AR υποδειγμάτων. Η μη-δεσμευμένη διακύμανση του στοχαστικού όρου εκ ακολουθεί μία ARCH(p) διαδικασία είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon}^2 &= \text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2|I_{t-1})] = E(h_t) = \\ &= E(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_p \cdot \varepsilon_{t-p}^2) = \\ &= a_0 + a_1 \cdot E(\varepsilon_{t-1}^2) + a_2 \cdot E(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots + a_p \cdot E(\varepsilon_{t-p}^2) = \\ &= a_0 + a_1 \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + a_2 \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + \dots + a_p \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon}^2 = a_0 + a_1 \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + a_2 \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + \dots + a_p \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p} \quad (3.15) \end{aligned}$$

Για να ορίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση πρέπει $a(1) = \sum_{i=1}^p a_i < 1$. Τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι **"covariance stationary"** και η διακύμανση της σειράς συγκλίνει στη μη-δεσμευμένη διακύμανση.

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

- Μη-δεσμευμένη διακύμανση μιας $GARCH(p,q)$ διαδικασίας. Κατά αντιστοιχία με το ARCH υπόδειγμα μπορούμε να γράψουμε για το στοχαστικό όρο που ακολουθεί μία $GARCH(1,1)$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varepsilon}^2 &= Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot v_{t-1} + v_t] = \\
 &= a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1 \cdot E(v_{t-1}) + E(v_t) = \\
 &= a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + \beta_1 \cdot E[E(v_{t-1}|I_{t-1})] + E[E(v_t|I_{t-1})] = \\
 &= a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + \beta_1 \cdot E[E(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})|I_{t-1}] + E[E(\varepsilon_t^2 - h_t)|I_{t-1}] = \\
 &= a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 + \beta_1 \cdot E[E(0)] + E[E(0)] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon}^2 = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \beta_1)} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$



Για να ορίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση μιας μεταβλητής που ακολουθεί μία διαδικασία $GARCH(1,1)$ πρέπει να ισχύει ότι $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η διαδικασία είναι “covariance stationary” και η διακύμανση της σειράς των συγκλίνει στην σ_{ε}^2 , δηλαδή τη μη-δεσμευμένη διακύμανση της σειράς. Αν $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ τότε τα shocks στη διακύμανση της σειράς είναι μόνιμα και μιλάμε για ένα Integrated GARCH. Ο Bollerslev (19986) απέδειξε ότι για να είναι μία $GARCH(p,q)$ διαδικασία στάσιμη και κατά συνέπεια να ορίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση, πρέπει να ισχύει ότι:

$$a(1) + \beta(1) = \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^q \beta_i < 1 \quad (\text{βλ. παράγραφο 3.5})$$

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τη ροπή δεύτερης τάξης ως προς το μέσο για να εξάγουμε τις απαραίτητες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε να ορίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση. Τώρα θα εξετάσουμε το μέσο και την αυτοδιακύμανση (autocovariance) μιας σειράς που ακολουθεί μια $GARCH(p,q)$ διαδικασία. Έστω ότι ο στοχαστικός όρος ε_t ακολουθεί μία $GARCH(p,q)$ διαδικασία, τότε:

$$\mu = E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t | I_{t-1})] = 0 \quad (3.17)$$

γιατί έχουμε ορίσει ότι σε μία GARCH διαδικασία $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$. Ενώ η *autocovariance* για $k \geq 1$ είναι:

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-k}) = E[E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-k} | I_{t-1})] = E(\varepsilon_{t-k} \cdot E(\varepsilon_t | I_{t-1})) = E(\varepsilon_{t-k} \cdot 0) = 0 \quad (3.18)$$

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

επειδή ε_{t-k} είναι γνωστό με δεδομένη την πληροφόρηση μέχρι το t-1. Τα παραπάνω ισχύουν και για τις ARCH διαδικασίες. Άρα μία GARCH ή ARCH διαδικασία έχει σταθερό μέσο και αυτοδιακύμανση (ίσα με το 0) και η διακύμανση τους ορίζεται και είναι “time invariant” αν ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που προαναφέραμε. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι όπως διατύπωσε ο Nelson (1990a) μια διαδικασία ARCH μπορεί να είναι “strictly stationary” χωρίς να είναι “weakly stationary”.

3.4.3 Το φαινόμενο “fat tails”

Όπως έχουμε αναφέρει η κατανομή των FTS παρουσιάζει μεγαλύτερη κύρτωση από την κανονική κατανομή. Αν ένας στοχαστικός όρος εί ακολουθεί μία ARCH(1) διαδικασία τότε η κύρτωση που παρουσιάζει η κατανομή του είναι:

$$\gamma_2 \equiv \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{(\sigma^2)^2} = 3 \cdot \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3 \cdot \alpha_1^2} \right) > 3, \text{όταν } 1 - 3 \cdot \alpha_1^2 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \alpha_1^2 < 1 \quad (3.19)$$

Άρα βλέπουμε ότι μια διαδικασία ARCH(1) έχει $\gamma_2 > 3$ που σημαίνει ότι η κατανομή είναι λεπτόκυρτη. Αυτό εννοούσαμε όταν λέγαμε ότι τα ARCH υποδείγματα «πιάνουν» (“capture”) πολλά από τα φαινόμενα που απαριθμήσαμε στο κεφάλαιο 2 μεταξύ των οποίων και το “fat tails” φαινόμενο.

3.4.4 Εκτίμηση των παραμέτρων των ARCH και GARCH υποδειγμάτων

Οι περιορισμοί που προκύπτουν για τις παραμέτρους των υποδειγμάτων ARCH και GARCH τόσο από τις συνθήκες στασιμότητας όσο και από το γεγονός ότι η υπό-συνθήκη διακύμανση πρέπει να είναι θετική είναι απαραίτητοι κατά τη διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων. Για την εκτίμηση των παραμέτρων συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (“Maximum Likelihood Estimation”).

3.4.4.1 Η μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στην μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας θα γράφουμε MLE) βασίζεται στην αρχή της εύρεσης

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

εκείνων των τιμών (εκτιμήσεων) των παραμέτρων του πληθυσμού για τις οποίες μεγιστοποιείται η συνάρτηση πιθανοφάνειας των τιμών του παρατηρούμενου δείγματος

Εστω ότι τα δεδομένα x_1, x_2, \dots, x_n είναι τυχαίες παρατηρήσεις ενός δείγματος από τον πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $f(x|\Theta)$ όπου το Θ είναι ένα διάνυσμα με όλες τις παραμέτρους του πληθυσμού προς εκτίμηση και οι οποίες ορίζουν τη συνάρτηση κατανομής. Αν οι παρατηρήσεις του τυχαίου δείγματος είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένες τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint pdf) $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta)$ δηλαδή η $\text{Prob}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ μπορεί να οριστεί ως:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta) = f(x_1 | \Theta) \cdot f(x_2 | \Theta) \cdot \dots \cdot f(x_n | \Theta) = L(x_1, \dots, x_n | \Theta) = L(\Theta) \quad (3.20)$$

η οποία είναι η **συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood function)**. Όπως προαναφέραμε η βασική αρχή της MLE είναι η εύρεση εκείνων των εκτιμήσεων του Θ ή αλλιώς του $\hat{\Theta}$ έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η (3.20). Άρα το πρόβλημα της εύρεσης των παραμέτρων με τη μέθοδο MLE είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της (3.20) ως προς το Θ με δεδομένη τη συναρτησιακή μορφή της $f(x | \Theta)$:

$$\max_{\Theta} L(\Theta) = \max_{\Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i | \Theta) \quad (3.21)$$

3.4.4.2 Εφαρμογή της μεθόδου MLE στα ARCH και GARCH υποδείγματα

Αν υποθέσουμε ότι $r_t = \varepsilon_t$ και $\varepsilon_t = u_t \cdot \sqrt{h_t}$ για $t = 1 \dots T$ όπου $u_t \sim iid, N(0,1)$ και $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}^2$ τότε $\Theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}$ και $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$ δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τα ε_t είναι:

$$f(\varepsilon_t | I_{t-1}, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_t}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right\} \quad (3.22)$$

Επειδή, όμως, τα ε_t δεν κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα γιατί όπως έχουμε τονίσει υφίσταται το volatility clustering φαινόμενο δε μπορούμε να γράψουμε ότι $f(\varepsilon_1 | \Theta) \cdot f(\varepsilon_2 | \Theta) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon_T | \Theta) = L(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T | \Theta) = L(\Theta)$ αλλά κάνοντας χρήση της ιδιότητας $P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B)$ που προκύπτει από τον ορισμό της υπό συνθήκη πιθανότητας μπορούμε να γράψουμε ότι:

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

$$L \left(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_B}_{B}, \underbrace{\varepsilon_{T-1}, \varepsilon_T}_{A} \mid \Theta \right) = f(\varepsilon_T \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-1}, \Theta) \cdot f(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-1} \mid \Theta) \quad (3.23)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε για το $f \left(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_B}_{B}, \underbrace{\varepsilon_{T-2}, \varepsilon_{T-1}}_{A} \mid \Theta \right)$ και η (3.23) θα γίνει:

$$L(\Theta) = f(\varepsilon_T \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-1}, \Theta) \cdot f(\varepsilon_{T-1} \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-2}, \Theta) \cdot f(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-2} \mid \Theta) \quad (3.24)$$

Τελικά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= f(\varepsilon_T \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-1}, \Theta) \cdot f(\varepsilon_{T-1} \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{T-2}, \Theta) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon_1 \mid \Theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(\varepsilon_t \mid I_{t-1}, \Theta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Η (3.25) μπορεί να γραφτεί ως:

$$L(\Theta) = \prod_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_t}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right\} \right) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \cdot \left(\prod_{t=1}^T (h_t)^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right\} \quad (3.26)$$

Επειδή ο λογάριθμος της (3.26) αποτελεί μονότονη και αύξουσα συνάρτηση, η μεγιστοποίηση της $\ln(L(\Theta))$ είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της $L(\Theta)$. Ο λόγος που μεγιστοποιούμε την log-likelihood έχει να κάνει καθαρά με λόγους ευκολίας στο χειρισμό της συνάρτησης. Άρα η log-likelihood είναι:

$$\ln(L(\Theta)) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \quad (3.27)$$

Για να πάρουμε εκτιμήσεις των παραμέτρων μεγιστοποιούμε την (3.27) ως προς Θ υπό τους περιορισμούς που επιβάλλουν οι συνθήκες στασιμότητας αλλά και τους περιορισμούς για να είναι η διακύμανση θετική.

Για παράδειγμα μπορούμε να υποθέσουμε την περίπτωση του GARCH(1,1) στην οποία η (3.27) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$-\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \ln(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}} \quad (3.28)$$

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

η οποία μεγιστοποιείται ως προς τα $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ υπό τους περιορισμούς $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Ένα πρόβλημα που δημιουργείται είναι ότι για $t=1$ δεν έχουμε τους όρους ε_0^2 και h_0 . Ένας τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να χωρίσουμε τα δεδομένα μας $r_1, r_2, r_3, \dots, r_T$ ως εξής: να θέσουμε $r_1 = r_0 = \varepsilon_0$ και $r_2, r_3, \dots, r_T \rightarrow r_1, r_2, \dots, r_{T-1}$. Άρα τώρα θα έχουμε πλήθος δεδομένων ($T-1$) και $\varepsilon_0^2 = r_0^2$, ενώ επειδή το ε_t^2 αποτελεί κατά προσέγγιση εκτίμηση της h_t θα έχουμε ότι $h_0 = \varepsilon_0^2 = r_0^2$ ή εναλλακτικά μπορούμε να θέσουμε το h_t ίσο με την unconditional variance του ε_t .

Αντίστοιχα για ένα ARCH(1) η (3.27) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$-\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \ln(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2)} \quad (3.30)$$

η οποία μεγιστοποιείται ως προς τα α_0, α_1 υπό τους περιορισμούς $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 > 0, \alpha_1 < 1$. Επειδή όπως προαναφέραμε τα ε_t^2 αποτελούν κατά προσέγγιση εκτίμηση της h_t και επειδή όπως έχουμε ήδη δείξει στην παράγραφο 3.4.1.1 το ARCH(1) μπορεί να γραφτεί ως ένα AR(1) στα ε_t^2 ως εξής: $\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t$, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα α_0, α_1 με τη μέθοδο των *ελαχίστων τετραγώνων (Ordinary Least Squares, OLS)*. Παρόλα αυτά όπως σημειώνει ο Engle (1982) οι εκτιμητές με τη μέθοδο MLE είναι πιο αποτελεσματικοί (“efficient”) σε σχέση με τους εκτιμητές OLS.

3.4.4.3 Μεγιστοποίηση της log-likelihood

Η (3.27) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sum_{t=1}^T -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln(h_t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} = \sum_{t=1}^T l_t(\Theta) \quad (3.31)$$

όπου $l_t(\Theta)$ είναι log-likelihood για την t^{th} παρατήρηση του δείγματος. Γενικά για να μεγιστοποιήσουμε την (3.31) πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης που αφορούν στην $l_t(\Theta)$. Η μεγιστοποίηση όμως της log-likelihood γίνεται αλγορίθμικά χρησιμοποιώντας τις πρώτες παραγώγους και τον πίνακα των δευτέρων

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδειγματα

παραγώγων όπως αυτός προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τα διανύσματα των πρώτων παραγώγων.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης (First Order Conditions) ή η Gradient (διάνυσμα 1^{ου} παραγώγων) είναι:

$$\frac{\partial l_t(\Theta)}{\partial \Theta} = -\frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_t^2}{(h_t)^2} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} = \frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \quad (3.32)$$

Πίνακας των δευτέρων παραγώγων ή Hessian είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'} &= \frac{\partial}{\partial \Theta'} \left(\frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right) = -\frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \frac{\varepsilon_t^2}{(h_t)^2} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta'} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \Theta'} \left(\frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \right) = \\ &= -\frac{1}{2 \cdot (h_t)^2} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta'} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \Theta'} \left(\frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \right) \quad (3.33) \end{aligned}$$

όπου η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή του δεύτερου όρου του αθροίσματος (3.33) είναι 0 και ο τελευταίος όρος του πρώτου γινομένου έχει αναμενόμενη τιμή ίση με το 1 (Engle, 1982). Άρα η *information matrix* που είναι η αρνητική αναμενόμενη τιμή της Hessian διαιρεμένη με το πλήθος των παρατηρήσεων γίνεται:

$$I_{\Theta \Theta} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{2T} E \left\{ \frac{1}{(h_t)^2} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta'} \right\} \quad (3.34)$$

και εκτιμάται από το:

$$\hat{I}_{\Theta \Theta} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{2 \cdot (h_t)^2} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \Theta'} \quad (3.35)$$

Ο αλγόριθμος που ακολουθείται για την εκτίμηση των παραμέτρων των ARCH και GARCH υποδειγμάτων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\Theta^{i+1} = \Theta^i + [\hat{I}_{\Theta \Theta}^{-1}]^i \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t^i(\Theta)}{\partial \Theta} \quad (3.36)$$

Ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής: ξεκινάμε από κάποιες αρχικές τιμές Θ^0 και αξιολογούμε για αυτές τις αρχικές τιμές την *information matrix* και το διάνυσμα των πρώτων παραγώγων. Στη συνέχεια προσθέτουμε το δεύτερο όρο της (3.36) στις αρχικές τιμές και παίρνουμε το Θ^1 . Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων να συγκλίνουν. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι μπορούμε να επιτύχουμε μεγιστοποίηση της (3.31) μόνο με την εύρεση των πρώτων παραγώγων.

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

Ένας παραπλήσιος τρόπος για τη μεγιστοποίηση της (3.31) είναι ο αλγόριθμος Berndt, Hall, Hall and Hausman (1974) (BHHH) ο οποίος είναι ο εξής:

$$\Theta^{i+1} = \Theta^i + \left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial l_t(\Theta)}{\partial \Theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial l_t(\Theta)}{\partial \Theta} \right)^T \right]^{-1} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\Theta)}{\partial \Theta} \quad (3.37)$$

και λειτουργεί κατά αντίστοιχο τρόπο με τον (3.36).

3.5 Προβλέψεις με ARCH και GARCH υποδείγματα

Για να κάνουμε προβλέψεις με ένα GARCH(p,q) υπόδειγμα μπορούμε να το εκφράσουμε ως ένα ARMA(m,p) στα τετράγωνα των ε_t όπως κάναμε στην (3.14):

$$\varepsilon_{t+s}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \cdot \varepsilon_{t+s-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot v_{t+s-i} + v_{t+s} \quad (3.38)$$

Για να κάνουμε πρόβλεψη θα χρησιμοποιήσουμε τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή με την πληροφόρηση που έχουμε μέχρι την χρονική στιγμή t. Η conditional expected value της (3.38) είναι:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t+s}^2 | I_t) &= a_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \cdot E(\varepsilon_{t+s-i}^2 | I_t) - \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot E(v_{t+s-i} | I_t) + E(v_{t+s} | I_t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(\varepsilon_{t+s}^2 | I_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \cdot E(\varepsilon_{t+s-i}^2 | I_t) - \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot E(v_{t+s-i} | I_t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

όπου το s είναι ο αριθμός των περιόδων για τις οποίες επιθυμούμε να κάνουμε πρόβλεψη στο μέλλον και

- $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 | I_t) = \varepsilon_{t+s-i}^2$, για $i \geq s$
- $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 | I_t)$, για $i < s$ δίνεται recursively χρησιμοποιώντας την (3.39)
- $E(v_{t+s-i} | I_t) = 0$, για $i < s$
- $E(v_{t+s-i} | I_t) = v_{t+s-i}$, για $i \geq s$

Για παράδειγμα έχουμε αποδείξει ότι ένα GARCH(1,1) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \cdot v_{t-1} + v_t$$

Κεφάλαιο 3: ARCH και GARCH υποδείγματα

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε $1 \dots T$ δεδομένα και το $s = 2$, δηλαδή θέλουμε να κάνουμε 2 περιόδους πρόβλεψη στο μέλλον, παίρνοντας τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Για $s = 1$:

$$E_T(\varepsilon_{T+1}^2) = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot E_T(\varepsilon_T^2) - \beta_1 \cdot E_T(v_T) + E_T(v_{T+1}) = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot \varepsilon_T^2 - \beta_1 \cdot v_T \quad (3.40)$$

όπου $v_T = \varepsilon_T^2 - h_T$ και άρα η (3.40) γίνεται:

$$E_T(\varepsilon_{T+1}^2) = h_{T+1} = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_T^2 + \beta_1 \cdot h_T \quad (3.41)$$

Για $s = 2$:

$$E_T(\varepsilon_{T+2}^2) = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot E_T(\varepsilon_{T+1}^2) - \beta_1 \cdot E_T(v_{T+1}) + E_T(v_{T+2}) = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot E_T(\varepsilon_{T+1}^2) \quad (3.42)$$

όμως το $E_T(\varepsilon_{T+1}^2)$ δίνεται από την (3.41) και η (3.42) γίνεται:

$$E_T(\varepsilon_{T+2}^2) = h_{T+2} = a_0 + (a_1 + \beta_1) \cdot (a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_T^2 + \beta_1 \cdot h_T) \quad (3.43)$$

Γενικότερα για $s > p$:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 | I_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_i) \cdot E(\varepsilon_{t+s-i}^2 | I_t) \quad (3.44)$$

Από την (3.44) μπορούμε να δούμε γιατί αν το πολυώνυμο $1 - (a_1 + \beta_1) \cdot L - \dots - (a_m + \beta_m) \cdot L^m$ έχει λύσεις έξω από το μοναδιαίο κύκλο, τότε η διακύμανση μιας σειράς που ακολουθεί μια ARCH-GARCH διαδικασία τείνει να «επιστρέφει» στη μη-δεσμευμένη διακύμανση. Αυτό σημαίνει ότι καθώς το s γίνεται πολύ μεγάλο η πληροφόρηση του παρελθόντος δεν μας βοηθάει να προβλέψουμε την υπό συνθήκη διακύμανση η οποία συγκλίνει στην μη-δεσμευμένη διακύμανση. Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται η πρόβλεψη για τα ARCH υποδείγματα.

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

4.1 Εισαγωγικά

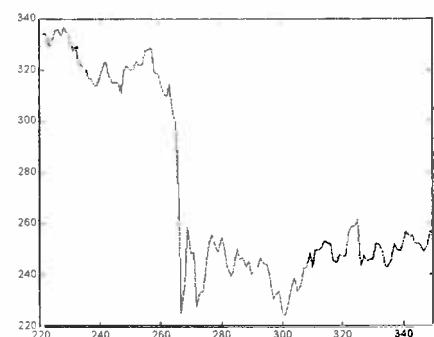
Ήδη από το κεφάλαιο 2 όταν περιγράφαμε τα χαρακτηριστικά των FTS είχαμε τονίσει ότι ένα από αυτά είναι τα «μεγάλα άλματα» των τιμών που οδηγούν στην εμφάνιση ακραίων τιμών και συνεπάγονται «δραματικές αλλαγές» στην συμπεριφορά και τα γενικότερα χαρακτηριστικά των FTS. Γεγονότα τα οποία μπορούν να προκαλέσουν τέτοιες αλλαγές στην συμπεριφορά των FTS μπορεί να είναι:

- Πόλεμοι
- Financial panics (βλ. 19 Οκτωβρίου 1987)
- Σημαντικές αλλαγές στην κυβερνητική οικονομική πολιτική όπως: αλλαγές στην πολιτική της κεντρικής τράπεζας (αύξηση – μείωση επιτοκίων) και αλλαγές στην φορολογική πολιτική.

Το αποτέλεσμα αυτών των δραματικών αλλαγών είναι ότι τα χαρακτηριστικά (μέσος, διακύμανση) των χρονολογικών σειρών μεταβάλλονται, έτσι ώστε η μοντελοποίησή τους να «απαιτεί» οι παράμετροι των υποδειγμάτων να μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο ως αποτέλεσμα αυτών των «δραματικών αλλαγών».

4.1.1 Γενικά: Time-varying parameters υποδείγματα

Ας υποθέσουμε ότι προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε την χρονολογική σειρά που απεικονίζεται στο Διάγραμμα 11. Σίγουρα σε αυτή τη χρονολογική σειρά υπάρχει μία «δραματική αλλαγή» που έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των χαρακτηριστικών της σειράς. Συγκεκριμένα σε αυτή τη FTS έχει αλλάξει ο μέσος της σειράς. Αν αυτή η σειρά ακολουθούσε μία AR(1) διαδικασία, δηλαδή $y_t = \delta + \phi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\varepsilon_t \sim iid N(0, \sigma^2_\varepsilon)$, τότε θα μπορούσαμε να υποδειγματοποιήσουμε τη χρονολογική σειρά χρησιμοποιώντας δύο υποδείγματα. Ένα για την περίοδο πριν της δραματικής μείωσης των τιμών της FTS το οποίο θα είναι:



Διάγραμμα 11

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υπόδειγματα

$$y_t = \delta_1 + \phi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

και ένα για την περίοδο μετά της δραματικής μείωσης των τιμών το οποίο θα είναι:

$$y_t = \delta_2 + \phi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.2)$$

όπου $\delta_2 < \delta_1$ έτσι ώστε ο μέσος της σειράς $\left(\mu_2 = \frac{\delta_2}{1-\phi} < \mu_1 = \frac{\delta_1}{1-\phi}, \text{ με } |\phi| < 1 \right)$ να είναι μικρότερος μετά τη μείωση των τιμών. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η οικονομία χαρακτηρίζεται από διάφορα επίπεδα (*states* ή *regimes*). Έτσι, αν η y_t είναι μία οικονομική-χρηματοοικονομική μεταβλητή, κατά την πρώτη περίοδο θα μπορούσαμε να πούμε ότι η οικονομία βρίσκεται σε διαφορετικό *state* ή *regime* από ότι μετά την πτώση των τιμών της y_t . Παρόλα αυτά το προαναφερόμενο υπόδειγμα (η (4.1) και η (4.2)) δε φαίνεται να είναι ικανοποιητικό για τους εξής λόγους:

- Η δραματική αλλαγή στην χρονολογική σειρά, η οποία έγινε στο παρελθόν μπορεί να επαναληφθεί στο μέλλον και αυτό πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας όταν πραγματοποιούμε προβλέψεις και
- Οι αλλαγές στα *states* ή *regimes* της οικονομίας (*regime shifts*) δεν είναι ένα ντετερμινιστικό γεγονός το οποίο μπορεί να προβλεφτεί με ακρίβεια, αλλά αντιθέτως, μπορεί να θεωρηθούν ως τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες με κάποια πιθανότητα πραγματοποιούνται και οδηγούν στην αλλαγή του δ_1 σε δ_2 .

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε τα διάφορα *states* της οικονομίας με το s_t , το οποίο είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία μπορεί να πάρει διακριτές τιμές. Έτσι αν η οικονομία διέπεται από N states τότε $s_t = 1, 2, 3, \dots, N$. Άρα το s_t είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή (*discrete random variable*) την οποία όμως δεν παρατηρούμε. Η πληροφόρηση που έχει μόνο στη διάθεση του ο αναλυτής των χρονολογικών σειρών είναι το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματός του. Εκείνο όμως που μπορεί να κάνει ο αναλυτής είναι να εξάγει συμπεράσματα σχετικά με τις πιθανότητες εμφάνισης του ενός state ή του άλλου για κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, 3, \dots, T$ του δείγματος, με βάση την πληροφόρηση που έχει στη διάθεσή του. Δηλαδή μπορεί να εκτιμήσει τις εξής πιθανότητες $P(s_t | I_t)$ για κάθε $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Άρα το υπόδειγμα που περιγράφεται από τις (4.1) και (4.2) μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$y_t = \delta_{s_t} + \phi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{όπου } s_t = 1, 2 \quad (4.3)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Όπως παρατηρούμε η (4.3) είναι ένα υπόδειγμα με *time-varying parameter*, δηλαδή η σταθερά του υποδείγματος μεταβάλλεται ανάλογα με το χρόνο όπως ορίζεται από την μεταβλητή s_t . Στην γενική τους μορφή τα υπόδειγματα αυτά μπορούν να γραφτούν ως:

$$y_t = x'_t \cdot \beta_{s_t} + u_t \text{ με } u_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.4)$$

όπου το β_{s_t} είναι ένα ($k \times 1$) διάνυσμα με τους συντελεστές του υποδείγματος οι οποίοι αλλάζουν ανάλογα σε ποιο state βρίσκεται η οικονομία έτσι ώστε αν $s_t = 1$ τότε οι συντελεστές δίνονται από το β_1 αν $s_t = 2$ τότε οι συντελεστές δίνονται από το β_2 κ.τ.λ. Το x_t είναι ένα ($k \times 1$) διάνυσμα το οποίο μπορεί να περιέχει εξωγενείς (predetermined or exogenous) μεταβλητές ή μπορεί να περιέχει την y_t με χρονικές υστερήσεις.

4.1.2 Μαρκωβιανή Αλυσίδα (Markov chain)

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε ένα υπόδειγμα AR(1) στο οποίο η μία από τις δύο παραμέτρους άλλαζε διαχρονικά αφού επηρεαζόταν από την μη παρατηρούμενη τυχαία μεταβλητή s_t , δηλαδή από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν η οικονομία. Για να είναι ολοκληρωμένο το υπόδειγμα θα πρέπει να περιγράψουμε την κατανομή πιθανότητας (ή νόμο) (“probability law”), η οποία διέπει την αλλαγή από το ένα state της οικονομίας στο άλλο και άρα τη μεταβολή από την μία τιμή της παραμέτρου στην άλλη.

Η unobserved random variable s_t αποτελεί ουσιαστικά μια χρονολογική σειρά η οποία όμως παίρνει διακριτές τιμές ($s_t = 1, 2, 3, \dots, N$) και έτσι δε μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές στο χρόνο. Ένας τρόπος για να περιγράψουμε τη διαδικασία που ακολουθεί μια μεταβλητή σαν την s_t είναι να υποθέσουμε ότι η διαδικασία αυτή είναι μια **Μαρκωβιανή Αλυσίδα (Markov Chain)**. Η Markov chain είναι το πιο απλό υπόδειγμα χρονολογικών σειρών για διακριτές μεταβλητές και περιγράφεται ως εξής:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πιθανότητα η μεταβλητή s_t να πάρει την τιμή j εξαρτάται από το παρελθόν, μόνο μέσα από την τιμή της πιο πρόσφατης s_t με υστέρηση, δηλαδή της s_{t-1} . Μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\Pr ob(s_t = j | s_{t-1} = i_1, s_{t-2} = i_2, \dots, s_{t-r} = i_r, I_t) = \Pr ob(s_t = j | s_{t-1} = i) \equiv p_{ij} \quad (4.5)$$

Μια τέτοια διαδικασία περιγράφεται ως μία **Μαρκωβιανή αλυσίδα με N states (N-state Markov chain)** με **transition probabilities** p_{ij} για $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$. Η «πιθανότητα

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

μεταπήδησης» (*transition probabilities*) p_{ij} δίνει την πιθανότητα το state i της οικονομίας να ακολουθείται από το state j της οικονομίας (Hamilton, 1994).

Οι transition probabilities μπορούν να εκφραστούν από ένα $N \times N$ πίνακα ο οποίος ονομάζεται **transition matrix** και ορίζεται ως εξής:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

όπου κάθε στήλη του P αθροίζει στη μονάδα:

$$p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{iN} = 1 \quad (4.7)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν η s_t ακολουθεί μια Markov chain, τα time-varying parameter υποδείγματα που περιγράφονται από την (4.4) μπορούν να ονομαστούν **Markov-switching regression models**, αν το x_t είναι ένα ($k \times 1$) διάνυσμα το οποίο περιέχει εξωγενείς (predetermined or exogenous) μεταβλητές και **Markov-switching time-series model** αν το x_t περιέχει χρονικές υστερήσεις της y_t και το οποίο αναπτύχθηκε από τον Hamilton το 1989.

4.2 Το Απλό Markov regime-switching υπόδειγμα (Simple Markov Regime-Switching model, SMRS)

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2 όταν περιγράφαμε το volatility clustering φαινόμενο, μπορούμε να δούμε τις περιόδους με μεγάλη διακύμανση ως ένα state ή regime της οικονομίας (όταν π.χ. υφίσταται οικονομική κρίση ή οικονομία βρίσκεται στην φάση ύφεσης, οπότε υπάρχει μεγάλη μεταβλητικότητα αφού «κακά» νέα εισέρχονται στην αγορά) και όταν η διακύμανση είναι μικρότερη μπορούμε να πούμε ότι η οικονομία βρίσκεται σε άλλα states ή regimes (π.χ. σε φάση ανάκαμψης).

Ενας απλός τρόπος να εκφράσουμε αυτή την αλλαγή της διακύμανσης είναι να υποθέσουμε ότι η διακύμανση παίρνει τιμές ανάλογα με το regime (s_t), στο οποίο βρίσκεται η οικονομία. Το s_t υποθέτουμε ότι ακολουθεί μια Markov chain έτσι ώστε οι αλλαγές από το ένα regime στο άλλο να γίνονται με βάση τα transition probabilities και για κάθε $s_t = 1$,

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$2, 3, \dots, N$ έχουμε μια διαφορετική τιμή για την διακύμανση $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2$. Αυτό το απλό υπόδειγμα στην ολοκληρωμένη του μορφή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$r_t = \mu_{s_t} + \varepsilon_t \quad \text{όπου } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2) \quad (4.8)$$

όπου $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad E(r_t) = E(\mu_{s_t} + \varepsilon_t) = \mu_{s_t}$ και

$Var(r_t) = Var(\mu_{s_t} + \varepsilon_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_{s_t}^2$. Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$r_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \quad (4.9)$$

με $s_t = 1, 2, 3, \dots, N$ να ακολουθούν μια N-state Markov chain. Φυσικά το υπόδειγμα αυτό απλοποιείται όταν υποθέτουμε ότι στην οικονομία υπάρχουν 2 ή 3 states. Όπως παρατηρούμε σε αυτό το υπόδειγμα μεταβάλλεται ο μέσος και η διακύμανση ανάλογα με το regime που βρίσκεται η οικονομία. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα transition probabilities και τα συμπεράσματα σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης του ενός state ή του άλλου μπορούμε να πραγματοποιήσουμε προβλέψεις τόσο για το μέσο όσο και για τη διακύμανση που θα μας βοηθήσουν σε πολλές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά (αν οι προβλέψεις αυτές είναι ανώτερες από αυτές που προκύπτουν από την χρησιμοποίηση άλλων υποδειγμάτων).

4.3 Τα Markov Switching ARCH (MS-ARCH) υποδείγματα

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, όπου εξετάζαμε τα υποδείγματα ARCH και GARCH, για να είναι μια διαδικασία covariance stationary θα πρέπει να υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί στις παραμέτρους. Επί παραδείγματι είχαμε αναφέρει ότι για να είναι στάσιμη μια GARCH(1,1) διαδικασία απαιτείται $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Διαφορετικά αν $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ το GARCH(1,1) σε μορφή ARMA(1,1) γράφεται:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \cdot \nu_{t-1} + \nu_t \quad (4.10)$$

Αν θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη s περιόδους στο μέλλον με $s > 1$ η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της (4.10) είναι:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 | I_t) = a_0 + E(\varepsilon_{t+s-1}^2 | I_t) \quad (4.11)$$

το οποίο έχει την εξής λύση:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 | I_t) = s \cdot a_0 + E(\varepsilon_t^2 | I_t) \quad (4.12)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Παρατηρούμε λοιπόν, όπως προκύπτει από την (4.12), ότι όταν δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες στασιμότητας τότε η πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης δε συγκλίνει στη μη-δεσμευμένη διακύμανση αλλά αυξάνεται γραμμικά καθώς αυξάνεται ο ορίζοντας της πρόβλεψης.

Αυτή η διατήρηση των shocks στη διακύμανση (έτσι όπως εκφράζεται από τα υποδείγματα IGARCH τα οποία έχουν την ιδιότητα που ονομάζεται “*persistence in conditional variance*” και σημαίνει η τρέχουσα πληροφόρηση είναι σημαντική για προβλέψεις οποιασδήποτε χρονικής περιόδου, όπως άλλωστε προκύπτει από την (4.12)) έχει διαπιστωθεί σε πολλές εμπειρικές μελέτες με χρηματοοικονομικά δεδομένα. Οι Lamoureux και Lastrapes (1990) σημείωσαν ότι τα χρηματοοικονομικά δεδομένα φαίνεται να ακολουθούν IGARCH διαδικασίες λόγω των “*structural breaks*” δηλαδή των διαχρονικών μεταβολών που υφίστανται οι παράμετροι των GARCH υποδειγμάτων και εφάρμοσαν ένα υπόδειγμα στο οποίο ο σταθερός όρος των GARCH υποδειγμάτων μεταβαλλόταν ντετερμινιστικά. Σε αυτό το υπόδειγμα οι συντελεστές των ARCH και GARCH όρων ήταν σημαντικά μικρότεροι απομακρύνοντας το “*volatility persistence*” φαινόμενο. Τα “*structural breaks*” φαίνεται να εξηγούν και την αδυναμία των ARCH υποδειγμάτων για καλές προβλέψεις αλλά και την μέτρια στατιστική περιγραφή των ακραίων παρατηρήσεων (outliers). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε μία περίοδο με υψηλή διακύμανση και μία άλλη με χαμηλή διακύμανση οι οποίες εναλλάσσονται κατά τη διάρκεια του χρόνου. Ένα ARCH υπόδειγμα είναι δύσκολο να «πιάσει» αυτές τις ξαφνικές εναλλαγές των δύο περιόδων λόγω της αυτοπαλίνδρομης φύσης του (η διακύμανση σήμερα, εξαρτάται από το μέγεθος του τυχαίου σφάλματος χθες). Έτσι τα ARCH υποδείγματα τείνουν να υποεκτιμούν την υπό-συνθήκη διακύμανση όταν υφίσταται μετάβαση από μία περίοδο χαμηλής διακύμανσης σε μία περίοδο υψηλής διακύμανσης και να υπερεκτιμούν την conditional variance όταν συμβαίνει το αντίθετο.

Ένας τρόπος να ενδογενοποιήσουμε αυτές τις μεταβολές των παραμέτρων είναι να επιτρέψουμε τη μεταβολή των παραμέτρων των ARCH υποδειγμάτων ανάλογα με το regime ή το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία και τα οποία συμβολίζονται όπως και παραπάνω με s_t και ακολουθούν μία Μαρκωβιανή αλυσίδα. Τα Markov switching ARCH υποδείγματα προτάθηκαν από τους Hamilton και Susmel το 1994 και «πιάνουν» πιο ρεαλιστικά τις ιδιότητες των χρονολογικών σειρών όταν πρόκειται για δραματικά οικονομικά γεγονότα όπως π.χ. το «μίνι» κραχ του '87.

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Η πιο απλή μοντελοποίηση ενός MS-ARCH(N,1), όπου N είναι ο αριθμός των states στην οικονομία, θα μπορούσε να ήταν η ακόλουθη:

$$r_t = \varepsilon_t \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \text{ και } h_t = \omega_{s_t} + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.14)$$

όπου $s_t = 1, 2, 3, \dots, N$ είναι τα states της οικονομίας που ακολουθούν μία Markov chain. Στο υπόδειγμα (4.14) η υπό-συνθήκη διακύμανση εξαρτάται από την παρελθούσα πληροφόρηση έτσι όπως αυτή εκφράζεται από το ε_{t-1} αλλά και από το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία κατά την χρονική στιγμή t.

Ένα εναλλακτικό MS-ARCH(N,1) υπόδειγμα θα μπορούσε να ήταν το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_{s_t} + \varepsilon_t \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \Rightarrow r_t | I_{t-1} \sim N(\mu_{s_t}, h_t) \\ \text{και } h_t &= \omega_{s_t} + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \Rightarrow h_t = \omega_{s_t} + a_1 \cdot (r_{t-1} - \mu_{s_{t-1}})^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Στο υπόδειγμα (4.15) η υπό-συνθήκη διακύμανση εξαρτάται από την παρελθούσα πληροφόρηση έτσι όπως αυτή εκφράζεται από το ε_{t-1} αλλά και από το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία κατά την χρονική στιγμή t αλλά και κατά τη χρονική στιγμή t-1.

Γενικά θα μπορούσαμε να γράψουμε ένα MS-ARCH(N,q) υπόδειγμα της παραπάνω μορφής ως εξής:

$$\begin{aligned} h_t &= \omega_{s_t} + a_1 \cdot (r_{t-1} - \mu_{s_{t-1}})^2 + a_2 \cdot (r_{t-2} - \mu_{s_{t-2}})^2 + \dots + a_q \cdot (r_{t-q} - \mu_{s_{t-q}})^2 = \\ &= h_t(s_t, s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_{t-q}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

η (4.16) αναφέρει ότι η υπό-συνθήκη διακύμανση είναι συνάρτηση των states στα οποία βρίσκεται η οικονομία, q περιόδους πίσω.

Φυσικά μπορεί να υπάρξει και μεταβολή στις παραμέτρους των ARCH όρων όπως γίνεται στο ακόλουθο υπόδειγμα MS-ARCH(N,1):

$$\begin{aligned} r_t &= \varepsilon_t \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \text{ και} \\ h_t &= \alpha_{s_t} + \beta_{s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

σε αυτή την περίπτωση ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία αλλάζει και η επίδραση των παρελθουσών τυχαίων σφαλμάτων ε_t στην τρέχουσα υπό-συνθήκη διακύμανση. Στη γενική του μορφή ένα MS-ARCH(N,q) υπόδειγμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$r_t = \varepsilon_t \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \text{ και}$$

$$h_t = \alpha_{s_t} + \beta_{1,s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{2,s_t} \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \beta_{q,s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.17^a)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η εκτίμηση των MS-GARCH υποδειγμάτων παρουσιάζει το “path dependence problem” σύμφωνα με το οποίο η υπόσυνθήκη διακύμανσης εξαρτάται από όλα τα παρελθόντα states $(s_t, s_{t-1}, s_{t-2}, \dots)$ της οικονομίας τα οποία ο οικονομικός αναλυτής δεν παρατηρεί και έτσι η εκτίμηση τους γίνεται τεχνικά αδύνατη. Παρόλα αυτά έχουν αναπτυχθεί τεχνικές στην βιβλιογραφία έτσι ώστε να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό. Η προσέγγιση των MS-GARCH υποδειγμάτων δε θα υιοθετηθεί στην παρούσα εργασία.

4.4 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση των Markov switching υποδειγμάτων και την εξαγωγή πιθανοθεωρητικών συμπερασμάτων

Ο αλγόριθμος που ανέπτυξε ο Hamilton το 1989 αφορά στην εκτίμηση των παραμέτρων των Markov switching υποδειγμάτων (οι παράμετροι των οποίων θεωρούνται ως το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας Markov) με την μέθοδο τη **μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE)** καθώς και στην εξαγωγή συμπερασμάτων (**probabilistic inference**) σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης του ενός ή του άλλου state (s_t). Όμως η μεταβλητή s_t δεν παρατηρείται και ο αναλυτής στηρίζεται στη συμπεριφορά των παρατηρήσεων του δείγματος για την εξαγωγή των πιθανοθεωρητικών συμπερασμάτων. Ο αλγόριθμος του Hamilton έχει τη μορφή ενός «μη-γραμμικού επαναλαμβανόμενου φίλτρου» (“non-linear iterative filter”).

Το κύριο αποτέλεσμα του αλγόριθμου του Hamilton είναι τα συμπεράσματα σχετικά με τις πιθανότητες εμφάνισης των unobserved μεταβλητών s_t με δεδομένη την πληροφόρηση που έχουμε στη διάθεσή μας (δηλαδή τις παρατηρήσεις του δείγματος), ενώ η αξιολόγηση της δειγματικής συνάρτησης πιθανοφάνειας (sample likelihood) είναι ένα φυσικό παράγωγο (byproduct) του φίλτρου.

4.4.1 Περιγραφή του αλγορίθμου για N-states και το γενικό Markov Switching υπόδειγμα

Έστω ότι έχουμε το γενικό Markov Switching υπόδειγμα που περιγράψαμε στις (4.1.1) και (4.1.2):

$$y_t = x'_t \cdot \beta_{s_t} + u_t \quad \text{με } u_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.18)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

με $s_t = 1, 2, 3, \dots, N$ και $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Επειδή η s_t είναι διακριτή μεταβλητή η δεσμευμένη κατανομή της περιγράφεται περιληπτικά από την $\text{Prob}(s_t = i | I_{t-1})$.

Το **βασικό στοιχείο εισαγωγής (input)** στο βήμα t , στον αλγόριθμο είναι η εξής πιθανότητα:

$$\{\text{Prob}(s_t = i | I_{t-1})\}_{i=1}^N \quad (4.19)$$

όπου το I_{t-1} είναι το σύνολο της πληροφόρησης μέχρι το χρόνο $t-1$ (δηλαδή οι παρατηρήσεις του δείγματος).

Το **output** του αλγορίθμου είναι:

$$\{\text{Prob}(s_{t+1} = i | I_t)\}_{i=1}^N \quad (4.20)$$

όπου το I_t είναι η πληροφόρηση που έχουμε μέχρι το χρόνο t .

Ενώ το **παράγωγο (byproduct)** του αλγορίθμου είναι η υπό συνθήκη log-likelihood:

$$f(y_t | I_t) \quad (4.21)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι όταν αναφερόμαστε στην (4.20) αναφερόμαστε σε ένα διάνυσμα με N όρους οι οποίοι αθροίζουν στη μονάδα.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** για την t^{th} παρατήρηση με δεδομένη την πληροφόρηση αλλά και το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία στο χρόνο t είναι:

$$f(y_t | s_t = i, I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y_t - x'_t \cdot \beta_i)^2}{\sigma^2} \right] \quad (4.22)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η (4.22) θεωρούμε ότι εξαρτάται μόνο από το τρέχον state της οικονομίας και όχι από παρελθόντα states, θεωρούμε δηλαδή ότι ισχύει:

$$f(y_t | s_t = j, I_{t-1}) = f(y_t | s_t = j, s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, I_{t-1}) \quad (4.23)$$

Η υπόθεση αυτή δεν είναι περιοριστική αφού μπορούμε να χειριστούμε περιπτώσεις στις οποίες η (4.22) εξαρτάται και από παρελθόντα states. Τέλος μπορούμε να εκφράσουμε την (4.22) σε μορφή διανύσματος ($N \times 1$) όπου κάθε όρος του θα αποτελεί ένα διαφορετικό αριθμό ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία.

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

4.4.2 Περιγραφή του αλγορίθμου σε βήματα

Βήμα 1: Υπολογισμός της από κοινού δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής των y_t και s_t για $i = 1, 2, 3, \dots, N$ και για $t = t$:

$$f(y_t, s_t = i | I_{t-1}) = f(y_t | s_t = i, I_{t-1}) \times \text{Prob}(s_t = i | I_{t-1}) \quad (4.24)$$

η (4.24) προκύπτει από τον ορισμό της υπό-συνθήκη πιθανότητας

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Βήμα 2: Υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της y_t δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το $t - 1$ για $t = t$:

$$f(y_t | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^N f(y_t, s_t = i | I_{t-1}) \quad (4.25)$$

η (4.24) μας δίνει την πιθανότητα να πάρουμε το y_t και το state i της οικονομίας δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το $t - 1$. Επειδή η s_t είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή μπορούμε να αθροίσουμε την (4.24) ως προς το s_t και να πάρουμε την περιθωριακή (marginalized) συνάρτηση κατανομής της y_t δεδομένης της πληροφόρησης όπως δίνεται από την (4.25).

Βήμα 3: Υπολογισμός της πιθανότητας το state της οικονομίας στο χρόνο t να είναι i δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το χρόνο t για $i = 1, 2, 3, \dots, N$ και για $t = t$:

$$\frac{f(y_t, s_t = i | I_{t-1})}{f(y_t | I_{t-1})} = P(s_t = i | y_t, I_{t-1}) = P(s_t = i | I_t) \quad (4.26)$$

Βήμα 4: Υπολογισμός του βασικού output του αλγορίθμου δηλαδή της (4.20) για $i = 1, 2, 3, \dots, N$ και για $t = t$:

$$\begin{aligned} P(s_{t+1} = j | I_t) &= \sum_{i=1}^N P(s_{t+1} = j, s_t = i | I_t) = \sum_{i=1}^N P(s_{t+1} = j | s_t = i, I_t) \cdot P(s_t = i | I_t) = \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ij} \cdot P(s_t = i | I_t) \quad (4.27) \end{aligned}$$

Βήμα 5: Επανάληψη των βήμάτων 1 έως 4 για $t = t + 1$. Η (4.27) αποτελεί το στοιχείο εισαγωγής (input) για το βήμα 1, αυτή τη φορά όμως για $t = t + 1$:

$$f(y_{t+1}, s_{t+1} = i | I_t) = f(y_{t+1} | s_{t+1} = i, I_t) \times \text{Prob}(s_{t+1} = i | I_t) \quad (4.28)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

όπως παρατηρούμε όλα τα στοιχεία της (4.28) είναι γνωστά και ο τελευταίος όρος του γινομένου αποτελεί το βήμα 4 δηλαδή η (4.27). Τα επόμενα βήματα συνεχίζονται κανονικά και το αποτέλεσμα του βήματος 4 θα είναι η (4.27) για $t+1$:

$$P(s_{t+2} = j | I_{t+1}) \quad (4.29)$$

η οποία αποτελεί ξανά input για το βήμα 1 για $t=t+2$. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν πραγματοποιηθούν όλα τα βήματα για $t = 1, 2, 3, \dots, T$ που αποτελούν το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματός μας.

4.4.3 Το πρόβλημα των αρχικών τιμών

Ένα πρόβλημα που προκύπτει κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου είναι ότι για $t=1$ το πρώτο βήμα, δηλαδή η (4.24) γίνεται:

$$f(y_1, s_1 = i | I_0) = f(y_1 | s_1 = i, I_0) \times \text{Prob}(s_1 = i | I_0) \quad (4.30)$$

Άρα για να αρχίσει ο αλγόριθμος πρέπει να δώσουμε κάποιες **αρχικές τιμές** για τους 2 όρους του γινομένου (4.29). Για το πρώτο όρο του γινομένου έχουμε:

$$f(y_1 | s_1 = i, I_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y_1 - x'_1 \cdot \beta_i)^2}{\sigma^2} \right] \quad (4.31)$$

άρα για να αξιολογήσουμε την (4.31) το μόνο που χρειάζεται είναι να δώσουμε αρχικές τιμές για το διάνυσμα με τις παραμέτρους που το συμβολίζουμε με β_i^0 καθώς και να ορίσουμε μια αρχική τιμή για την διακύμανση που τη συμβολίζουμε σ_0^2 .

Για να δώσουμε αρχικές τιμές στο δεύτερο όρο του γινομένου (4.30) θα χρησιμοποιήσουμε την "**invariant distribution**" μιας Markov chain η οποία περιγράφεται από τις μη-δεσμευμένες πιθανότητες ότι η οικονομία θα βρίσκεται στο state i :

$$\text{Prob}(s_t = i) = \pi_i \quad (4.32)$$

για $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Οι πιθανότητες αυτές είναι η λύση του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} = P \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi} \quad (4.33)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$[1 \ \dots \ 1] \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \pi_i = 1 \Leftrightarrow \mathbf{I}' \boldsymbol{\pi} = 1 \quad (4.34)$$

Όταν θα φτάσουμε στο βήμα 4 θα χρειαστούμε αρχικές τιμές των p_{ij} για την αξιολόγηση της (4.27) τις οποίες και συμβολίζουμε με p_{ij}^0 .

4.4.4 Η μεγιστοποίηση της log-likelihood ως φυσικό παράγωγο του αλγορίθμου

Η (4.25) στο βήμα 2 μας δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της y_t δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το $t-1$. Σύμφωνα με το προαναφερόμενα η συνάρτηση πιθανοφάνειας και ο λογάριθμος αυτής είναι:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | I_{t-1}) \Rightarrow \log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_{t-1}) \quad (4.35)$$

όπως θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια το θ αποτελεί ένα διάνυσμα που οι όροι του είναι οι παράμετροι προς εκτίμηση και που στη συγκεκριμένη γενική περίπτωση είναι το εξής:

$\{\theta = [\sigma^2, \beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ki}, p_{ij}]_{i,j=1}^N\}$. Όταν ολοκληρωθούν και τα 4 πρώτα βήματα για όλα τα t , με βάση τις αρχικές τιμές που περιγράψαμε στην παράγραφο 4.4.3, έχουμε αποτελέσματα για τις $P(s_t = i | I_t)$ οι οποίες είναι απαραίτητες για την αξιολόγηση και μεγιστοποίηση της log-likelihood ως προς θ . Όταν πάρουμε τις πρώτες εκτιμήσεις για το θ , επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για όλα τα t και μόλις έχουμε αποτελέσματα για τις $P(s_t = i | I_t)$ (οι οποίες τώρα στηρίζονται στις εκτιμήσεις του θ και όχι στις αρχικές τιμές) αξιολογούμε και μεγιστοποιούμε τη log-likelihood ως προς θ . Η διαδικασία αυτή (δηλαδή τα iterations) τερματίζεται όταν οι τιμές των παραμέτρων συγκλίνουν σε μία σταθερή τιμή δηλαδή όταν οι τιμές των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την log-likelihood δεν μεταβάλλονται από iteration σε iteration.

Οι πιθανότητες που υπολογίζονται στο βήμα 3 του αλγορίθμου και είναι οι $P(s_t = i | I_t)$ ονομάζονται “*filtered probabilities*” και βασίζονται σε πληροφόρηση μέχρι το χρόνο t . Το βασικό output του αλγορίθμου έτσι όπως δίνεται από την (4.27) δηλαδή οι πιθανότητες $P(s_{t+1} = j | I_t)$ ονομάζονται “*forecasted probabilities*” επειδή δίνουν την πιθανότητα το state της οικονομίας να είναι το j στην χρονική περίοδο $t+1$ με πληροφόρηση μέχρι το χρόνο t .

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Ενώ η πιθανότητα η οικονομία να βρίσκεται στο state i με δεδομένη ολόκληρη την πληροφόρηση που μας δίνει το δείγμα μας ($t = 1, 2, 3, \dots, T$) ονομάζεται “*smoothed probability*” και συμβολίζεται με το $P(s_t = i | I_T)$.

4.5 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση του απλού Markov regime-switching υποδείγματος (SMRS model) για 2 states

Εστω ότι έχουμε απλό Markov regime-switching υπόδειγμα, για συντομία SMRS υπόδειγμα, το οποίο το είχαμε ορίσει ως εξής:

$$y_t = r_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \quad (4.36)$$

με $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Υποθέτουμε ότι για $t = 1, 2, 3, \dots, T$ η οικονομία έχει 2 states ή regimes $s_t = 1, 2$. Αν $s_t = 1$ τότε η οικονομία βρίσκεται στο state 1 αν $s_t = 2$ τότε η οικονομία βρίσκεται στο state 2. Όταν $s_t = 1$ θεωρούμε ότι η χρονολογική σειρά παρουσιάζει **χαμηλή διακύμανση (low volatility state)** ενώ όταν $s_t = 2$ η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση και έτσι η διακύμανση είναι **ψηλή (high volatility state)**. Αυτό σημαίνει ότι η y_t ακολουθεί την κανονική κατανομή (Normal) με μέσο μ_{s_t} και διακύμανση $\sigma_{s_t}^2$ τα οποία εξαρτώνται από το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία.

Markov Chain

Μπορούμε να ορίσουμε την:

$$\text{Prob}(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \text{Prob}(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij}$$

ως **transition probabilities** και είναι η πιθανότητα ότι το state i θα ακολουθείται από το state j , για $i, j = 1, 2, \dots, K$. Μια τέτοια διαδικασία περιγράφεται ως μια **Μαρκωβιανή Αλυσίδα (Markov Chain)** με K states και transition probabilities p_{ij} . Όταν έχουμε 2 regimes έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\left[\begin{array}{l} P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = p_{11} \\ P(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) = p_{12} \\ P(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) = p_{21} \\ P(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) = p_{22} \end{array} \right] \quad (4.37)$$

Σε μορφή πινάκων (**transition matrix**) έχουμε:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι: $p_{11} + p_{12} = 1$ και $p_{21} + p_{22} = 1$ κάθε στήλη του P αθροίζει στη μονάδα. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο P μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P = \begin{bmatrix} (1-p_{12}) & p_{21} \\ p_{12} & (1-p_{21}) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Άρα για να περιγράψουμε τη χρονολογική σειρά, σύμφωνα με τα παραπάνω, χρειαζόμαστε εκτιμήσεις για 6 παραμέτρους οι οποίες περιλαμβάνονται στο διάνυσμα θ , όπου $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$. Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το θ πρέπει να βρούμε τη Likelihood Function και να την μεγιστοποιήσουμε ως προς το θ . Εκτός, όμως, από το θ πρέπει να ξέρουμε με τι πιθανότητα θα εμφανιστεί το ένα ή το άλλο state της οικονομίας (state 1 ή 2) (optimal inference) δεδομένων των παρατηρήσεων και του θ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω: $P(s_t = j | I_t, \theta)$ για $j = 1, 2$ είναι η πιθανότητα το s_t να πάρει την τιμή 1 ή 2 δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το χρόνο t και δεδομένου των θ . Επειδή έχουμε 2 states έχουμε το έξης (2x1) διάνυσμα:

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της y_t (conditional pdf) δεδομένου του s_t , της πληροφόρησης μέχρι το χρόνο $t-1$ (I_{t-1}) και του θ .

$$f(y_t | s_t = j, I_{t-1}, \theta) \text{ Conditional density of } y_t \text{ for } j = 1, 2$$

Σε μορφή διανύσματος έχουμε:

$$n_t = \begin{bmatrix} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Από τον ορισμό της υπό συνθήκης συνάρτησης πιθανότητας:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B), \text{ όπου } P(A,B) \text{ είναι } \eta \text{ από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, προκύπτει ότι:}$$

$$f(y_t, s_t = j | I_{t-1}, \theta) = P(s_t = j | I_{t-1}, \theta) \times f(y_t | s_t = j, I_{t-1}, \theta) \quad (4.42)$$

για $j = 1, 2$. Σε μορφή διανυσμάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(y_t, s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t, s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \times f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \times f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix}}_{2 \times 1} \otimes \\ &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix}}_{2 \times 1} \\ &= \underbrace{\xi_{t|t-1}}_{2 \times 1} \otimes \underbrace{n_t}_{2 \times 1} \quad (4.43) \end{aligned}$$

όπου \otimes είναι το element by element multiplication. Η σχέση (4.43) είναι ένα διάνυσμα 2×1 που μας δίνει τις από κοινού πιθανότητες των y_t και $s_t = j$ για $j = 1, 2$.

Όπως έχουμε αναφέρει η τυχαία μεταβλητή s_t είναι διακριτή (discrete) και έτσι μπορούμε να πάρουμε την περιθωριοποιημένη (marginalized) συνάρτηση πιθανότητας των y_t αθροίζοντας ως προς το s_t . Σύμφωνα με τα προαναφερόμενα έχουμε:

$$f(y_t | I_{t-1}, \theta) = \sum_{s_t=1}^2 f(y_t, s_t = j | I_{t-1}, \theta) \quad (4.44)$$

Σε μορφή διανυσμάτων η (4.44) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$f(y_t | I_{t-1}, \theta) = 1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t) \quad (4.45)$$

Η σχέση (4.45) μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t) = \underbrace{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]}_{2 \times 1} \times \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{smallmatrix} P(s_t = 1 | I_{t-1}) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}) \end{smallmatrix} \right] \\ \left[\begin{smallmatrix} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}) \end{smallmatrix} \right] \end{array} \right\}}_{2 \times 1} =$$

$$= P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_t - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} + \\ + P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_t - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} = f(y_t | I_{t-1})$$

Ένας από τους αρχικούς στόχους μας ήταν να βρούμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι η *conditional log-likelihood* είναι:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | I_{t-1}, \theta) \Rightarrow \log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_{t-1}, \theta) = \sum_{t=1}^T \log [1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)] \quad (4.46)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε τα εξής δεδομένα:

- $\xi_{t|t-1} \otimes n_t = \begin{bmatrix} f(y_t, s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t, s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix}$
- $f(y_t | I_{t-1}, \theta) = 1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)$

και ζητούμενο την (4.40) $\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix}$. Πάλι από τον ορισμό της υπό-συνθήκης πιθανότητας $\left(P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \right)$ μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\frac{f(y_t, s_t = j | I_{t-1}, \theta)}{f(y_t | I_{t-1}, \theta)} = P(s_t = j | y_t, I_{t-1}, \theta) = P(s_t = j | I_t, \theta) \quad (4.47)$$

Διαιρώντας την από κοινού πιθανότητα των y_t και $s_t = j$ για $j = 1, 2$ με την περιθωριοποιημένη (marginalized) συνάρτηση πιθανότητας του y_t παίρνουμε το ζητούμενο που είναι η πιθανότητα το s_t να πάρει την τιμή 1 ή 2 δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι του χρόνου t (I_t). Σε μορφή διανυσμάτων έχουμε:

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix} = \frac{(\xi_{t|t-1} \otimes n_t)}{1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)} \quad (4.48)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Η σχέση (4.48) είναι μία από τις 2 βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται στην iterative διαδικασία για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την εκτίμηση του ξ_t . Μπορούμε (πάλι χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υπό-συνθήκης πιθανότητας) να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(s_{t+1} = j | I_t, \theta) &= \sum_{s_t=1}^2 P(s_{t+1} = j, s_t | I_t, \theta) = \sum_{s_t=1}^2 P(s_{t+1} = j | s_t, I_t, \theta) \cdot P(s_t | I_t, \theta) = \\ &= \sum_{s_t=1}^2 \underbrace{P(s_{t+1} = j | s_t)}_{\text{transition-prob}} \cdot P(s_t | I_t, \theta) \quad (4.49) \end{aligned}$$

Σε μορφή διανυσμάτων η (4.49) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\xi_{t+1|t} = P \cdot \xi_{t|t} \quad (4.50)$$

$$\text{όπου: } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_{12} & p_{21} \\ p_{12} & 1 - p_{21} \end{bmatrix}$$

Οι σχέσεις (4.50) και (4.49) είναι οι βασικές σχέσεις με τις οποίες γίνεται η εξαγωγή συμπερασμάτων για τις χρονολογικές σειρές.

4.5.1 Περιγραφή του αλγορίθμου και της διαδικασίας εκτίμησης των παραμέτρων

Αρχικές τιμές

Για να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο χρειαζόμαστε κάποιες αρχικές τιμές για το διάνυσμα θ τις οποίες μπορούμε να τις συμβολίσουμε ως εξής: $\theta_0 = \{\mu_{10}, \mu_{20}, \sigma_{10}, \sigma_{20}, p_{120}, p_{210}\}$.

Ακόμη χρειαζόμαστε αρχικές τιμές για το διάνυσμα $\xi_{t|t-1} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix}$ όπου για $t =$

1 έχουμε: $\xi_{1|0} = \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \end{bmatrix}$ είναι οι αρχικές τιμές. Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 4.4.3,

αρχικές τιμές για το διάνυσμα $\xi_{1|0}$, μπορούμε πάρουμε από την “invariant distribution” λύνοντας το ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων (4.51) και (4.52) ως προς τα π_1, π_2 :

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$[1 \ 1] \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = 1 \quad (4.52)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Η λύση του συστήματος για αυτή την απλή περίπτωση των 2 states είναι

$$\pi_1 = \frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}}, \pi_2 = \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}} \quad \text{τα οποία αποτελούν και τις αρχικές τιμές που συμβολίσαμε}$$

$$\text{με το διάνυσμα } \xi_{1|0} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} \quad \text{και μπορούν να «κατασκευαστούν» από τις αρχικές τιμές των transition probabilities.}$$

Περιγραφή iteration

- Για $t = 1$ έχουμε:

$$\xi_{1|1} = \begin{bmatrix} P(s_1 = 1 | I_1, \theta_0) \\ P(s_1 = 2 | I_1, \theta_0) \end{bmatrix} = \frac{(\xi_{1|0} \otimes n_1)}{1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1)} = \begin{bmatrix} P_{10} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{10}} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{y_1 - \mu_{10}}{\sigma_{10}} \right)^2 \right\} \\ \hline 1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) \\ P_{20} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{20}} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{y_1 - \mu_{20}}{\sigma_{20}} \right)^2 \right\} \\ \hline 1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) \end{bmatrix}$$

όπου:

$$1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) = P_{10} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{10}} \exp - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1 - \mu_{10}}{\sigma_{10}} \right)^2 \right\} + P_{20} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{20}} \exp - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1 - \mu_{20}}{\sigma_{20}} \right)^2 \right\}$$

$$\text{Όλα τα παραπάνω είναι γνωστά και έτσι υπολογίζουμε το } \xi_{1|1} = \begin{bmatrix} P(s_1 = 1 | I_1, \theta_0) \\ P(s_1 = 2 | I_1, \theta_0) \end{bmatrix} \text{ για } t = 1$$

- Για $t = 2$ έχουμε:

$$\xi_{2|2} = \begin{bmatrix} P(s_2 = 1 | I_2, \theta_0) \\ P(s_2 = 2 | I_2, \theta_0) \end{bmatrix} = \frac{(\xi_{2|1} \otimes n_2)}{1' \cdot (\xi_{2|1} \otimes n_2)}$$

Για να βρούμε το $\xi_{2|1}$ χρησιμοποιούμε τις αρχικές τιμές των transition probabilities p_{120} και p_{210} το $\xi_{1|1}$ και τη σχέση (4.50) και έχουμε:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$\begin{aligned}\xi_{2|1} &= P \cdot \xi_{1|1} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-p_{120}) & p_{210} \\ p_{120} & (1-p_{210}) \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} P(s_1 = 1|I_1, \theta_0) \\ P(s_1 = 2|I_1, \theta_0) \end{bmatrix}}_{2 \times 1} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \{(1-p_{120}) \cdot P(s_1 = 1|I_1, \theta_0) + p_{210} \cdot P(s_1 = 2|I_1, \theta_0)\} \\ \{p_{120} \cdot P(s_1 = 1|I_1, \theta_0) + (1-p_{210}) \cdot P(s_1 = 2|I_1, \theta_0)\} \end{bmatrix}}_{2 \times 1}\end{aligned}$$

Όλα τα παραπάνω στοιχεία είναι γνωστά και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το $\xi_{2|1}$.

Έχοντας το $\xi_{2|1}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $\xi_{2|2}$ πάντα με δεδομένο τις αρχικές τιμές του θ_0 .

- Για $t = 3$ έχουμε:

$$\xi_{3|3} = \frac{(\xi_{3|2} \otimes n_3)}{1' \cdot (\xi_{3|2} \otimes n_3)} \text{ και } \xi_{3|2} = P \cdot \xi_{2|2} \text{ όπου το } \xi_{2|2} \text{ είναι γνωστό από το προηγούμενο βήμα.}$$

- Για $t = T$ έχουμε:

$$\xi_{T|T} = \frac{(\xi_{T|T-1} \otimes n_T)}{1' \cdot (\xi_{T|T-1} \otimes n_T)} \text{ και } \xi_{T|T-1} = P \cdot \xi_{T-1|T-1}$$

Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία για κάθε $t = 1, 2, 3, \dots, T$ θα έχουμε για κάθε χρονική στιγμή

$$\text{το αντίστοιχο διάνυσμα } \xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1|I_t, \theta_0) \\ P(s_t = 2|I_t, \theta_0) \end{bmatrix}.$$

Εκτίμηση των παραμέτρων

Όμως θέλουμε να πάρουμε και εκτιμήσεις για το θ . Όπως ήδη γνωρίζουμε από τη σχέση (4.45) ότι $f(y_t | I_{t-1}, \theta) = 1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)$, ενώ η conditional log-likelihood function είναι $\log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_{t-1}, \theta)$. Από τα προαναφερόμενα γνωρίζουμε το $\xi_{t|t-1}$ για κάθε t ,

αφού έχουμε ήδη υπολογίσει το $\xi_{t|t}$ για κάθε t και το $\xi_{t|t-1}$ μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του $\xi_{t|t}$, όπως προκύπτει από τη σχέση (4.50). Άρα η $\log L(\theta)$ μπορεί να γραφτεί αναλυτικά ως εξής:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T \log [1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)] &= \log [1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) + 1' \cdot (\xi_{2|1} \otimes n_2) + \dots + 1' \cdot (\xi_{T|T-1} \otimes n_T)] = \\
&= \log [1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) + 1' \cdot (P \cdot \xi_{1|1} \otimes n_2) + \dots + 1' \cdot (P \cdot \xi_{T-1|T-1} \otimes n_T)] = \\
&= \log [P_{10} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} + P_{20} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} + \\
&\quad + \{(1-p_{12}) \cdot P(s_1 = 1|I_1, \theta)\} + \{p_{21} \cdot P(s_1 = 2|I_1, \theta)\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_2 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} + \\
&\quad + \{p_{12} \cdot P(s_1 = 1|I_1, \theta)\} + \{(1-p_{21}) \cdot P(s_1 = 2|I_1, \theta)\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} + \dots + \\
&\quad \{(1-p_{12}) \cdot P(s_{T-1} = 1|I_{T-1}, \theta)\} + \{p_{21} \cdot P(s_{T-1} = 2|I_{T-1}, \theta)\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_T - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} + \\
&\quad \{p_{12} \cdot P(s_{T-1} = 1|I_{T-1}, \theta)\} + \{(1-p_{21}) \cdot P(s_{T-1} = 2|I_{T-1}, \theta)\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \exp -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_T - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\}]
\end{aligned}$$

Με δεδομένο ότι γνωρίζουμε τις πιθανότητες $\begin{bmatrix} P(s_t = 1|I_t, \theta) \\ P(s_t = 2|I_t, \theta) \end{bmatrix}$ για κάθε t μπορούμε να

μεγιστοποιήσουμε την $\text{logL}(\theta)$ ως προς το $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$ και να πάρουμε εκτιμήσεις των παραμέτρων.

Έχοντας την εκτίμηση για το θ επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για $t = 1, 2, 3, \dots, T$ και μεγιστοποιούμε τη $\text{logL}(\theta)$ ως προς το θ με βάση τις νέες εκτιμήσεις για τις $\begin{bmatrix} P(s_t = 1|I_t, \theta) \\ P(s_t = 2|I_t, \theta) \end{bmatrix}$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων να συγκλίνουν.

4.6 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση του απλού Markov regime-switching υποδείγματος (SMRS model) για 3 states

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση της παραγράφου 4.5, υποθέτουμε ότι έχουμε απλό Markov regime-switching υπόδειγμα, το οποίο το έχουμε ορίσει ως εξής:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$y_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \quad (4.53)$$

με $t = 1, 2, 3, \dots T$. Αυτή τη φορά, όμως, υποθέτουμε ότι η οικονομία έχει 3 states ή regimes δηλαδή $s_t = 1, 2, 3$. Όταν $s_t = 1$ θεωρούμε ότι η χρονολογική σειρά παρουσιάζει **χαμηλή διακύμανση (low volatility state)** ενώ όταν $s_t = 2$ η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση και έτσι η διακύμανση είναι **ψηλή (high volatility state)** ενώ όταν $s_t = 3$ η διακύμανση είναι **μέτρια (medium volatility state)**. Αυτό σημαίνει ότι η y_t ακολουθεί την κανονική κατανομή (Normal) με μέσο μ_{s_t} και διακύμανση $\sigma_{s_t}^2$ τα οποία, όπως και στην περίπτωση με τα 2 states, εξαρτώνται από το state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι η γενική φιλοσοφία του αλγόριθμού έτσι όπως αναπτύχθηκε για την αρχική περίπτωση αλλά και έτσι όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο παραμένει ακριβώς η ίδια. Τα στοιχεία τα οποία αλλάζουν ανάλογα με τα states και τη συναρτησιακή μορφή των υποδειγμάτων που νιοθετούνται κάθε φορά είναι ο πίνακας μεταπήδησης καθώς και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($f(y_t | s_t = i, I_{t-1})$). Φυσικό επακόλουθο της αλλαγής του αριθμού των states και των διαστάσεων του P είναι και η αλλαγή των διαστάσεων των διανυσμάτων. Οι αλλαγές αυτές σημειώνονται παρακάτω.

Στη περίπτωση των 3 states ο **transition matrix P** γίνεται:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Ξέρουμε ότι: $p_{ii} + p_{ij} + p_{ji} = 1$ για $i = 1, 2, 3$. Άρα ο P μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P = \begin{bmatrix} (1 - p_{12} - p_{13}) & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & (1 - p_{21} - p_{23}) & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & (1 - p_{31} - p_{32}) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και αφού ισχύει ότι: $y_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2)$ με $s_t = 1, 2, 3$ το διάνυσμα με τις παραμέτρους προς εκτίμηση θα είναι: $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32}\}$. Πρέπει δηλαδή να εκτιμήσουμε 12 παραμέτρους.

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Όπως και στην περίπτωση με τα 2 states ορίζουμε το διάνυσμα με τις *filtered probabilities*:

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 3 | I_t, \theta) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Ενώ το διάνυσμα που περιέχει τη *δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε $i = 1, 2, 3$* ($f(y_t | s_t = i, I_{t-1})$) είναι:

$$n_t = \begin{bmatrix} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 3, I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_3} \cdot \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mu_3}{\sigma_3} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Αντίστοιχη με τη σχέση (4.49) που αποτελεί τη μία από τις βασικές σχέσεις του αλγορίθμου είναι η σχέση (4.57):

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 3 | I_t, \theta) \end{bmatrix} = \frac{(\xi_{t|t-1} \otimes n_t)}{1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)} \quad (4.57)$$

$$\text{Όπου: } \xi_{t|t-1} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 3 | I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} \text{ και } 1' = [1 \ 1 \ 1]$$

Ενώ οι *forecasted probabilities* που χρησιμοποιούνται ως input στη σχέση (4.57) δίνονται όπως και στην περίπτωση των δύο states από την (4.58) σε αντιστοιχία της σχέσης (4.50):

$$\xi_{t+1|t} = P \cdot \xi_{t|t} \quad (4.58)$$

$$\text{Όπου: } \xi_{t+1|t} = \begin{bmatrix} P(s_{t+1} = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_{t+1} = 2 | I_t, \theta) \\ P(s_{t+1} = 3 | I_t, \theta) \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Εκτίμηση των παραμέτρων

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει έως τώρα **conditional log-likelihood** δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= \prod_{t=1}^T f(y_t | I_{t-1}, \theta) \Rightarrow \log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_{t-1}, \theta) = \sum_{t=1}^T \log [1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)] = \\
 &= \sum_{t=1}^T \log \left(\underbrace{[1 \quad 1 \quad 1]}_{1 \times 3} \times \underbrace{\left[\begin{array}{c} P(s_t = 1 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_{t-1}, \theta) \\ P(s_t = 3 | I_{t-1}, \theta) \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 3, I_{t-1}, \theta) \end{array} \right]}_{3 \times 1} \right) = \\
 &= \log [1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) + 1' \cdot (\xi_{2|1} \otimes n_2) + \dots + 1' \cdot (\xi_{T|T-1} \otimes n_T)] = \\
 &= \log [1' \cdot (\xi_{1|0} \otimes n_1) + 1' \cdot (P \cdot \xi_{1|1} \otimes n_2) + \dots + 1' \cdot (P \cdot \xi_{T-1|T-1} \otimes n_T)] \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Οπου $\xi_{1|0} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \end{bmatrix}$ είναι οι αρχικές τιμές που δίνονται από την invariant distribution (π_1, π_2, π_3)

π_3) με λύση του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = P \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$[1 \quad 1 \quad 1] \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = 1 \quad (4.61)$$

Η μεγιστοποίηση της (4.59) ως προς το θ μας δίνει εκτιμήσεις για τις 12 παραμέτρους. Όπως και στην περύπτωση όπου $s_t = 1, 2$ οι εκτιμήσεις του θ χρησιμοποιούνται για την επανάληψη της διαδικασίας του αλγορίθμου (που χρησιμοποιεί τις (4.57) και (4.58)) για $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Η διαδικασία των επαναλήψεων (iterations) ολοκληρώνεται με την εύρεση εκείνου του θ για το οποίο μεγιστοποιείται η (4.59) και οι τιμές των $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32}\}$ δεν μεταβάλλονται από iteration σε iteration (με άλλα λόγια συγκλίνουν).

4.7 Ο αλγόριθμος του Hamilton (1989) για την εκτίμηση των Markov switching ARCH (MS-ARCH) υποδειγμάτων για 2 states

Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο MS-ARCH(2,1) (όπου το 2 δηλώνει τον αριθμό των states και το 1 τους ARCH όρους):

$$r_t = \varepsilon_t \quad \text{όπου} \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad \text{και} \quad h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta_{s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.62)$$

με $s_t = i$ όπου $i = 1, 2$. Όπως είχαμε περιγράψει αναλυτικά στην παράγραφο 4.3 οι παράμετροι του MS-ARCH(2,1) υποδειγμάτων αλλάζουν ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η φιλοσοφία του αλγόριθμου που έχει περιγραφεί στις προηγούμενες παραγράφους παραμένει ακριβώς ίδια και στην περίπτωση των MS-ARCH υποδειγμάτων. Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση όπου έχουμε δύο states το μόνο που αλλάζει σε σχέση με το απλό Markov regime-switching υπόδειγμα της παραγράφου 4.4 είναι το διάνυσμα n_t το οποίο περιέχει τη **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεδομένου των s_t και της πληροφόρησης μέχρι το $t-1$ για $i=1, 2$** και το οποίο γίνεται:

$$n_t = \begin{bmatrix} f(y_t | s_t = 1, I_{t-1}, \theta) \\ f(y_t | s_t = 2, I_{t-1}, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (a_1 + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2)}} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{a_1 + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (a_2 + \beta_2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2)}} \cdot \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{a_2 + \beta_2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία του αλγόριθμου είναι ίδια με εκείνα του SMRS υποδειγμάτως με τα 2 states και τα οποία είναι τα εξής:

Οι **filtered probabilities** δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix} = \frac{(\xi_{t|t-1} \otimes n_t)}{1' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)} \quad (4.64)$$

όπου το n_t δίνεται από την (4.63) και το $\xi_{t|t-1}$ είναι το διάνυσμα με τις **forecasted probabilities** το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$\xi_{t+1|t} = P \cdot \xi_{t|t} \quad (4.65)$$

$$\text{όπου: } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p_{12} & p_{21} \\ p_{12} & 1-p_{21} \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

ο παρανομαστής της σχέσης (4.64) είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η *log-likelihood* δίνεται από την:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | I_{t-1}, \theta) \Rightarrow \log L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_{t-1}, \theta) = \sum_{t=1}^T \log [l' \cdot (\xi_{t|t-1} \otimes n_t)] \quad (4.66)$$

η οποία μεγιστοποιείται ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων θ όπου $\theta = \{a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, p_{12}, p_{21}\}$. Αντίστοιχα αν αλλάζει μόνο η σταθερά του MS-ARCH(2,1) υποδείγματος, δηλαδή $h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta \cdot \varepsilon_{t-1}^2$, τότε η (4.66) μεγιστοποιείται ως προς το θ όπου $\theta = \{a_1, a_2, \beta, p_{12}, p_{21}\}$.

4.8 Προβλέψεις με Markov switching υποδείγματα

4.8.1 Forecasted Probabilities

Όταν κάνουμε προβλέψεις με Markov switching υποδείγματα, λογικό είναι να χρησιμοποιήσουμε τις *forecasted probabilities*, έτσι όπως τις ορίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, και οι οπίσης μα δίνουν την πιθανότητα η οικονομία να είναι στο state i (έστω $i = 1, 2$) την χρονική στιγμή $t+1$ με δεδομένη την πληροφόρηση που έχουμε μέχρι τη χρονική στιγμή t .

Εστω ότι έχουμε ένα δείγμα χρονολογικών σειρών με $t = 1, 2, 3, \dots, T$ παρατηρήσεις και ότι έχουμε «τρέξει» τον αλγόριθμο για κάποιο Markov switching υπόδειγμα με 2 states.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε εκτιμήσει το διάνυσμα $\xi_{T|T} = \begin{bmatrix} P(s_T = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_T = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix}$ με τις filtered probabilities και θέλουμε να υπολογίσουμε τις forecasted probabilities για το $T+1$, να κάνουμε δηλαδή πρόβλεψη για μία περίοδο στο μέλλον του διανύσματος $\xi_{T+1|T}$. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει η πρόβλεψη αυτή δίνεται από το:

$$\xi_{T+1|T} = \begin{bmatrix} P(s_{T+1} = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_{T+1} = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix} = P \cdot \xi_{T|T} \quad (4.67)$$

Γενικά αν θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη για s χρονικές περιόδους μπροστά, τότε ισχύει ότι:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$\xi_{T+s|T} = \begin{bmatrix} P(s_{T+s} = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_{T+s} = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix} = P^s \cdot \xi_{T|T} \quad (4.68)$$

4.8.2 Προβλέψεις για τη παρατηρούμενες μεταβλητές

Έστω ότι έχουμε το SMRS υπόδειγμα για το οποίο ισχύει ότι:

$$r_t = y_t = \mu_{s_t} + \varepsilon_t \quad \text{όπου } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2), \text{ δηλαδή } y_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \quad (4.69)$$

Οπως αποδεικνύεται, για να προβλέψουμε την y_t , χρησιμοποιείται η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της y_t , η οποία δίνει την πιο μικρή τιμή στο Mean square error. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της y_t για $t+1$ είναι:

$$\begin{aligned} E(y_{t+1} | I_t, \theta) &= \int y_{t+1} \cdot f(y_{t+1} | I_t, \theta) dy_{t+1} = \int y_{t+1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^N p(y_{t+1}, s_{t+1} = j | I_t, \theta) \right\} dy_{t+1} = \\ &= \int y_{t+1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^N [p(s_{t+1} = j | I_t, \theta) \cdot f(y_{t+1} | s_{t+1} = j, I_t, \theta)] \right\} dy_{t+1} = \\ &= \sum_{j=1}^N p(s_{t+1} = j | I_t, \theta) \cdot \int y_{t+1} \cdot f(y_{t+1} | s_{t+1} = j, I_t, \theta) dy_{t+1} = \\ &= \sum_{j=1}^N p(s_{t+1} = j | I_t, \theta) \cdot E(y_{t+1} | s_{t+1} = j, I_t, \theta) \quad (4.70) \end{aligned}$$

Η (4.70) αποτελεί ουσιαστικά μία σταθμισμένη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή του y_t (δεδομένης της πληροφόρησης αλλά και του state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία) όπου τα βάρη είναι οι forecasted probabilities έτσι όπως ορίζονται στην παράγραφο 4.7.1.

Επί παραδείγματι, αν θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη για το μέσο της σειράς του υποδείγματος (4.69), για μία περίοδο μπροστά και $s_t = 1, 2$ τότε σύμφωνα με τη (4.70) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 p(s_{t+1} = j | I_t, \theta) \cdot E(y_{t+1} | s_{t+1} = j, I_t, \theta) = \\ &= p(s_{t+1} = 1 | I_t, \theta) \cdot E(y_{t+1} | s_{t+1} = 1, I_t, \theta) + p(s_{t+1} = 2 | I_t, \theta) \cdot E(y_{t+1} | s_{t+1} = 2, I_t, \theta) = \\ &= p(s_{t+1} = 1 | I_t, \theta) \cdot \mu_1 + p(s_{t+1} = 2 | I_t, \theta) \cdot \mu_2 \quad (4.71) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

Ενώ οι forecasted probabilities υπολογίζονται σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο και είναι ίσες με:

$$\begin{bmatrix} P(s_{T+1} = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_{T+1} = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P(s_T = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_T = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdot P(s_T = 1 | I_T, \theta) + p_{21} \cdot P(s_T = 2 | I_T, \theta) \\ p_{12} \cdot P(s_T = 1 | I_T, \theta) + p_{22} \cdot P(s_T = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Σε μιορφή διανυσμάτων, τα παραπάνω, θα μπορούσαμε να τα γράψουμε ως εξής:

$$E(y_{t+1} | I_t, \theta) = \underbrace{\xi'_{T+1|T}}_{1 \times 2} \times \underbrace{e_{T+1|T}}_{2 \times 1} \quad (4.73)$$

όπου το $\xi_{T+1|T}$ είναι το διάνυσμα (4.72), δηλαδή είναι ένα διάνυσμα γραμμή και το $e_{T+1|T}$ είναι ένα διάνυσμα 2×1 με τις δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές της y_t και το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\underbrace{e_{T+1|T}}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} E(y_{T+1} | s_{T+1} = 1, I_T, \theta) \\ E(y_{T+1} | s_{T+1} = 2, I_T, \theta) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Όταν η περίοδοι πρόβλεψης στο μέλλον είναι $s > 1$ τότε η (4.73) γίνεται:

$$E(y_{t+s} | I_t, \theta) = \underbrace{\xi'_{T+s|T}}_{1 \times 2} \times \underbrace{e_{T+s|T}}_{2 \times 1} \quad (4.75)$$

όπου $\xi'_{T+s|T} = \begin{bmatrix} P(s_{T+s} = 1 | I_T, \theta) \\ P(s_{T+s} = 2 | I_T, \theta) \end{bmatrix}' = \left[P^s \cdot \xi_{T|T} \right]$ και $e_{T+s|T} = \begin{bmatrix} E(y_{T+s} | s_{T+s} = 1, I_T, \theta) \\ E(y_{T+s} | s_{T+s} = 2, I_T, \theta) \end{bmatrix}$ όπου στην

περίπτωση του απλού υποδείγματος που εξετάζουμε $e_{T+s|T} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$. Η (4.75) στην γενική

περίπτωση με N states στην οικονομία γίνεται:

$$E(y_{t+s} | I_t, \theta) = \underbrace{\xi'_{T+s|T}}_{1 \times N} \times \underbrace{e_{T+s|T}}_{N \times 1} \quad (4.76)$$

Ένα άλλο παράδειγμα είναι αν έχουμε ένα **Markov switching AR(1) υπόδειγμα** όπως το ακόλουθο:

$$y_t = \delta_{s_t} + \phi_{s_t} \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ όπου } \varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4.77)$$

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

με δύο states στην οικονομία και δείγμα με $t = 1, 2, 3, \dots, T$ παρατηρήσεις. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της y_t για $T+1$ είναι:

$$E(y_{t+1} | s_{t+1} = i, I_t, \theta) = \delta_i + \phi_i \cdot y_T \quad (4.78)$$

Για $T+2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E(y_{t+2} | s_{t+2} = i, I_t, \theta) &= \delta_i + \phi_i \cdot y_{T+1} = \delta_i + \phi_i \cdot (\delta_i + \phi_i \cdot y_T) = \\ &= \delta_i (1 + \phi_i) + \phi_i^2 \cdot y_T \quad (4.80) \end{aligned}$$

Γενικά για s περιόδους πρόβλεψη στο μέλλον θα έχουμε:

$$E(y_{t+s} | s_{t+s} = i, I_t, \theta) = \delta_i (1 + \phi_i + \phi_i^2 + \dots + \phi_i^{s-1}) + \phi_i^s \cdot y_T \quad (4.81)$$

Άρα το διάνυσμα $e_{T+1|T}$ για s περιόδους πρόβλεψη στο μέλλον και για το υπόδειγμα που περιγράφεται στην (4.77) γράφεται:

$$e_{T+s|T} = \begin{bmatrix} E(y_{T+s} | s_{T+s} = 1, I_T, \theta) \\ E(y_{T+s} | s_{T+s} = 2, I_T, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \cdot \sum_{k=0}^{s-1} \phi_1^k + \phi_1^s \cdot y_T \\ \delta_2 \cdot \sum_{k=0}^{s-1} \phi_2^k + \phi_2^s \cdot y_T \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Άρα η πρόβλεψη για το y_t για s περιόδους στο μέλλον δίνεται ακριβώς από την (4.75) και στην περίπτωση με τα N states από την (4.76) με τη διαφορά ότι το $e_{T+1|T}$ δίνεται από την (4.82).

4.8.3 Προβλέψεις για την υπό-συνθήκη διακύμανση με MS-ARCH υποδείγματα

Η αναφορά μας στα AR υποδείγματα στην προηγούμενη παράγραφο δεν ήταν τυχαία. Όπως είχαμε αποδείξει στο κεφάλαιο 3 ένα ARCH(1) υπόδειγμα μπορεί να γραφτεί ως ένα AR(1) υπόδειγμα στα τετράγωνα των τυχαίων σφαλμάτων ως εξής:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \quad (4.83)$$

όπου $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - h_t$. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα με $t = 1, 2, 3, \dots, T$ παρατηρήσεις και θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη 1 χρονική περίοδο μπροστά δηλαδή για το $T+1$. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της (4.83) για $T+1$ είναι:

$$E(\varepsilon_{T+1}^2 | I_T) = E(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_T^2 + v_T | I_T) = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_T^2 \quad (4.84)$$

Για $T+2$:

Κεφάλαιο 4: Markov-Switching υποδείγματα

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{T+2}^2 | I_T) &= E(a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{T+1}^2 + v_{T+1} | I_T) = a_0 + a_1 \cdot E(\varepsilon_{T+1}^2 | I_T) = \\ &= a_0 + a_1 \cdot (a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_T^2) = a_0 \cdot (1 + a_1) + a_1^2 \cdot \varepsilon_T^2 \quad (4.85) \end{aligned}$$

Γενικά για $T + s$ έχουμε:

$$h_{T+s|T} = E(\varepsilon_{T+s}^2 | I_T) = a_0 \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} a_i^i\right) + a_1^s \cdot \varepsilon_T^2 \quad (4.86)$$

Η (4.86) αποτελεί την πρόβλεψη της υπό-συνθήκη διακύμανσης για s περιόδους μπροστά στο μέλλον. Η αντιστοιχία με AR υποδείγματα είναι προφανής.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα **MS-ARCH(1) υπόδειγμα** της μορφής:

$$h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta_{s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2$$

με $s_t = i$ όπου $i = 1, 2$, μπορούμε να το γράψουμε ως ένα **Markov switching AR(1) υπόδειγμα** στα τετράγωνα των τυχαίων σφαλμάτων όπως αυτό που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\varepsilon_t^2 = a_{s_t} + \beta_{s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \quad (4.87)$$

Σε αυτή την περίπτωση η πρόβλεψη στο μέλλον θα είναι αντίστοιχη με αυτή των Markov switching AR(1) υποδειγμάτων και έτσι θα έχουμε ότι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή των τετραγώνων των τυχαίων σφαλμάτων δεδομένης της πληροφόρησης θα είναι μία σταθμισμένη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή (δεδομένης της πληροφόρησης αλλά και του state στο οποίο βρίσκεται η οικονομία) με βάρη τις forecasted probabilities. Κατά αντιστοιχία της (4.70) για s περιόδους πρόβλεψη και N states έχουμε:

$$h_{T+s|T} = E(\varepsilon_{T+s}^2 | I_T, \theta) = \sum_{j=1}^N p(s_{t+1} = j | I_t, \theta) \cdot E(\varepsilon_{T+s}^2 | s_{T+s} = j, I_T, \theta) \quad (4.88)$$

Κεφάλαιο 5: Μέτρα σύγκρισης των υποδειγμάτων

Κεφάλαιο 5: Μέτρα σύγκρισης των υποδειγμάτων

Για να συγκρίνουμε τα υποδείγματα ARCH και GARCH με τα υποδείγματα Markov Switching μπορούμε να κινηθούμε προς δύο κατευθύνσεις. Αρχικά μπορούμε να ελέγξουμε την προσαρμογή των υποδειγμάτων στα δεδομένα που έχουμε επιλέξει να αναλύσουμε καθώς και να συγκρίνουμε τα υποδείγματα ανάλογα με την προβλεπτική τους ικανότητα, σύγκριση που σαφώς παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αφού αξιόπιστες προβλέψεις για τη διακύμανση είναι μεγάλης χρησιμότητας στα χρηματοοικονομικά.

Για να ελέγξουμε την **προσαρμογή των υποδειγμάτων στα δεδομένα** μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα AIC (Akaike Information criterion) και το BIC (Schwarz criterion) τα οποία δίνονται από τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned} AIC &= -2 \cdot \log(Likelihood)/T + 2 \cdot k/T \\ BIC &= -2 \cdot \log(Likelihood)/T + (k/T) \cdot \log(T) \end{aligned} \quad (5.1)$$

όπου T είναι το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματός μας και k είναι ο αριθμός των παραμέτρων στο υπόδειγμα που εκτιμάμε. Το καλύτερο υπόδειγμα είναι αυτό που έχει το μικρότερο AIC ή BIC. Όπως παρατηρούμε από την (5.1) τα δύο αυτά κριτήρια «τιμωρούν» τα υποδείγματα στα οποία υπάρχουν επιπλέον παράμετροι οι οποίες δεν βοηθούν στο να ερμηνεύσουν τα δεδομένα.

Για να ελέγξουμε την **προβλεπτική ικανότητα των υποδειγμάτων** μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω κριτήρια:

$$MSE_1 = n^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n (\hat{\sigma}_{t+1|t} - \hat{h}_{t+1|t}^{1/2})^2 \quad (5.2)$$

$$MSE_2 = n^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n (\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 - \hat{h}_{t+1|t})^2 \quad (5.3)$$

$$MAD_1 = n^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n |\hat{\sigma}_{t+1|t} - \hat{h}_{t+1|t}^{1/2}| \quad (5.4)$$

$$MAD_2 = n^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n |\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 - \hat{h}_{t+1|t}| \quad (5.5)$$

όπου MSE είναι το **Mean Squared Error** και το MAD είναι το **Mean Absolute Deviation**. Το $\hat{\sigma}_{t+1|t}^2$ είναι η **realized volatility** και ορίζεται ως ακολούθως:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = (r_t - \bar{r}_t)^2 \quad (5.6)$$

Κεφάλαιο 5: Μέτρα σύγκρισης των υποδειγμάτων

όπου r_t είναι η απόδοση ενός δείκτη το χρόνο t και \bar{r}_t είναι ο μέσος το δείγματος που έχουμε επιλέξει. Η σχέση (5.6) αποτελεί την εκτίμηση της “*unobserved*” διακύμανσης της επόμενης περιόδου και αποτελεί το μέτρο σύγκρισης με την $h_{t+1|t}$, που αποτελεί τη πρόβλεψη της επόμενης περιόδου που πραγματοποιούν τα υποδείγματα που περιγράψαμε στα κεφάλαιο 3 και 4. Αν και η σχέση (5.6) μπορεί να περιέχει πολύ «θόρυβο» ως εκτίμηση της πραγματικής διακύμανσης (“noisy estimation of unobserved variance”) και μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα ως προς την προβλεπτική ικανότητα των υποδειγμάτων, η εκτίμηση μιας λιγότερο “noisy” διακύμανσης απαιτεί τη χρήση intra-daily data που δεν έχουμε στη διάθεσή μας.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

6.1 Τα δεδομένα και η μεθοδολογία

Τα δεδομένα που θα αναλύσουμε στην παρούσα εργασία είναι οι χρηματιστηριακοί δείκτες του Hong Kong (Δείκτης: Hang Seng) και της Φρανκφούρτης (Δείκτης: DAX) τα οποία αντλήθηκαν από το DATASTREAM και καλύπτουν τις ημερήσιες αποδόσεις για 7 χρόνια και 2 μήνες από την 6/1/1986 έως και 26/2/1993 και το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 1866.

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την εκτίμηση και τη σύγκριση των υποδειγμάτων είναι η εξής: οι πρώτες 1825 (δηλαδή τα πρώτα 7 χρόνια από 6/1/1986 έως και 31/12/1992) παρατηρήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των υποδειγμάτων που θα αναφέρουμε παρακάτω, στη συνέχεια προκειμένου να συγκρίνουμε τα υποδείγματα με βάση την *out of sample* προβλεπτική ικανότητα, πραγματοποιήσαμε προβλέψεις για μία χρονική περίοδο μπροστά ($t + 1$) για συνολικά 41 μέρες (2 μήνες από 1/1/1993 έως και 26/2/1993) και υπολογίσαμε τα κριτήρια (5.2) έως (5.5).

Τρόπος υπολογισμού των προβλέψεων για τις 41 μέρες έγινε ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη για τη 1^η μέρα και έχουμε στη διάθεσή μας 1825 παρατηρήσεις. Εκτιμούμε το υπόδειγμα για τις 1825 παρατηρήσεις και πραγματοποιούμε πρόβλεψη για την 1826^η διακύμανση. Για να πραγματοποιήσουμε πρόβλεψη για τη 2^η μέρα εκτιμούμε το υπόδειγμα για τις παρατηρήσεις 2 έως και 1826 και κάνουμε πρόβλεψη για την 1827^η διακύμανση, δηλαδή για τη διακύμανση της δεύτερη μέρας των τελευταίων 2 μηνών. Με αυτό τον τρόπο γίνονται όλες οι προβλέψεις που αφορούν στους τελευταίους 2 μήνες ή στις 41 μέρες. Με αυτό τον τρόπο τα υποδείγματα εκτιμούνται για ένα σταθερό αριθμό παρατηρήσεων που σε χρονική έκταση είναι τα 7 χρόνια.

6.2 Η εκτίμηση των υποδειγμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στα υποδείγματα που εκτιμήσαμε και στη συνέχεια συγκρίναμε. Βασικός σκοπός της εργασίας είναι να συγκρίνουμε τα υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας με τα υποδείγματα Markov Switching που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 4. Για το λόγο αυτό από την οικογένεια των ARCH και GARCH υποδειγμάτων διαλέξαμε ένα γενικό υπόδειγμα που καλύπτει τις περισσότερες περιπτώσεις χρονολογικών σειρών και

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

είναι το GARCH(1,1). Ενώ από τα Markov Switching υποδείγματα επιλέξαμε να εκτιμήσουμε και για τους 2 δείκτες το απλό Markov Regime-Switching υπόδειγμα για 2 states και τα MS-ARCH(2,1) υποδείγματα όταν αλλάζει μόνο η σταθερά και όταν αλλάζουν και η σταθερά και ο ARCH όρος. Τέλος για το δείκτη του Hong Kong επιλέξαμε να εκτιμήσουμε το απλό Markov Regime-Switching υπόδειγμα για 3 states και για το δείκτη DAX ένα MS-ARCH(3,1) με σταθερό τον ARCH όρο. Συνοπτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι εκτιμήσαμε και συγκρίναμε για τον κάθε δείκτη ένα GARCH(1,1) υπόδειγμα με τέσσερα Markov Switching υποδείγματα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για την εκτίμηση των υποδειγμάτων χρησιμοποιήσαμε τις «ρουτίνες» μεγιστοποίησης του MATLAB. Για την εξοικονόμηση χρόνου και τη διευκόλυνση της διαδικασίας μεγιστοποίησης χρησιμοποιήσαμε μετασχηματισμό των αρχικών παραμέτρων και έτσι στα αποτελέσματα της εκτίμησης αναφέρουμε τις μετασχηματισμένες παραμέτρους, τα τυπικά σφάλματα αυτών και τις τιμές των αρχικών παραμέτρων. Οι παράμετροι των ARCH και GARCH όρων καθώς και οι διακυμάνσεις των απλών Markov Regime-Switching υποδειγμάτων που πρέπει εξ ορισμού να είναι θετικές μετασχηματίστηκαν παίρνοντας το νεπέριο λογάριθμο τους, δηλαδή $a' = \ln(a)$ όπου το a είναι π.χ. η σταθερά σε ένα MS-ARCH υπόδειγμα. Για τις transition probabilities όπου εξ ορισμού πρέπει να είναι μεταξύ 0 και 1 ο μετασχηματισμός για τη p_{ij} transition probability θα ήταν $p'_{ij} = \ln(p_{ij} / (1 - p_{ij}))$.

6.2.1 Εκτίμηση του GARCH(1,1) υπόδειγματος

Από τη οικογένεια των ARCH και GARCH υποδειγμάτων εκτιμήσαμε το ακόλουθο GARCH(1,1) υπόδειγμα:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= \omega + \alpha \cdot (r_{t-1} - \mu)^2 + \beta \cdot h_{t-1} \quad (6.1) \end{aligned}$$

Το υπόδειγμα (6.1) εκτιμήθηκε με MLE όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3. Οι εκτιμήσεις και για τους δύο δείκτες συνοψίζονται στον πίνακα 6.1 που ακολουθεί:

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

Πίνακας 6.1: Εκτίμηση του GARCH(1,1) υποδειγμάτος για τους 2 δείκτες

Δείκτης: Hang Seng

GARCH(1,1)	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
μ	-	0.00036	0.00179
ω	-11.36896	0.46361	0.00001
α	-1.53244	0.25846	0.21610
β	-0.27089	0.04354	0.76261

Δείκτης: DAX

GARCH(1,1)	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
μ	-	0.00028	0.00055
ω	-11.37358	0.60466	0.00001
α	-1.83668	0.40030	0.15934
β	-0.23717	0.07188	0.78885

6.2.2 Εκτίμηση του απλού Markov Regime-Switching υποδειγμάτος (SMRS) για 2 states

Εκτιμήσαμε το ακόλουθο απλό Markov Regime-Switching υπόδειγμα που για συντομία θα αναφέρουμε SMRS υπόδειγμα για 2 states και για τους 2 δείκτες:

$$r_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \text{ με } s_t = 1, 2 \quad (6.2)$$

Όπως αναλυτικά εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 4 στο υπόδειγμα αυτό πρέπει να εκτιμήσουμε 6 παραμέτρους μεγιστοποιώντας την log-likelihood. Η εκτίμηση των παραμέτρων $\{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{12}, \rho_{21}\}$ αποτελεί ένα παράγωγο του αλγορίθμου του Hamilton. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το βασικό αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι οι filtered probabilities δηλαδή η πιθανότητα η οικονομία να είναι στο state 1 ή στο state 2 κατά το χρόνο τ δεδομένης της πληροφόρησης μέχρι το t και το διανύσματος θ. Δηλαδή το βασικό output του αλγορίθμου

είναι το διάνυσμα $\begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix}$. Εδώ έχουμε υποθέσει ότι το state 1 της οικονομίας

έχει χαμηλή διακύμανση και το state 2 της οικονομίας έχει υψηλή διακύμανση. Ο πίνακας 6.2 που ακολουθεί συνοψίζει το αποτελέσματα της εκτίμησης:

Πίνακας 6.2: Εκτίμηση του SMRS (2 states) υποδειγμάτος για τους 2 δείκτες

Δείκτης: Hang Seng

SMRS 2 states	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
μ_1	-	0.0002	0.0015
μ_2	-	0.0035	-0.0067
σ_1	-4.6467	0.0228	0.0096
σ_2	-3.1334	0.0752	0.0436

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

p_{12}	-4.1381	0.2741	0.0157
p_{21}	-1.6413	0.3127	0.1623

Δείκτης: DAX

SMRS 2 states	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
μ_1	-	0.0002	0.00074
μ_2	-	0.0009	-0.00172
σ_1	-4.7971	0.0248	0.00825
σ_2	-3.8310	0.0373	0.02168
p_{12}	-4.0736	0.3078	0.01673
p_{21}	-3.1452	0.3298	0.04128

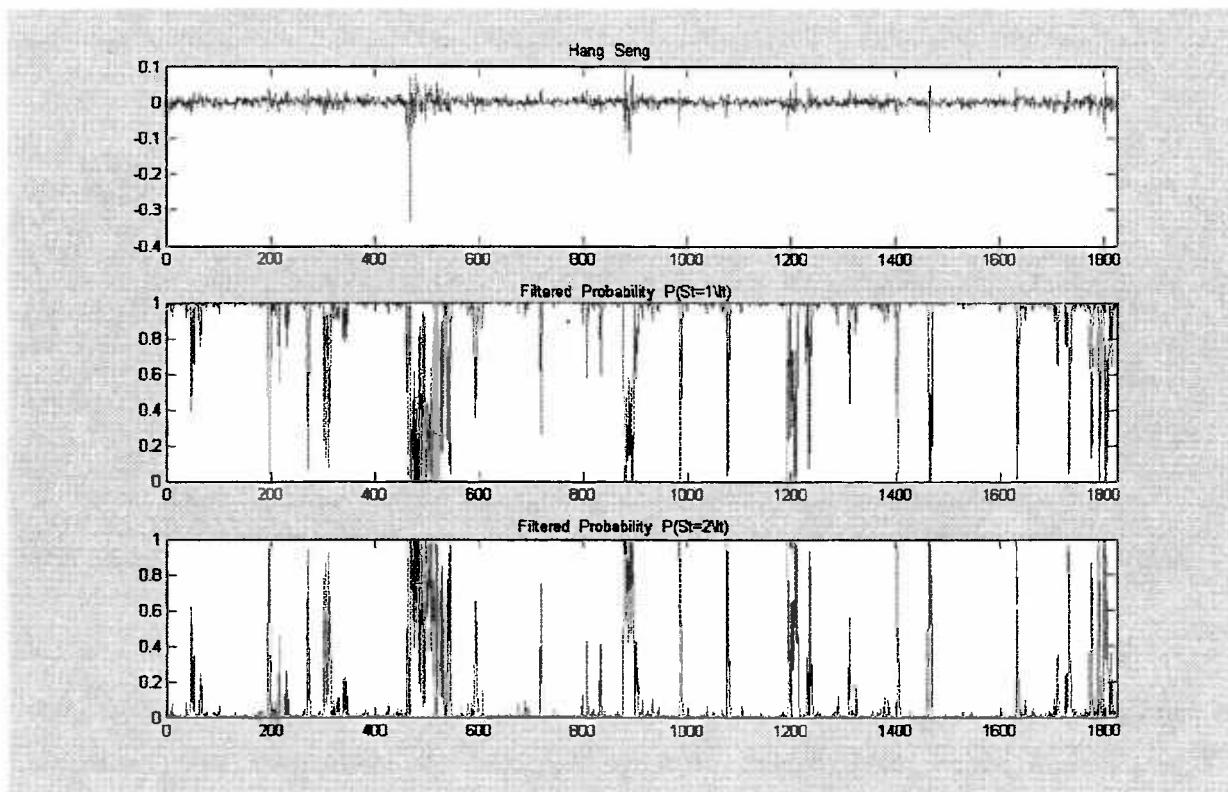
Από τον πίνακα 6.2 μπορούμε να πούμε ότι οι εκτιμήσεις των μέσων για κάθε δείκτη και για κάθε state είναι στατιστικά σημαντικοί και συμβαδίζουν με τη θεωρία, με την έννοια ότι στο state 1 όπου η οικονομία βρίσκεται σε περίοδο χαμηλής διακύμανσης ο μέσος είναι μεγαλύτερος από αυτόν του state 2, όπου η οικονομία βρίσκεται σε περίοδο μεγάλης διακύμανσης. Αυτό είναι λογικό γιατί όπως έχουμε αναφέρει όταν η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση και «κακά» νέα εισέρχονται στην αγορά, τότε αναμένουμε αρνητικές αποδόσεις (επειδή οι τιμές των μετοχών πέφτουν λόγω των αρνητικών νέων) και μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με μια περίοδο όπου η οικονομία βρίσκεται στο state 1. Πράγματι και στους δύο δείκτες στο state 2 η διακύμανση είναι μεγαλύτερη από αυτό του state 1.

Οι transition probabilities δείχνουν ότι η μετάβαση από το ένα state στο άλλο δεν είναι πολύ πιθανή, με άλλα λόγια τα δύο states δείχνουν να είναι persistent. Για παράδειγμα στο δείκτη DAX πιθανότητα να είμαστε στο state 1 και να παραμείνουμε σε αυτό είναι $p_{11} = 1 - p_{12} = 98.327$, η οποία είναι αρκετά μεγάλη. Εξαίρεση ίσως αποτελεί η p_{21} για το δείκτη Hang Seng η οποία είναι 0.1623.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

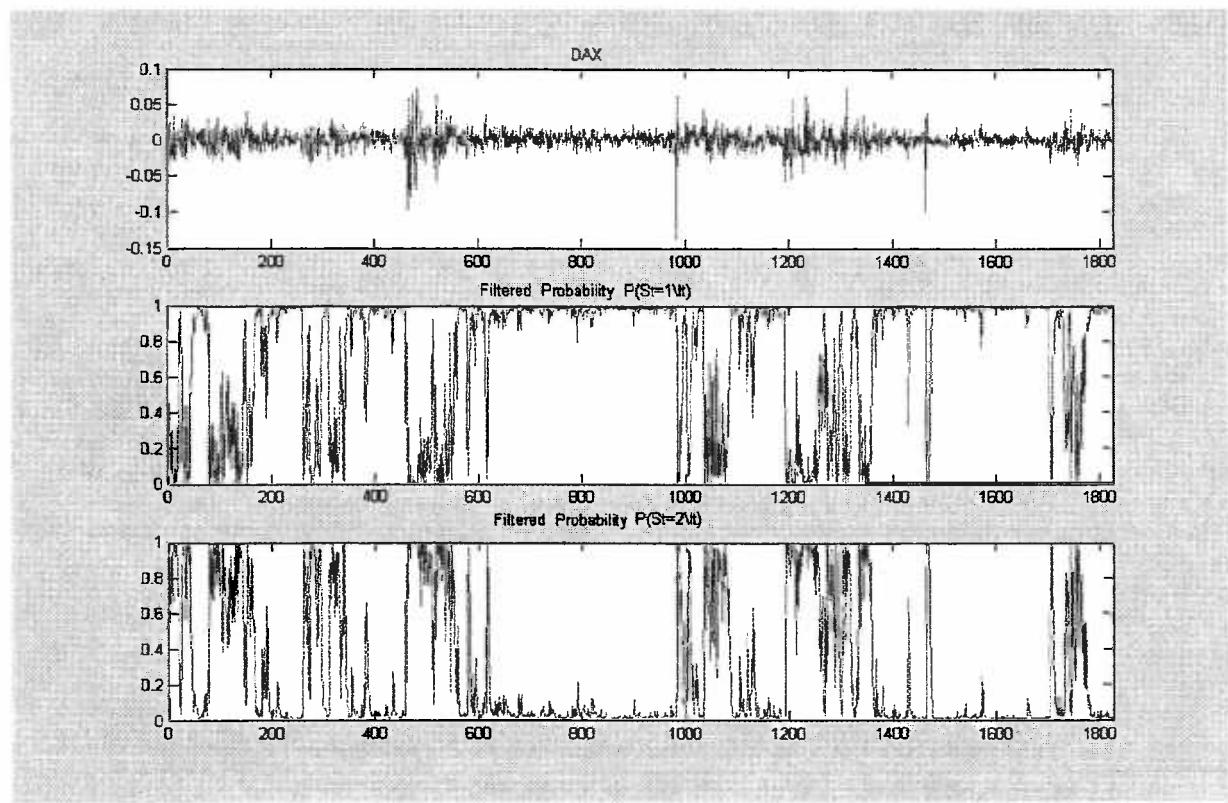
Τα διαγράμματα 6.1 και 6.2 που ακολουθούν, δείχνουν τις filtered probabilities όπως

συνοψίζονται στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} P(s_t = 1 | I_t, \theta) \\ P(s_t = 2 | I_t, \theta) \end{bmatrix}$ σε συνδυασμό με τους δύο δείκτες:



Διάγραμμα 6.1

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.2

Όπως διακρίνουμε στα 2 διαγράμματα οι filtered probabilities συμβαδίζουν απολύτως με την κατάσταση της οικονομίας αν δεχτούμε ότι αυτή απεικονίζεται στους δύο δείκτες. Για παράδειγμα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και οι δύο δείκτες παρουσιάζουν μεγάλη διακύμανση στις παρατηρήσεις που περιβάλλουν τον Οκτώβριο του 1987 (ανάμεσα στην 400 και 600 παρατήρηση του δείγματος) και στους δύο δείκτες η πιθανότητα να είμαστε στο state 2 της οικονομίας (όπως αυτή απεικονίζεται στο τρίτο μέρος του κάθε διαγράμματος) είναι κοντά στη μονάδα ενώ η πιθανότητα να είμαστε στο state 1 είναι σχεδόν μηδενική για αυτή την περίοδο. Ακόμα από τα διαγράμματα 6.1 και 6.2 μπορούμε να δούμε ότι οι περίοδοι με μεγάλη διακύμανση στο δείκτη του Hong Kong έχουν μικρότερη διάρκεια απότι στο δείκτη DAX. Αυτό δικαιολογεί και την αυξημένη τιμή της p_{21} .

6.2.3 Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) common B υποδείγματος

Η εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) common B υποδείγματος είναι η εκτίμηση ενός ARCH(1) υποδείγματος όπου η σταθερά μεταβάλλεται ανάλογα με το state που βρίσκεται η

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

οικονομία ενώ η παράμετρος του ARCH όρου παραμένει σταθερή. Η εκτίμηση γίνεται όπως ακριβώς περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4 ενώ το υπόδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$r_t = \varepsilon_t \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \text{ και } h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \text{ με } s_t = 1, 2 \quad (6.3)$$

Το διάνυσμα με τις παραμέτρους προς εκτίμηση είναι το $\theta = \{a_1, a_2, \beta, p_{12}, p_{21}\}$ ενώ οι εκτιμήσεις για το θ και για τους δύο δείκτες δίνονται από τον πίνακα 6.3:

Πίνακας 6.3: Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) common b για τους 2 δείκτες

Δείκτης: Hang Seng

MS_ARC(2,1) Common B	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
a_1	-9.2853	0.0513	0.0001
a_2	-5.8621	0.2115	0.0028
β	-2.0334	0.2678	0.1309
p_{12}	-4.6935	0.3884	0.0091
p_{21}	-1.6504	0.4588	0.1611

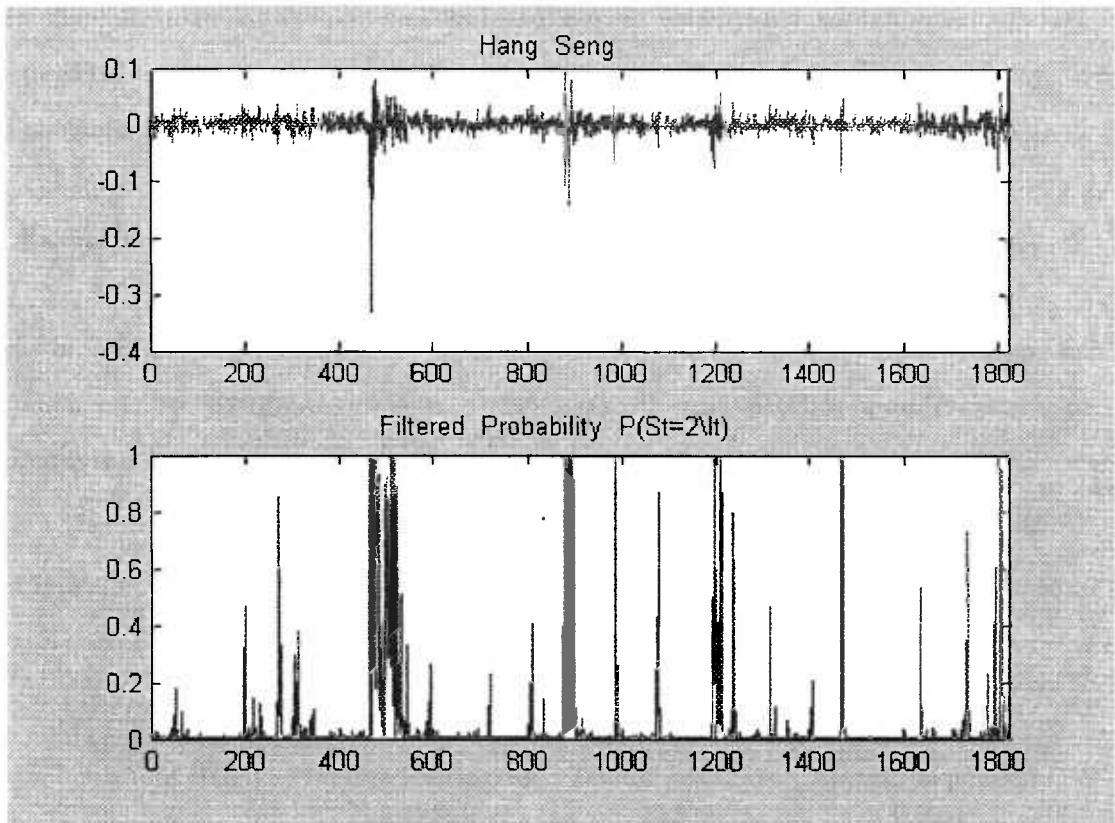
Δείκτης: DAX

MS_ARC(2,1) Common B	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
a_1	-9.6354	0.0532	0.0001
a_2	-7.7680	0.0826	0.0004
β	-2.5622	0.3677	0.0771
p_{12}	-4.3254	0.3284	0.0131
p_{21}	-3.4266	0.3641	0.0315

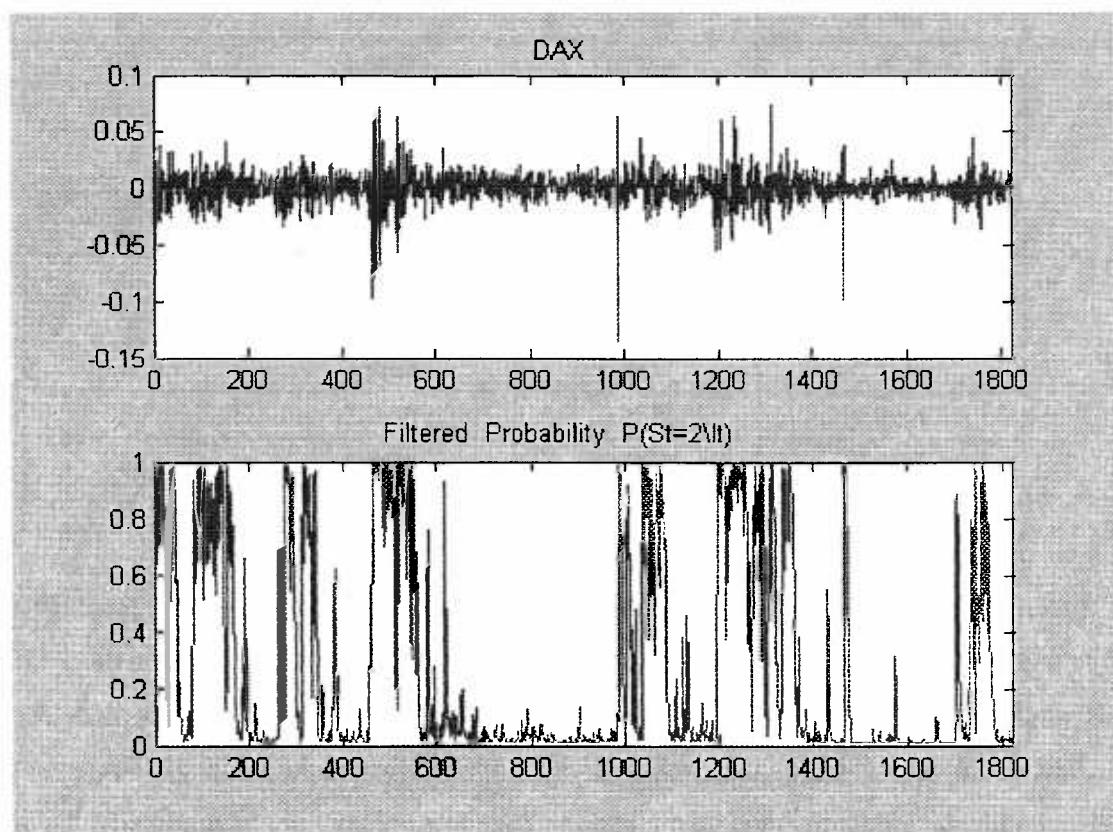
Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα $a_1 < a_2$ και για τους δύο δείκτες, το οποίο είναι σύμφωνο με τις υποθέσεις που έχουμε κάνει ότι η διακύμανση στο state 1 της οικονομίας είναι μικρότερη από αυτή του state 2. Επίσης η επίδραση των τετραγώνων των τυχαίων σφαλμάτων (στο χρόνο $t-1$) στο δείκτη Hang Seng είναι μεγαλύτερη από αυτή του δείκτη DAX όπως φαίνεται από το β . Οι τιμές των transition probability είναι αντίστοιχες με εκείνες του υποδείγματος της παραγράφου 6.2.1.

Στη συνέχεια ακολουθούν τα Διαγράμματα 6.3 και 6.4 τα οποία απεικονίζουν την πιθανότητα η οικονομία να βρίσκεται στο state 2 (high volatility state) για $t = 1, 2, 3, \dots, 1825$.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.3



Διάγραμμα 6.4

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

Στα διαγράμματα αυτά φαίνεται καθαρά ότι η πιθανότητα να είμαστε στο state 2 είναι πολύ μεγάλη στις περιόδους μεγάλης διακύμανσης. Ακόμη γίνεται φανερό ότι στο δείκτη DAX το state 2 είναι πιο persistent σε σχέση με το δείκτη Hang Seng.

6.2.4 Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) υποδειγματος

Το υπόδειγμα MS-ARCH(2,1) είναι αντίστοιχο με αυτό της παραγράφου 6.2.2 με τη μόνη διαφορά ότι μεταβάλλεται και ο συντελεστής του ARCH όρου ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία. Το υπόδειγμα είναι το εξής:

$$r_t = \varepsilon_t \quad \text{όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad \text{και } h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta_{s_t} \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \quad \text{με } s_t = 1, 2 \quad (6.4)$$

Οι παράμετροι προς εκτίμηση είναι τώρα 6 και περιλαμβάνονται στο διάνυσμα θ όπου $\theta = \{a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, p_{12}, p_{21}\}$. Ο πίνακας 6.4 δίνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων:

Πίνακας 6.4: Εκτίμηση του MS-ARCH(2,1) για τους 2 δείκτες

Δείκτης: Hang Seng

MS ARCH(2,1)	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
a_1	-9.2958	0.0509	0.0001
a_2	-5.8567	0.2020	0.0029
β_1	-1.9237	0.2423	0.1461
β_2	-5.5830	7.7530	0.0038
p_{12}	-4.7258	0.3760	0.0088
p_{21}	-1.6961	0.4640	0.1550

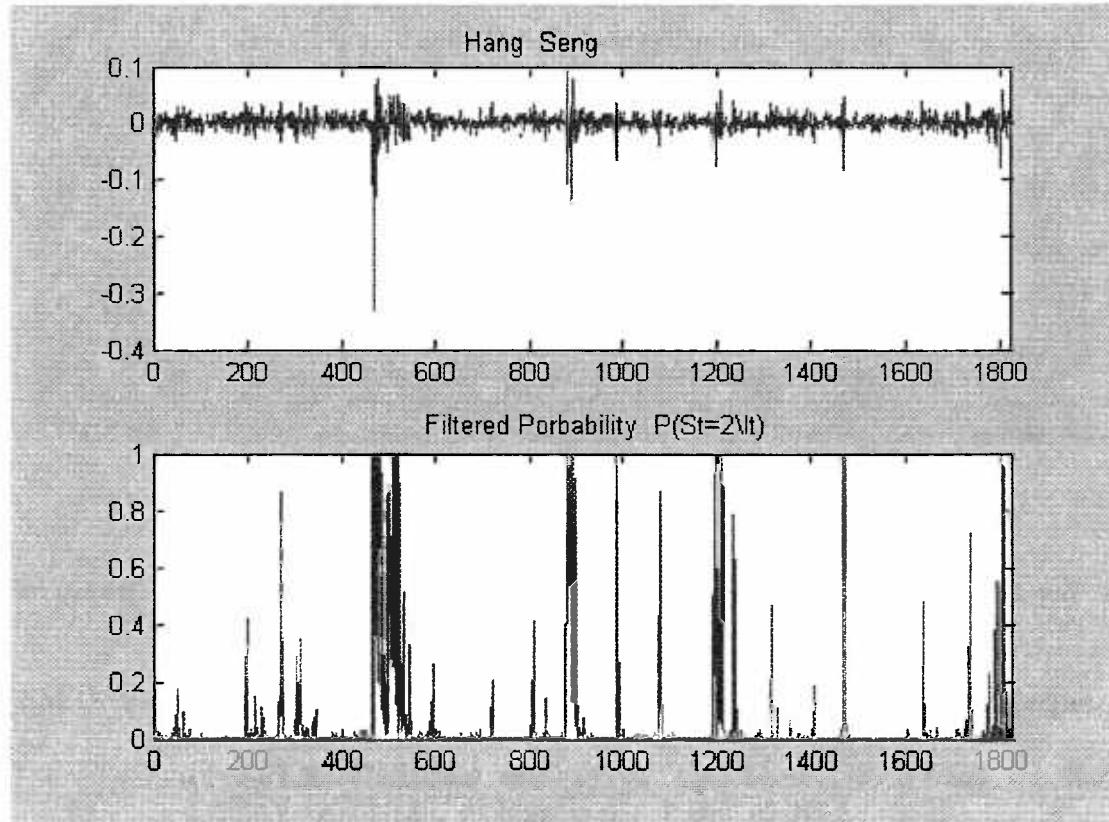
Δείκτης: DAX

MS ARCH(2,1)	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
a_1	-9.6251	0.0563	0.0001
a_2	-7.7861	0.0889	0.0004
β_1	-2.9182	0.8887	0.0540
β_2	-2.3426	0.4878	0.0961
p_{12}	-4.2820	0.3458	0.0136
p_{21}	-3.3993	0.3750	0.0323

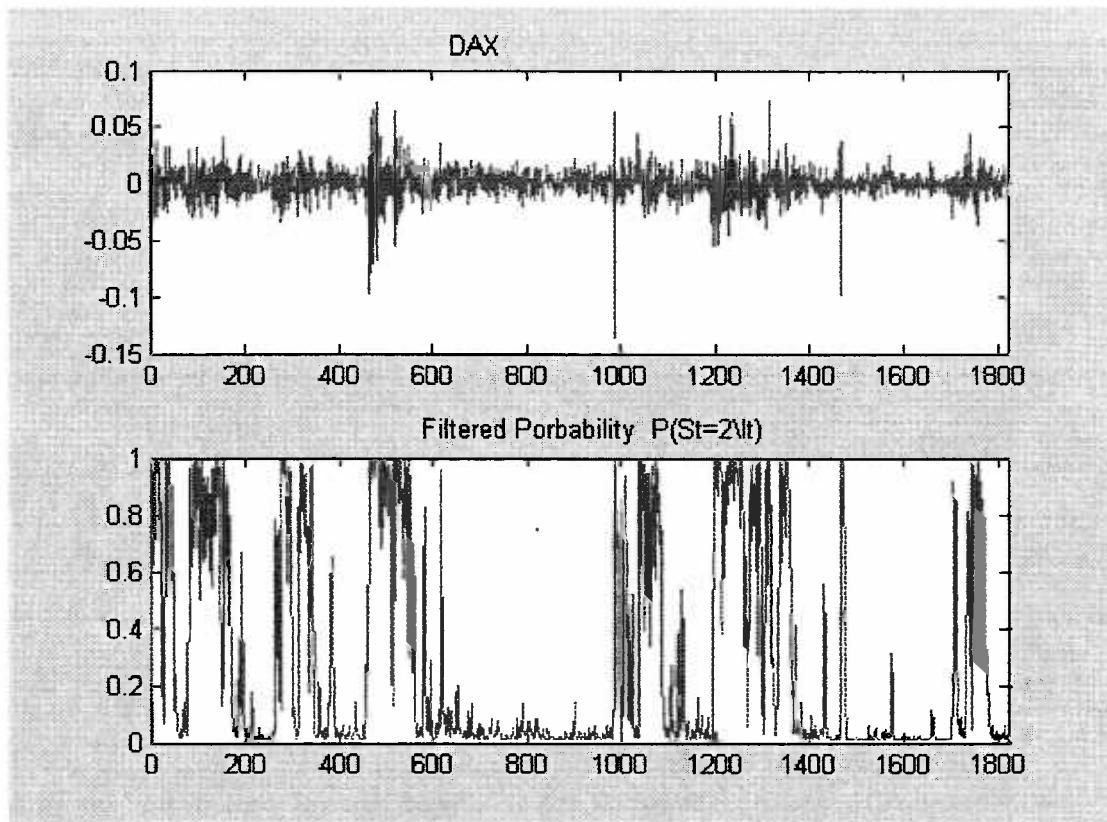
Οι εκτιμήσεις των a_1 και a_2 είναι σχεδόν όμοιες με αυτές του υποδειγματος MS-ARCH(2,1) common B. Η επίδραση του ARCH όρου και στα δύο state για το δείκτη DAX είναι μικρή ενώ για το state 2 είναι λίγο μεγαλύτερη. Αντίθετα για το δείκτη Hang Seng η επίδραση του ARCH όρου είναι μεγαλύτερη στο low volatility state 1. Με άλλα λόγια όταν βρισκόμαστε στο state 1 η επίδραση των shocks στην υπό-συνθήκη διακύμανση είναι

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

μεγαλύτερη απότι στο state 2 ενώ για το δείκτη DAX συμβαίνει το αντίθετο. Αυτό είναι φυσικό αν σκεφτούμε ότι το state 1 για το δείκτη Hang Seng είναι πιο persistent σε σχέση με το state 2 όπως φαίνεται από τα παρακάτω διαγράμματα αλλά και από τις transition probabilities όπου για το δείκτη του Hong Kong έχουμε ότι: $p_{22} = 1 - p_{21} = 1 - 0.1550 = 0.845$ ενώ $p_{11} = 1 - p_{12} = 1 - 0.0088 = 0.9912$. Τα διαγράμματα 6.5 και 6.6 δείχνουν τις filtered probabilities δεδομένης της πληροφόρησης και του διανύσματος θ .



Διάγραμμα 6.5



Διάγραμμα 6.6

6.2.5 Εκτίμηση του απλού Markov Regime-Switching υποδειγματος (SMRS) για 3 states

Το SMRS για 3 states εκτιμήθηκε μόνο για το δεύτη Hang Seng. Το υπόδειγμα είναι το εξής:

$$r_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2) \text{ με } s_t = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα με τις παραμέτρους προς εκτίμηση είναι το $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32}\}$. Οι εκτιμήσεις δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

Πίνακας 6.5: Εκτίμηση των SMRS (3 states) για το δείκτη Hang Seng

Δείκτης: Hang Seng

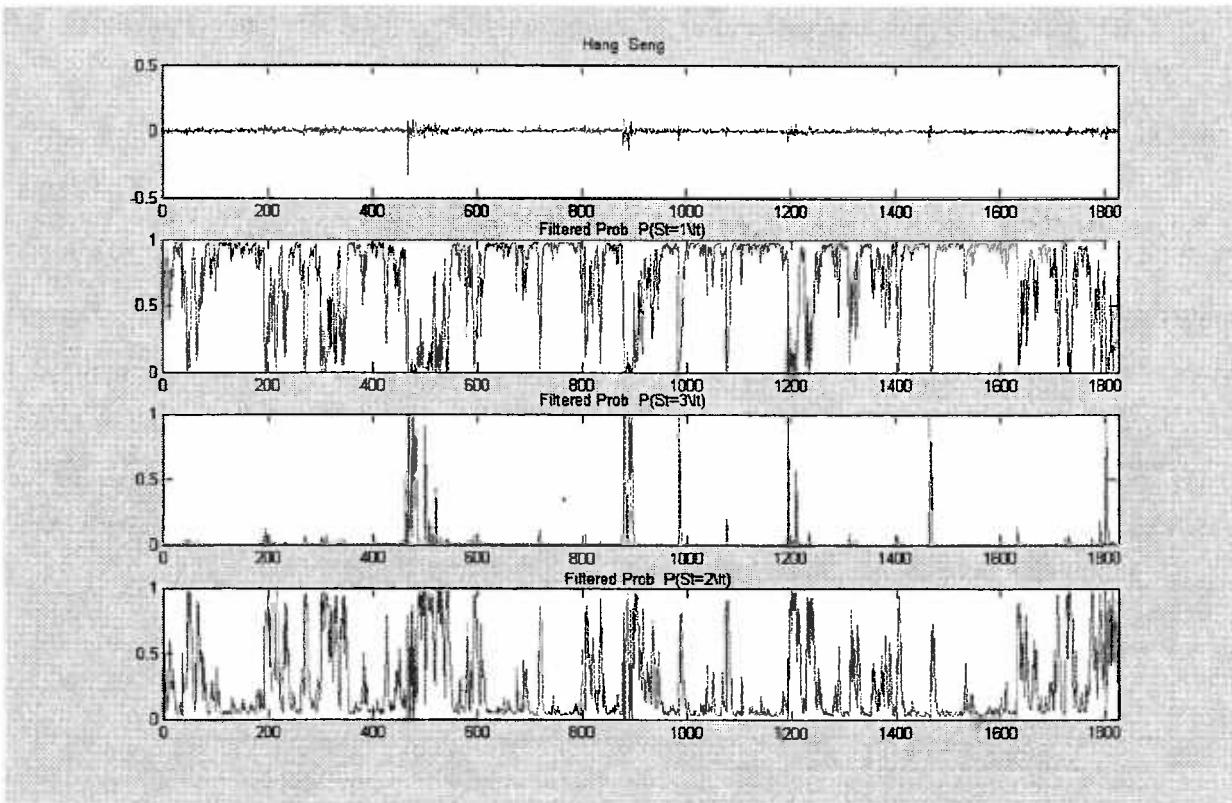
SMRS 3 states	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
μ_1	-	0.0003	0.0016
μ_2	-	0.0010	0.0004
μ_3	-	0.0023	0.0007
σ_1	-4.7774	0.0381	0.0084
σ_2	-2.6158	0.1194	0.0731
σ_3	-4.1184	0.0747	0.0163
p_{12}	-5.7473	0.7974	0.0032
p_{13}	-3.6132	0.3582	0.0263
p_{21}	-16.7285	10.2482	0.00000005
p_{23}	-1.1133	0.5365	0.2473
p_{31}	-2.3431	0.3468	0.0876
p_{32}	-4.0806	0.7340	0.0166

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε θεωρήσει ότι υπάρχουν 3 state στην οικονομία. Από τον πίνακα 6.5 παρατηρούμε ότι κατά το πρώτο state με τη μικρότερη διακύμανση έχουμε το μεγαλύτερο μέσο ενώ στο δεύτερο state έχουμε το χαμηλότερο μέσο και την υψηλότερη διακύμανση όπως ακριβώς είχαμε υποθέσει. Στο τρίτο state (με τη μεσαία διακύμανση) τόσο ο μέσος όσο και η διακύμανση βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές του πρώτου και του δεύτερου state. Παρόλα αυτά ο μέσος στο τρίτο state δε φαίνεται να είναι στατιστικά σημαντικός.

Ακολουθεί το διάγραμμα με τις filtered probabilities για κάθε $t = 1, 2, 3, \dots, 1825$ και για κάθε state:



Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.7

Παρατηρούμε ότι το τρίτο κατά σειρά διάγραμμα, που δείχνει τη πιθανότητα να είμαστε στο state 2, παρουσιάζει υψηλές πιθανότητες κοντά στη μονάδα μόνο στις περιπτώσεις πολύ υψηλής διακύμανσης. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε και το τρίτο state της μεσαίας διακύμανσης. Για παράδειγμα ανάμεσα στις παρατηρήσεις 400 και 600 παρατηρούμε και τα 3 state στην οικονομία. Αρχικά παρατηρούμε χαμηλή διακύμανση και υψηλή πιθανότητα να βρισκόμαστε στο state 1, στη συνέχεια παρατηρούμε ένα μεγάλο peak στη σειρά των αποδόσεων (είναι περίοδος του Οκτώβρη του 1987) και αντίστοιχα μεγάλη πιθανότητα η οικονομία να βρίσκεται στο state 2 (τρίτο κατά σειρά διάγραμμα) και τέλος η περίοδος που ακολουθεί τον Οκτώβριο του 1987 είναι υψηλής διακύμανσης αλλά όχι τόσο υψηλή όσο μπορεί να είναι σε ένα ακραίο γεγονός (outlier) και έτσι παρατηρούμε μεγάλη πιθανότητα να είμαστε στο 3^o state της μεσαίας διακύμανσης (τέταρτο διάγραμμα). Βλέπουμε λοιπόν πόσο καλά μπορεί να περιγραφούν ακραία γεγονότα από τις filtered probabilities, αρκεί να διαπιστώσουμε την ανωτερότητα των υποδειγμάτων Markov Switching και στις προβλέψεις.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

6.2.6 Εκτίμηση του MS-ARCH(3,1) common B υποδειγματος για το δείκτη DAX

Το τέταρτο Markov Switching υπόδειγμα που θα εκτιμήσουμε και συγκρίνουμε για το δείκτη DAX είναι το ακόλουθο MS-ARCH(3,1) common B:

$$r_t = \varepsilon_t, \text{ όπου } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \text{ και } h_t(s_t) = a_{s_t} + \beta \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \text{ με } s_t = 1, 2, 3 \quad (6.6)$$

Το υπόδειγμα αυτό είναι αντίστοιχο του υποδειγματος που εκτιμήσαμε στην παράγραφο 6.2.3 μόνο που τώρα υποθέτουμε 3 state στην οικονομία. Οι εκτιμήσεις δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 6.6: Εκτίμηση του MS-ARCH(3,1) υπόδειγμα για το δείκτη DAX

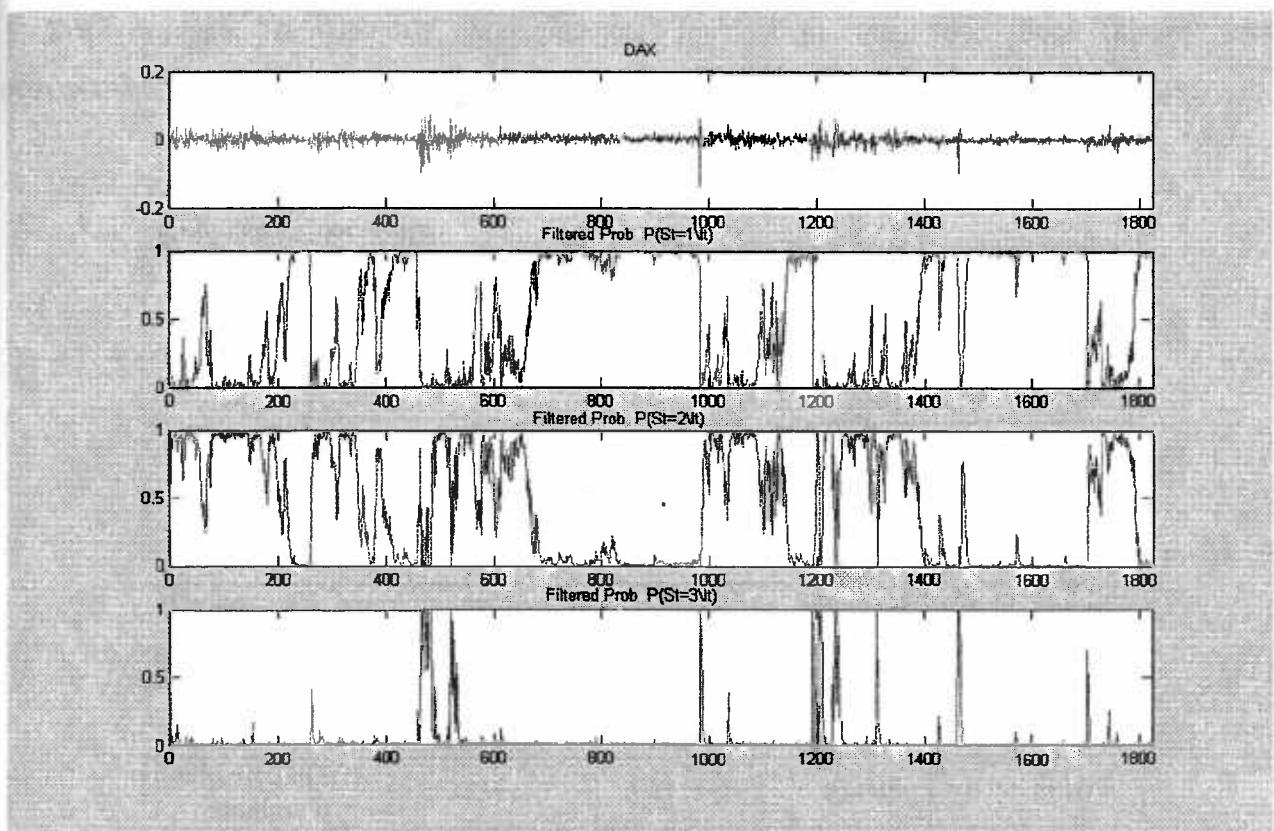
Δείκτης: DAX

MS ARCH(3,1) Common B	Μετασχ. Παράμετροι	Τυπικά σφάλματα	Αρχικές παράμετροι
a_1	-9.7744	0.0580	0.0001
a_2	-8.6024	0.0587	0.0002
a_3	-6.3741	0.1988	0.0017
β	-18.0828	12.8569	0.00000014
p_{12}	-5.7755	1.0544	0.0031
p_{13}	-5.3380	0.5721	0.0048
p_{21}	-4.5504	0.4038	0.0105
p_{23}	-5.1181	0.6180	0.0060
p_{31}	-4.5658	1.4739	0.0103
p_{32}	-2.0640	0.4833	0.1127

Η σταθερά του υποδειγματος της δεσμευμένης διακύμανσης φαίνεται να μεταβάλλεται ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία. Εδώ έχουμε υποθέσει ότι το πρώτο state είναι αυτό της χαμηλής διακύμανσης το δεύτερο της μεσαίας και το τρίτο της υψηλής διακύμανσης. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι η επίδραση των shocks στην υπό-συνθήκη διακύμανση είναι αμελητέα αφού το β είναι πάρα πολύ μικρός αριθμός. Το γεγονός ότι υποθέσαμε τρία states στην οικονομία επηρέασε την εκτίμηση του β , αφού η σημασία των προηγούμενων shocks απορροφήθηκε από την αλλαγή της παραμέτρου α ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία.

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται καθαρά πως περιγράφονται τα ακραία γεγονότα από τις filtered probabilities. Παρατηρούμε και εδώ ότι μεγάλη πιθανότητα να εμφανιστεί ο τρίτο state (όπως φαίνεται από το τελευταίο διάγραμμα) έχουμε μόνο στις περιόδους με πολύ μεγάλη διακύμανση των αποδόσεων.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.8

6.3 Σύγκριση των υποδειγμάτων με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη σύγκριση των υποδειγμάτων επεροσκεδαστικότητας με τα υποδείγματα Markov Switching που αποτελούν ουσιαστικά τις δύο εναλλακτικές μεθόδους μοντελοποίησης της διακύμανσης των χρηματοοικονομικών κυρίως χρονολογικών σειρών.

Έχουμε ήδη αναφέρει τη χρησιμότητα της διακύμανσης στη χρηματοοικονομική θεωρία αλλά και την αναγκαιότητα για αξιόπιστες και καλές προβλέψεις της υπό-συνθήκη διακύμανσης. Έτσι η σύγκριση των δύο εναλλακτικών μεθόδων μοντελοποίησης της διακύμανσης που προαναφέρθηκαν θα γίνει με βάση την “out of sample” πρόβλεψη, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια (5.2) έως και (5.5) του κεφαλαίου 5. Οι προβλέψεις για μία περίοδο στο μέλλον έγιναν με βάση όσα αναφέρθηκαν στα κεφάλαια 3 και 4 στις αντίστοιχες παραγράφους για τις προβλέψεις, ενώ η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τις 41 προβλέψεις (2 μήνες) είναι αυτή που περιγράφηκε στην παράγραφο 6.1 αυτού του κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο πίνακες (αντίστοιχα για τους δύο δείκτες) που συγκεντρώνουν τα αποτελέσματα για τα υποδείγματα που εκτιμήσαμε και συγκρίναμε:

Πίνακας 6.7: Κριτήρια επιλογής υποδειγμάτος με βάση την “out of sample” προβλεπτική ικανότητα

Δείκτης: Hang Seng				
Υπόδειγμα	MSE ₁	MSE ₂	MAD ₁	MAD ₂
GARCH(1,1)	5.9498x10 ⁻⁵	3.4612x10 ⁻⁸	0.0069	1.3934x10 ⁻⁴
MS-ARCH(2,1) common B	5.3070x10 ⁻⁵	1.8601x10 ⁻⁸	0.0064	1.1730x10 ⁻⁴
MS-ARCH(2,1)	5.2770x10 ⁻⁵	1.8517x10⁻⁸	0.0064	1.1620x10⁻⁴
SMRS 2 states	5.2884x10 ⁻⁵	3.2440x10 ⁻⁸	0.0065	1.3044x10 ⁻⁴
SMRS 3 states	5.1552x10⁻⁵	3.0649x10 ⁻⁸	0.0063	1.2620x10 ⁻⁴

Πίνακας 6.8: Κριτήρια επιλογής υποδειγμάτος με βάση την “out of sample” προβλεπτική ικανότητα

Δείκτης: DAX				
Υπόδειγμα	MSE ₁	MSE ₂	MAD ₁	MAD ₂
GARCH(1,1)	3.7501x10 ⁻⁵	1.0938x10 ⁻⁸	0.0051	8.001x10 ⁻⁵
MS-ARCH(2,1) common B	2.9424x10 ⁻⁵	8.4113x10 ⁻⁹	0.0045	6.7486x10 ⁻⁵
MS-ARCH(2,1)	2.9871x10 ⁻⁵	8.6656x10 ⁻⁹	0.0045	6.8302x10 ⁻⁵
SMRS 2 states	3.1549x10 ⁻⁵	1.0844x10 ⁻⁸	0.0047	7.0973x10 ⁻⁵
MS-ARCH(3,1) common B	2.7584x10⁻⁵	8.0914x10⁻⁹	0.0045	6.6703x10⁻⁵

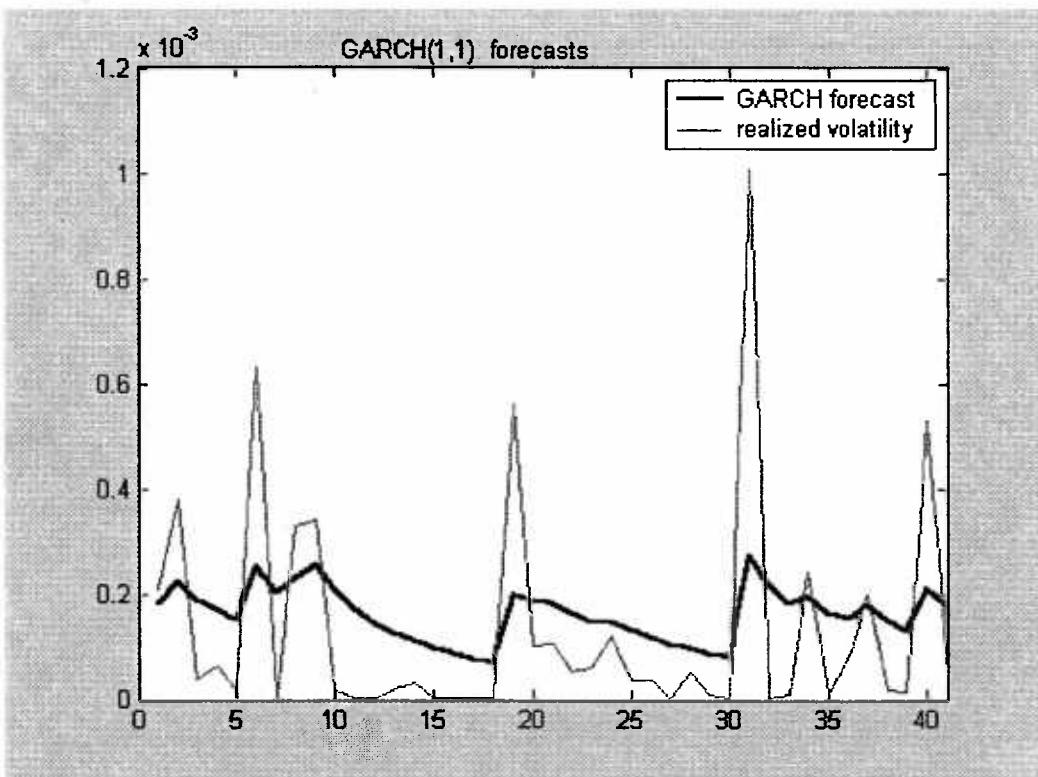
Με έντονα γράμματα σημειώνονται οι μικρότερες τιμές για το κάθε κριτήριο. Όπως βλέπουμε από τους δύο πίνακες η ανωτερότητα των Markov Switching υποδειγμάτων σε σχέση με το GARCH(1,1) είναι σαφής και στους δύο δείκτες. Μάλιστα όλα τα υποδείγματα Markov Switching έχουν μικρότερη τιμή και στα 4 κριτήρια από το GARCH(1,1). Επίσης βλέπουμε ότι ανάμεσα στα Markov Switching υποδειγμάτα, καλύτερα εμφανίζονται τα υποδείγματα που έχουμε υποθέσει 3 states και τα MS-ARCH υποδείγματα.

Μια πιο σαφή εικόνα θα έχουμε αν προβάλλουμε τα διαγράμματα με τη *realized volatility* και τις *προβλέψεις* που έχουν πραγματοποιήσει τα υποδείγματα που εκτιμήσαμε για τον κάθε δείκτη.

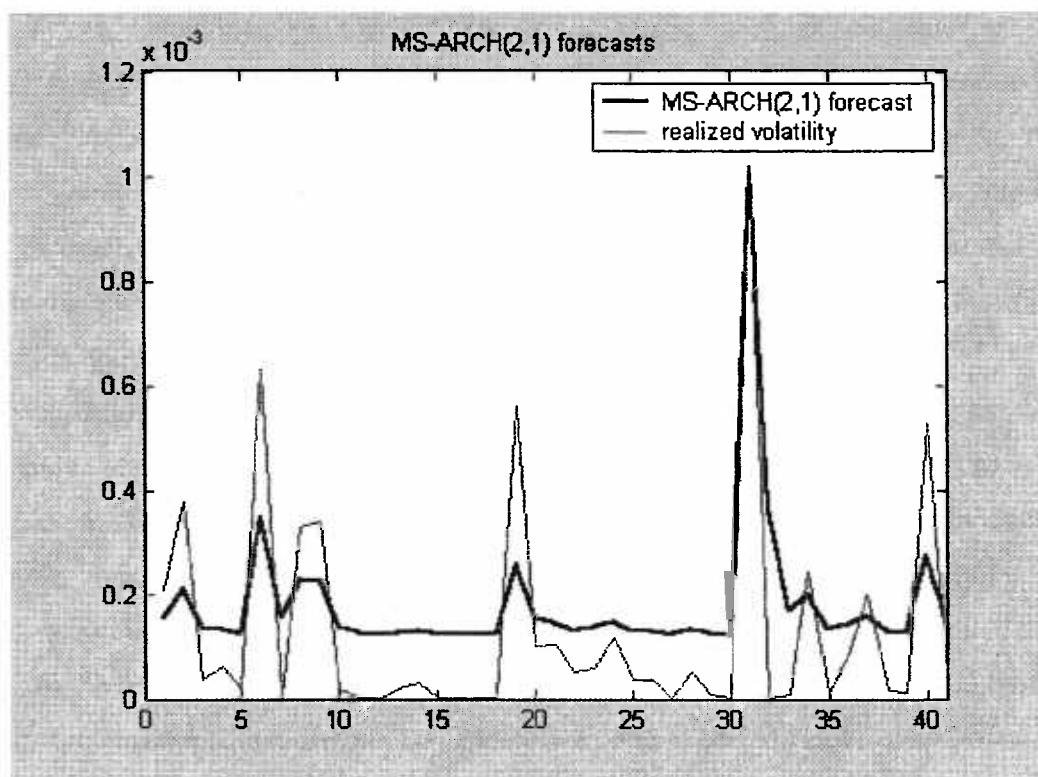
Δείκτης Hang Seng

Στα διαγράμματα 6.9, 6.10 και 6.11 προβάλλονται οι προβλέψεις με το GARCH(1,1) υπόδειγμα καθώς και με τα υποδείγματα MS-ARCH(2,1) και SMRS-3 states τα οποία δίνουν τις καλύτερες “out of sample” προβλέψεις με βάση τα κριτήρια του πίνακα 6.7.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

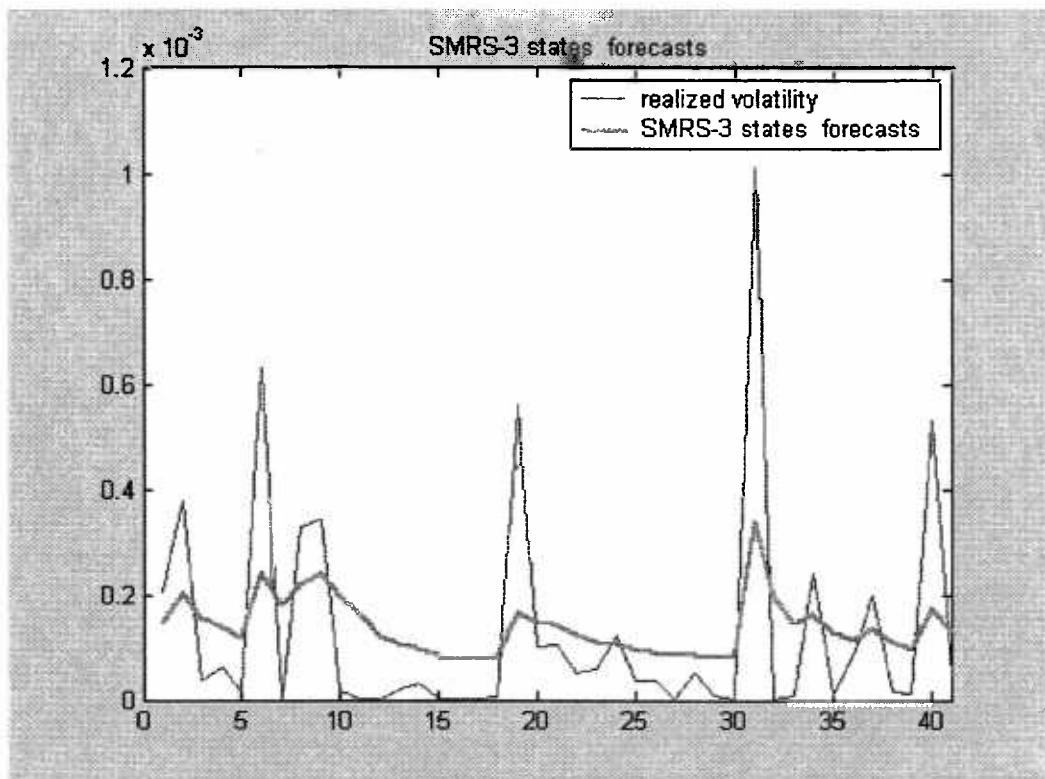


Διάγραμμα 6.9



Διάγραμμα 6.10

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

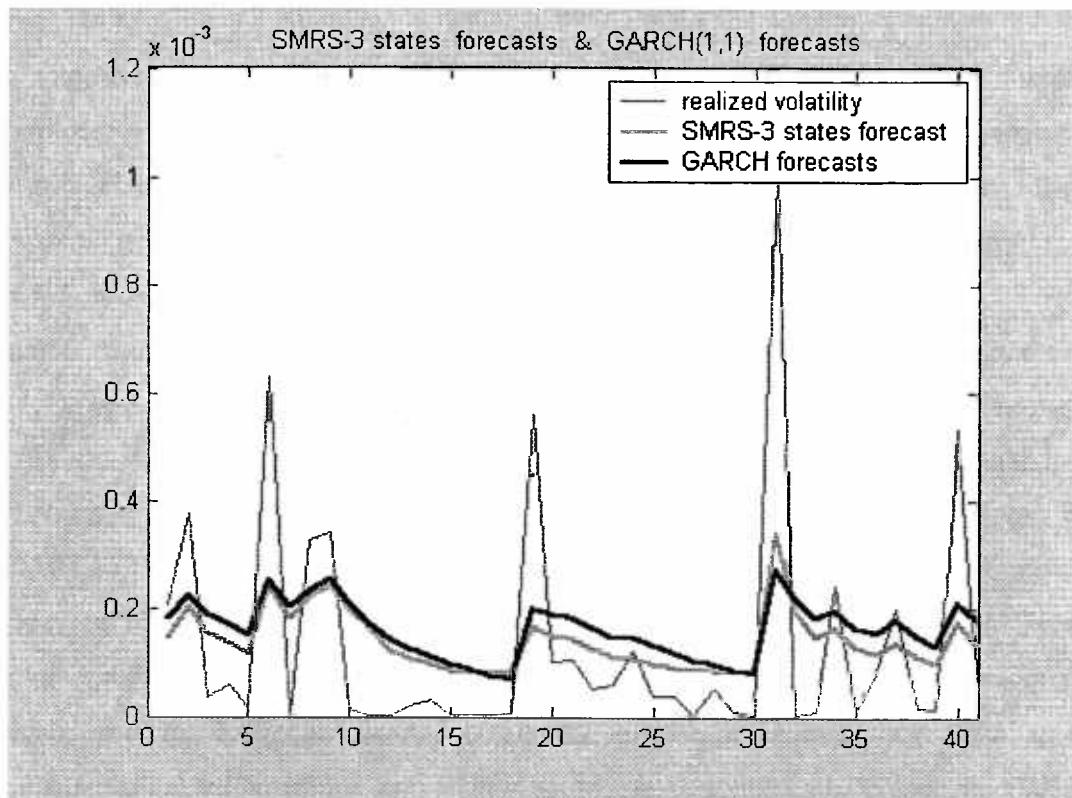


Διάγραμμα 6.11

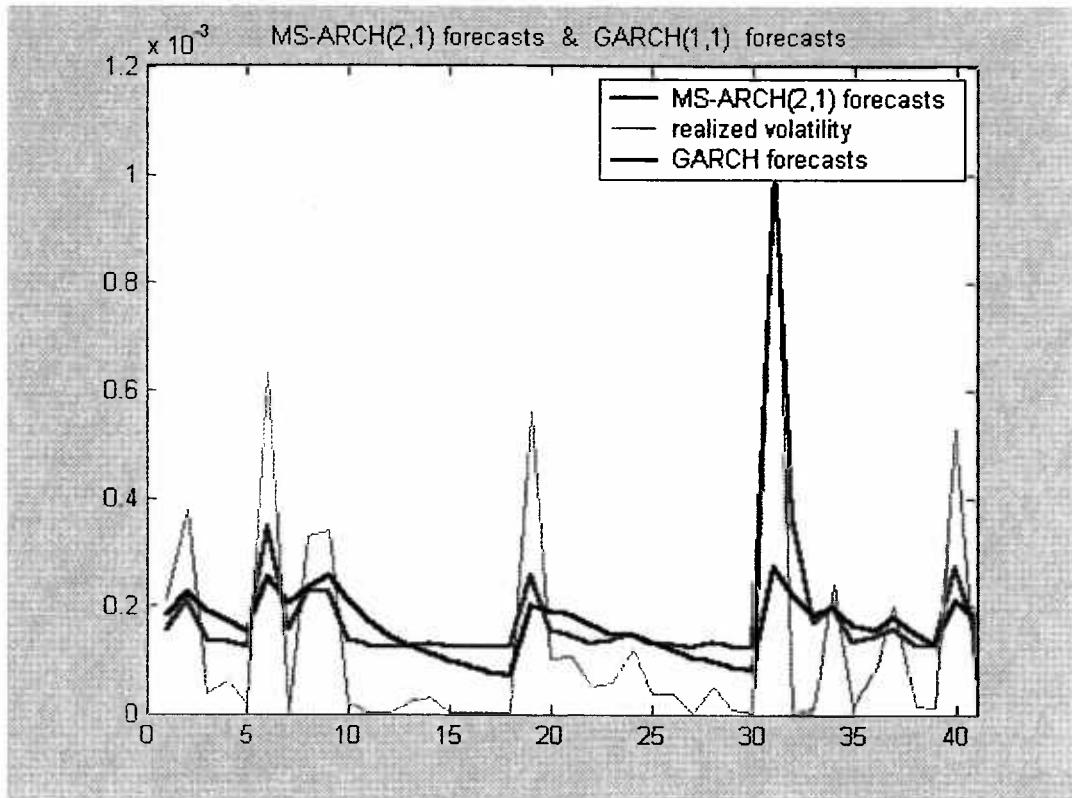
Όπως παρατηρούμε το υπόδειγμα GARCH(1,1) δείχνει να υποεκτιμάει την υπό-συνθήκη διακύμανση στις περιόδους με υψηλή διακύμανση (όπως αυτή εκφράζεται από τη realized volatility) και να υπερεκτιμάει την υπό-συνθήκη διακύμανση σε περιόδους χαμηλής διακύμανσης. Αντίθετα τα Markov-Switching δείχνουν να «πιάνουν» καλύτερα τις ακραίες τιμές της διακύμανσης με αποκορύφωση το MS-ARCH(2,1) υπόδειγμα το οποίο «πιάνει» ακριβώς τη realized volatility της 31^{ης} ημέρας όπως φαίνεται στο διάγραμμα 6.10. Αντίθετα το υπόδειγμα SMRS-3 states δείχνει να πιάνει καλύτερα την υπό-συνθήκη διακύμανση στις περιόδους με χαμηλή διακύμανση.

Τα διαγράμματα 6.12 και 6.13 δείχνουν τη σύγκριση των προβλέψεων των δύο υποδειγμάτων Markov Switching με τις προβλέψεις του GARCH(1,1). Το MS-ARCH(2,1) (διάγραμμα 6.13) είναι σαφώς ανώτερο του GARCH(1,1) στις περιόδους υψηλής διακύμανσης, αφού «πιάνει» καλύτερα τα “peaks” της realized volatility και υστερεί σε ελάχιστες περιπτώσεις σε σχέση με το GARCH(1,1) στις περιόδους με χαμηλή διακύμανση. Αντίθετα το SMRS-3 states κάνει καλύτερες προβλέψεις σε σχέση με το GARCH(1,1) στις περιόδους με χαμηλή διακύμανση. Τα παραπάνω φαίνονται καθαρά στα διαγράμματα που ακολουθούν.

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.12



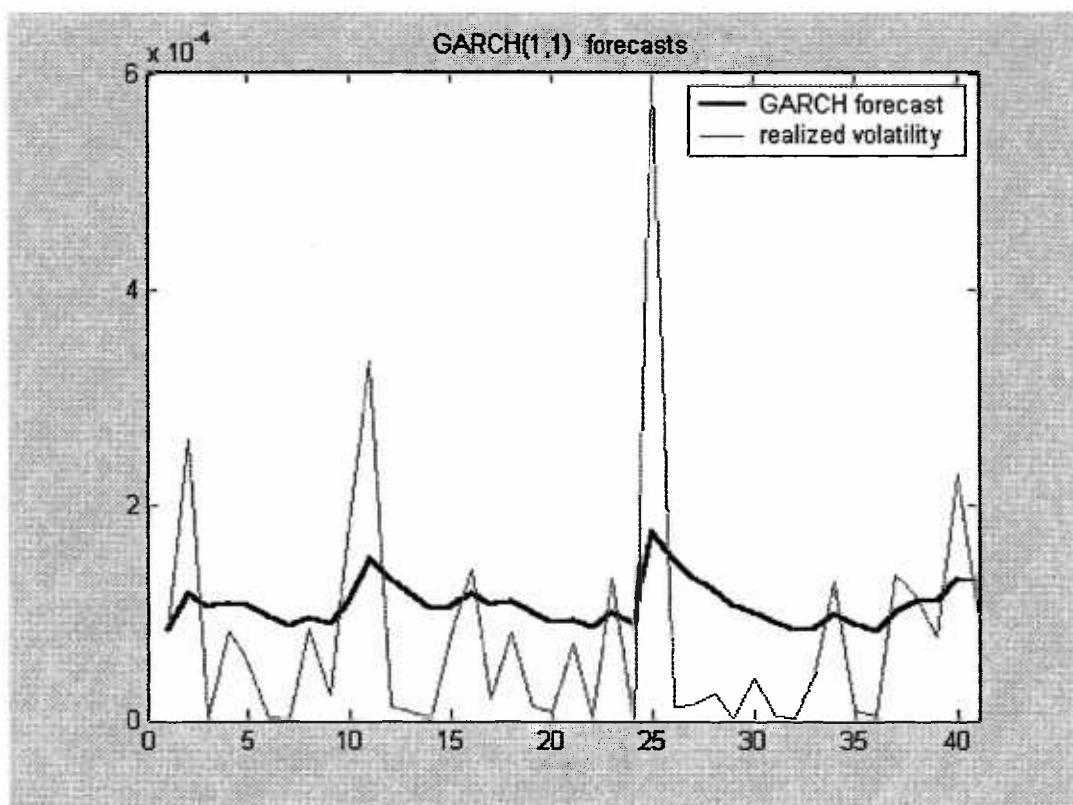
Διάγραμμα 6.13

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

Δείκτης DAX

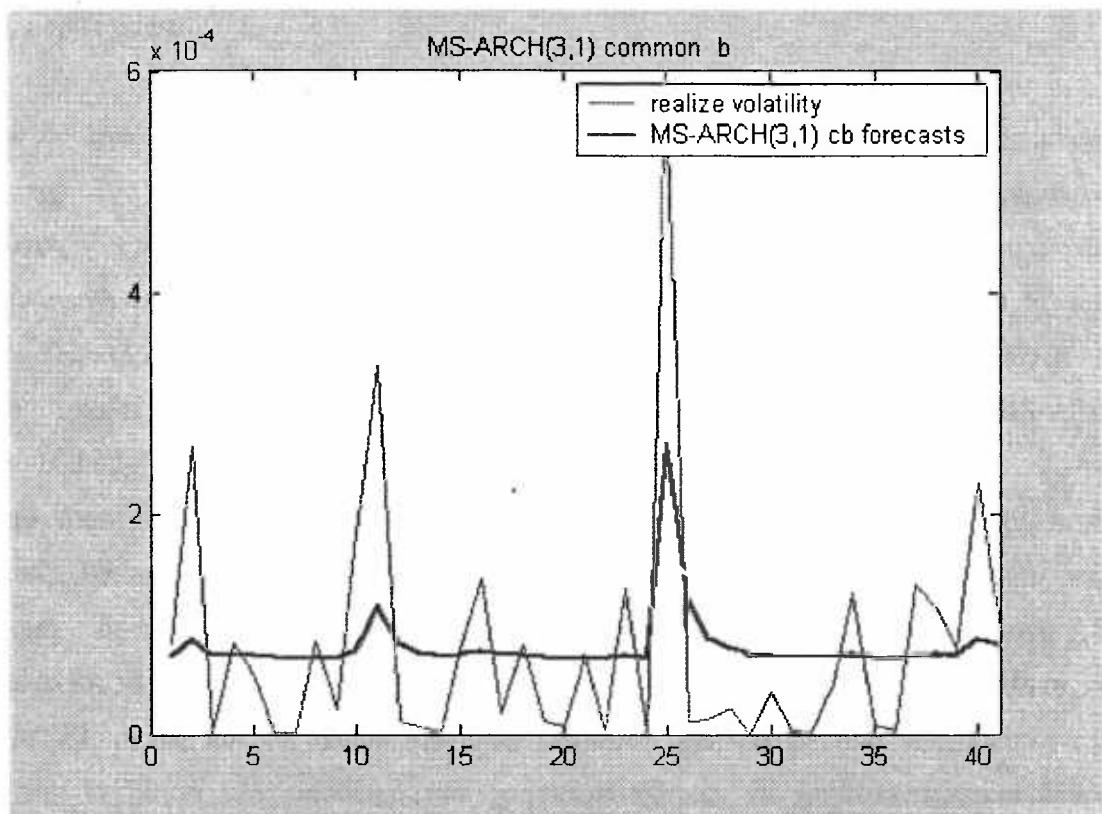
Όπως προαναφέραμε και στο δείκτη DAX τα Markov Switching υποδείγματα πραγματοποιούν καλύτερες προβλέψεις σε σχέση με το GARCH(1,1) σύμφωνα με τα κριτήρια του πίνακα 6.8. Εδώ όμως τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα όσον αφορά στο καλύτερο υπόδειγμα αφού το MS-ARCH(3,1) common B παρουσιάζει τις μικρότερες τιμές στα κριτήρια επιλογής του πίνακα 6.8.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα με τις προβλέψεις των δύο υποδειγμάτων GARCH(1,1) και MS-ARCH(3,1) common B (6.14 και 6.15) καθώς και το διάγραμμα που παρουσιάζει τις προβλέψεις των υποδειγμάτων μαζί. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα το Markov Switching υπόδειγμα «πιάνει» καλύτερα το μεγάλο “peak” της 25^{ης} μέρας σε σχέση με το GARCH(1,1) το οποίο «πιάνει» καλύτερα τα υπόλοιπα peaks αλλά φαίνεται να υπερεκτιμάει τη διακύμανση σε περιόδους χαμηλής διακύμανσης. Αντίθετα το MS υπόδειγμα φαίνεται να προβλέπει πιο καλά σε περιόδους χαμηλής διακύμανσης οι οποίες είναι και περισσότερες για το διάστημα των δυο μηνών που προβλέπουμε και έτσι σε γενικές γραμμές σύμφωνα με τα κριτήρια που εξετάζουμε πραγματοποιεί καλύτερες προβλέψεις.

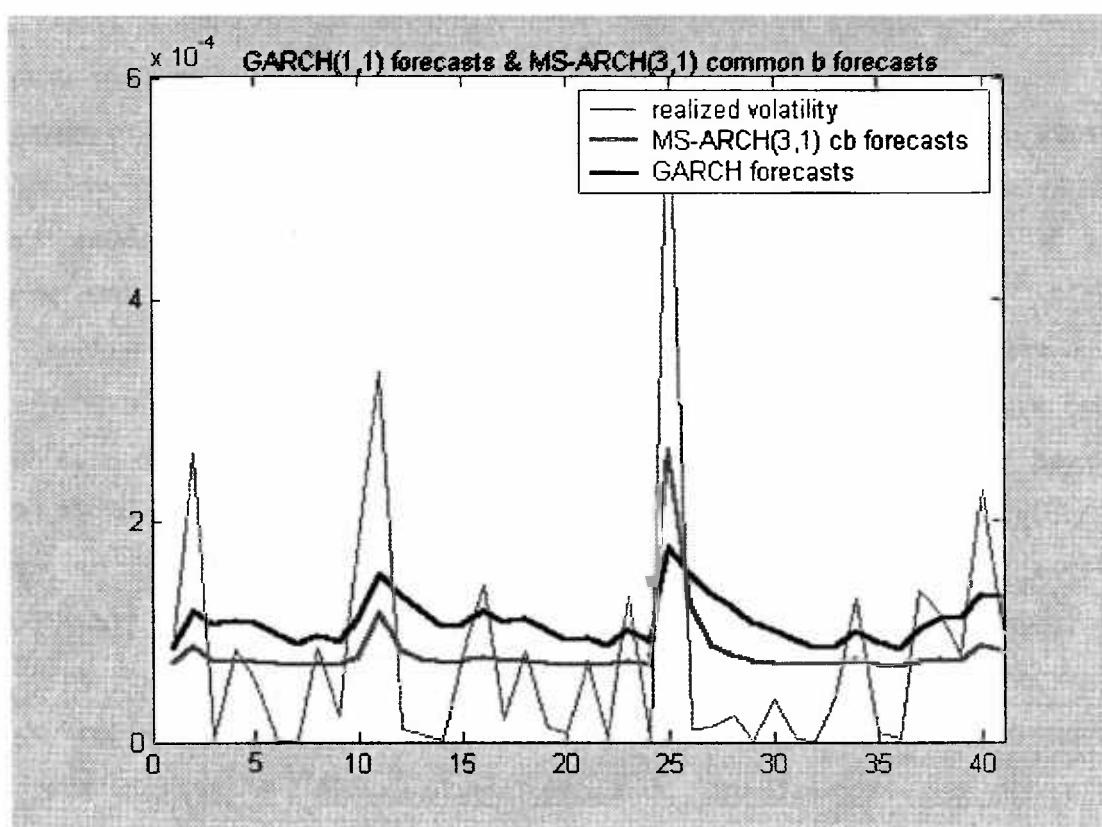


Διάγραμμα 6.14

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα



Διάγραμμα 6.15



Διάγραμμα 6.16

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υποδειγμάτων και συμπεράσματα

6.4 Συμπεράσματα

Έχοντας αναλύσει θεωρητικά, ως προς τις ιδιότητες και την εκτίμηση, στα κεφάλαια 3 και 4 τις δύο εναλλακτικές προτάσεις για υποδειγματοποίηση της διακύμανσης των χρονολογικών χρηματοοικονομικών σειρών, εκτιμήσαμε και συγκρίναμε ένα γενικό υπόδειγμα από την οικογένεια των ARCH και GARCH υποδειγμάτων, το GARCH(1,1), το οποίο καλύπτει μεγάλο αριθμό περιπτώσεων χρηματοοικονομικών σειρών και πέντε Markov Switching υποδείγματα (SMRS υπόδειγμα με 2 και 3 states, MS-ARCH(2,1), MS-ARCH(2,1) common B, MS-ARCH(3,1) common B).

Η σύγκριση των υποδειγμάτων έγινε με βάση την “out of sample” προβλεπτική τους ικανότητας λόγω της σημαντικότητας και της αναγκαιότητας αξιόπιστων προβλέψεων για την ροπή δεύτερης τάξης στη χρηματοοικονομική θεωρία (π.χ. επιλογή άριστου χαρτοφυλακίου, option pricing κ.τ.λ.). Για τη σύγκριση χρησιμοποιήθηκαν το *Mean Squared Error, (MSE)* καθώς και το *Mean Absolute Deviation, (MAD)* σε δύο παραλλαγές τους.

Για την εκτίμηση των υποδειγμάτων χρησιμοποιήθηκαν οι χρηματιστηριακοί δείκτες του Hong Kong (δείκτης Hang Seng) και ο χρηματιστηριακός δείκτης της Φρανκφούρτης (δείκτης DAX). Η επιλογή των δειγμάτων έγινε έτσι ώστε να έχουμε μια εικόνα για τα υποδείγματα, τόσο σε αναπτυσσόμενες όσο και σε αναπτυγμένες οικονομίες.

To κύριο συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε από την ανάλυση που προηγήθηκε στην παρούσα εργασία είναι ότι με βάση τα κριτήρια MSE και MAD όλα τα *Markov Switching* υποδείγματα που εκτιμήσαμε πραγματοποιούν καλύτερες “out of sample” προβλέψεις από το GARCH(1,1) υπόδειγμα.

Ta επιμέρους συμπεράσματα στα οποία θα μπορούσαμε να καταλήξουμε είναι ότι στους συγκεκριμένους δείκτες: Πρώτο: υποδείγματα στα οποία υποθέτουμε ότι η οικονομία χαρακτηρίζεται από 3 states τείνουν να δίνουν τις καλύτερες προβλέψεις. Δεύτερο: το GARCH(1,1) τείνει να υποεκτιμά την διακύμανση σε περιόδους υψηλής διακύμανσης και να υπερεκτιμά τη διακύμανση σε περιόδους με χαμηλή μεταβλητικότητα. Τρίτο: αντίθετα τα MS υποδείγματα δείχνουν ότι «πιάνουν» καλύτερα τα “peaks” των διακυμάνσεων ενώ σε περιόδους με χαμηλή διακύμανση οι προβλέψεις που πραγματοποιούν είναι πιο κοντά στο μέσο όρο της μεταβλητικότητας της περιόδου, με αποτέλεσμα να είναι πιο κοντά στη realized volatility και να δίνουν χαμηλότερες τιμές στα κριτήρια που προαναφέραμε. Τέταρτο: τα MS-ARCH(2,1) υποδείγματα (είτε μεταβάλλεται μόνο η σταθερά είτε και η

Κεφάλαιο 6: Εμπειρική εκτίμηση, σύγκριση των υπόδειγμάτων και συμπεράσματα

σταθερά και η παράμετρος του ARCH όρου) δίνουν καλύτερες προβλέψεις σε σχέση με το απλό Markov Regime-Switching υπόδειγμα με 2 states, στο οποίο η διακύμανση ($\sigma_{s_t}^2$) παίρνει τιμές ανάλογα με το state που βρίσκεται η οικονομία και δεν εξαρτάται από το τετράγωνο των τυχαίων σφαλμάτων προηγούμενων περιόδων όπως στα MS-ARCH υπόδειγματα. **Πέμπτο:** στο MS-ARCH(3,1) common B υπόδειγμα, στο οποίο υποθέτουμε 3 states, η επίδραση των τετραγώνων των τυχαίων σφαλμάτων προηγούμενων περιόδων στην υπό-συνθήκη διακύμανση είναι πολύ μικρή έως και μηδενική. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα παραπάνω συμπεράσματα αφορούν στα υπό εξέταση δείγματα της παρούσας εργασίας και δε μπορούν να γενικευθούν αυθαίρετα.

Βιβλιογραφία - Αρθρογραφία

1. Bautista C. C., (2003), "Stock Market Volatility in Philippines", Applied Economic Letters, 10, 315 – 318.
2. Bera Anil K. and Higgins Matthew L., (1993), "Arch Models: Properties Estimation and Testing", Journal of Economic Surveys, Vol. 7, No. 4, 305 – 362.
3. Bollerslev Tim, Robert F. Engle and Daniel B. Nelson, (1994), "Arch Models", Handbook of Econometrics, Vol. IV, Ch. 49, 2961-3058.
4. Cai Jun, (1994), "A Markov Model of Switching – Regime ARCH", Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 12, No. 3, 309 – 316.
5. Duecker Michael J., (1997), "Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility", Journal of Business & Economic Statistics.
6. Dwyer Gerald P., (2003), "Nonlinear Time Series and Financial Applications", Federal Reserve Bank of Atlanta.
7. Engle Robert F., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, Vol. 50, No. 4, 987-1008.
8. Engle Robert, (2001), "GARCH 101: The use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", Journal of Economic Perspectives, Vol. 15, No 4, 157-168.
9. Enders Walter, "Applied Econometric Time Series", John Wiley & Sons, INC.
10. Erlandsson Ulf G., (2004), "Reconnecting the Markov Switching Model with Economic Fundamentals", working paper.
11. Garcia Rene, Perron Pierre, (1994), "An Analysis of the Real Interest Rate under Regime Shifts", The Review of Economics and Statistics.
12. Goodwin Thomaw H., (1993), "Business – Cycle Analysis with a Markov – Switching Model", Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 11, No. 3, 331-339.
13. Hamilton James D., (1989), "A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series and Business Cycle", Econometrica, Vol. 57, No. 2, 357 – 384.
14. Hamilton James D., (1994), "Time Series Analysis", Princeton University Press.
15. Hamilton James D. (1994), "State-Space Models", Handbook of Econometrics, Vol. IV, 3041- 3080.
16. Hamilton James D. and Susmel Raul, (1994), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Changes in Regime", Journal of Econometrics, 64, 307 – 333.



17. Hardy Mary R., "A Regime- Switching Model of Long – Term Stock Returns", North American Actuarial Journal, Vol. 5, No. 2, 41-53.
18. Kasch-Haroutounian Maria and Simon Price, (1998), "Volatility in the Transition Markets of Central Europe", Money Macro and Finance Conference at Imperial College.
19. Karlsson Lars, (2003), "GARCH - Modeling, Theoretical Survey, Model Implementation and robustness analysis", Master Thesis.
20. Kim Chang – Jin, (1993), "Unobserved – Component Time Series Models with Markov – Switching Heteroscedasticity: Changes in Regime and Link Between Inflation Rates and Inflation Uncertainty", Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 11, No. 3, 341 – 349.
21. Klaasen Franc, (2002), "Improving GARCH volatility forecasts with regime – switching GARCH", Empirical Economics, 27, 363 – 394.
22. Lux Thomas and Michel Marchesi, (1998), "Volatility Clustering in Financial Markets: A Micro-Simulation of Interactive Agents", working paper.
23. Marcucci Juri, (2003), "Forecasting Stock Market Volatility with Regime – Switching GARCH Models", working paper.
24. Mayhew Stewart, (2002), "Security Price Dynamics and Simulation in Financial Engineering", Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference.
25. Medeiros Marcelo C. and Alvaro Veiga, (2001), "Are there Multiple Regimes in Financial Volatility?", working paper.
26. Mizrach Bruce, Watkins James, "A Markov Switching Cookbook", Nonlinear Time Series Analysis of Economic and Financial Data, Kluwer Academic Publishers.
27. Pelletier Denis, (2003), "Regime Switching for Dynamic Correlations", Journal of Economic Literature Classification, working paper.
28. Peters Jean-Philippe, (2001), "Estimating and forecasting volatility of stock indices using asymmetric GARCH models and (Skewed) Student-t densities", Ecole d' Administration des Affaires.
29. Pindyck Robert S., Rubinfeld Daniel L., "Econometric Models and Economic Forecasts", McGraw-Hill International Editions, Fourth Edition.
30. Smith Daniel R., (2003), "Structural Breaks in GARCH Models", working paper.

31. Sola Martin, Timmerman Allan, (1994), "Fitting the Moments: A Comparison of ARCH and Regime Switching Models for Daily Stock Returns", working paper.
32. Susmel Raul, (1999), "Switching Volatility in International Equity Markets", working paper.

Δυρεά

