ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

'ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ'

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ
(Α.Μ. 649)

**Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

Αθήνα
[Δεκέμβριος 2005]

ΑΣΟΕΕ 1920

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

'ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ'

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ
(Α.Μ. 649)

**Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

Αθήνα
[Δεκέμβριος 2005]

Εγκρίνουμε τη διατριβή του Παναγιώτη Πετρόπουλου:

ΙΩΑΝΝΗΣ ΒΡΟΝΤΟΣ
Λέκτορας Τμήματος Στατιστικής
Πανεπιστημίου Αθηνών
(Υπεύθυνος Καθηγητής)

Υπογραφή
....
Βρόντος Ιωάννης

ΠΕΤΡΟΣ ΔΕΛΛΑΠΟΡΤΑΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος
Στατιστικής Πανεπιστημίου Αθηνών
(Εξεταστής Καθηγητής)

Υπογραφή
....

Ημερομηνία

18/01/2006

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

5 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Περίληψη Διατριβής

Η παρούσα διατριβή διαχωρίζεται σε πέντε κύρια τμήματα. Το πρώτο μέρος αποτελεί μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες, τα είδη και τους ορισμούς της μεταβλητότητας (financial volatility) που χαρακτηρίζει τις χρονολογικές σειρές που προέρχονται από χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία.

Η σωστή μοντελοποίηση και πρόβλεψη της μεταβλητότητας των τιμών ή των αποδόσεων διαφόρων χρηματοοικονομικών αγαθών παίζει κυρίαρχο ρόλο στη σύγχρονη Χρηματοοικονομική.

Οι ορισμοί που δίνονται στην παραπάνω έννοια αποκλίνουν μεταξύ τους, ανάλογα με την ιδιότητα που έχει ο εκάστοτε φορέας που ερμηνεύει τη μεταβλητότητα. Για παράδειγμα, άλλοι την ερμηνεύουν απλά σαν τη διακύμανση των αποδόσεων, ενώ άλλοι της δίνουν τη βαθύτερη έννοια του χρηματοοικονομικού κινδύνου (financial risk) που με τη σειρά του συνδέεται με την αξιολόγηση επενδύσεων, την αντιστάθμιση κινδύνου (hedging), την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας ή απώλειας περιουσιακών αγαθών, την επιλογή του πιο αποδοτικού χαρτοφυλακίου, τον υπολογισμό του *'Value at Risk'* κ.α. Από πολλούς ακόμη χρησιμοποιείται στην αποτίμηση παράγωγων προϊόντων, ενώ παίζει σπουδαίο ρόλο και στην άσκηση Νομισματικής Πολιτικής.

Η μεταβλητότητα είναι μια μη-παρατηρήσιμη παράμετρος που συνάγεται από τα διαθέσιμα αριθμητικά δεδομένα. Ασφαλώς οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της διαφέρουν από τη μια περίπτωση στην άλλη, σε βαθμό που η επιλογή βασίζεται σε υποκειμενικά κριτήρια.

Στο δεύτερο μέρος περιγράφονται οι διάφοροι τρόποι που προτάθηκαν από τους ειδικούς για τον υπολογισμό των αποδόσεων και της ιστορικής μεταβλητότητας μιας χρηματοοικονομικής χρονολογικής σειράς. Γίνεται επίσης αναφορά στην Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility) και στα χαρακτηριστικά της. Επιπλέον, αναλύονται κάποιοι παράγοντες που θα φανούν χρήσιμοι στις πρακτικές εφαρμογές στο προτελευταίο μέρος της διατριβής.

Το τρίτο και τέταρτο μέρος αποτελούν τα σημαντικότερα και εκτενέστερα κομμάτια της διατριβής καθώς σε αυτά περιλαμβάνεται η θεωρία και η εφαρμογή.

Στο τρίτο μέρος πιο συγκεκριμένα αναλύονται λεπτομερώς σε θεωρητικό επίπεδο τα υποδείγματα που έχουν προταθεί από τους εμπειρογνώμονες για τη

μοντελοποίηση της μεταβλητότητας, οι ιδιότητές τους και οι αδυναμίες τους. Τα υποδείγματα που περιγράφονται ανήκουν κυρίως στην οικογένεια των GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), ενώ υπάρχουν και μοντέλα μακροχρόνιας μνήμης (Long Memory Models-LMM). Ακολούθως, περιγράφονται οι διαγνωστικοί έλεγχοι των εξαγόμενων αποτελεσμάτων, καθώς και τα μέτρα αξιολόγησης των μοντέλων και των προβλέψεών τους, με σκοπό την αντικειμενική επιλογή του πιο κατάλληλου μοντέλου.

Στο τέταρτο μέρος εφαρμόζονται τα περισσότερα από τα υποδείγματα του προηγούμενου μέρους σε πραγματικά στοιχεία της αγοράς, ενώ πραγματοποιούνται διαγνωστικοί έλεγχοι και μελλοντικές προβλέψεις. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπως αποτίμηση OPTIONS και υπολογισμός του *'Value at Risk'* που έχουν σαν στόχο την αξιολόγησή τους σε πρακτικό επίπεδο.

Στο πέμπτο και τελευταίο μέρος γράφεται ο επίλογος της διατριβής. Εκεί ανακεφαλαιώνονται τα βασικότερα σημεία απ' όσα προηγήθηκαν και παράλληλα αναφέρονται τα κυριότερα συμπεράσματα της όλης ανάλυσης.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκοπός της Διατριβής

Η διατριβή αυτή αποσκοπεί να παρουσιάσει τις βασικές έννοιες και τους ορισμούς της μεταβλητότητας (financial volatility), που διέπει τις τιμές και τις αποδόσεις των περισσότερων χρηματοοικονομικών αγαθών (δεικτών, μετοχών κλπ.). Βασική επιδίωξη αποτελεί η όσο το δυνατόν καταλληλότερη μοντελοποίησή της, προκειμένου να καταστεί δυνατή η εξαγωγή εκτιμήσεων και η διενέργεια αξιόπιστων μελλοντικών προβλέψεων. Μέσω αυτών, η μεταβλητότητα θα χρησιμοποιηθεί σε κάποιες εφαρμογές που αποτελούν καθημερινά φαινόμενα της Χρηματοοικονομικής, ώστε να αξιολογηθούν σε πρακτικό επίπεδο τα εκτιμημένα αποτελέσματα.

1.2 Γενικά Στοιχεία για τη Μεταβλητότητα

Η μεταβλητότητα ή διακύμανση που συνδέεται με τις αποδόσεις διαφόρων χρηματιστηριακών αγαθών, έχει χριστεί ως μια υψίστης σημασίας ενότητα για όσους εμπλέκονται με οποιονδήποτε τρόπο στις χρηματοοικονομικές αγορές (αγορές συναλλάγματος, αγορές χρήματος και κεφαλαιαγορές), ακόμη κι αν αυτοί παίζουν το ρόλο του απλού θεατή.

Για πολλούς, η έννοια της μεταβλητότητας είναι άμεσα συνυφασμένη με το χρηματοοικονομικό κίνδυνο (financial risk), καθώς επικρατεί το γεγονός πως υψηλή μεταβλητότητα προέρχεται κυρίως από κάποια δυσλειτουργία ή διαταραχή της αγοράς. Γι αυτούς, η μεταβλητότητα ενδέχεται να σημαίνει μη-δίκαιη τιμολόγηση κάποιου χρηματοοικονομικού αγαθού, που έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργούνται ευκαιρίες για *'arbitrage'*. Για άλλους όμως που ασχολούνται με παράγωγα προϊόντα, η κατανόηση και η ερμηνεία της μεταβλητότητας κατέχει μια πολύ βαθύτερη έννοια, εφόσον τους βοηθά να λάβουν όσο το δυνατόν πιο ορθές αποφάσεις σχετικά με μελλοντικά επενδυτικά σχέδια. Έτσι, η σωστή πρόβλεψη και διαχείρισή της αποτελούν ιδιαίτερα κρίσιμους παράγοντες.

Η μεταβλητότητα, ήδη ξεκινώντας με τους Black and Scholes (1973) άρχισε να διαδραματίζει σημαντικότατο ρόλο στην αποτίμηση των OPTIONS (στον καθορισμό της δίκαιης τιμής τους) και γενικότερα στην τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων. Ωστόσο, η σωστή πρόβλεψή της καθιστά ένα δύσκολο κομμάτι της έρευνας και πολλές φορές ο τρόπος πρόβλεψης που επιλέγεται, βασίζεται σε καθαρά υποκειμενικά κριτήρια του εκάστοτε αναλυτή. Η δυσκολία αυτή έχει αυξηθεί δραματικά τα τελευταία χρόνια, γεγονός που προήλθε από το ότι μεγάλος αριθμός επενδυτικών σχεδίων χαρακτηρίζεται από ημερομηνίες ωρίμανσης (διάρκειες ζωής) που εξαπλώνονται στο μέλλον, σε αρκετά μακροπρόθεσμο επίπεδο κι όπως είναι φυσικό προκαλούν την ανάγκη για ολοένα και πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Υπάρχουν λόγου χάρη πολλά είδη παραγώγων που μπορεί να έχουν διάρκεια ζωής μέχρι και 10 έτη, ενώ στο πρόσφατο παρελθόν οι ημερομηνίες ωρίμανσης των παράγωγων προϊόντων κυμαινόντουσαν από μερικές ημέρες έως λίγους μήνες μόνο.

Ένα ακόμη εμπόδιο στον προσδιορισμό της έννοιας της μεταβλητότητας είναι το ότι διαφορετικά πρόσωπα την αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο, ο καθένας βασιζόμενος στην υποκειμενική του σκοπιά. Τέτοια διάσταση απόψεων παρατηρείται ακόμη και μεταξύ εμπειρογνωμόνων, ερευνητών και προσώπων που είναι εξειδικευμένα στον οικονομικό και χρηματιστηριακό τομέα, παρόλο που κάποιος φυσιολογικά θα περίμενε σύγκλιση απόψεων ανάμεσα σε αυτούς τους φορείς. Οι ασυμφωνίες αυτές επηρεάζονται από τον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητότητα επιδρά στις στρατηγικές του καθενός κι από το πόσο επιτυχημένες ή αποτυχημένες αποδεικνύονται αυτές τελικά.

1.3 Ορισμοί της Μεταβλητότητας

Η μεταβλητότητα δεν αναφέρεται σε μια απλή παράμετρο, αλλά σε μια ομάδα συσχετιζόμενων μεταξύ τους εννοιών. Σε ένα μοντέλο αποτίμησης OPTIONS για παράδειγμα η μεταβλητότητα ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης των αποδόσεων του υποκείμενου αγαθού για κάθε στιγμή του χρόνου ζωής που απομένει στο OPTION ως τη λήξη του. Από την άλλη πλευρά, ένας «δημιουργός διατραπεζικής αγοράς» (market maker) που ασχολείται ως επί το πλείστον με OPTIONS, θα ερμήνευε τη μεταβλητότητα ως το εύρος μέσα στο οποίο θα μεταβάλλονται οι αποδόσεις του υποκείμενου αγαθού για το άμεσο μέλλον, δηλαδή βραχυχρόνια. Τις περισσότερες φορές βέβαια, ο ίδιος *'market maker'* χρησιμοποιώντας τον όρο μεταβλητότητα, θα εννοούσε την «Τεκμαρτή Μεταβλητότητα» (Implied Volatility), μια έννοια την οποία θα δούμε σε ενότητα του επόμενου μέρους. Μια επιπλέον αντίληψη σχετικά με τη μεταβλητότητα προέρχεται από τα πρόσωπα που εμπλέκονται με τη διαχείριση κινδύνου (risk management). Οι *'risk managers'* θα χρησιμοποιούσαν το μέγεθος αυτό ώστε να υπολογίσουν την πιθανότητα για παράδειγμα μιας επιχείρησης, ενός δανειστή ή ενός οποιουδήποτε χρηματοοικονομικού οργανισμού να εκτεθεί σε τέτοιον κίνδυνο, ώστε να ενδέχεται να χάσει κάποιο συγκεκριμένο χρηματικό ποσό, να αποτύχει σε κάποιο επενδυτικό πλάνο ή ακόμη και να χρεοκοπήσει.

Οι παραπάνω ορισμοί αποτελούν ένα μικρό μέρος των απόψεων σχετικά με το πώς η έννοια της μεταβλητότητας γίνεται αντιληπτή σε θεωρητικό επίπεδο. Ωστόσο, στο κύριο μέρος της διατριβής, η συγκεκριμένη παράμετρος θα εξεταστεί σε πρακτικό επίπεδο και σύμφωνα με τους στατιστικούς-μαθηματικούς της ορισμούς.

1.4 Χρήσεις της Μεταβλητότητας

Η σωστή εκτίμηση και πρόβλεψη της μεταβλητότητας παίζει σημαντικό και καθοριστικό ρόλο. Οι πλέον συνηθισμένες χρήσεις της μεταβλητότητας που ανακύπτουν από τα προαναφερόμενα, είναι συνοπτικά οι εξής:

- Καταρχήν αποτελεί ένα από τα βασικότερα στάδια για την αξιολόγηση επενδυτικών σχεδίων, την επιλογή του πιο κερδοφόρου εξ αυτών και φυσικά την επιλογή του πιο αποδοτικού χαρτοφυλακίου (portfolio selection).
- Στην αγορά των «δικαιωμάτων προαίρεσης» (OPTIONS) και άλλων παράγωγων προϊόντων, όπως ήδη έγινε κατανοητό, η μεταβλητότητα αποτελεί τον κυριότερο παράγοντα της σωστής αποτίμησης. Εδώ φυσικά μας ενδιαφέρει η μεταβλητότητα στις τιμές του υποκείμενου αγαθού καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του OPTION.
- Η διαχείριση κινδύνου είναι επίσης ένας μεγάλος τομέας που εξαρτάται από την πρόβλεψη της μεταβλητότητας, εφόσον η τυπική απόκλιση ή η διακύμανση των περιουσιακών στοιχείων ερμηνεύεται κι ως «κίνδυνος» που περιέχεται στα στοιχεία αυτά, με την έννοια της απώλειας κάποιου χρηματικού ποσού εξαιτίας ραγδαίων και απροσδόκητων μετακινήσεων των τιμών της αγοράς. Το *'Value at Risk' (VaR)* είναι ένας παράγοντας που

επιβεβαιώνει τη χρησιμότητα της μεταβλητότητας στον τομέα του *'risk management'*.

- Συναφής με την προηγούμενη, είναι και η χρήση της μεταβλητότητας ως μέσο υπολογισμού των δεικτών αντιστάθμισης κινδύνου (hedge ratios), με τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε θέση που λαμβάνει ένας επενδυτής να μπορεί να προταθεί μια αντίθετη θέση, που να του εξασφαλίζει σε βραχυχρόνιο επίπεδο την αποφυγή μεγάλης περιουσιακής απώλειας ή χρεοκοπίας.
- Οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν τη μεταβλητότητα με σκοπό να υπολογίσουν το μέγεθος του επιχειρηματικού κινδύνου που διατρέχουν ανά πάσα στιγμή, αποφεύγοντας έτσι να χάσουν πολύτιμους κεφαλαιακούς πόρους.
- Ακόμη, διάφορες χρηματιστηριακές εταιρείες χρησιμοποιούν τη μεταβλητότητα για να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν την εγκυρότητα των μοντέλων που εφαρμόζουν για αποτίμηση αγαθών και αντιστάθμιση κινδύνου (hedging).
- Τέλος, η κυβέρνηση ενός κράτους καταλήγει σε προτάσεις Νομισματικής Πολιτικής (Monetary Policy), αφού μελετήσει ποικίλους παράγοντες, μεταξύ των οποίων και τη μεταβλητότητα.

1.4.1 Η Σημασία της Μεταβλητότητας για τους Επενδυτές

Αξίζει να αναφερθούμε στο ρόλο που παίζει η μεταβλητότητα για μικρούς και μεγάλους επενδυτές. Όπως είδαμε ως τώρα, η μεταβλητότητα αποτελεί ένα σημαντικό μέσο μέτρησης του κινδύνου της αγοράς. Ο μόνος κίνδυνος όμως που έχει σημασία για τους επενδυτές, είναι ο κίνδυνος που δεν μπορεί να μειωθεί ούτε με την τεχνική της αντιστάθμισης (hedging), ούτε με την τεχνική της διαφοροποίησης (diversification). Έτσι, ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου δεν ενδιαφέρεται για τη συνολική μεταβλητότητα (κίνδυνο) του χαρτοφυλακίου, αλλά για τη μεταβλητότητα που συμμεταβάλλεται με την αγορά (collinear with the market). Σε μια σχέση όπως το *Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (Capital Asset Pricing Model-CAPM)*, ο κίνδυνος αυτός παριστάνεται από το συντελεστή «β» του περιουσιακού στοιχείου, που εναλλακτικά ονομάζεται και **συστηματικός κίνδυνος** του χαρτοφυλακίου και είναι ο κίνδυνος που δεν μπορεί με κανέναν τρόπο να ελαττωθεί, όσα περιουσιακά στοιχεία κι αν περιληφθούν στο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή όσο μεγάλος κι αν είναι ο βαθμός διαφοροποίησης. Συνεπώς στη σχέση του CAPM:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i [E(R_M) - r_f], \; i=1,2,\ldots,N$$

ο συντελεστής β_i μετρά το συστηματικό κίνδυνο του στοιχείου i. Το $E(R_i)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του στοιχείου i, το $E(R_M)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση της αγοράς και r_f είναι το επιτόκιο δίχως κίνδυνο (risk-free rate).

Σύμφωνα με την Alexander (2001), μια υψηλή τιμή του «β» υποδηλώνει υψηλή θετική συσχέτιση με το δείκτη της αγοράς και μεγάλη σχετική μεταβλητότητα για το χαρτοφυλάκιο, καθώς ισχύει η σχέση[1]:

$$\beta=\rho\nu$$

όπου «ρ» εκφράζει τη συσχέτιση του στοιχείου i με το δείκτη της αγοράς και «ν» εκφράζει τη σχετική μεταβλητότητα μεταξύ στοιχείου i και αγοράς, δηλαδή:

$$\nu=\frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συνάγεται εύκολα ότι αν το «ν» είναι πολύ υψηλό, τότε μπορεί και η τιμή του «β» να είναι υψηλή (συστηματικός κίνδυνος), ακόμη κι αν υπάρχει χαμηλή συσχέτιση (ρ) ανάμεσα στο περιουσιακό στοιχείο i και στην αγορά (εφόσον φυσικά η συσχέτιση είναι θετική). Το ενδιαφέρον των επενδυτών για την τιμή του «β» είναι δεδομένο. Αυτομάτως όμως οδηγούμαστε στο ότι οι επενδυτές ενδιαφέρονται και για τη μεταβλητότητα που αποτελεί συνθετικό της παραμέτρου «ν», από την οποία εξαρτάται το «β».

Με την ίδια λογική, αυτό που παίζει μεγάλο ρόλο στην αποτίμηση των παράγωγων προϊόντων όπως τα OPTIONS, είναι η μεταβλητότητα των τιμών και των αποδόσεων των υποκείμενων αγαθών κι όχι η τάση-κλίση που εμφανίζουν οι τιμές. Όλοι οι συμμετέχοντες σε μια αγορά θα συμφωνούσαν στην ίδια «δίκαιη τιμή» ενός OPTION, αν η μεταβλητότητα μπορούσε να προβλεφθεί με ακρίβεια, κάτι που τις περισσότερες φορές, αν όχι πάντα, θεωρείται αδύνατον. Κατά πάσα πιθανότητα λοιπόν, οι συμμετέχοντες στις χρηματοοικονομικές αγορές τείνουν να υιοθετούν διαφορετικές εκτιμήσεις ο καθένας, όσον αφορά τη δίκαιη τιμή ενός προϊόντος, οι οποίες βασίζονται σε υποκειμενικά κριτήρια, γεγονός που σαφώς ενδυναμώνει την ύπαρξη διαφοράς (spread) ανάμεσα στις τιμές *'bid'* και *'offer'*. Η σωστή μοντελοποίηση και πρόβλεψη της μεταβλητότητας αποτελεί την «καρδιά» της χρηματοοικονομικής, ειδικά σε θέματα διαχείρισης κινδύνου.

1.5 Οι Μορφές της Μεταβλητότητας Θεωρητικά

Το γεγονός ότι η μεταβλητότητα δεν είναι παρατηρήσιμη στην αγορά, αλλά συνάγεται από τα δεδομένα, δημιουργεί προβλήματα ως προς την επιλογή του τρόπου υπολογισμού της. Παρόλο που θα πρέπει να καταλήγουν όλες οι μέθοδοι σε μόνο μια εκτίμηση της πραγματικής μεταβλητότητας, καθώς αναφέρονται στην ίδια παράμετρο, κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται γιατί οι εκτιμήσεις εξαρτώνται από τα

[1] Σε ένα γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης $Y_t=\alpha+\beta X_t+\varepsilon_t$ ισχύει ότι $\beta=\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})^2}=\frac{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})}{T}}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})^2}{T}}=\frac{E[(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})]}{E(X_t-\overline{X})^2}=\frac{Cov(X_t,Y_t)}{Var(X_t)}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$, ενώ ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ και το «ν» ορίζεται ως $\nu=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$. Συνεπώς ισχύει ότι β=ρν.

διαθέσιμα δεδομένα, αλλά κι από τη μέθοδο που χρησιμοποιεί ο αναλυτής. Η Alexander (2001) διακρίνει κάποιες μορφές για τη μεταβλητότητα, οι οποίες περιγράφονται συνοπτικά.

1.5.1 Στατιστική Μεταβλητότητα

Πρώτο είδος αποτελεί η **στατιστική μεταβλητότητα (statistical volatility)**, η οποία εξαρτάται άμεσα από το στατιστικό μοντέλο που εφαρμόζει ο ερευνητής πάνω στα ιστορικά στοιχεία που έχει στην κατοχή του. Τα μοντέλα αυτά, (τα οποία θα συζητηθούν εκτενώς στο Μέρος 3), μπορεί να είναι μοντέλα Χρονολογικών σειρών (Time Series Models), μοντέλα της κατηγορίας ARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average), μοντέλα της οικογένειας GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) και άλλα. Εφαρμόζοντάς τα σε ιστορικά στοιχεία, θα πάρουμε μια σειρά εκτιμήσεων που θα αφορούν τη μεταβλητότητα για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα των ιστορικών στοιχείων, αλλά θα μας δίνεται επιπλέον η δυνατότητα να προβούμε και σε μελλοντικές προβλέψεις για το *χρονικό ορίζοντα* που επιθυμούμε, που άλλοτε θα είναι βραχυχρόνιος και άλλοτε μακροχρόνιος.

1.5.2 Πραγματική Μεταβλητότητα

Το δεύτερο είδος είναι η **πραγματική μεταβλητότητα που διέπει τη σειρά των αποδόσεων ή των τιμών (actual or process volatility)**, η οποία όμως σε αντίθεση με τις τιμές και τις αποδόσεις, είναι μια όπως τονίστηκε μη-παρατηρήσιμη παράμετρος, που εξάγεται από τη φύση των αριθμητικών στοιχείων. Το είδος αυτό αποτελεί τη μεταβλητότητα που προσπαθούν να μοντελοποιήσουν και να προβλέψουν όλα τα στατιστικά και οικονομετρικά υποδείγματα, γιατί όπως γίνεται κατανοητό όλες οι εξειδικεύσεις των αναλυτών αποσκοπούν να εκτιμήσουν τη *μια και μοναδική μεταβλητότητα* που χαρακτηρίζει κάποιο χρηματοοικονομικό στοιχείο, άσχετα αν τελικά καταλήγουν σε αποτελέσματα που παρουσιάζουν αποκλίσεις μεταξύ τους. Συνηθίζεται να λέγεται πως οι μεταβολές των τιμών (αποδόσεις) αποτελούν μια *στοχαστική διαδικασία* και η *'process volatility'* είναι κατά συνέπεια η μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει τη διαδικασία αυτή.

1.5.3 Σταθερή Μεταβλητότητα

Τρίτο είδος μεταβλητότητας αποτελεί η **σταθερή μεταβλητότητα (constant volatility)**, η οποία όμως δεν φαίνεται να αποτελεί μια τόσο ρεαλιστική υπόθεση. Η υπόθεση αυτή υιοθετείται στο μοντέλο των Black and Scholes, όπου οι τιμές των υποκείμενων στα OPTIONS αγαθών ακολουθούν μια γεωμετρική κίνηση Brown, η οποία έχει σταθερή μεταβλητότητα. Πολλά άλλα μοντέλα βέβαια (όπως της οικογένειας GARCH), δίνουν στη μεταβλητότητα τη δυνατότητα να είναι στοχαστική, κάτι που ανταποκρίνεται σε κάποιο βαθμό στην πραγματικότητα. Της επιτρέπουν έτσι να έχει δική της διαδικασία διάχυσης ή κίνησης, με συνέπεια τα μοντέλα αυτά να εκτιμούν μια εξίσωση για τις τιμές ή τις αποδόσεις (mean equation) και μια εξίσωση για τη διακύμανση (variance equation).

1.5.4 Πραγματοποιηθείσα ή Ιστορική Μεταβλητότητα

Η **πραγματοποιηθείσα ή ιστορική μεταβλητότητα (realized or historical volatility)** αποτελεί το επόμενο είδος. Είναι όπως γίνεται αντιληπτό μια πραγματοποίηση της *'process volatility'*, που εξαρτάται από τον τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποιούμε, από τα ιστορικά στοιχεία που διαθέτουμε κι από τις υποθέσεις που κάνουμε για τη συμπεριφορά της μεταβλητότητας. Για παράδειγμα, αν υποτεθεί πως οι αποδόσεις έχουν σταθερή μεταβλητότητα, τότε η ιστορική μεταβλητότητα είναι η δειγματική τυπική απόκλιση των αποδόσεων[2]. Αν απ' την άλλη υποθέσουμε μεταβλητότητα μη-σταθερή στο χρόνο, που μοντελοποιείται μέσω GARCH, τότε η ιστορική μεταβλητότητα είναι αυτή που εκτιμάται από το υπόδειγμα GARCH για τη χρονική περίοδο των διαθέσιμων στοιχείων.

Η ιστορική μεταβλητότητα είναι ένας εκ των υστέρων (ex post) υπολογισμός της *'process volatility'* και για το λόγο αυτό είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί μια εκ των προτέρων (ex ante) αξιόπιστη πρόβλεψη.

1.5.5 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα

Τελευταία και ίσως πιο σημαντική μορφή αποτελεί η **τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility-IV)**. Είναι η πρόβλεψη[3] της μεταβλητότητας για τη διάρκεια ζωής ενός OPTION και αποκτάται αφού εξισώσουμε την τιμή του OPTION στην αγορά (market price) με την τιμή που θα μας δώσει το μοντέλο αποτίμησης OPTIONS (model price), λύνοντας ως προς τη μεταβλητότητα. Η δίκαιη τιμή ενός OPTION εξαρτάται από το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε. Το πιο διαδεδομένο είναι αυτό των Black and Scholes (1973), το οποίο χρησιμοποιεί μια σταθερή τιμή για την IV, που όμως μόνο σταθερότητα δεν παρουσιάζει. Η IV μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσια ως μια προσέγγιση και πρόβλεψη της *'actual volatility'*, είτε να χρησιμοποιηθεί ως μια ερμηνευτική μεταβλητή στα υποδείγματα του Μέρους 3, που μοντελοποιούν και προβλέπουν την ιστορική μεταβλητότητα. Η IV αναλύεται στην Ενότητα 2.2.

1.6 Η Δομή της Διατριβής Συνοπτικά

Η παρούσα διατριβή διαχωρίζεται σε πέντε βασικά μέρη, τα οποία περιλαμβάνουν επιμέρους ενότητες, που με τη σειρά τους περιέχουν επιπλέον υποενότητες.

Στο Μέρος 1 γίνεται μια απαραίτητη εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητότητας που θα μας απασχολήσει στο κύριο τμήμα, δίνονται οι αναγκαίοι ορισμοί της

---

[2] Δηλαδή $s=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}\frac{(r_t-\bar{r})^2}{T-1}}$, όπου $\bar{r}$ είναι η μέση απόδοση για δείγμα μεγέθους T. Συχνά υποθέτουμε ότι $\bar{r}=0$, οπότε η τυπική απόκλιση εκτιμάται αμερόληπτα από τη σχέση $s=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}\frac{r_t^2}{T}}$. Ο Figlewski (1997) τονίζει πως οι ιδιότητες των αποδόσεων μπορεί είναι υπεύθυνες για ανακρίβειες στον υπολογισμό του δειγματικού μέσου, οπότε είναι πιο εύλογο να χρησιμοποιούνται αποκλίσεις γύρω από το μηδέν.

[3] Χρησιμοποιούμε τον όρο «πρόβλεψη», γιατί η τιμή της IV αναφέρεται στο διάστημα από τη στιγμή υπολογισμού της ως και τη λήξη του δικαιώματος που φυσικά συμβαίνει στο μέλλον.

μεταβλητότητας όπως γίνονται αντιληπτοί από διάφορες σκοπιές και αναφέρονται οι βασικότερες χρήσεις της στους διάφορους τομείς της οικονομίας.

Στο Μέρος 2 περιγράφονται οι διάφοροι τρόποι υπολογισμού των αποδόσεων και της ιστορικής μεταβλητότητας μιας σειράς. Δίνονται ακόμη τα χαρακτηριστικά της τεκμαρτής μεταβλητότητας, παρουσιάζεται το μοντέλο αποτίμησης OPTIONS των Black and Scholes και οι παράμετροι *'Greeks'*, που θα φανούν χρήσιμες σε κάποιες εφαρμογές του Μέρους 4.

Στο Μέρος 3 αναλύονται εκτενώς τα υποδείγματα που έχουν προταθεί από τους εμπειρογνώμονες για τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας, οι ιδιότητές τους (μέσος σειράς, συνθήκες στασιμότητας και σύγκλισης, περιορισμοί στους συντελεστές, μελλοντικές προβλέψεις) και οι αδυναμίες τους. Τα υποδείγματα που περιλαμβάνονται ανήκουν κυρίως στην οικογένεια των GARCH, ενώ υπάρχουν και κάποια μοντέλα μακροχρόνιας μνήμης (Long Memory Models-LMM). Έπειτα, περιγράφονται οι διαγνωστικοί έλεγχοι των εξαγόμενων αποτελεσμάτων, καθώς και τα μέτρα αξιολόγησης των μοντέλων και των προβλέψεών τους.

Στο Μέρος 4, τα περισσότερα από τα υποδείγματα του προηγούμενου μέρους εφαρμόζονται σε πραγματικά στοιχεία της αγοράς (στους δείκτες DAX, CAC-40 και S&P-500) και μετά από διαγνωστικούς ελέγχους πραγματοποιούνται μελλοντικές προβλέψεις, οι οποίες αξιολογούνται και χρησιμοποιούνται σε ορισμένες εφαρμογές της Χρηματοοικονομικής, όπως αποτίμηση OPTIONS και υπολογισμός του *'Value at Risk'*.

Στο Μέρος 5, που είναι και το τελευταίο, περιλαμβάνονται ως επίλογος η ανακεφαλαίωση των σημαντικότερων σημείων καθώς και τα βασικά συμπεράσματα από ολόκληρη την ανάλυση που έχει προηγηθεί.

2 ΤΡΟΠΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΕΚΜΑΡΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

2.1 Τρόποι Υπολογισμού

Ο τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας αποτελεί τις περισσότερες φορές υποκειμενική επιλογή των αναλυτών. Εδώ φυσικά αναφερόμαστε στην επιλογή του κατάλληλου στατιστικού τύπου, ώστε να πάρουμε μια πραγματοποίηση (realization) της σειράς της *'actual volatility'*, που να είναι όσο το δυνατόν πιο αμερόληπτη. Στη συνέχεια (στο επόμενο μέρος), εφόσον έχουμε υπολογίσει την **ιστορική μεταβλητότητα**, θα επιδιώξουμε να τη μοντελοποιήσουμε κατάλληλα, ώστε να προσεγγίσουμε τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται και να κατορθώσουμε να προβούμε σε μελλοντικές (out of sample) προβλέψεις.

2.1.1 Υπολογισμός των Αποδόσεων

Πρώτο βήμα στον υπολογισμό της μεταβλητότητας του χρηματοοικονομικού στοιχείου που μας ενδιαφέρει (δείκτης, μετοχή κ.λ.π.) είναι ο υπολογισμός των αποδόσεων. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση έχει να κάνει με την εκτίμηση της ημερήσιας μεταβλητότητας (daily volatility) και για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμα αριθμητικά δεδομένα για την εξέλιξη της τιμής του στοιχείου που θέλουμε, εντός της ημέρας (intra-day data) για όλες τις ημέρες. Αυτά τα στοιχεία χαρακτηρίζονται ως *'high-frequency data'*, λόγω της υψηλής συχνότητας των παρατηρήσεων. Στην ουσία είναι απαραίτητη η χρήση τέτοιων στοιχείων, γιατί αυτά περιέχουν τις μικρές και μεγάλες μεταβολές των τιμών που λαμβάνουν χώρα καθημερινά, ανά μικρά χρονικά διαστήματα και έτσι κατορθώνουν να «συλλάβουν» μια ιδιότητα της μεταβλητότητας που αποκαλείται *'volatility clustering'*, η οποία υποδηλώνει πως υπάρχουν διαστήματα όπου η μεταβλητότητα παραμένει υψηλή για μια συγκεκριμένη χρονική διάρκεια και στη συνέχεια ακολουθείται από διαστήματα με χαμηλή μεταβλητότητα. Υπάρχουν δηλαδή «ομάδες» με υψηλή και «ομάδες» με χαμηλή μεταβλητότητα, όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό με το διάγραμμα που φαίνεται στην επόμενη σελίδα, το οποίο παρουσιάζει τις ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής της Microsoft για το έτος 2000. Αυτή θα μπορούσε να είναι μια τυπική μορφή αποδόσεων ενός οποιουδήποτε χρηματοοικονομικού αγαθού.

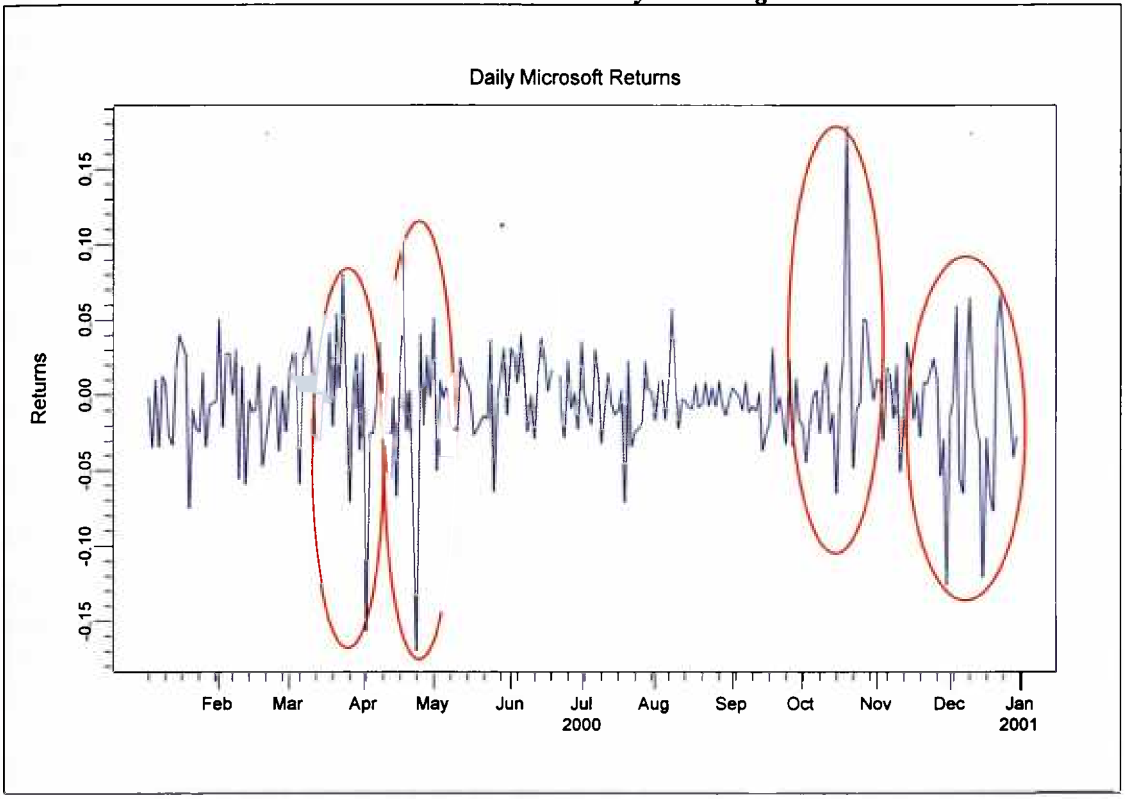
Η εμπειρία έχει δείξει πως κάθε προσπάθεια εξειδίκευσης της μεταβλητότητας με χρήση στοιχείων που έχουν συχνότητα χαμηλότερη της ημερήσιας, θα παρέχει αποτελέσματα χωρίς ουσιαστικό νόημα. Κάποιες φορές ακόμη και η ημερήσια συχνότητα δεν επαρκεί για να μοντελοποιηθούν όλες οι ιδιότητες της μεταβλητότητας. Από την άλλη βέβαια υπάρχει το πρακτικό πρόβλημα ότι η εύρεση τέτοιων στοιχείων είναι ιδιαίτερα δύσκολη, αν όχι αδύνατη. Ακόμη ένα ερώτημα αφορά το χρονικό ορίζοντα που θα αντανακλούν τα δεδομένα, δηλαδή το «πόσο καιρό πίσω θα πρέπει να μεταβούμε». Η διάρκεια των στοιχείων που επεξεργαζόμαστε θα πρέπει να είναι συνεπής με το χρονικό ορίζοντα μέσα στον οποίο επιδιώκουμε να κάνουμε προβλέψεις.

Έχοντας στη διάθεσή μας *'high frequency data'*, όπως π.χ. *'intra-day'* τιμές δεικτών για μια σειρά ετών, εκτιμούμε αρχικά τις ημερήσιες αποδόσεις ως:

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \ t=1,2,...,T \tag{2.1}$$

όπου r_t είναι η απόδοση του δείκτη που εξετάζουμε την ημέρα t και S_t είναι η τιμή του δείκτη την ημέρα t, ενώ τα στοιχεία αφορούν συνολικά T ημέρες.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1: Volatility Clustering



Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού των αποδόσεων υποθέτει πως οι αποδόσεις είναι διακριτές, δηλαδή δεν συμβαίνουν κάθε χρονική στιγμή, αλλά ανά διακριτά χρονικά διαστήματα. Συνηθίζεται όμως τις περισσότερες φορές να γίνεται η υπόθεση πως οι αποδόσεις πραγματοποιούνται με συνεχή ρυθμό και τότε υπολογίζονται ως:

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right), \ t=1,2,\ldots,T \tag{2.2}$$

Εδώ η απόδοση r_t ορίζεται παρομοίως κι ως η διαφορά των λογαριθμημένων τιμών κλεισίματος κάθε εργάσιμης ημέρας, δηλαδή η (2.2) γράφεται κι ως:

$$r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}, \ t=1,2,\ldots,T \tag{2.3}$$

όπου S_t είναι η τιμή κλεισίματος του δείκτη την ημέρα t, ενώ S_{t-1} είναι η αντίστοιχη τιμή την ημέρα t-1.

Κάποιες φορές η ημερήσια μεταβλητότητα εκτιμάται ως η απόλυτη τιμή της ημερήσιας απόδοσης ή η ημερήσια απόδοση στο τετράγωνο, αλλά τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά. Πιο ικανοποιητικές εκτιμήσεις προκύπτουν από *'intra-day* *data'*. Έχοντας αυτά, μπορούμε να εξάγουμε τις *'intra-day'* αποδόσεις για κάθε χρονικό διάστημα που συνήθως περιλαμβάνει μερικά μόνο λεπτά της ώρας. Οι *'intra-day'* αποδόσεις επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από δομικά φαινόμενα της αγοράς που διαστρεβλώνουν τις ιδιότητές τους, όπως για παράδειγμα τη διαφορά (spread) ανάμεσα σε τιμές *'bid'* και *'offer'*. Η εμπειρική έρευνα έχει δείξει πως η συχνότητα των 5 λεπτών είναι η υψηλότερη συχνότητα στην οποία τα γεγονότα της αγοράς δεν διαστρεβλώνουν τις ιδιότητες των αποδόσεων. Οι Andersen and Bollerslev (1998) χρησιμοποιούν επίσης συχνότητα 5 λεπτών και υποστηρίζουν ότι τα στοιχεία αυτά είναι τα πιο αμερόληπτα. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται συχνότητα 30 λεπτών, μιας ώρας κ.ο.κ. Οι Andersen, Bollerslev, Diebold and Labys (2001, 2003) έχουν δείξει πως όσο υψηλότερη γίνεται η συχνότητα των παρατηρήσεων, τόσο πιο αξιόπιστη είναι η ιστορική μεταβλητότητα ως προσέγγιση της πραγματικής μεταβλητότητας. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται, καθώς όσο υψηλότερη γίνεται η συχνότητα, τόσο αυξάνεται η αρνητική αυτοσυσχέτιση που υπάρχει στις αποδόσεις και που οφείλεται στο *'spread'* ανάμεσα σε *'bid'* και *'offer'*.

Η *'intra-day'* απόδοση της ημέρας t για το διάστημα (πεντάλεπτο) d, ορίζεται με τη λογική της σχέσης (2.3) ως:

$$\mathbf{r_{t,d} = lnS_{t,d} - lnS_{t,d-1}}, \ t=1,2,\dots,T \text{ και } d=1,2,\dots,D \tag{2.4}$$

Εδώ, $S_{t,d}$ είναι η τιμή του δείκτη την ημέρα t, για το πεντάλεπτο διάστημα με αύξοντα αριθμό d. Επομένως $S_{t,0}$ είναι η τιμή ανοίγματος την ημέρα t και $S_{t,D}$ είναι η τιμή κλεισίματος την ίδια ημέρα. Μια φυσιολογική εργάσιμη ημέρα, που δεν είναι αργία, γιορτή ή ημιαργία, περιλαμβάνει D *'intra-day'* αποδόσεις και μια *'overnight'* απόδοση, που είναι η πρώτη απόδοση της ημέρας που παρατηρείται με το άνοιγμα του Χρηματιστηρίου και ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{r_{t,0} = lnS_{t,0} - lnS_{t-1,D}}, \ t=1,2,\dots,T \tag{2.5}$$

δηλαδή είναι η λογαριθμική διαφορά της τιμής ανοίγματος της ημέρας t (η πρώτη τιμή που παρατηρείται μετά το άνοιγμα του Χρηματιστηρίου) και της τιμής κλεισίματος της ημέρας t-1. Οπότε, συνολικά για κάθε φυσιολογική ημέρα υπάρχουν D+1 *'intra-day'* αποδόσεις.

Εκτός από γιορτές, ημιαργίες κ.λ.π. μπορεί να υπάρχουν και ελλείψεις στοιχείων για διάφορους άλλους λόγους κι έτσι σε μια ημέρα να μην παρατηρούνται κάποιες τιμές του δείκτη. Οι Andersen, Bollerslev, Diebold and Ebens (2001) προτείνουν τη χρήση γραμμικής παρεμβολής[1] (linear interpolation) για την

---

[1] Η γραμμική παρεμβολή για την αναπλήρωση χαμένων στοιχείων και τη μετατροπή μιας μη-ομογενούς σειράς σε ομογενή, αναλύεται από τους Dacorogna, Gençay, Müller, Olsen and Pictet (2001). Μια χρονολογική σειρά αποτελείται από τις χρονικές στιγμές t_j και τις τιμές $z(t_j)$, όπου ο δείκτης j=0,1,…,J αναφέρεται σε χρονικά διαστήματα που δεν ισαπέχουν απαραίτητα μεταξύ τους. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ομογενή σειρά με ισαπέχοντα διαστήματα, υποθέτοντας ότι οι χρονικές στιγμές (με πρώτη την t_0) προσδιορίζονται από τη σχέση $t_i = t_0 + i\Delta t$, i=1,2,…,N όπου $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ εκφράζει τη χρονική απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών χρονικών στιγμών, που φυσικά τώρα ισαπέχουν. Η χρονική στιγμή $t_i = t_0 + i\Delta t$ της ομογενούς σειράς έχει μπροστά και πίσω της δυο χρονικές στιγμές t_j της μη-ομογενούς σειράς και ισχύει $t_{j^*} \le t_i < t_{j^*+1}$, με $j^* = \max(j \mid t_j \le t_i)$. Η γραμμική παρεμβολή μεταξύ των στιγμών t_{j^*} και t_{j^*+1} για την εύρεση της τιμής τη στιγμή t_i έχει ως

αναπλήρωση των χαμένων στοιχείων, ενώ οι Hansen and Lunde (2003) προτείνουν την μέθοδο της *'cubic-spline interpolation'* [2], η οποία και συνιστάται. Μια πιο εύκολη μέθοδος είναι η αντικατάσταση των τιμών με τιμή όμοια με την προηγούμενη, ώστε η απόδοση να είναι μηδενική (previous-tick interpolation).

2.1.2 Υπολογισμός της Ιστορικής Μεταβλητότητας

Έχοντας στη διάθεσή μας τη σειρά των αποδόσεων, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της **ημερήσιας ιστορικής μεταβλητότητας**, που εκτιμάται είτε σε όρους διακύμανσης, είτε σε όρους τυπικής απόκλισης, ανάλογα με το υπόδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για τη μοντελοποίησή της.

Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού είναι παρόμοιος με αυτόν που χρησιμοποιεί η Στατιστική, αφού φυσικά προσαρμοστεί κατάλληλα για να μας δώσει **ημερήσια ιστορική μεταβλητότητα**. Η σχέση γίνεται συνεπώς:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{D-1}\sum_{d=0}^{D}(r_{t,d} - \bar{r}_t)^2, \; t=1,2,\ldots,T \tag{2.6}$$

Η σχέση αυτή σημαίνει πως η **ιστορική μεταβλητότητα** της ημέρας t ισούται με την εκτίμηση της διακύμανσης των αποδόσεων για τη συγκεκριμένη ημέρα, αφού ο όρος $r_{t,d}$ παριστάνει τις *'intra-day'* αποδόσεις για κάθε διάστημα d=1,2,...,D και ορίζεται στην εξίσωση (2.4), ενώ $\bar{r}_t$ είναι η μέση απόδοση της ημέρας t. Τις περισσότερες όμως φορές γίνεται η αυθαίρετη υπόθεση ότι $\bar{r}_t=0$ κι άρα χρησιμοποιείται ο αμερόληπτος εκτιμητής:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{D}\sum_{d=0}^{D} r_{t,d}^2, \; t=1,2,\ldots,T \tag{2.7}$$

όπου στον παρονομαστή του κλάσματος έχουμε D κι όχι D-1, διότι επιβλήθηκε στο μέσο η τιμή μηδέν κι άρα δεν χάθηκε πληροφορία από το δείγμα. Από τους παραπάνω τύπους χρησιμοποιώντας τις τετραγωνικές ρίζες, παίρνουμε τη μεταβλητότητα σε όρους τυπικής απόκλισης.

Ως τώρα είδαμε το γνωστό ορισμό της μεταβλητότητας σύμφωνα με τη Στατιστική. Επιπλέον όπως είπαμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ημερήσια μεταβλητότητα η απόλυτη τιμή της ημερήσιας απόδοσης ή η ημερήσια απόδοση στο τετράγωνο, προσεγγίσεις που όμως δεν δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα λόγω μεροληψίας.

Πρώτοι οι Andersen and Bollerslev (1998) τόνισαν πως όταν έχουμε *'high frequency data'*, πιο ακριβείς εκτιμήσεις της ημερήσιας μεταβλητότητας μπορεί να μας δώσει το άθροισμα των παρατηρούμενων τετραγωνισμένων *'intra-day'*

$z(t_i) = z(t_{j*}) + \frac{t_i - t_{j*}}{t_{j*+1} - t_{j*}}[z(t_{j*+1}) - z(t_{j*})]$. Οι ίδιοι συστήνουν και την απλούστερη περίπτωση της *'previous-tick interpolation'*, όπου ισχύει $z(t_i) = z(t_{j*})$.

[2] Η *'cubic-spline interpolation'* χρησιμοποιεί ένα σετ από πολυώνυμα που ορίζονται σε υποδιαστήματα των δεδομένων, για να αναπληρώσει χαμένες τιμές. Ο βαθμός των πολυωνύμων αυτών είναι μικρότερος ή ίσος του 3.

αποδόσεων (χωρίς διαίρεση με το μέγεθος του δείγματος). Εφαρμόζοντας αυτή τη λογική στη χρηματαγορά παίρνουμε για την ιστορική μεταβλητότητα της μέρας t, την παρακάτω σχέση:

$$\widetilde{\sigma}_t^2 = \sum_{d=0}^{D} r_{t,d}^2, \ t=1,2,\ldots,T \tag{2.8}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό το άθροισμα αυτό έχει μεν D πεντάλεπτα, αλλά περιλαμβάνει και την τετραγωνισμένη *'overnight'* απόδοση $r_{t,0}$, η οποία ορίζεται στη (2.5), οπότε στην ουσία περιλαμβάνονται D+1 όροι. Παρά το ότι η σχέση αυτή προτάθηκε ως η πλέον αξιόπιστη, έχει το μειονέκτημα ότι αγνοεί το γεγονός ότι η $r_{t,0}$ αποτελεί μια ειδική περίπτωση. Συγκεκριμένα, τα Χρηματιστήρια δεν είναι ανοιχτά 24 ώρες το εικοσιτετράωρο και οι μετακινήσεις που συμβαίνουν στην τιμή του δείκτη κατά τη διάρκεια των νυχτερινών ωρών είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τις μεταβολές που παρατηρούνται εντός της ημέρας, από πεντάλεπτο σε πεντάλεπτο. Προκειμένου λοιπόν να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι οι *'overnight'* αποδόσεις είναι πιο μεταβλητές από τις *'intra-day'*, πράγμα που θα προκαλέσει διαστρέβλωση της μεταβλητότητας αν υπάρξει μια *'overnight'* απόδοση με ιδιαίτερα υψηλή τιμή, έχει προταθεί ένα άλλο μέτρο της ιστορικής μεταβλητότητας από το Martens (2002)[3]. Αυτό το μέτρο υπολογίζει την ιστορική μεταβλητότητα μόνο για τις ώρες που δραστηριοποιείται η αγορά. Η πρόταση είναι να σταθμίσουμε την ημερήσια μεταβλητότητα της σχέσης (2.8) με ένα σταθερό αριθμό που περιλαμβάνει τη δειγματική διακύμανση *'open-to-close'* $\widetilde{\sigma}_{oc}^2$ και *'close-to-open'* $\widetilde{\sigma}_{co}^2$ των τιμών του δείκτη.

Πιο αναλυτικά, οι δυο αυτές παράμετροι όπως δίνονται από τους Hol and Koopman (2002) και Hol, Jungbacker and Koopman (2004), υπολογίζονται ως:

$$\widetilde{\sigma}_{oc}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\ln S_{t,D} - \ln S_{t,0})^2 \tag{2.9}$$

$$\widetilde{\sigma}_{co}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\ln S_{t,0} - \ln S_{t-1,D})^2 \tag{2.10}$$

δηλαδή, η διακύμανση *'open-to-close'* αναφέρεται στις *'intra-day'* τιμές όλων των διαθέσιμων ημερών, ενώ η διακύμανση *'close-to-open'* αναφέρεται στις *'overnight'* τιμές όλων των διαθέσιμων ημερών.

Το τελικό μέτρο υπολογισμού της ημερήσιας μεταβλητότητας σύμφωνα με το Martens παίρνει τη μορφή του παρακάτω τύπου, όπου $c \geq 0$:

$$\widetilde{\sigma}_t^2 = (1+c)\sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 = \frac{\widetilde{\sigma}_{oc}^2 + \widetilde{\sigma}_{co}^2}{\widetilde{\sigma}_{oc}^2}\sum_{d=1}^{D} r_{t,d}^2 \tag{2.11}$$

Μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού διακύμανσης *'open-to-close'* που προτάθηκε από τους Hansen and Lunde (2002) είναι ο μέσος όρος της ημερήσιας

[3] Υπάρχει ασφαλώς και η πιο εύκολη εναλλακτική που είναι να αγνοήσουμε πλήρως τις *'overnight'* returns, έτσι ώστε το άθροισμα στην (2.8) να ξεκινά με d=1. Κάτι τέτοιο όμως είναι πιθανόν να οδηγήσει σε απώλεια σημαντικής πληροφορίας.

μεταβλητότητας για όλες τις μέρες, που δίνεται από τη σχέση (2.8), με τη διαφορά όμως ότι στον όρο του αθροίσματος θα αγνοείται η $r_{t,0}^2$ της κάθε ημέρας, για t=1,2,...,T. Δηλαδή το άθροισμα θα ξεκινά από d=1 και θα διαιρείται με T.

Οι Areal and Taylor (2002) συνιστούν για την εύρεση της ημερήσιας μεταβλητότητας την εφαρμογή μιας μεθόδου που προσδίδει διαφορετικά βάρη στις *'intra-day'* τετραγωνισμένες αποδόσεις, τα οποία θα εξαρτώνται από αναλογίες διακύμανσης που θα εκτιμώνται ξεχωριστά για κάθε ημέρα της εβδομάδας.

Ο Neely (2003) εκτός από τους παραπάνω τρόπους, χρησιμοποιεί και τιμές από συμβόλαια FUTURES για να υπολογίσει τη μεταβλητότητα της ημέρας t, ως:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \left[\ln\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right)\right]^2 \tag{2.12}$$

δηλαδή προτείνει την τετραγωνισμένη ημερήσια απόδοση, που όπως είδαμε δεν είναι πολύ αξιόπιστη προσέγγιση.

2.1.3 Η Μέθοδος των Garman and Klass

Όλοι οι παραπάνω τρόποι υπολογισμού της ημερήσιας μεταβλητότητας εφαρμόζονται όταν έχουμε στη διάθεσή μας *'high frequency data'*. Αναφερθήκαμε όμως στα προηγούμενα στη δυσκολία που χαρακτηρίζει την εύρεση τέτοιων στοιχείων. Δεν έχουν τη δυνατότητα όλοι οι Χρηματοοικονομικοί Οργανισμοί να παρακολουθούν και να καταγράφουν στοιχεία σε τόσο υψηλή συχνότητα.

Έχοντας αυτό κατά νου, οι Garman and Klass (1980) ανέπτυξαν μια εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού της ημερήσιας μεταβλητότητας. Σκοπός τους είναι να καταστήσουν δυνατό τον υπολογισμό της ζητούμενης παραμέτρου με τη χρήση δημοσιευμένων στοιχείων που βρίσκονται πολύ εύκολα στις σελίδες των οικονομικών εφημερίδων, χωρίς να είναι απαραίτητη η αναζήτηση για *'high frequency data'*. Τα στοιχεία αυτά είναι η τιμή ανοίγματος (opening price), η τιμή κλεισίματος (closing price), η υψηλότερη τιμή (high price) και η χαμηλότερη τιμή (low price)[4].

Στο επόμενο γράφημα παρουσιάζεται η λογική της μεθόδου. Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε πως ο χρόνος ανήκει στο διάστημα από 0 ως 1, δηλαδή $t \in [0, 1]$. Το διάστημα αυτό αντιπροσωπεύει μια τυπική ημέρα (24 ώρες), η οποία χωρίζεται στα υποδιαστήματα [0, f] όπου το Χρηματιστήριο είναι κλειστό και [f, 1] όπου το Χρηματιστήριο είναι ανοιχτό. Η χθεσινή τιμή κλεισίματος παριστάνεται σαν C_0 και η πορεία του δείκτη δεν είναι παρατηρήσιμη μέχρι το χρονικό σημείο f, όπου η αγορά ανοίγει και παρατηρείται η σημερινή τιμή ανοίγματος O_1. Στο χρονικό διάστημα [f, 1] υποθέτουμε ότι οι μετακινήσεις του δείκτη παρακολουθούνται και μας δίνουν την υψηλότερη τιμή της ημέρας H_1, τη χαμηλότερη τιμή της ημέρας L_1 και τη σημερινή τιμή κλεισίματος C_1.

Αν συμβολίσουμε με σ^2 την πραγματική, αλλά άγνωστη μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει τις μεταβολές των τιμών του δείκτη (actual volatility), με f το κλάσμα (ποσοστό) του διαστήματος [0, 1] κατά το οποίο η αγορά είναι κλειστή ($0<f<1$) και

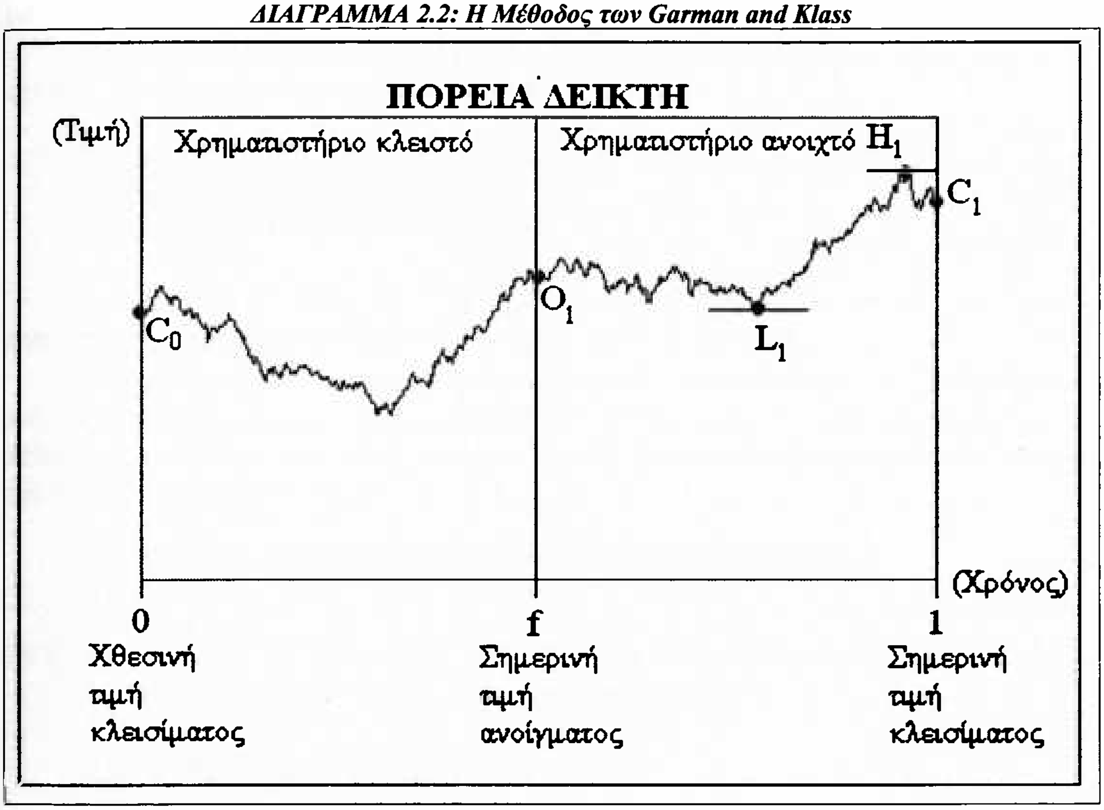
[4] Υπάρχουν και παραλλαγές της μεθόδου που χρησιμοποιούν και τον Όγκο Συναλλαγών (Transaction Volume).

με $u = H_1 - O_1$ (normalized high), $d = L_1 - O_1$ (normalized low) και $c = C_1 - O_1$ (normalized close), τότε ο πρώτος εκτιμητής της σ^2 για f=0 δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\sigma}_0^2 \equiv (C_1 - C_0)^2 \tag{2.13}$$

Η σχέση (2.13) είναι η κλασσική εκτίμηση που υποθέτει ότι η αγορά είναι ανοιχτή 24 ώρες το εικοσιτετράωρο και αποτελεί έναν αμερόληπτο εκτιμητή. Το πλεονέκτημα του εκτιμητή είναι σαφώς η ευκολία του, αλλά έχει το μειονέκτημα ότι αγνοεί μεγάλο μέρος της πληροφορίας που θα συνέβαλλε στην αύξηση της αποτελεσματικότητάς του.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.2: Η Μέθοδος των Garman and Klass



Αν τώρα υποθέσουμε ότι 0<f<1, τότε εξάγεται ένας πιο αποτελεσματικός εκτιμητής της μορφής:

$$\tilde{\sigma}_1^2 \equiv \frac{(O_1 - C_0)^2}{2f} + \frac{(C_1 - O_1)^2}{2(1-f)} \tag{2.14}$$

Ο εκτιμητής αυτός είναι αποτελεσματικότερος σε σχέση με τον αρχικό, πράγμα που αποδεικνύεται αν θεωρήσουμε τον εκτιμητή (2.13) ως σημείο αναφοράς με το οποίο θα συγκρίνονται όλοι οι άλλοι εκτιμητές. Συμβολίζοντας με $\tilde{y}$ κάθε άλλον εκτιμητή της διακύμανσης, η αποτελεσματικότητά του σε σχέση με τον αρχικό εκτιμητή δίνεται ως ο λόγος των διακυμάνσεών τους, δηλαδή:

$$\mathrm{Eff}(\tilde{y}) \equiv \frac{\mathrm{Var}(\tilde{\sigma}_0^2)}{\mathrm{Var}(\tilde{y})} \tag{2.15}$$

Ισχύει ότι $\mathrm{Var}(\widetilde{\sigma}_0^2) = 2\sigma^4$ και $\mathrm{Var}(\widetilde{\sigma}_1^2) = \sigma^4$, άρα ως επακόλουθο $\mathrm{Eff}(\widetilde{\sigma}_1^2) = 2$. Δηλαδή ο δεύτερος εκτιμητής είναι 2 φορές πιο αποτελεσματικός από τον πρώτο και η αποτελεσματικότητα είναι ανεξάρτητη του f.

Οι εκτιμητές που ακολουθούν, συμπεριλαμβάνουν και τις τιμές *'high'* και *'low'* που ως τώρα έχουν αγνοηθεί και οι οποίες περιέχουν πολύ περισσότερες πληροφορίες απ' ότι οι τιμές *'open'* και *'close'*. Ο Parkinson (1976) κατέληξε ότι για f=0 ένας εκτιμητής είναι ο παρακάτω:

$$\widetilde{\sigma}_2^2 \equiv \frac{(H_1 - L_1)^2}{4\ln 2} = \frac{(u - d)^2}{4\ln 2} \tag{2.16}$$

με την αποτελεσματικότητα να είναι σε επίπεδο $\mathrm{Eff}(\widetilde{\sigma}_2^2) \approx 5.2$.

Όταν είναι διαθέσιμες όλες οι τιμές (high, low, open, close) ταυτόχρονα και συνεπώς 0<f<1, τότε ο ίδιος προτείνει τον εκτιμητή:

$$\widetilde{\sigma}_3^2 \equiv \alpha\frac{(O_1 - C_0)^2}{f} + (1-\alpha)\frac{(u - d)^2}{4(1-f)\ln 2} \tag{2.17}$$

Η ελάχιστη διακύμανση αυτού του εκτιμητή επιτυγχάνεται για $\alpha^* = 0.170$, ανεξάρτητη του f και η αποτελεσματικότητα είναι $\mathrm{Eff}(\widetilde{\sigma}_3^2) \approx 6.2$.

Μέσα από διαδικασίες ελαχιστοποίησης της διακύμανσης των εκτιμητών και επίτευξης αμεροληψίας, οι Garman and Klass (1980) επιπλέον ανέπτυξαν κάποιες πιο πολύπλοκες σχέσεις που όμως παρέχουν μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Αρχικά για f=0, ένας εκτιμητής είναι:

$$\widetilde{\sigma}_4^2 \equiv \alpha_1(u - d)^2 + \alpha_2[c(u + d) - 2ud] + [1 - 4(\alpha_1 + \alpha_2)\ln 2 + \alpha_2]c^2 \tag{2.18}$$

με άριστες τιμές $\alpha_1^* = 0.511$, $\alpha_2^* = -0.019$ και αποτελεσματικότητα $\mathrm{Eff}(\widetilde{\sigma}_4^2) \approx 7.4$.

Αντίστοιχα, για 0<f<1 καταλήγουν στον εκτιμητή:

$$\widetilde{\sigma}_5^2 \equiv \alpha\frac{(O_1 - C_0)^2}{f} + (1-\alpha)\frac{\widetilde{\sigma}_4^2}{(1-f)} \tag{2.19}$$

η διακύμανση του οποίου ελαχιστοποιείται για $\alpha^* = 0.120$ και η αποτελεσματικότητά του είναι $\mathrm{Eff}(\widetilde{\sigma}_5^2) \approx 8.4$. Δηλαδή υπάρχει εκτιμητής της ημερήσιας μεταβλητότητας που χρησιμοποιεί μόνο τιμές *'high'*, *'low'*, *'open'*, *'close'* και είναι 8.4 φορές πιο αποτελεσματικός από τον αρχικό κλασσικό εκτιμητή της σχέσης (2.13)!

Έχοντας πλέον υπολογίσει την ιστορική μεταβλητότητα, μας δίνεται η δυνατότητα να σχηματίσουμε την αντίστοιχη χρονολογική σειρά, την οποία και μοντελοποιούμε με μια ποικιλία υποδειγμάτων που περιγράφονται στο Μέρος 3.

2.2 Αναλυτικά για την Τεκμαρτή Μεταβλητότητα

Στην Εισαγωγή αναφερθήκαμε σε βασικά στοιχεία της IV, όπως στο ότι είναι η μεταβλητότητα που εξάγεται για τη διάρκεια ζωής ενός OPTION και αποκτάται με εξίσωση της τιμής του OPTION στην αγορά (market price) με την τιμή του μοντέλου αποτίμησης (model price) και λύση ως προς τη μεταβλητότητα, καθώς και το ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας ως προσέγγιση ή πρόβλεψη της πραγματικής μεταβλητότητας[5].

2.2.1 Το Μοντέλο των Black and Scholes

Το μοντέλο αποτίμησης των Black and Scholes (1973) (ή BS για συντομία) για OPTIONS Ευρωπαϊκού τύπου[6] είναι αυτό που χρησιμοποιείται ευρέως για την εκτίμηση της IV, καθώς πολλοί ερευνητές μεταξύ των οποίων οι Dumas, Fleming and Whaley (1998) συνέκριναν μια ποικιλία μοντέλων αποτίμησης OPTIONS και κατέληξαν ότι το BS δίνει τις πιο αξιόπιστες προβλέψεις της IV σε σχέση πάντα με τα υπόλοιπα μοντέλα. Ένα μεγάλο μειονέκτημα είναι πως η τιμή της IV επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη διάρκεια ζωής ως τη στιγμή λήξης (maturity) του OPTION και κυρίως από την τιμή εξάσκησης του OPTION, δηλαδή από το αν το δικαίωμα προαίρεσης είναι **In The Money (ITM), At The Money (ATM)** ή **Out of The Money (OTM)**.

Αυτό το γεγονός οδηγεί σε εκτιμήσεις της IV που πολλές φορές αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους, παρόλο που αναφέρονται στην ίδια παράμετρο, την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή. Οι Bodie and Merton (1995) και Hull and White (1987) έδειξαν ότι η πιο αμερόληπτη τιμή της IV δίνεται από ATM (ή Near The Money) OPTIONS και *'Close to Maturity'* OPTIONS, γι αυτό το λόγο τα παραπάνω χρησιμοποιούνται πιο συχνά για το συγκεκριμένο σκοπό. Ο Figlewski (1997) από την άλλη τονίζει ότι η μεταβλητότητα επιδρά στη χρονική αξία (time value) των OPTIONS κι άρα στα deep-ITM και deep-OTM OPTIONS η ύπαρξη ακόμη και μικρού *'spread'* είτε στην τιμή του OPTION, είτε στην τιμή του υποκείμενου στοιχείου, επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την τιμή της IV, με συνέπεια την εμφάνιση μεροληψίας. Πέρα απ' αυτά, τρεις βασικοί λόγοι για τους οποίους προτιμώνται τα ATM OPTIONS είναι (α) είναι ευαίσθητα σε αλλαγές της IV με την έννοια ότι κάθε μεταβολή αντανακλάται στην τιμή τους, (β) κατέχουν την πρώτη θέση στις προτιμήσεις των ατόμων, καταλαμβάνοντας έτσι την πρωτιά και σε κίνηση συναλλαγών (trading) και (γ) αποτελέσματα εμπειρικά όπως αυτά που αναφέρθηκαν πριν, δείχνουν ότι τα ATM δίνουν τις πιο αξιόπιστες προβλέψεις της πραγματικής μεταβλητότητας.

Οι Fischer Black and Myron Scholes κατασκεύασαν ένα μοντέλο συνεχούς μορφής, ώστε ένα OPTION να μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Υπέθεσαν ότι (α) οι αγορές είναι πλήρεις και αποτελεσματικές κι άρα υπάρχει δυνατότητα τέλειας αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) για κάθε περιουσιακό

---

[5] Οι απόψεις των ερευνητών όσον αφορά την αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου διίστανται.

[6] Τα OPTIONS Ευρωπαϊκού τύπου είναι αυτά που δεν παρέχουν δικαίωμα εξάσκησης πριν την ωρίμανσή τους, σε αντίθεση με τα Αμερικανικού τύπου που προσφέρουν αυτή τη δυνατότητα. Μέθοδοι αποτίμησης OPTIONS Αμερικανικού τύπου δίνονται από τους Barone-Adesi and Whaley (1987). Στα μοντέλα BS και BAW ωστόσο γίνεται υπόθεση σταθερής μεταβλητότητας. Αν υποτεθεί στοχαστική μεταβλητότητα, τότε η αποτίμηση των OPTIONS γίνεται σύμφωνα με τον Heston (1993).

στοιχείο[7], (β) τιμολογούνται OPTIONS Ευρωπαϊκού τύπου, (γ) το υποκείμενο προϊόν δεν πληρώνει τόκους ή μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του, (δ) το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate) παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια ζωής του OPTION, (ε) είναι δυνατόν να δημιουργηθεί SHORT θέση στο υποκείμενο προϊόν χωρίς περιορισμούς και (στ) οι τιμές που λαμβάνει ο δείκτης της αγοράς (ή γενικά οι τιμές των υποκείμενων αγαθών), μεταβάλλονται ακολουθώντας μια γεωμετρική κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion-GBM)[8], με **σταθερή μεταβλητότητα σ**, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t) \tag{2.20}$$

όπου:

- dS(t) είναι μια στοιχειώδης μεταβολή της τιμής του δείκτη ή του υποκείμενου αγαθού,
- μ είναι η μέση απόδοση ετησιοποιημένη ή η απόδοση χωρίς κίνδυνο,
- dt μια στοιχειώδης απειροελάχιστη μεταβολή του χρόνου,
- σ η ετησιοποιημένη τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δείκτη ή του υποκείμενου αγαθού και
- dZ(t) η μεταβολή μιας τυχαίας μεταβλητής Z στο χρονικό διάστημα dt. Η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί διαδικασία Wiener[9].

Η μεταβολή dZ(t) σχετίζεται με την χρονική μεταβολή dt ως:

$$dZ(t) = \varepsilon\sqrt{dt}$$

όπου ε είναι μια τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Η μέση τιμή της dZ(t) είναι[10]:

$$E[dZ(t)] = 0$$

ενώ η διακύμανσή της είναι[11]:

$$Var[dZ(t)] = dt$$

[7] Υπόθεση που αν ισχύει, αυτομάτως μετατρέπει την IV στην πιο αξιόπιστη πρόβλεψη της πραγματικής μεταβλητότητας.

[8] Η υπόθεση της διαδικασίας διάχυσης GBM συνεπάγεται ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις κατανέμονται ανεξάρτητα και κανονικά με σταθερή μεταβλητότητα κι άρα οι τιμές του δείκτη ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή. Οι υποθέσεις του μοντέλου είναι φυσικά λανθασμένες, αλλά υιοθετούνται για λόγους απλούστευσης.

[9] Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται στη Φυσική και περιγράφει την τυχαία κίνηση ενός σωματιδίου, η οποία εξαρτάται από πλήθος άλλων μοριακών κινήσεων.

[10] Διότι, $E[dZ(t)] = E(\varepsilon\sqrt{dt}) = \sqrt{dt}E(\varepsilon) = \sqrt{dt}\cdot 0 = 0$.

[11] Διότι, $Var[dZ(t)] = Var(\varepsilon\sqrt{dt}) = \sqrt{dt}^2 Var(\varepsilon) = dt\cdot 1 = dt$.

Η σχέση (2.20) εκφράζει αποδόσεις του δείκτη, καθώς χρησιμοποιεί ποσοστιαίες μεταβολές των τιμών. Η αθροιστική απόδοση για μια μακρά αλλά πεπερασμένη χρονική περίοδο μήκους T, αν θεωρήσουμε ότι μέσα στο διάστημα αυτό υπάρχουν N χρονικά διαστήματα μήκους dt το καθένα, με $N = \frac{T}{dt}$ είναι[12]:

$$\Re = \mu T + \sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t)$$

Η αναμενόμενη τιμή αυτής της αθροιστικής απόδοσης είναι:

$$E(\Re) = \mu T \tag{2.21}$$

καθώς ισχύει ότι E[dZ(t)]=0.

Η διακύμανση της απόδοσης αυτής είναι[13]:

$$Var(\Re) = \sigma^2 T \tag{2.22}$$

Στο μοντέλο γίνεται και η υπόθεση ότι οι τιμές ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή κι άρα δεν μπορούν να πάρουν αρνητικό πρόσημο. Ένα μειονέκτημα της υπόθεσης αυτής, εκτός του ότι είναι αυθαίρετη, είναι η συνέχεια που ακολουθεί η τιμή με το χρόνο, πράγμα που σημαίνει πως θεωρητικά οι τιμές του δείκτη παρατηρούνται κάθε χρονική στιγμή, χωρίς να υπάρχουν κενά ή απότομες μεταβολές μεταξύ των τιμών, κάτι που φυσικά δεν αληθεύει, καθώς υπάρχουν Σαββατοκύριακα και αργίες, ενώ ακόμη και σε καθημερινή βάση τα Χρηματιστήρια δεν παραμένουν ανοιχτά 24 ώρες το εικοσιτετράωρο.

Η αποτίμηση των OPTIONS σύμφωνα με το μοντέλο BS βασίζεται στις εξής σχέσεις:

$$C = SN(d) - Xe^{-rT}N(d - \sigma\sqrt{T}) \tag{2.23}$$

$$P = -SN(-d) + Xe^{-rT}N(-d + \sigma\sqrt{T}) \tag{2.24}$$

όπου η σχέση (2.23) δίνει την δίκαιη τιμή ενός CALL OPTION και η (2.24) την δίκαιη τιμή ενός PUT OPTION[14]. Στις εξισώσεις αυτές:

---

[12] Η σχέση είναι $\Re = \frac{dS(1)}{S(1)} + \frac{dS(2)}{S(2)} + \ldots + \frac{dS(N)}{S(N)} = [\mu dt + \sigma dZ(1)] + [\mu dt + \sigma dZ(2)] + \ldots + [\mu dt + \sigma dZ(N)]$,

δηλαδή $\Re = \sum_{t=1}^{N}[\mu dt + \sigma dZ(t)] = N\mu dt + \sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t) = N\mu\frac{T}{N} + \sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t) = \mu T + \sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t)$.

[13] $Var(\Re) = Var\left[\mu T + \sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t)\right] = Var\left[\sigma\sum_{t=1}^{N} dZ(t)\right] = \sigma^2\sum_{t=1}^{N} Var[dZ(t)] = \sigma^2\sum_{t=1}^{N} dt = \sigma^2 N dt = \sigma^2 N\frac{T}{N} = \sigma^2 T$,

όπου ο όρος μT παραλείπεται γιατί είναι σταθερός κι έχει μηδενική διακύμανση.

[14] Αν τα OPTIONS διαπραγματεύονται σε συμβόλαια FUTURES, τότε οι σχέσεις (2.23) και (2.24) γίνονται $C = e^{-rT}[FN(d) - XN(d - \sigma\sqrt{T})]$ και $P = e^{-rT}[-FN(-d) + XN(-d + \sigma\sqrt{T})]$, με F την τιμή του FUTURE.

- S είναι η SPOT τιμή του δείκτη ή του υποκείμενου αγαθού τη στιγμή της αποτίμησης,
- N(.) η αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής,
- X η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος,
- e^{-rT} ο συντελεστής που δίνει την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης, με r το επιτόκιο της αγοράς (συνήθως το risk-free rate) και T το χρόνο που απομένει ως τη λήξη του δικαιώματος εκφρασμένο σε έτη και
- σ η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δείκτη (volatility).

Η παράμετρος d, υπολογίζεται ως[15]:

$$d=\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (2.25)$$

ή

$$d=\frac{\ln\left(\frac{S}{Xe^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \qquad (2.26)$$

Παρόλο που όπως είπαμε όλοι αποσκοπούν να υπολογίσουν τη μια και μοναδική μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει τις αποδόσεις, τελικά ο καθένας καταλήγει σε διαφορετικό αποτέλεσμα, που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες σχετικούς με το OPTION. Συνεπώς, το μοντέλο δεν είναι ορθό από όλες τις απόψεις, λόγω των ψεύτικων υποθέσεων στις οποίες βασίζεται.

2.2.2 Εξαγωγή της Τεκμαρτής Μεταβλητότητας

Όλες οι παράμετροι του μοντέλου παρατηρούνται στην αγορά, εκτός από την σ. Άρα με αντικατάσταση στο μοντέλο, μπορούμε να πάρουμε την τιμή της μεταβλητότητας που συμφωνεί με τα αριθμητικά δεδομένα, η οποία είναι η IV. Στην ουσία δηλαδή η IV αποτελεί μια συνάρτηση των υπολοίπων παραμέτρων που περιλαμβάνονται στο μοντέλο:

$$IV=f(C, P, S, X, T, r)$$

Ο Figlewski (2004) παρουσιάζει την IV ως παράμετρο, η εφαρμογή της οποίας στο μοντέλο εξισώνει την τιμή του μοντέλου με την τιμή της αγοράς, δηλαδή:

$$\text{Model Price}(\sigma_{IV})=\text{Market Price}$$

με σ_{IV} να συμβολίζει την IV. Επίσης, η IV παρουσιάζεται ως η προσδοκία της αγοράς για τη μελλοντική διαμόρφωση της μεταβλητότητας, δοθείσης της πληροφορίας που διαθέτει η αγορά:

---

[15] Με FUTURES ως υποκείμενα αγαθά η παράμετρος d είναι $d=\frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right)+\sigma^2\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$.

$$\sigma_{IV} = E(\sigma \mid I_{MARKET})$$

με

$$\{S_1, S_2, ..., S_T\} \subseteq I_{PUBLIC} \subseteq I_{MARKET}$$

δηλαδή οι ιστορικές τιμές που είναι διαθέσιμες για τα χρηματοοικονομικά αγαθά είναι υποσύνολο της πληροφορίας που κατέχει το κοινό, που με τη σειρά του είναι υποσύνολο της πληροφορίας ολόκληρης της αγοράς (αφού η I_{MARKET} περιέχει και στοιχεία απόρρητα και άγνωστα στο ευρύ κοινό).

Δεν υπάρχει τύπος που να παρουσιάζει απευθείας τη λύση ως προς την IV, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της Διχοτόμησης (Bisection method)[16] του Chriss (1997) και η Επαναληπτική μέθοδος των Newton-Raphson (Iteration method)[17], ώσπου να προσεγγιστεί η σωστή τιμή. Είναι πιθανό να μην εξισώνει καμιά σ την τιμή του μοντέλου με την τιμή της αγοράς, οπότε δεν θα υπάρχει IV. Είναι γνωστό πάντως ότι οι τιμές των OPTIONS αυξάνονται, όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα, δηλαδή η τιμολόγηση των OPTIONS γίνεται κατά κάποιον τρόπο και σε όρους μεταβλητότητας.

Φυσικά, η τιμή της σ μπορεί να εκτιμηθεί μέσω κάποιου στατιστικού τύπου και να εισαχθεί στο μοντέλο, κάτι που σχεδόν πάντα οδηγεί σε απόκλιση μεταξύ τιμής μοντέλου και τιμής αγοράς. Η IV αποτελεί όχι εκτίμηση, αλλά πρόβλεψη της πραγματικής μεταβλητότητας για το χρονικό ορίζοντα που αντιστοιχεί στην ωρίμανση του OPTION κι αν η μεταβλητότητα είναι στοχαστική, τότε η IV μπορεί να εκληφθεί ως η μέση μεταβλητότητα των τιμών του υποκείμενου στο OPTION περιουσιακού αγαθού, για τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

---

[16] Είναι από τις ευκολότερες μεθόδους εύρεσης της IV. Ξεκινούμε έχοντας την τιμή της αγοράς του OPTION και δίνοντας δυο τυχαίες τιμές στην σ, μια LOW και μια HIGH, με την ιδιότητα $\sigma_{LOW} < \sigma_{IV} < \sigma_{HIGH}$. Αν Model Price($\sigma_{LOW}$)>Market Price, τότε αν σ_{LOW}=0, σημαίνει πως η IV δεν υπάρχει για το συγκεκριμένο OPTION, γιατί μόνο αρνητική τιμή της IV θα μπορεί να εξισώσει τις δυο τιμές. Αντίθετα, αν Model Price(σ_{LOW})<Market Price<Model Price(σ_{HIGH}), τότε υπολογίζουμε την $\sigma_{MID} = \frac{\sigma_{LOW} + \sigma_{HIGH}}{2}$ και την Model Price(σ_{MID}). Αν Market Price<Model Price(σ_{MID}), τότε σημαίνει πως $\sigma_{IV} < \sigma_{MID}$ κι άρα αντικαθιστούμε την σ_{HIGH} με την σ_{MID} και συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο. Αντίθετα, αν Market Price>Model Price(σ_{MID}), τότε $\sigma_{IV} > \sigma_{MID}$ κι αντικαθιστούμε την σ_{LOW} με σ_{MID}. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν εξισωθούν κατά προσέγγιση οι δυο τιμές.

[17] Η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει σύγκλιση σε λίγα μόνο βήματα. Χρειάζεται υπολογισμός της τιμής και του Vega του OPTION, μιας παραμέτρου που εξηγείται στην Υποενότητα 2.2.4, όπου $\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ ή $\text{Vega} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$, με C και P τις τιμές του CALL και PUT αντίστοιχα. Έστω σ_{TRIAL} είναι μια αρχική, δοκιμαστική τιμή για την IV και Vega* το Vega που εκτιμάται για την σ_{TRIAL}. Θέλουμε να ξέρουμε πόσο πρέπει να μεταβληθεί η σ_{TRIAL} για να πάρουμε την σ_{IV}. Μια γραμμική προσέγγιση δίνεται ως: $L = \frac{\text{Market Price - Model Price}(\sigma_{TRIAL})}{\text{Vega}^*}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε μια νέα σ_{TRIAL} ίση με την παλιά αυξημένη κατά L, δηλαδή σ_{TRIAL}+L κι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να επιτύχουμε σύγκλιση των τιμών, κάτι που συμβαίνει μετά από λίγες μόνο επαναλήψεις. Η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει γρηγορότερα από τη Μέθοδο Διχοτόμησης, αλλά απαιτεί πιο πολύπλοκους υπολογισμούς σε κάθε βήμα, με αποτέλεσμα στην πράξη να είναι πιο χρονοβόρα.

2.2.3 Χαρακτηριστικά της Τεκμαρτής Μεταβλητότητας

Είδαμε πριν ότι για διαφορετικές τιμές εξάσκησης του ίδιου OPTION καταλήγουμε σε διαφορετικές τιμές της IV κι αν παραστήσουμε την IV πάνω στις τιμές εξάσκησης, θα προκύψει ένα διάγραμμα που μοιάζει με «χαμόγελο» και γι αυτό αποκαλείται *'volatility smile'* [18]. Το διάγραμμα αυτό θα αναφέρεται σε OPTIONS με **ίδια ωρίμανση**. Αυτό το φαινόμενο παραπέμπει σε αδυναμίες του μοντέλου BS. Η Alexander (2001) υποστηρίζει ότι οφείλεται στις λανθασμένες υποθέσεις του, που καθιστούν το μοντέλο πολύ απλό και δεν συλλαμβάνουν όλες τις ιδιότητες των αποδόσεων του υποκείμενου προϊόντος.

Το *'smile effect'* οφείλεται στο ότι η IV είναι υψηλότερη για ITM και OTM OPTIONS σε σχέση με τα ATM. Δυο βασικές αδυναμίες του μοντέλου όσον αφορά τις υποθέσεις, είναι (α) ότι οι αποδόσεις δεν κατανέμονται κανονικά, αλλά παρουσιάζουν παχιές ουρές (fat tails) στα άκρα της κατανομής τους και (β) η μεταβλητότητα των αποδόσεων δεν είναι σε καμία περίπτωση σταθερή. Επομένως η υπόθεση GBM για τις τιμές του υποκείμενου είναι αναληθής κι έτσι είναι δυνατόν να παρατηρηθούν εμπειρικά μεγαλύτερες μεταβολές τιμών απ' αυτές που προσδοκά το μοντέλο. Αν υφίσταται μια εκ των δυο αδυναμιών ή και οι δυο μαζί, τότε οι μεγαλύτερες μεταβολές που ενδέχεται να παρατηρηθούν στις τιμές αυξάνουν την πραγματική πιθανότητα ένα OTM OPTION να μετατραπεί σε ITM, σε σχέση με την αντίστοιχη πιθανότητα που υποθέτει το μοντέλο. Η τιμή του μοντέλου θα είναι προφανώς χαμηλότερη από την τιμή της αγοράς για το OTM κι άρα το μοντέλο θα αναγκαστεί χάριν ισοστάθμισης να προσαρμόσει προς τα πάνω την σ του OTM OPTION. Τα ITM από την άλλη τιμολογούνται κι αυτά ακριβότερα στην αγορά σε σχέση με το μοντέλο, παρά το γεγονός ότι αυξάνεται η πιθανότητα μετατροπής τους σε OTM. Αυτό συμβαίνει γιατί προσφέρουν δυνατότητα άμεσης εξάσκησης σε περίπτωση που οι τιμές δεν κινούνται ευνοϊκά.

Υπάρχει ακόμη ένα χαρακτηριστικό της IV με όνομα *'skew effect'* ή *'smirk effect'* ή *'sneer effect'*. Τα *'smiles'* είναι συμμετρικά[19] συνήθως στις αγορές συναλλάγματος. Ωστόσο, αν τα OPTIONS διαπραγματεύονται σε μετοχές, παρατηρείται μια **αρνητική ασυμμετρία** στο *'smile'*, με τα OPTIONS χαμηλής εξάσκησης (ITM CALLS και OTM PUTS) να εμφανίζουν υψηλότερη IV και τα OPTIONS υψηλής εξάσκησης (OTM CALLS και ITM PUTS) να εμφανίζουν χαμηλότερη IV. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή της αγοράς για OPTIONS χαμηλής εξάσκησης είναι πολύ υψηλότερη από την τιμή του μοντέλου BS, πράγμα που προκαλείται από την ασυμμετρία που παρουσιάζουν οι αγορές μετοχών. Η πτώση δηλαδή της τιμής μιας μετοχής είναι κακή είδηση για τους μετόχους, ενώ η άνοδος είναι ευχάριστο νέο! Μια επιπλέον αιτία του *'skew effect'* είναι ότι οι αγορές μετοχών ταράζονται-ταλαντεύονται πιο εύκολα μετά από πτώση της τιμής μιας μετοχής απ' ό,τι μετά από μια άνοδο ίσου μεγέθους. Αυτό το φαινόμενο λέγεται *'leverage effect'* και θα το δούμε αναλυτικά στο Μέρος 3.

---

[18] Το *'smile effect'* γίνεται αντιληπτό και με γραφική παράσταση της IV πάνω στην *'moneyness'* του OPTION, μια έννοια που συνδέεται με **την κερδοφορία ή τη ζημιά** σε περίπτωση εξάσκησης και συνήθως μετράται με την παράμετρο d.

[19] Δηλαδή παρουσιάζουν συμμετρία ως προς το ποσό κατά το οποίο η IV των OTM και ITM OPTIONS υπερβαίνει την IV των ATM OPTIONS.

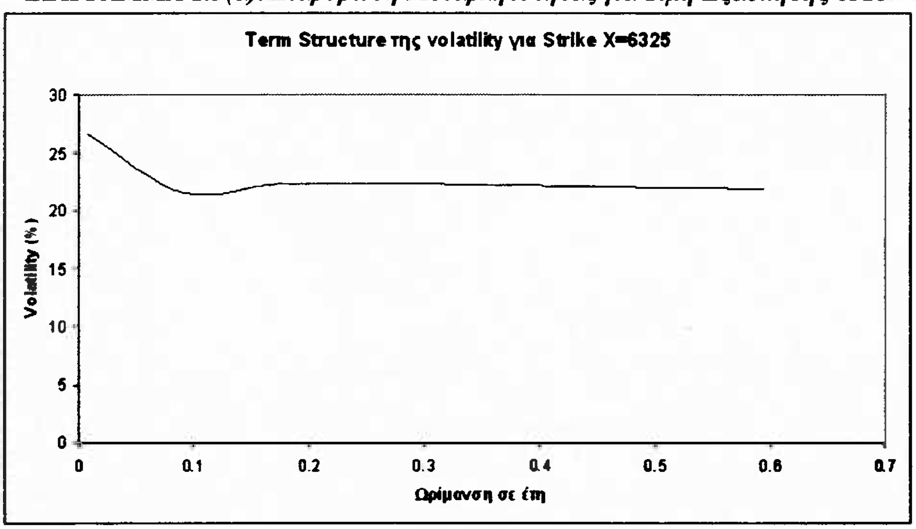
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1: Αριθμητικά Στοιχεία για OPTIONS

Ωρίμανση:	*Ιούνιος*		*Ιούλιος*		*Αύγουστος*		*Σεπτέμβριος*		*Δεκέμβριος*	
Strike	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**
6325	126.5	19.0	245.0	115.0	332.5	197.5	397.0	244.0	582.5	373.0
6425	57.0	49.0	184.0	154.0	269.5	233.5	333.0	279.0	517.5	405.5
6525	16.0	108.0	128.5	197.5	213.0	276.0	272.0	316.5	272.0	448.0
6625	2.0	194.0	83.0	252.0	163.5	326.0	219.0	362.0	219.0	495.5

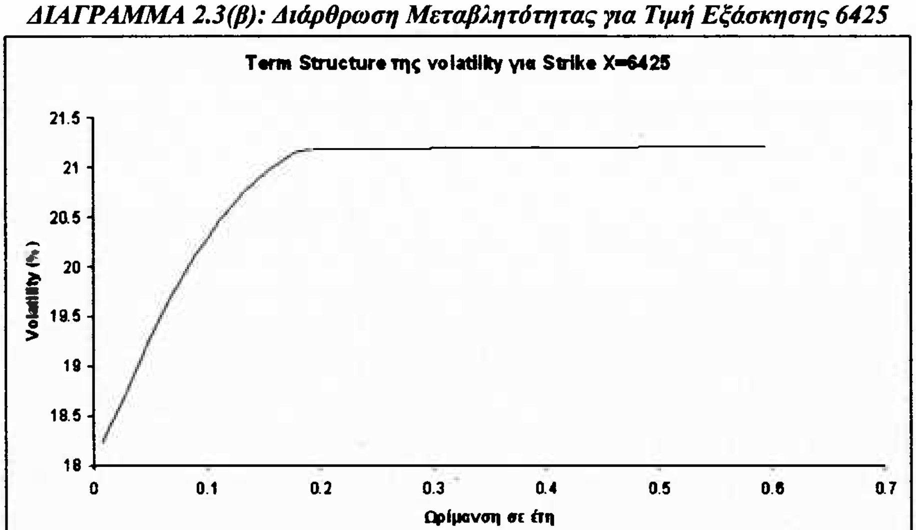
Πηγή: *Financial Times*

Μια ιδιότητα ακόμη που έχει η IV είναι η σύγκλιση προς ένα σταθερό μέσο επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας (mean reversion). Αυτό κατορθώνουμε να το δούμε κατασκευάζοντας διαγράμματα της IV πάνω στο χρόνο ωρίμανσης, για OPTIONS με **ίδιες τιμές εξάσκησης**. Για παράδειγμα ο παραπάνω πίνακας δίνει τιμές για OPTIONS στο δείκτη FTSE-100 στις 15 Ιουνίου 1999. Με δείκτη στις 6451.20 μονάδες, επιτόκιο 5.5%, και λήξη το μήνα που αναγράφεται, κατασκευάζουμε διαγράμματα της IV πάνω στο χρόνο ωρίμανσης, για τιμές εξάσκησης 6325 και 6425 μονάδες αντίστοιχα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.3(α): Διάρθρωση Μεταβλητότητας για Τιμή Εξάσκησης 6325



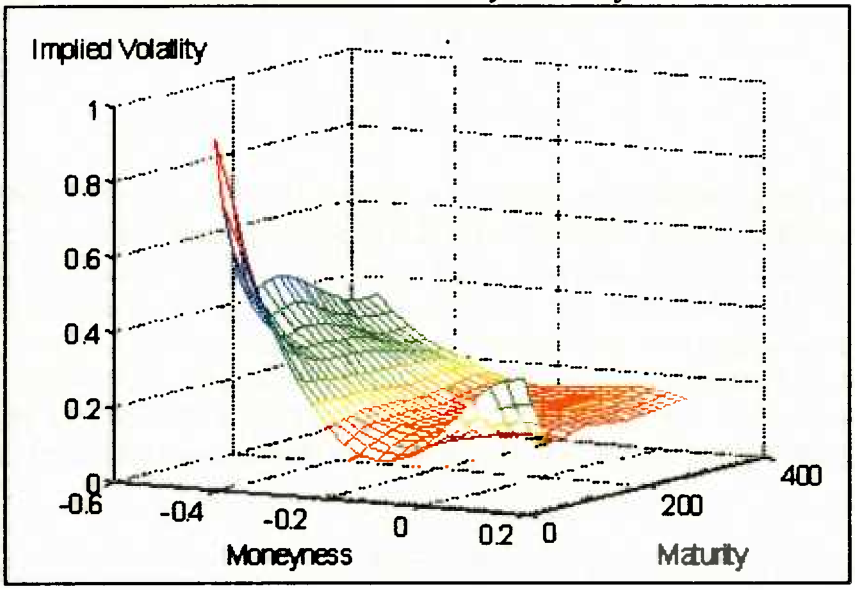
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.3(β): Διάρθρωση Μεταβλητότητας για Τιμή Εξάσκησης 6425



Τα διαγράμματα δείχνουν σύγκλιση προς κάποιο μέσο σταθερό επίπεδο ισορροπίας που κυμαίνεται γύρω στο 21%, ενώ αν κάνουμε κάτι παρόμοιο για τιμές εξάσκησης 6525 και 6625, θα παρατηρήσουμε ότι το επίπεδο ισορροπίας κυμαίνεται γύρω στο 10% ή χαμηλότερα, απόκλιση που επιβεβαιώνει τη σημαντική επίδραση της τιμής εξάσκησης πάνω στην IV.

Αν φτιάξουμε ένα γραφικό συνδυασμό των χαρακτηριστικών που είδαμε, βάζοντας σε ένα τρισδιάστατο διάγραμμα το *'smile effect'* (IV πάνω σε τιμή εξάσκησης ή *'moneyness'* για OPTIONS με την **ίδια ωρίμανση**) και τη διάρθρωση (term structure) της μεταβλητότητας (IV πάνω σε χρόνο ωρίμανσης για OPTIONS με **ίδιες τιμές εξάσκησης**), θα πάρουμε μια «επιφάνεια». Η επιφάνεια αυτή θα παριστάνει τη *διάρθρωση του 'smile effect' ως προς την ωρίμανση*, για OPTIONS με διαφορετική λήξη. Δηλαδή θα πάρουμε τη γραφική παράσταση της μεταβλητότητας πάνω σε τιμή εξάσκησης (ή *'moneyness'*) και σε ωρίμανση, που αποκαλείται *'volatility smile surface'* κι έχει τη μορφή του Διαγράμματος 2.4[20].

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.4: Volatility Smile Surface



Είναι εμφανές ότι για OPTIONS με σύντομη ωρίμανση το *'smile effect'* είναι έντονο και χαρακτηρίζεται από αρνητική ασυμμετρία, ενώ όσο η ωρίμανση αυξάνεται, το *'smile effect'* εξομαλύνεται τείνοντας να γίνει μια ευθεία γραμμή κι επιβεβαιώνοντας την ιδιότητα σύγκλισης της IV προς ένα μέσο μακροχρόνιο σταθερό επίπεδο ισορροπίας.

2.2.4 Οι Παράμετροι 'Greeks'

Οι παράμετροι *'Greeks'* ονομάζονται έτσι λόγω των ελληνικών γραμμάτων που χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό τους. Δείχνουν την ευαισθησία κάποιας μεταβλητής πάνω σε μικρές αλλαγές κάποιας άλλης μεταβλητής και κατά συνέπεια βρίσκονται μέσω διαφορικού λογισμού.

Για λόγους ευκολίας συμβολίζουμε τις τιμές των OPTIONS ή τα PREMIUMS όπως αλλιώς λέγονται, με C= f(S, σ) για τα CALLS και P= f(S, σ) για τα PUTS, αγνοώντας την εξάρτηση των τιμών από τιμή εξάσκησης, ωρίμανση, επιτόκια κ.ο.κ.

[20] Το σχήμα αποκτήθηκε από το CD που συνοδεύει το βιβλίο της Alexander (2001).

Η πρώτη παράμετρος είναι το **Δέλτα**, που δείχνει την ευαισθησία του PREMIUM σε μεταβολές της τιμής του υποκείμενου προϊόντος, S.

Δηλαδή:

$$\Delta_{CALL} = \frac{\partial f(S,\sigma)}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} \tag{2.27}$$

και

$$\Delta_{PUT} = \frac{\partial f(S,\sigma)}{\partial S} = \frac{\partial P}{\partial S} \tag{2.28}$$

Ισχύει ότι $\Delta_{CALL}>0$, γιατί όσο η τιμή S αυξάνεται, το CALL γίνεται περισσότερο ITM και $\Delta_{PUT}<0$ γιατί όσο το S αυξάνεται, το PUT γίνεται περισσότερο OTM. Μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης του Δέλτα που βασίζεται στο μοντέλο BS και υποθέτει σταθερή μεταβλητότητα, έχει ως:

$$\Delta_{CALL}=N(d)$$

και

$$\Delta_{PUT}=N(d)-1$$

όπου ως N(.) ορίσαμε την αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και d ορίζεται στις σχέσεις (2.25) και (2.26). Το Δέλτα χρησιμοποιείται κι ως δείκτης αντιστάθμισης κινδύνου (hedge ratio), γιατί μας δείχνει πόσες μονάδες του υποκείμενου αγαθού θα πρέπει να αγοράσουμε, για κάθε OPTION που έχουμε πουλήσει, ώστε ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου που σχηματίζεται να είναι μηδενικός όσον αφορά τις μεταβολές στις τιμές των υποκείμενων αγαθών. Δηλαδή αν λόγου χάρη τα OPTIONS διαπραγματεύονται σε μετοχές και κάποιος πούλησε k OPTIONS, θα πρέπει να αγοράσει Δk μετοχές. Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$V=\Delta kS-k f(S,\sigma)$$

και το χαρτοφυλάκιο θα είναι *'delta neutral'*, καθώς δεν θα επηρεάζεται η αξία του από μικρές μεταβολές της τιμής του υποκείμενου, γιατί $\frac{\partial V}{\partial S}=0$.

Δεύτερη παράμετρος είναι το **Γάμμα**, που μετρά την ευαισθησία της παραμέτρου Δέλτα σε μεταβολές της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Δηλαδή:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f(S,\sigma)}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \tag{2.29}$$

Το Γ είναι συνήθως μεγαλύτερο για ATM OPTIONS και αυξάνεται όσο πλησιάζει η ημερομηνία ωρίμανσης. Συνεπώς, για να επιτύχουμε *'delta neutrality'*, θα πρέπει ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου να αντισταθμίζεται σύμφωνα με το Δέλτα σε συνεχή βάση, ειδικά στο διάστημα που το OPTION πλησιάζει στην ημερομηνία ωρίμανσής του. Κάτι τέτοιο είναι σαφώς πολύ δαπανηρό και γι αυτό είναι υψίστης σημασίας η σωστή εκτίμηση του Δέλτα, προκειμένου να επιτυγχάνεται η κατάλληλη αντιστάθμιση κινδύνου.

Ως τώρα υποθέσαμε σύμφωνα με τους BS πως η μεταβλητότητα έχει σταθερή τιμή, κάτι που όμως δεν ισχύει. Αν επιτρέψουμε στην σ να μεταβάλλεται σε αλλαγές του S και εφαρμόσουμε τον *«αλυσιδωτό κανόνα»*, τότε παίρνουμε:

$$\Delta = \frac{\partial f(S,\sigma)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,\sigma)}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial S} = \Delta_{BS} + \text{Vega}\frac{\partial \sigma}{\partial S} \tag{2.30}$$

όπου Δ_{BS} είναι το Δέλτα που παίρνουμε μέσω του μοντέλου BS και **Vega** είναι μια ακόμη παράμετρος που ανήκει στα *'Greeks'* και ισούται με:

$$\text{Vega} = \frac{\partial f(S,\sigma)}{\partial \sigma} \tag{2.31}$$

Το Vega εκφράζει την ευαισθησία του PREMIUM στην IV. Τα ATM OPTIONS έχουν συνήθως πολύ υψηλό Vega και παρατηρείται ότι το Vega είναι ανάλογο του Γάμμα, με σχέση που προσδιορίζεται μαθηματικά. Βασικό συμπέρασμα είναι ότι αν ένα OPTION έχει μη-μηδενικό Vega, τότε το Δ_{BS} δεν θα είναι αξιόπιστη εκτίμηση του πραγματικού Δέλτα. Στη σχέση (2.30) η παράμετρος $\frac{\partial \sigma}{\partial S}$ αντικαθίσταται χάριν απλότητας από την $\frac{\partial \sigma}{\partial X}$, δηλαδή από την κλίση που έχει η IV στο σημείο της διαθέσιμης τιμής εξάσκησης X ή αλλιώς από την κλίση του *'smile effect'* στην τιμή εξάσκησης X.

3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Έχοντας αναφερθεί αναλυτικά στο προηγούμενο μέρος στους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε την ιστορική μεταβλητότητα των αποδόσεων ενός δείκτη, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στα υποδείγματα που αποσκοπούν στη μοντελοποίηση και πρόβλεψή της. Η σχετική βιβλιογραφία αναφέρει μια τεράστια ποικιλία μοντέλων που έχουν προταθεί για το συγκεκριμένο σκοπό, πολλά όμως από τα οποία δεν κρίνονται ως τα πιο κατάλληλα, ούτε ως τα πιο αξιόπιστα. Στο μέρος αυτό συνεπώς θα περιοριστούμε στην ανάλυση των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον για τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας και δεν είναι άλλα από αυτά της οικογένειας GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) και κάποια μοντέλα που εξειδικεύονται στο να συλλαμβάνουν την ιδιότητα *«μακροχρόνιας μνήμης»* των σειρών (Long Memory Models-LMM).

3.1 Μοντέλα της Οικογένειας GARCH

Η οικογένεια αυτή απαριθμεί έναν αρκετά μεγάλο όγκο υποδειγμάτων, που μοντελοποιούν απευθείας τη διακύμανση μιας σειράς, κατορθώνοντας να πιάσουν κάποιες σημαντικές ιδιότητές της.

Πρωτομάστορες των μοντέλων αυτών είναι οι Engle (1982), Bollerslev (1986) και Nelson (1991). Στα επόμενα θα δούμε αναλυτικότερα τις μορφές τους και τις ιδιότητές τους.

3.1.1 Ιδιότητες της Μεταβλητότητας και των Αποδόσεων

Σκοπός των υποδειγμάτων GARCH είναι η σύλληψη των παρακάτω ιδιοτήτων, με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο:

- Volatility Clustering: Παρατηρείται συχνά ότι μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων ακολουθούνται από μεγάλες μεταβολές, και το αντίστροφο, κάτι που γενικά αποτελεί έντονο χαρακτηριστικό των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Μια γραφική παράσταση της σειράς των αποδόσεων που θέλουμε να αναλύσουμε μας ενημερώνει για το αν οι αποδόσεις επιδεικνύουν *'volatility clustering'*, μια ιδιότητα που όπως είδαμε στα προηγούμενα, υποδηλώνει πως οι αποδόσεις ομαδοποιούνται σε περιόδους έντονης υψηλής και έντονης χαμηλής μεταβλητότητας.
- Fat Tails: Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με την κανονικότητα των αποδόσεων. Οι κατανομές των αποδόσεων εμφανίζουν συνήθως πιο παχιές ουρές στα δυο τους άκρα, σε σχέση με αυτές που υποθέτει η κανονικότητα. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως η σειρά περιέχει μεγάλο αριθμό ακραίων τιμών (extreme values) κάτι που προκαλεί αύξηση στη μεταβλητότητα και φυσικά μεγαλύτερη κύρτωση που ξεπερνά την τιμή 3 της κανονικής κατανομής (excess kurtosis). Οι παχιές ουρές γίνονται αντιληπτές και με το QQ-plot.
- Leverage Effect: Ένα χαρακτηριστικό ακόμη είναι ότι τα άσχημα νέα (negative shocks) της αγοράς έχουν μεγαλύτερη επίδραση στη μεταβλητότητα σε σχέση με τα καλά νέα (positive shocks) ίσου μεγέθους. Μια πτώση της τιμής μιας μετοχής για παράδειγμα αυξάνει τη μεταβλητότητα περισσότερο

απ' ό,τι μια ισόποση άνοδος. Ο Black (1976) πρώτος συνέδεσε την ιδιότητα αυτή, με το *δείκτη μόχλευσης* των επιχειρήσεων (απ' όπου πήρε το όνομά της), που είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής των κερδών για διάθεση ανά μετοχή, προς την ποσοστιαία μεταβολή των καθαρών λειτουργικών κερδών.

- Volatility Mean Reversion: Παρόλο που η μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών εμφανίζει μεγάλη αστάθεια κατά καιρούς, παρατηρείται ότι συγκλίνει προς ένα σταθερό μέσο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας, κάτι που στατιστικά σημαίνει στασιμότητα.
- Συνοχή της Volatility: Η μεταβλητότητα εξελίσσεται στο χρόνο με συνεχή τρόπο, δηλαδή δεν υπάρχουν διακοπές και αναπηδήσεις από τη μια χρονική στιγμή στην άλλη.

3.1.2 Εισαγωγή στα Υποδείγματα GARCH

Έστω ότι r_t συμβολίζει τη σειρά των αποδόσεων ενός οποιουδήποτε χρηματοοικονομικού αγαθού τη χρονική περίοδο t. Η σειρά r_t θα πρέπει να μην εμφανίζει αυτοσυσχέτιση ή να εμφανίζει σε μικρό αριθμό υστερήσεων, αλλά γενικά δεν θα παρουσιάζει ανεξαρτησία. Οι αποδόσεις συνήθως μοντελοποιούνται ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t &= E(r_t \mid I_{t-1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου ο όρος μ_t είναι ο *δεσμευμένος μέσος (conditional mean)* των αποδόσεων την περίοδο t, δοθείσης της πληροφορίας ως την περίοδο t-1 και περιλαμβάνει την πιο κατάλληλη εξειδίκευση της σειράς των αποδόσεων, τέτοια ώστε ο επόμενος όρος ε_t να κατανέμεται κανονικά και ανεξάρτητα με μέσο μηδέν, σταθερή διακύμανση κι επιπλέον να μην αυτοσυσχετίζεται[1]. Η υπόθεση της σταθερής διακύμανσης φυσικά δεν συνηθίζει να υφίσταται, γι αυτό άλλωστε συστήθηκαν και τα μοντέλα GARCH. Ο όρος μ_t συνεπώς μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, ανάλογα με τις ιδιότητες των αποδόσεων. Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε:

$$\mu_t = 0 \tag{3.2}$$

$$\mu_t = c \tag{3.3}$$

$$\mu_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \tag{3.4}$$

Δηλαδή οι αποδόσεις μπορεί να είναι απλά μια σειρά σφαλμάτων (white noise), είτε μια σειρά με σταθερό και διαταρακτικό όρο, καθώς και μια σειρά που μοντελοποιείται με Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητού Μέσου (Autoregressive Moving Average-ARMA). Φυσικά από τις παραπάνω εξειδικεύσεις δεν αποκλείεται η

[1] Τα κριτήρια αυτά θα τα δούμε στους διαγνωστικούς ελέγχους των υποδειγμάτων.

συμπερίληψη μιας οποιασδήποτε εξωγενούς μεταβλητής ή ψευδομεταβλητής στην εξίσωση του μ_t.

Η απόφαση για τη μορφή του μ_t προκύπτει από τις συναρτήσεις Αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation Function-ACF) και Μερικής Αυτοσυσχέτισης (Partial Autocorrelation Function-PACF) των αποδόσεων, στις οποίες αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικοί συντελεστές, ίσως να είναι απαραίτητη η χρήση όρων AR, MA ή ARMA. Τις περισσότερες φορές πάντως η σχέση (3.3) θεωρείται επαρκής.

Έχοντας μοντελοποιήσει κατάλληλα τις αποδόσεις, απομένει να κάνουμε το ίδιο και για την *δεσμευμένη διακύμανση (conditional variance)* της σειράς, που ορίζεται ως:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t \mid I_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 \mid I_{t-1}] = E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) \tag{3.5}$$

κι αν συνδυάσουμε τις παραπάνω εξισώσεις, η (3.5) εκφράζεται κι ως:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t \mid I_{t-1}) = Var(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) \tag{3.6}$$

Μια αρχική ιδέα για το πώς θα μοντελοποιηθεί η δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων παίρνουμε βλέποντας τις ACF και PACF των τετραγώνων των αποδόσεων ή των τετραγώνων των ε_t (εφόσον οι αποδόσεις έχουν μοντελοποιηθεί).

Αν εμφανίζουν σημαντική αυτοσυσχέτιση, τότε σημαίνει πως η δεσμευμένη διακύμανση μεταβάλλεται στο χρόνο. Τα υποδείγματα GARCH διαφέρουν μεταξύ τους στον τρόπο με τον οποίο μοντελοποιούν τη δεσμευμένη διακύμανση της σειράς. Η εξίσωση που εξειδικεύει τις αποδόσεις ονομάζεται *'mean equation'*, ενώ η εξίσωση της διακύμανσης λέγεται *'variance equation'*. Οι εκτιμήσεις των συντελεστών και στις δυο περιπτώσεις επιτυγχάνονται μέσω της Μεθόδου Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimation-MLE).

3.1.3 Το Υπόδειγμα ARCH(p)

Το υπόδειγμα *ARCH(p) (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)* αποτελεί την πιο απλή μορφή της οικογένειας GARCH. Εδώ υποθέτουμε πως η εξίσωση στο μέσο (3.1) έχει ήδη εκτιμηθεί κατάλληλα, (παρόλο που στην πράξη εκτιμάται ταυτόχρονα με την εξίσωση διακύμανσης). Το υπόδειγμα ARCH(p) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου $z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ είναι μια σειρά από ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές[2] με μέσο 0 και σταθερή διακύμανση 1 ή με άλλα λόγια τα τυποποιημένα

[2] Οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν είτε την Κανονική Κατανομή, είτε την Κατανομή t-Student, είτε τη Γενικευμένη Κατανομή Σφαλμάτων (Generalized Error Distribution-GED), είτε τέλος τη Διπλή

κατάλοιπα (standardized residuals) των αποδόσεων. Οι συντελεστές του μοντέλου θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες προϋποθέσεις όπως $\alpha_0>0$ και $\alpha_i\geq 0$ για κάθε $i>0$. Ακόμη θα πρέπει οι συντελεστές να πάρουν τέτοιες τιμές ώστε η μη-δεσμευμένη διακύμανση να συγκλίνει προς κάποιο πεπερασμένο μέσο σταθερό επίπεδο, δηλαδή θα πρέπει $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i < 1$.

Από το μοντέλο συνεπάγεται ότι υψηλές τιμές των ε_{t-i}^2 για $i=1,2,\ldots,p$ σημαίνουν υψηλές τιμές και για τη δεσμευμένη διακύμανση. Άρα μεγάλες διαταραχές στην αγορά ακολουθούνται από μεγάλες διαταραχές και το αντίστροφο (volatility clustering).

<u>Ιδιότητες</u>

Για να κατανοήσουμε τις ιδιότητες των μοντέλων ARCH, είναι βολικό να δούμε την περίπτωση ARCH(1):

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

όπου $\alpha_0>0$ και $\alpha_1\geq 0$.

Ο μη-δεσμευμένος μέσος του ε_t είναι[3]:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση του ε_t είναι[4]:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

και για να εξασφαλιστεί ότι η διακύμανση είναι θετική, θέτουμε τον περιορισμό $0\leq\alpha_1<1$. Ο περιορισμός αυτός τίθεται για να εξασφαλιστεί και η στασιμότητα της σειράς της διακύμανσης, καθώς έτσι δεν υπάρχει μοναδιαία ρίζα στο υπόδειγμα και η διακύμανση συγκλίνει στο μακροχρόνιο, μέσο επίπεδό της.

Εκθετική Κατανομή (Double Exponential Distribution), ανάλογα με τις υποθέσεις που γίνονται για το μοντέλο.

[3] Διότι $E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t \mid I_{t-1})] = E[\sigma_t E(z_t)] = 0$.

[4] Διότι $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$. Επειδή τα ε_t αποτελούν μια στάσιμη διαδικασία με σταθερή διακύμανση, ισχύει $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1})$ ή $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ και συνεπώς έχουμε $Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_t)$ και τελικά $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. Με παρόμοια λογική εξάγεται και η μη-δεσμευμένη διακύμανση του ARCH(p).

Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρουν και ροπές μεγαλύτερης τάξης του όρου ε_t, όπως για παράδειγμα η κύρτωση που αποτελεί ροπή τέταρτης τάξης. Έτσι προκύπτουν πρόσθετοι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιηθούν από τον όρο α_1. Όσον αφορά λόγου χάρη τις ιδιότητες στις ουρές της κατανομής του ε_t, θα πρέπει να σιγουρευτούμε ότι η τέταρτη ροπή του (κύρτωση) είναι πεπερασμένη ποσότητα και δεν τείνει στο άπειρο. Σύμφωνα με τον Tsay (2001) υπό την προϋπόθεση κανονικότητας του z_t στην (3.8), ισχύει ότι:

$$E(\varepsilon_t^4 \mid I_{t-1}) = 3[E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$$

Συνεπώς προκύπτει:

$$E(\varepsilon_t^4) = E[E(\varepsilon_t^4 \mid I_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2 = 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2\varepsilon_{t-1}^4)$$

κι αν τα ε_t είναι στάσιμα ως προς την τέταρτη ροπή, τότε θέτοντας $m_4 = E(\varepsilon_t^4)$, έχουμε[5]:

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι η δεσμευμένη τέταρτη κεντρική ροπή του όρου ε_t κι εφόσον υπάρχει και είναι θετική, θα πρέπει να ικανοποιείται ο επιπλέον περιορισμός 1-3α_1^2>0 ή $0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$.

Η αντίστοιχη μη-δεσμευμένη κύρτωση του ε_t είναι[6]:

$$K = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

Ισχύει ασφαλώς ότι K>3, γιατί η ποσότητα $\lambda = \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας και τελικά K=3λ>3, που σημαίνει ότι τα ε_t έχουν κύρτωση μεγαλύτερη απ' αυτήν που υποθέτει η κανονική κατανομή κι άρα τα υποδείγματα ARCH(p) μοντελοποιούν την υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis) που πιθανόν να διέπει μια σειρά. Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών

---

[5] Γιατί ισχύει $m_4 = 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 Var(\varepsilon_t) + \alpha_1^2 m_4] = 3\alpha_0^2\left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4$ κι άρα τελικά $m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$.

[6] Γιατί $K = \frac{m_4}{[Var(\varepsilon_t)]^2} = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$.

στοιχείων που ενδιαφερόμαστε να μοντελοποιήσουμε παρουσιάζουν ακραίες τιμές και παχιές ουρές στην κατανομή τους.

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για ARCH μεγαλύτερης τάξης p, αλλά οι τύποι γίνονται πολύ πιο πολύπλοκοι. Η συνθήκη $\alpha_i \geq 0$ χρησιμοποιείται έτσι ώστε η διακύμανση να είναι θετική. Η μη-δεσμευμένη διακύμανση στην περίπτωση του ARCH(p) είναι:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}$$

και θα πρέπει $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$, ώστε η διακύμανση να ορίζεται και να υπάρχει στασιμότητα στο υπόδειγμα.

Προσδιορισμός της Τάξης p

Αρχικά, όπως τονίστηκε και πριν, μοντελοποιούμε τις αποδόσεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να απαλειφθεί αν είναι εφικτό κάθε ίχνος αυτοσυσχέτισης της σειράς των καταλοίπων. Η εμπειρία δείχνει ότι σε σειρές μηνιαίων αποδόσεων αυτό επιτυγχάνεται τις περισσότερες φορές απλά αφαιρώντας απ' τις παρατηρήσεις το μέσο τους, αν αυτός είναι στατιστικά μεγαλύτερος του μηδενός, ενώ για ημερήσιες αποδόσεις ίσως κάποιοι όροι AR να είναι απαραίτητοι. Αφού συμβεί αυτό, ελέγχουμε την PACF (υποθέτοντας για τα ARCH ότι η ACF δεν παρουσιάζει σημαντικές αυτοσυσχετίσεις) των τετραγώνων των $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$, για να δούμε αν χρειάζεται εξειδίκευση AR στα ε_t^2. Η εξειδίκευση αυτή θα δώσει την τάξη p του ARCH(p), κι αυτό γιατί το υπόδειγμα ARCH(p) γράφεται σαν υπόδειγμα AR(p) στα ε_t^2. Αυτό φαίνεται εύκολα, με τη χρήση του υποδείγματος ARCH(1), το οποίο γράφεται κι ως[7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t \\ u_t &= \varepsilon_t^2 - E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Άρα η χρησιμοποίηση της PACF για τη μοντελοποίηση της σειράς των ε_t^2 ως υπόδειγμα AR(p), ισοδυναμεί με την εξειδίκευση της διακύμανσης ως υπόδειγμα ARCH(p).

[7] Επειδή $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \Rightarrow \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$, με $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Με την ίδια λογική ένα υπόδειγμα ARCH(p) εκφράζεται ως AR(p) στα τετράγωνα των καταλοίπων.

Προβλέψεις Διακύμανσης

Οι προβλέψεις της διακύμανσης μέσω ενός ARCH(p) αποκτώνται με επαναληπτικά βήματα. Για παράδειγμα έστω ένα ARCH(1) υπόδειγμα, το οποίο εκτιμά τη διακύμανση για την τελευταία περίοδο T του δείγματος, ως:

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T-1}^2$$

Η πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+1|T}^2 = E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_T^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2
\end{aligned}$$

Η πρόβλεψη για δυο βήματα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+2|T}^2 = E(\sigma_{T+2}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{T+1|T}^2
\end{aligned}$$

Δηλαδή για k>1 βήματα μπροστά, στην πρόβλεψη χρησιμοποιείται η προηγούμενη πρόβλεψη, καθώς δεν υπάρχουν πλέον εκτιμήσεις της διακύμανσης πέραν της χρονικής περιόδου T. Με την ίδια λογική, η πρόβλεψη για h>1 βήματα μπροστά, είναι:

$$\boldsymbol{\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{T+h-1|T}^2} \tag{3.10}$$

που σημαίνει πως για να υπολογιστεί η πρόβλεψη h βήματα μπροστά, χρησιμοποιείται η πρόβλεψη των h-1 βημάτων. Εκφράζοντάς την με αναδρομικό τρόπο, παίρνουμε:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 \sum_{k=1}^{h-1} \alpha_1^{k-1} + \alpha_1^{h-1} \sigma_{T+1|T}^2 \tag{3.11}$$

Παρατηρείται στην (3.10) και στην (3.11) πως καθώς $h \to \infty$, η πρόβλεψη της διακύμανσης συγκλίνει προς το σταθερό επίπεδο $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας.

Αντίστοιχα οι προβλέψεις με ένα ARCH(p), ξεκινώντας από την εκτίμηση για την τελευταία περίοδο, είναι:

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{T-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{T-p}^2$$

Η πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{T+1|T} = E(\sigma^2_{T+1} \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_T + \alpha_2\varepsilon^2_{T-1} + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+1-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon^2_T \mid I_T) + \alpha_2 E(\varepsilon^2_{T-1} \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon^2_{T+1-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_T + \alpha_2\varepsilon^2_{T-1} + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+1-p}
\end{aligned}$$

Η πρόβλεψη για δυο βήματα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{T+2|T} = E(\sigma^2_{T+2} \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_{T+1} + \alpha_2\varepsilon^2_T + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+2-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon^2_{T+1} \mid I_T) + \alpha_2 E(\varepsilon^2_T \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon^2_{T+2-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\sigma^2_{T+1|T} + \alpha_2\varepsilon^2_T + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+2-p}
\end{aligned}$$

Η πρόβλεψη για h βήματα μπροστά, με $1<h\leq p$ είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{T+h|T} = E(\sigma^2_{T+h} \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_{T+h-1} + \alpha_2\varepsilon^2_{T+h-2} + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+h-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon^2_{T+h-1} \mid I_T) + \alpha_2 E(\varepsilon^2_{T+h-2} \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon^2_{T+h-p} \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\sigma^2_{T+h-1|T} + \alpha_2\sigma^2_{T+h-2|T} + \ldots + \alpha_p\varepsilon^2_{T+h-p}
\end{aligned}$$

Από το τελευταίο βήμα συνεπάγεται ότι η πρόβλεψη h βήματα μπροστά με $1<h\leq p$ μπορεί να γραφεί πιο σύντομα κι ως:

$$\sigma^2_{T+h|T} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{h-1}\alpha_i\sigma^2_{T+h-i|T} + \sum_{i=h}^{p}\alpha_i\varepsilon^2_{T+h-i} \tag{3.12}$$

ενώ για $h>p$ έχουμε:

$$\sigma^2_{T+h|T} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\sigma^2_{T+h-i|T} \tag{3.13}$$

Βλέπουμε ότι για $h\to\infty$, οι προβλέψεις συγκλίνουν στο σταθερό επίπεδο $\dfrac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i}$, εφόσον πάντα $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i < 1$.

Οι προβλέψεις που μόλις είδαμε αφορούν τη διακύμανση μιας σειράς. Συνήθως όμως η μεταβλητότητα (volatility) εκφράζεται σε όρους τυπικής απόκλισης, προκειμένου οι μεταβολές να παρέχονται σε ποσοστιαία βάση. Οι προβλέψεις σε όρους τυπικής απόκλισης λαμβάνονται ως η τετραγωνική ρίζα των προβλέψεων της διακύμανσης, παρόλο που ισχύει ότι $E\left(\sqrt{\sigma^2}\right) \neq \sqrt{E(\sigma^2)}$. Συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι η εισαγωγή μεροληψίας στις προβλέψεις της τυπικής απόκλισης.

Αδυναμίες των Μοντέλων ARCH(p)

Σύμφωνα με τον Tsay (2001) οι αδυναμίες των ARCH(p) είναι:

1. Τα μοντέλα αυτά υποθέτουν ότι θετικές και αρνητικές διαταραχές της αγοράς προκαλούν την ίδια επίδραση στη διακύμανση, γιατί έχουν σαν ερμηνευτικές μεταβλητές τα τετράγωνα προηγούμενων σφαλμάτων. Η πραγματικότητα όμως δείχνει πως οι επιδράσεις μεταξύ των δυο περιπτώσεων διαφέρουν.
2. Οι περιορισμοί που θέτονται για τους συντελεστές αποτελούν ένα ακόμη μειονέκτημα. Σε ARCH υψηλής τάξης p, οι περιορισμοί είναι πολύπλοκοι.
3. Τα μοντέλα ARCH δεν προσφέρουν κάποιο είδος γνώσης για την κατανόηση της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών σειρών. Παρέχουν μόνο ένα μηχανικό τρόπο για την περιγραφή της συμπεριφοράς της διακύμανσης και δεν επεξηγούν ποιες είναι οι αιτίες της συμπεριφοράς αυτής.
4. Μέσω των ARCH συνήθως υπάρχει υπερεκτίμηση της μεταβλητότητας, γιατί προσαρμόζονται από τη μια αργά σε μεμονωμένες και στιγμιαίες διαταραχές των αποδόσεων, καθυστερούν όμως από την άλλη να επαναφέρουν τη μεταβλητότητα στα φυσικά της μεγέθη.

3.1.4 Το Υπόδειγμα GARCH(p,q)

Τα υποδείγματα ARCH(p), όντας τα πιο απλά της οικογένειας GARCH, έχουν το μειονέκτημα ότι δεν συλλαμβάνουν με τον πλέον επιθυμητό τρόπο τις ιδιότητες της διακύμανσης με αποτέλεσμα να μην προβαίνουν σε αξιόπιστες εκτιμήσεις και προβλέψεις. Για να γίνει αυτό εφικτό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μεγάλο αριθμό υστερημένων ε_t^2, κάτι που θα προκαλέσει απώλεια σημαντικών βαθμών ελευθερίας και θα κάνει την εκτίμηση πολύ πιο δύσκολη. Αυτή η αδυναμία αντιμετωπίζεται μέσω των υποδειγμάτων *GARCH(p,q) (Generalized ARCH)*.

Υποθέτουμε κι εδώ ότι οι αποδόσεις έχουν μοντελοποιηθεί κατάλληλα και τα ε_t έχουν τις ιδιότητες που θέλουμε. Το GARCH(p,q) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Οι περιορισμοί που συνδέονται με το υπόδειγμα αυτό είναι $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ και $\beta_j \geq 0$, ώστε να εξασφαλίσουμε θετική διακύμανση και $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$ για ύπαρξη στασιμότητας και σύγκλισης προς το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας.

Ιδιότητες

Όπως και στην περίπτωση του απλού ARCH, έτσι κι εδώ χρησιμοποιούμε το υπόδειγμα GARCH(1,1):

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

με περιορισμούς $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \leq 1$ και $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$. Στο μοντέλο αυτό, υψηλές τιμές των ε_{t-1}^2 και σ_{t-1}^2 καταλήγουν σε υψηλές τιμές της δεσμευμένης διακύμανσης. Άρα ένα υψηλό ε_{t-1}^2 ακολουθείται από εξίσου υψηλό ε_t^2, δείχνοντας ότι και στην περίπτωση αυτή υπάρχει εξειδίκευση του *'volatility clustering'*.

Ο μη-δεσμευμένος μέσος του ε_t είναι κι εδώ:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση του ε_t είναι[8]:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

όπου επιβάλλεται ο περιορισμός $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$ για να είναι θετική.

Η μη-δεσμευμένη κύρτωση στο GARCH(1,1) είναι κατά τον Tsay (2001):

$$K = 3\frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}$$

και αν $1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 > 0$, δηλαδή αν ο παρονομαστής είναι θετικός, ισχύει K>3, γιατί το παραπάνω κλάσμα ξεπερνά τη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι κι εδώ μοντελοποιείται η υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis) των ε_t. Με παρόμοιο σκεπτικό, οι ιδιότητες ισχύουν και για υποδείγματα μεγαλύτερης τάξης, γίνονται όμως πολύ πιο πολύπλοκοι οι περιορισμοί.

[8] Διότι $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$. Επειδή τα ε_t αποτελούν μια στάσιμη διαδικασία με σταθερή διακύμανση, ισχύει $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1})$ ή $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ και συνεπώς έχουμε $Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_t) + \beta_1 Var(\varepsilon_t)$ και τελικά $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$. Με την ίδια λογική προκύπτει και η μη-δεσμευμένη διακύμανση ενός GARCH(p,q).

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση των ε_t ενός GARCH(p,q) είναι:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j}$$

και θα πρέπει να ικανοποιείται ο περιορισμός $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$, για να εξασφαλιστεί θετική διακύμανση.

Αναφέραμε στα προηγούμενα ότι τα υποδείγματα GARCH έχουν το πλεονέκτημα σε σχέση με τα ARCH, ότι δεν απαιτούν πολλούς όρους υστερημένων καταλοίπων. Αυτό εξηγείται, αφού ακόμη και η απλούστερη περίπτωση του GARCH(1,1) περιλαμβάνει άπειρους όρους ARCH:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) \Rightarrow$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 [\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t-3}^2)] \Rightarrow$$
$$\ldots$$
$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \ldots) = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_1^{k-1} \varepsilon_{t-k}^2$$

<u>Προσδιορισμός των Τάξεων p και q</u>

Η τακτική που ακολουθούμε είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης των ARCH υποδειγμάτων, με τη διαφορά πως τώρα μας ενδιαφέρει και η ACF των ε_t^2. Δηλαδή αφού μοντελοποιηθούν κατάλληλα οι αποδόσεις, εξετάζονται προσεκτικά οι ACF και PACF των τετραγωνισμένων σφαλμάτων, για να διαπιστωθεί αν είναι απαραίτητη η χρήση όρων ARMA στα ε_t^2. Από τους στατιστικά σημαντικούς συντελεστές της PACF θα προκύψει προσεγγιστικά η τάξη p, ενώ από την ACF θα προκύψει προσεγγιστικά η τάξη q, διότι ένα υπόδειγμα GARCH(p,q) γράφεται σαν ένα ARMA[max(p,q),q] στα ε_t^2. Με τη χρήση του GARCH(1,2) για παράδειγμα, βλέπουμε ότι δημιουργείται ένα ARMA(2,2)[9] στα ε_t^2:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-2}^2 - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} + u_t \\ &u_t = \varepsilon_t^2 - E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \\ &u_{t-i} = \varepsilon_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

[9] Επειδή $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \Rightarrow \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + u_t$, με $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Άρα $u_{t-i} = \varepsilon_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2 \Rightarrow \sigma_{t-i}^2 = \varepsilon_{t-i}^2 - u_{t-i}$ και $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - u_{t-1}) + \beta_2 (\varepsilon_{t-2}^2 - u_{t-2}) + u_t$, που τελικά είναι $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-2}^2 - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} + u_t$. Με την ίδια λογική ένα υπόδειγμα GARCH(p,q) εκφράζεται ως ARMA[max(p,q),q] στα τετράγωνα των καταλοίπων.

Οι τάξεις p και q προκύπτουν όπως τονίστηκε κατά προσέγγιση, κάτι που σημαίνει πως οι ενδείξεις των ACF και PACF δεν οδηγούν πάντα στο σωστό μοντέλο, αλλά παρέχουν απλά μια καθοδήγηση.

Προβλέψεις Διακύμανσης

Ξεκινώντας με το απλούστερο μοντέλο GARCH(1,1) παίρνουμε σταδιακά τις προβλέψεις για ολοένα και μακρύτερο χρονικό ορίζοντα.

Η εκτίμηση της διακύμανσης για την τελευταία περίοδο T, είναι:

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T-1}^2 + \beta_1 \sigma_{T-1}^2$$

Η πρόβλεψη ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+1|T}^2 = E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_T^2 \mid I_T) + \beta_1 E(\sigma_T^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2
\end{aligned}$$

Η πρόβλεψη δυο βήματα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+2|T}^2 = E(\sigma_{T+2}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{T+1}^2 \mid I_T) + \beta_1 E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{T+1|T}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1|T}^2 = \\
&\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{T+1|T}^2
\end{aligned}$$

Επομένως, η πρόβλεψη για h>1 βήματα μπροστά είναι:

$$\boldsymbol{\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{T+h-1|T}^2} \tag{3.17}$$

ή χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο, όπως δίνεται στον Brooks (2002), έχουμε:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 \sum_{k=1}^{h-1} (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \sigma_{T+1|T}^2 \tag{3.18}$$

και καθώς $h \to \infty$, οι προβλέψεις τείνουν προς το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας $\dfrac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα ένα GARCH(p,q) έχουμε τη δυνατότητα να σχηματίσουμε τις προβλέψεις της διακύμανσης για μελλοντικές περιόδους.

Η εκτίμηση της διακύμανσης για την τελευταία περίοδο Τ, είναι:

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{T-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{T-2}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T-p}^2 + \beta_1\sigma_{T-1}^2 + \beta_2\sigma_{T-2}^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T-q}^2$$

Η πρόβλεψη ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+1|T}^2 = E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_T^2 + \alpha_2\varepsilon_{T-1}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+1-p}^2 + \beta_1\sigma_T^2 + \beta_2\sigma_{T-1}^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+1-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_T^2 \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon_{T+1-p}^2 \mid I_T) + \beta_1 E(\sigma_T^2 \mid I_T) + \ldots + \beta_q E(\sigma_{T+1-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_T^2 + \alpha_2\varepsilon_{T-1}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+1-p}^2 + \beta_1\sigma_T^2 + \beta_2\sigma_{T-1}^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+1-q}^2
\end{aligned}$$

Η πρόβλεψη δυο βήματα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+2|T}^2 = E(\sigma_{T+2}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{T+1}^2 + \alpha_2\varepsilon_T^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+2-p}^2 + \beta_1\sigma_{T+1}^2 + \beta_2\sigma_T^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+2-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{T+1}^2 \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon_{T+2-p}^2 \mid I_T) + \beta_1 E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) + \ldots + \beta_q E(\sigma_{T+2-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\sigma_{T+1|T}^2 + \alpha_2\varepsilon_T^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+2-p}^2 + \beta_1\sigma_{T+1|T}^2 + \beta_2\sigma_T^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+2-q}^2
\end{aligned}$$

Για h βήματα μπροστά, με $1<h\leq p$ και $1<h\leq q$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+h|T}^2 = E(\sigma_{T+h}^2 \mid I_T) = \\
&E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{T+h-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{T+h-2}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+h-p}^2 + \beta_1\sigma_{T+h-1}^2 + \beta_2\sigma_{T+h-2}^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+h-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{T+h-1}^2 \mid I_T) + \ldots + \alpha_p E(\varepsilon_{T+h-p}^2 \mid I_T) + \beta_1 E(\sigma_{T+h-1}^2 \mid I_T) + \ldots + \beta_q E(\sigma_{T+h-q}^2 \mid I_T) = \\
&\alpha_0 + \alpha_1\sigma_{T+h-1|T}^2 + \alpha_2\sigma_{T+h-2|T}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{T+h-p}^2 + \beta_1\sigma_{T+h-1|T}^2 + \beta_2\sigma_{T+h-2|T}^2 + \ldots + \beta_q\sigma_{T+h-q}^2
\end{aligned}$$

που μπορεί να εκφραστεί κι ως:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{h-1}(\alpha_i + \beta_i)\sigma_{T+h-i|T}^2 + \sum_{i=h}^{p}\alpha_i\varepsilon_{T+h-i}^2 + \sum_{j=h}^{q}\beta_j\sigma_{T+h-j}^2 \qquad (3.19)$$

ενώ για h>p και h>q ισχύει:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\sigma_{T+h-i|T}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{T+h-j|T}^2 \qquad (3.20)$$

και καθώς $h \to \infty$, οι προβλέψεις τείνουν προς το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας $\dfrac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i - \sum_{j=1}^{q}\beta_j}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας, δηλαδή αν $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$.

3.1.5 Παραλλαγές των ARCH(p) και GARCH(p,q)

Οι προτάσεις που είδαμε ως τώρα σχετικά με τα υποδείγματα ARCH και GARCH χαρακτηρίζονται από συμμετρική συμπεριφορά, με την έννοια ότι δεν λαμβάνουν υπόψη τους ότι οι αρνητικές διαταραχές (κρίσεις, υφέσεις, πτώσεις) της αγοράς προκαλούν μεγαλύτερες μεταβολές στη διακύμανση συγκριτικά με τις ευνοϊκές διαταραχές, με άλλα λόγια αγνοούν το *'leverage effect'*. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται, εισάγοντας στα μοντέλα παραμέτρους που εξειδικεύουν αυτή την ασύμμετρη επίδραση των ραγδαίων μεταβολών της οικονομίας. Συγκεκριμένα έχουν προταθεί κάποιες παραλλαγές των παραπάνω μοντέλων, με την εισαγωγή μιας παραμέτρου που μοντελοποιεί την ασυμμετρία. Οι Zivot and Wang (2003) χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα PGARCH(p,q,d) που αναλύεται στην Υποενότητα 3.1.8, αναφέρουν πως αν η παράμετρος d τεθεί ίση με 2, τότε το PGARCH με *'leverage'* μετατρέπεται σε απλό ARCH(p) με *'leverage'* ή GARCH(p,q) με *'leverage'*. Το μοντέλο (3.21) αποτελεί υποπερίπτωση του (3.22) αν θέσουμε q=0.

Το μοντέλο ARCH(p) με *'leverage'*, έχει ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i})^2 \end{aligned} \qquad (3.21)$$

Το μοντέλο GARCH(p,q) με *'leverage'*, έχει ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \qquad (3.22)$$

όπου γ_i είναι ο συντελεστής που μοντελοποιεί την ασυμμετρία. Ο έλεγχος για ύπαρξη *'leverage effect'* βασίζεται σ' αυτόν το συντελεστή. Συγκεκριμένα, όπως θα δούμε και στην περίπτωση του PGARCH(p,q,d), θα πρέπει η τιμή του γ_i να είναι αρνητική κι ο συντελεστής στατιστικά σημαντικός. Αν ικανοποιούνται τα παραπάνω, τότε η μηδενική υπόθεση για μη-ύπαρξη *'leverage effect'* απορρίπτεται, γιατί για γ_i αρνητικό, αν είναι αρνητικό και το ε_{t-i} (αρνητική διαταραχή αγοράς), τότε το γινόμενό τους είναι θετικό και σημαίνει μεγαλύτερη επίδραση στη τιμή της διακύμανσης. Δηλαδή, η συνολική επίδραση είναι $\alpha_i[(1-\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|]^2$, ενώ για θετικό ε_{t-i} η συνολική επίδραση είναι $\alpha_i[(1+\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|]^2$, που για $\gamma_i<0$ είναι μεγαλύτερη στην πρώτη περίπτωση.

Οι περιορισμοί που θέτονται για λόγους στασιμότητας και σύγκλισης είναι ανάλογοι των προηγηθέντων περιπτώσεων, με κάποιες μικροδιαφορές. Δηλαδή για το μοντέλο (3.21) έχουμε $\alpha_0 > 0$ και $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1+\gamma_i^2) < 1$, ενώ για το (3.22) θα πρέπει $\alpha_0 > 0$ και $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1+\gamma_i^2) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$.

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση των δυο μοντέλων δείχνει πως οι ιδιότητες είναι ανάλογες και οι προβλέψεις συγκλίνουν προς το επίπεδο ισορροπίας τους. Για τα (3.21) και (3.22) σύμφωνα με τους Zivot and Wang (2003) ισχύει αντίστοιχα[10]:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1+\gamma_i^2)}$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1+\gamma_i^2) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j}$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούν υποδείγματα της οικογένειας GARCH που χαρακτηρίζονται ως «ασύμμετρα GARCH», γιατί μοντελοποιούν το *'leverage effect'* με αρκετά μεγαλύτερη εξειδίκευση απ' ό,τι αυτά που προηγήθηκαν. Τέτοια είναι[11] το EGARCH (Exponential GARCH), το TGARCH (Threshold GARCH), το PGARCH (Power GARCH), το GARCH-M (GARCH in the Mean), το AGARCH (Asymmetric GARCH), το NGARCH (Non linear asymmetric GARCH) και το HARCH (Heterogeneous ARCH), ενώ τέλος θα παρουσιαστεί και το IGARCH (Integrated GARCH) που δεν συμπεριλαμβάνει μοντελοποίηση της ασυμμετρίας.

3.1.6 Το Υπόδειγμα EGARCH(p,q)

Το *EGARCH(p,q) (Exponential GARCH)* προτάθηκε από τον Nelson (1991) και αποσκοπούσε στη μοντελοποίηση των ασύμμετρων επιδράσεων στη μεταβλητότητα. Βασική του διαφοροποίηση από τα προηγούμενα είναι η χρησιμοποίηση όχι της ίδιας της διακύμανσης, αλλά των λογαρίθμων της. Η χρήση λογαρίθμων αποτελεί πλεονέκτημα, καθώς εξασφαλίζεται εκ των προτέρων η θετικότητα της διακύμανσης, χωρίς περιορισμούς στα πρόσημα των συντελεστών. Φυσικά κάποιοι περιορισμοί στασιμότητας όπως θα δούμε παρακάτω είναι χρήσιμοι.

Ο Nelson στην ανάλυσή του χρησιμοποιεί τη μεταβλητή $z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ (τυποποιημένα κατάλοιπα), που όπως είδαμε είναι μια σειρά από ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέσο 0 και σταθερή διακύμανση ίση με 1. Η ανάλυση που ακολουθεί, βασίζεται στον Tsay (2001).

---

[10] Οι τύποι αυτοί προκύπτουν αφού γράψουμε τις παρενθέσεις που υψώνονται στο τετράγωνο αναλυτικά και στη συνέχεια πάρουμε αναμενόμενες τιμές.

[11] Όπως στα απλά ARCH και GARCH, έτσι και στα EGARCH, PGARCH και GARCH-M, η συμπερίληψη του *'leverage effect'* δεν γίνεται εξ ορισμού, αλλά αποτελεί εναλλακτική μορφή των υποδειγμάτων. Τα συγκεκριμένα μοντέλα δηλαδή ενδέχεται να εμφανιστούν δίχως παραμέτρους που μοντελοποιούν την ασυμμετρία. Αντίθετα, τα TGARCH, AGARCH, NGARCH και HARCH μοντελοποιούν εξ ορισμού την ασυμμετρία.

Η επίδραση της ασυμμετρίας διοχετεύεται μέσω της συνάρτησης:

$$g(z_t) = \theta z_t + \gamma[|z_t| - E(|z_t|)] \tag{3.23}$$

όπου θ και γ κάποιες σταθερές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών κι όταν θ<0 και γ>0, τότε οι αρνητικές διαταραχές ($z_{t-1}<0$) επιδρούν πολύ περισσότερο στη διακύμανση, σε σχέση με τις θετικές διαταραχές, σύμφωνα με το υπόδειγμα. Η $[|z_t| - E(|z_t|)]$ έχει μέσο 0, όπως και η z_t, ενώ οι κατανομές και των δυο είναι συνεχείς. Συνεπάγεται ότι $E[g(z_t)] = 0$, ενώ η ασυμμετρία γίνεται αντιληπτή αν η $g(z_t)$ παρασταθεί ως:

$$g(z_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)z_t - \gamma E(|z_t|) \text{ για } z_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)z_t - \gamma E(|z_t|) \text{ για } z_t < 0 \end{cases}$$

Αν η μεταβλητή z_t ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε $E(|z_t|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ενώ αν ακολουθεί κατανομή t-Student, η παράσταση αυτή γίνεται $E(|z_t|) = \dfrac{2\sqrt{v-2}\,\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{(v-1)\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi}}$, μια αρκετά πιο σύνθετη μορφή, όπου το v συμβολίζει τους βαθμούς ελευθερίας και Γ(.) είναι η συνάρτηση Γάμμα[12].

Το μοντέλο EGARCH(p,q), έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots + \beta_q B^q}{1-\alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots - \alpha_p B^p} g(z_{t-1}) \end{aligned} \tag{3.24}$$

όπου B είναι ο Οπισθοδρομικός Τελεστής (Back-shift Operator), δηλαδή $B^k g(z_t) = g(z_{t-k})$, ενώ ο αριθμητής και παρονομαστής του κλάσματος είναι πολυώνυμα q και p βαθμού αντίστοιχα με ρίζες που πρέπει να βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου, προκειμένου να υπάρχει στασιμότητα και σύγκλιση. Η τάξη των πολυωνύμων αυτών εκτιμάται προσεγγιστικά με τη χρήση των συναρτήσεων ACF και PACF των τετραγωνισμένων σφαλμάτων, όπως δηλαδή και στην περίπτωση του GARCH(p,q).

Η μη-δεσμευμένη λογαριθμική διακύμανση του μοντέλου αυτού για κάθε τάξη p και q είναι:

$$\ln[Var(\varepsilon_t)] = \alpha_0$$

---

[12] Η συνάρτηση Γάμμα έχει τη μορφή $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ αν α>0, ενώ Γ(α)=(α-1)! αν το α είναι θετικός ακέραιος.

καθώς ισχύει $E[g(z_t)] = 0$. Εναλλακτικά έχουμε $Var(\varepsilon_t) = \exp(\alpha_0)$.

Για τη βαθύτερη κατανόηση του μοντέλου, μπορούμε να δούμε αναλυτικά ένα EGARCH(1,0) με $0<\alpha_1<1$:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1}{1-\alpha_1 B} g(z_{t-1}) \Rightarrow$$
$$\ln(\sigma_t^2)(1-\alpha_1 B) = \alpha_0(1-\alpha_1) + g(z_{t-1}) \Rightarrow$$
$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0(1-\alpha_1) + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(z_{t-1})$$

όπου ο τελευταίος όρος είναι:

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta+\gamma)z_{t-1} - \gamma E(|z_{t-1}|) \text{ για } z_{t-1} \geq 0 \\ (\theta-\gamma)z_{t-1} - \gamma E(|z_{t-1}|) \text{ για } z_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Θέτοντας $E(|z_{t-1}|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ και εισάγοντας το σταθερό όρο $\alpha_0(1-\alpha_1)$ μέσα στη $g(z_{t-1})$, αυτή γίνεται:

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} \alpha^* + (\theta+\gamma)z_{t-1} \text{ για } z_{t-1} \geq 0 \\ \alpha^* + (\theta-\gamma)z_{t-1} \text{ για } z_{t-1} < 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha^* = \alpha_0(1-\alpha_1) - \gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Τελικά το μοντέλο θα έχει ως:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha^* + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \begin{cases} (\theta+\gamma)z_{t-1} \text{ για } z_{t-1} \geq 0 \\ (\theta-\gamma)z_{t-1} \text{ για } z_{t-1} < 0 \end{cases}$$

κι αν εφαρμοστεί η εκθετική μορφή, θα πάρουμε:

$$\sigma_t^2 = \exp(\alpha^*)\sigma_{t-1}^{2\alpha_1} \begin{cases} \exp\left[(\theta+\gamma)\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right] \text{ για } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ \exp\left[(\theta-\gamma)\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right] \text{ για } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

όπου οι συντελεστές (θ+γ) και (θ-γ) δείχνουν την ασυμμετρία, ενώ το μοντέλο είναι μη-γραμμικό όταν $\gamma \neq 0$.

<u>Προβλέψεις Διακύμανσης</u>

Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα EGARCH(1,0) για απλούστευση, μας δίνεται η δυνατότητα να προβούμε σε προβλέψεις για τη μελλοντική διακύμανση, υποθέτοντας φυσικά πως οι παράμετροι είναι γνωστές και τα σφάλματα κατανέμονται με βάση την κανονική κατανομή.

Το μοντέλο είναι:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0(1-\alpha_1) + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(z_{t-1})$$

με

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma\left(|z_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

Παίρνοντας εκθετικούς όρους, το μοντέλο μετασχηματίζεται σε:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]\exp[g(z_{t-1})]$$

Η εκτίμηση της διακύμανσης για την τελευταία χρονολογική περίοδο του δείγματος θα είναι:

$$\sigma_T^2 = \sigma_{T-1}^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]\exp[g(z_{T-1})]$$

Η πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+1|T}^2 = E(\sigma_{T+1}^2 \mid I_T) = \\
&E\left\{\sigma_T^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]\exp[g(z_T)] \mid I_T\right\} = \\
&\sigma_T^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]\exp[g(z_T)]
\end{aligned}$$

διότι ως και την περίοδο Τ οι παράμετροι μέσα στην Ε{.} έχουν παρατηρηθεί και είναι γνωστές.

Η πρόβλεψη για δυο βήματα μπροστά είναι:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{T+2|T}^2 = E(\sigma_{T+2}^2 \mid I_T) = \\
&E\left\{\sigma_{T+1}^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]\exp[g(z_{T+1})] \mid I_T\right\} = \\
&\sigma_{T+1|T}^{2\alpha_1} \exp[\alpha_0(1-\alpha_1)]E\{\exp[g(z_{T+1})] \mid I_T\}
\end{aligned}$$

Ο όρος Ε{.} αναλύεται περαιτέρω κι έχει ως εξής:

$$E\{\exp[g(z)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\theta z + \gamma\left(|z| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right] f(z)dz =$$

$$\exp\left(-\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left[\int_0^{\infty} \exp[(\theta+\gamma)z]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)dz + \int_{-\infty}^{0} \exp[(\theta-\gamma)z]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)dz\right] =$$

$$\exp\left(-\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left\{\exp\left[\frac{(\theta+\gamma)^2}{2}\right]N(\theta+\gamma) + \exp\left[\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}\right]N(\gamma-\theta)\right\}$$

με $f(z)$ να συμβολίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και N(.) να συμβολίζει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Η πρόβλεψη των δυο βημάτων μετά απ' όλα αυτά, διαμορφώνεται ως εξής:

$$\sigma^2_{T+2|T} = \sigma^{2\alpha_1}_{T+1|T} \exp\left[\alpha_0(1-\alpha_1) - \gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]\left\{\exp\left[\frac{(\theta+\gamma)^2}{2}\right]N(\theta+\gamma) + \exp\left[\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}\right]N(\gamma-\theta)\right\}$$

Με επανάληψη της ίδιας διαδικασίας, καταλήγουμε ότι η πρόβλεψη της διακύμανσης για h>1 βήματα στο μέλλον, είναι:

$$\sigma^2_{T+h|T} = \sigma^{2\alpha_1}_{T+h-1|T} \exp(\omega)\left\{\exp\left[\frac{(\theta+\gamma)^2}{2}\right]N(\theta+\gamma) + \exp\left[\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}\right]N(\gamma-\theta)\right\} \quad (3.25)$$

όπου $\omega = \alpha_0(1-\alpha_1) - \gamma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ίσο με το α* στην περίπτωσή μας.

Για $h \to \infty$, η πρόβλεψη αυτή συγκλίνει στο επίπεδο:

$$\sigma^2_{T+h|T} = \exp\left(\frac{\omega}{1-\alpha_1}\right)\left\{\exp\left[\frac{(\theta+\gamma)^2}{2}\right]N(\theta+\gamma) + \exp\left[\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}\right]N(\gamma-\theta)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \quad (3.26)$$

που διαφέρει από τη μη-δεσμευμένη διακύμανση $Var(\varepsilon_t) = \exp(\alpha_0)$.

Οι Zivot and Wang (2003) υιοθετούν μια εναλλακτική παρουσίαση του μοντέλου EGARCH, ελαφρώς διαφοροποιημένη από την προηγούμενη. Πιο συγκεκριμένα, το EGARCH(p,q) έχει ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \ln(\sigma^2_{t-j}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Με άλλα λόγια η διακύμανση γράφεται κι ως:

$$\sigma_t^2 = \exp\left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \ln(\sigma^2_{t-j})\right] \quad (3.28)$$

Όταν η παράμετρος ε_{t-i} είναι θετική ή αντίστοιχα υπάρχουν «καλά νέα» στην αγορά, τότε η συνολική επίδραση στη λογαριθμική διακύμανση είναι $\alpha_i(1+\gamma_i)|z_{t-i}|$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή το ε_{t-i} είναι αρνητικό και τα νέα είναι «άσχημα», η συνολική επίδραση είναι $\alpha_i(1-\gamma_i)|z_{t-i}|$. Τα «άσχημα νέα» θα πρέπει υπό φυσιολογικές συνθήκες να ασκούν μεγάλη επίδραση στη διακύμανση και γι αυτό ο συντελεστής γ_i αναμένεται να έχει αρνητικό πρόσημο. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, σε συνδυασμό με το ότι ο συντελεστής είναι στατιστικά σημαντικός, τότε θα υπάρχει *'leverage effect'* στη διακύμανση.

Οι τάξεις p και q βρίσκονται ως γνωστόν από τις ACF και PACF των τετραγώνων των σφαλμάτων, ενώ και στο υπόδειγμα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται τα τυποποιημένα κατάλοιπα $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$.

Ιδιότητες

Οι ιδιότητες στην περίπτωση αυτή, όπως και πριν, έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό της μη-δεσμευμένης διακύμανσης. Για ευκολία χρησιμοποιούμε ένα EGARCH(1,1):

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Η μη-δεσμευμένη λογαριθμική διακύμανση είναι[13]:

$$\ln[Var(\varepsilon_t)] = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-\beta_1}$$

ή λύνοντας απευθείας ως προς τη διακύμανση:

$$Var(\varepsilon_t) = \exp\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-\beta_1}\right)$$

υπό τον απλούστερο πλέον περιορισμό $\beta_1 \neq 1$, για να ορίζεται ο εκθέτης. Ο συντελεστής β_1 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε άλλη τιμή, θετική ή αρνητική, με τη διακύμανση να παραμένει πάντα θετική.

---

[13] Από το EGARCH(1,1) έχουμε $E[\ln(\sigma_t^2)] = E\left[\alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \gamma_1\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) + \beta_1\ln(\sigma_{t-1}^2)\right]$. Λόγω στασιμότητας θεωρούμε ότι η διακύμανση της περιόδου t είναι ίση με αυτή της περιόδου t-1. Ακόμη ισχύει ότι $E\left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}\right) = E(|z_t|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, και καθώς $E\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) = 0$, προκύπτει ότι $\ln[Var(\varepsilon_t)] = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1\ln[Var(\varepsilon_t)]$ και τελικά $\ln[Var(\varepsilon_t)] = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-\beta_1}$.

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, η μη-δεσμευμένη διακύμανση για ένα EGARCH(p,q) είναι:

$$\operatorname{Var}(\varepsilon_t) = \exp\left(\frac{\alpha_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}{1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j} \right)$$

κι ο περιορισμός γίνεται $\sum_{j=1}^{q} \beta_j \neq 1$, που είναι επαρκής για να ορίζεται η διακύμανση.

3.1.7 Το Υπόδειγμα TGARCH(p,q)

Το μοντέλο *TGARCH(p,q) (Threshold GARCH)* ανήκει στην κατηγορία των υποδειγμάτων που εξειδικεύουν την ασυμμετρία στη διακύμανση. Το όνομά του οφείλεται στο ότι χρησιμοποιεί το μηδέν ως «κατώφλι» ή ως «σημείο αναφοράς», από το οποίο εξαρτάται η τιμή που θα πάρει μια ψευδομεταβλητή. Εναλλακτικά το υπόδειγμα ονομάζεται και GJR(p,q)[14], από τα ονόματα των ερευνητών Glosten, Jagannathan and Runkle (1993), που πρότειναν τη συγκεκριμένη μορφή.

Το TGARCH(p,q) έχει ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i D_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

όπου D_{t-i} είναι μια ψευδομεταβλητή που παίρνει τις εξής τιμές:

$$D_{t-i} = \begin{cases} 1 \text{ για } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0 \text{ για } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

δηλαδή εξαρτάται από το αν οι προηγούμενες τιμές των σφαλμάτων ήταν θετικές ή αρνητικές, με την καθεμιά εκ των δυο περιπτώσεων να ασκεί διαφορετική επίδραση στη διακύμανση. Όταν το ε_{t-i} είναι θετικό, η συνολική επίδραση είναι $\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$, ενώ όταν είναι αρνητικό, η συνολική επίδραση είναι $(\alpha_i + \gamma_i)\varepsilon_{t-i}^2$. Άρα για να μοντελοποιείται επαρκώς η ασυμμετρία, χρειάζεται το γ_i να είναι θετικό και στατιστικά σημαντικό.

<u>Ιδιότητες</u>

Παίρνοντας το TGARCH(1,1), εξάγονται κάποιες χρήσιμες ιδιότητες.

---

[14] Το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται με την ίδια ακριβώς μορφή κι από τους Donaldson and Kamstra (2001), οι οποίοι το αποκαλούν 'Sign-GARCH'.

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Οι περιορισμοί που αφορούν τους συντελεστές είναι $\alpha_0>0$, $\alpha_1\geq 0$, $\beta_1\geq 0$ και $\alpha_1+\gamma_1\geq 0$. Η μη-δεσμευμένη διακύμανση του μοντέλου είναι[15]:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\left(\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}\right)-\beta_1}$$

και επιβάλλεται ο περιορισμός $\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}+\beta_1<1$, για να εξασφαλιστεί η θετικότητα.

Αντίστοιχα, η μη-δεσμευμένη διακύμανση για το ίδιο μοντέλο με απροσδιόριστες τις τάξεις του p και q, είναι:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i+\frac{\gamma_i}{2}\right)-\sum_{j=1}^{q}\beta_j}$$

με την επιβολή του περιορισμού $\sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i+\frac{\gamma_i}{2}\right)+\sum_{j=1}^{q}\beta_j<1$ να είναι αναγκαία χάριν στασιμότητας και σύγκλισης.

Η εκτίμηση των τάξεων p και q πραγματοποιείται όπως ακριβώς και στην περίπτωση του απλού GARCH, δηλαδή μέσω των συναρτήσεων απλής και μερικής αυτοσυσχέτισης των τετραγωνισμένων σφαλμάτων.

Προβλέψεις Διακύμανσης

Οι προβλέψεις είναι ανάλογες με αυτές των σχέσεων (3.17) και (3.18), δηλαδή η πρόβλεψη με τη χρήση ενός TGARCH(1,1) για h>1 βήματα μπροστά είναι:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + \left(\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}+\beta_1\right)\sigma_{T+h-1|T}^2 \tag{3.32}$$

ή χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο, έχουμε:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 \sum_{k=1}^{h-1}\left(\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}+\beta_1\right)^{k-1} + \left(\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}+\beta_1\right)^{h-1}\sigma_{T+1|T}^2 \tag{3.33}$$

[15] Η διακύμανση βγαίνει όπως και στην περίπτωση του GARCH(1,1), δίνοντας πιθανότητα 50% η ψευδομεταβλητή να πάρει την τιμή 1 και 50% να πάρει την τιμή 0. Οπότε, η μαθηματική ελπίδα της D_{t-i} είναι $\frac{1}{2}$.

Καθώς το h τείνει στο άπειρο, οι προβλέψεις συγκλίνουν στο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας $\dfrac{\alpha_0}{1-\left(\alpha_1+\dfrac{\gamma_1}{2}\right)-\beta_1}$, εφόσον ισχύουν οι περιορισμοί που επιβλήθηκαν.

Για ένα υπόδειγμα TGARCH(p,q), οι μελλοντικές προβλέψεις για h βήματα, με $1<h\leq p$ και $1<h\leq q$, αντιστοιχούν στον παρακάτω τύπο:

$$\sigma^2_{T+h|T}=\alpha_0+\sum_{i=1}^{h-1}\left(\alpha_i+\frac{\gamma_i}{2}+\beta_i\right)\sigma^2_{T+h-i|T}+\sum_{i=h}^{p}\left(\alpha_i+\frac{\gamma_i}{2}\right)\varepsilon^2_{T+h-i}+\sum_{j=h}^{q}\beta_j\sigma^2_{T+h-j} \qquad (3.34)$$

ενώ όταν h>p και h>q, θα προκύψει:

$$\sigma^2_{T+h|T}=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i+\frac{\gamma_i}{2}\right)\sigma^2_{T+h-i|T}+\sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma^2_{T+h-j|T} \qquad (3.35)$$

και βλέπουμε πως καθώς $h\to\infty$, οι προβλέψεις τείνουν προς το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας $\dfrac{\alpha_0}{1-\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\alpha_i+\dfrac{\gamma_i}{2}\right)-\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας, δηλαδή αν $\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\alpha_i+\dfrac{\gamma_i}{2}\right)+\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j<1$.

3.1.8 Το Υπόδειγμα PGARCH(p,q,d)

Οι Ding, Granger and Engle (1993) πρότειναν το μοντέλο *PGARCH(p,q,d) (Power GARCH)*, το οποίο έχει τη δυνατότητα μοντελοποίησης ασύμμετρων επιδράσεων στη διακύμανση, που προκαλούνται από διαταραχές της οικονομίας.

Η βασική μορφή ενός PGARCH(p,q,d) είναι:

$$\begin{aligned} r_t&=\mu_t+\varepsilon_t\\ \varepsilon_t&=\sigma_t z_t\\ \sigma_t^d&=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(|\varepsilon_{t-i}|+\gamma_i\varepsilon_{t-i})^d+\sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^d \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Το υπόδειγμα αυτό μοιάζει με το απλό GARCH με *'leverage'* της σχέσης (3.22), με τη μόνη τους διαφορά να έγκειται στον εκθέτη d. Αν τεθεί d=2, τότε καταλήγουμε στη σχέση (3.22), η οποία αποτελεί υποπερίπτωση του PGARCH(p,q,d). Ο παράγοντας d θα πρέπει να είναι θετικός. Μπορούμε είτε να του επιβάλουμε μια επιθυμητή τιμή, είτε να εκτιμηθεί μέσω της Μεθόδου Μεγίστης Πιθανοφάνειας, μαζί με τους υπόλοιπους συντελεστές. Οι τάξεις p και q καθορίζονται από τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των ε_t^2.

Φυσικά, γ_i είναι κι εδώ ο συντελεστής που μοντελοποιεί την ασυμμετρία. Θα πρέπει η τιμή του γ_i να είναι αρνητική και να υπάρχει στατιστική σημαντικότητα. Αν το ε_{t-i} είναι αρνητικό, τότε θα ασκηθεί μεγαλύτερη επίδραση στην τιμή της διακύμανσης. Δηλαδή, η συνολική επίδραση θα είναι $\alpha_i[(1-\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|]^d$, ενώ για θετικό ε_{t-i} η συνολική επίδραση θα είναι $\alpha_i[(1+\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|]^d$ και για $\gamma_i<0$, η πρώτη περίπτωση προκαλεί μεγαλύτερη αύξηση στη διακύμανση απ' ό,τι η δεύτερη.

<u>Ιδιότητες</u>

Αρχικά, με τη χρήση του PGARCH(1,1,1), εκτιμούμε τη μη-δεσμευμένη διακύμανση. Το μοντέλο είναι:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t &= \alpha_0 + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1\varepsilon_{t-1}) + \beta_1\sigma_{t-1} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Από το συγκεκριμένο υπόδειγμα, καθώς έχουμε d=1, προκύπτει η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση[16], την οποία υψώνουμε στο τετράγωνο για να πάρουμε την μη-δεσμευμένη διακύμανση:

$$\operatorname{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0^2}{\left(1-\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\beta_1\right)^2}$$

με τα τετράγωνα να εξασφαλίζουν μεν τη θετικότητα της διακύμανσης, αλλά για να προκύψει θετικότητα και σύγκλιση σε όρους τυπικής απόκλισης, θα πρέπει $\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\beta_1<1$.

Αντίστοιχα, για απροσδιόριστες τιμές των τάξεων p και q, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται (για d=1) στην:

$$\operatorname{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0^2}{\left(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i-\sum_{j=1}^{q}\beta_j\right)^2}$$

[16] Από την $\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1(|\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1\varepsilon_{t-1}) + \beta_1\sigma_{t-1}$, έχουμε $E(\sigma_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(|\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 E(\sigma_{t-1})$ και καθώς $E(|\varepsilon_{t-1}|) = E(\sigma_{t-1}|z_{t-1}|) = \sigma_{t-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, προκύπτει ότι $E(\sigma_t) = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1 E(\sigma_{t-1})$ και υπό την προϋπόθεση στασιμότητας έχουμε $\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_t\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1\sigma_t$. Τελικά, μεανασχηματισμό παίρνουμε $\sigma_t = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\beta_1}$, που είναι η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση.

όπου επίσης για παρόμοιους λόγους θα πρέπει $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$.

Προβλέψεις Διακύμανσης

Η πρόβλεψη για h>1 βήματα μπροστά, σε όρους τυπικής απόκλισης, με τη χρήση του PGARCH(1,1,1), δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{T+h|T} = \alpha_0 + \left(\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1\right)\sigma_{T+h-1|T} \tag{3.38}$$

ή χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο, έχουμε:

$$\sigma_{T+h|T} = \alpha_0\sum_{k=1}^{h-1}\left(\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1\right)^{k-1} + \left(\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta_1\right)^{h-1}\sigma_{T+1|T} \tag{3.39}$$

και καθώς $h \to \infty$, οι προβλέψεις τείνουν προς το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\beta_1}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας. Για να πάρουμε προβλέψεις σε όρους διακύμανσης, αρκεί να υψώσουμε στο τετράγωνο τις προβλέψεις τυπικής απόκλισης, αν και ισχύει ότι $E(\sigma^2) \neq [E(\sigma)]^2$.

Αντίστοιχα, η πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης για h βήματα μπροστά, με $1<h\leq p$ και $1<h\leq q$ σε ένα μοντέλο PGARCH(p,q,1) διαμορφώνεται ως:

$$\sigma_{T+h|T} = \alpha_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sum_{i=1}^{h-1}\alpha_i\sigma_{T+h-i|T} + \sum_{i=h}^{p}\alpha_i\sigma_{T+h-i}\right) + \sum_{j=1}^{h-1}\beta_j\sigma_{T+h-j|T} + \sum_{j=h}^{q}\beta_j\sigma_{T+h-j} \tag{3.40}$$

ενώ για h>p και h>q θα πάρουμε:

$$\sigma_{T+h|T} = \alpha_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\sigma_{T+h-i|T} + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{T+h-j|T} \tag{3.41}$$

και καθώς $h \to \infty$, οι προβλέψεις τείνουν προς το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας $\frac{\alpha_0}{1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i - \sum_{j=1}^{q}\beta_j}$, υπό την προϋπόθεση στασιμότητας, δηλαδή αν $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$.

3.1.9 Το Υπόδειγμα GARCH(p,q)-M

Στην Υποενότητα 3.1.2 ισχυριστήκαμε σχετικά με τις αποδόσεις, ότι μπορεί να μοντελοποιηθούν ως μια σειρά σφαλμάτων (white noise), είτε ως μια σειρά με σταθερό και διαταρακτικό όρο, είτε ως Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητού Μέσου (ARMA), είτε τέλος περιλαμβάνοντας μια οποιαδήποτε εξωγενή μεταβλητή ή ψευδομεταβλητή στην εξίσωσή τους. Είναι όμως γνωστό ότι ο υψηλός κίνδυνος πολλές φορές εκτός του ότι οδηγεί σε υψηλή διακύμανση, οδηγεί και σε υψηλές αποδόσεις, κάτι που ως τώρα δεν έχει ληφθεί υπόψη.

Οι Engle, Lilien and Robins (1987) επέκτειναν το εύρος των εξειδικεύσεων της *εξίσωσης του μέσου (mean equation)*, προτείνοντας να εισαχθεί σ' αυτήν μια συνάρτηση της διακύμανσης των ε_t, κατασκευάζοντας έτσι το *GARCH(p,q)-M (GARCH in the Mean)*. Το υπόδειγμά τους, όπως παρουσιάζεται και από τους Zivot and Wang (2003) και Brooks (2002), είναι:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \delta f(\sigma_t) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &\sim (\text{οποιαδήποτε μορφή GARCH}) \end{aligned} \tag{3.42}$$

Η *εξίσωση της διακύμανσης* μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μορφή είτε από τα υποδείγματα που προηγήθηκαν, είτε από αυτά που θα ακολουθήσουν. Υπάρχει έτσι η δυνατότητα επιλογής για το αν θα συμπεριληφθεί μοντελοποίηση της ασυμμετρίας ή όχι. Η συνάρτηση $f(\sigma_t)$ μπορεί επίσης να πάρει διάφορες μορφές, αλλά οι πιο συνηθισμένες, που υπάρχουν είναι τρεις[17]:

$$f(\sigma_t) = \begin{cases} \sigma_{t-1} & (\text{τυπική απόκλιση στο Μέσο}) \\ \sigma_{t-1}^2 & (\text{διακύμανση στο Μέσο}) \\ \ln(\sigma_{t-1}^2) & (\text{λογάριθμοι της διακύμανσης στο Μέσο}) \end{cases}$$

Ο παράγοντας δ στην (3.42) μετρά *την ανταμοιβή για τον κίνδυνο* που αναλαμβάνουν οι επενδυτές (risk premium). Αν ο συντελεστής αυτός είναι θετικός και στατιστικά σημαντικός, τότε σημαίνει πως υψηλός κίνδυνος-μεταβλητότητα θα οδηγήσει σε υψηλές αναμενόμενες αποδόσεις, κάτι που αναμένουμε να ισχύσει.

3.1.10 Το Υπόδειγμα AGARCH(p,q)

Οι Engle and Ng (1993) συνέστησαν το υπόδειγμα *AGARCH(p,q) (Asymmetric GARCH)* για τη μοντελοποίηση της ασυμμετρίας, το οποίο έχει το πλεονέκτημα ότι εκτιμάται πιο εύκολα από τα υπόλοιπα μοντέλα.

[17] Στις τρεις αυτές μορφές, ο δείκτης του χρόνου (t-1) μπορεί να μη περιλαμβάνει υστέρηση, με συνέπεια να «συγχρονίζεται» με τη σειρά των αποδόσεων.

Το υπόδειγμα έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \lambda)^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

όπου $\lambda \geq 0$ είναι μια σταθερά που χρησιμεύει για την σύλληψη της ασυμμετρίας. Οι περιορισμοί που θέτονται είναι $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ και $\beta_j \geq 0$, ενώ επιβάλλονται και περιορισμοί στασιμότητας.

Ιδιότητες

Με τη βοήθεια ενός AGARCH(1,1), υπολογίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση. Το μοντέλο είναι:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \lambda)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση προκύπτει ως[18]:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda^2}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

και τίθεται ο περιορισμός $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$, προκειμένου να εξασφαλίσουμε θετικότητα.

Για οποιεσδήποτε τάξεις p και q ισχύει:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j}$$

με τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$. Είναι εμφανές ότι οι περιορισμοί είναι όμοιοι με τους αντίστοιχους ενός απλού GARCH, ενώ οι προβλέψεις με βάση το συγκεκριμένο υπόδειγμα συγκλίνουν στη μακροχρόνια ισορροπία τους, όπως αυτή παριστάνεται μέσω της μη-δεσμευμένης διακύμανσης.

[18] Καταλήγουμε εκεί αφού αναλυθεί η υψωμένη σε δύναμη παρένθεση και πάρουμε αναμενόμενες τιμές.

3.1.11 Το Υπόδειγμα NGARCH(p,q)

Ο Duan (1995) ανέπτυξε το μοντέλο *NGARCH(p,q) (Non-linear asymmetric GARCH)*, που συλλαμβάνει τις ασύμμετρες επιδράσεις στη διακύμανση και χρησιμεύει περισσότερο στην αποτίμηση OPTIONS και στην αντιστάθμιση κινδύνου.

Στους δυο αυτούς τομείς, γίνεται συχνά η υπόθεση της «τέλειας αποτελεσματικής αγοράς», που ωστόσο δεν ισχύει αν η μεταβλητότητα συμπεριφέρεται στοχαστικά. Ο Duan παρόλα αυτά απέδειξε πως ακόμη και υπό στοχαστική μεταβλητότητα η υπόθεση της τέλειας αγοράς είναι αληθής σε μεγάλο βαθμό, υπό την προϋπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν το μοντέλο NGARCH.

Το υπόδειγμα, όπως δίνεται από την Alexander (2001) έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t \xi_t \\ \xi_t &= \varepsilon_t + \lambda \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 (\xi_{t-i} - \theta - \lambda)^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \qquad (3.45)$$

με $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ και $\theta + \lambda > 0$.

3.1.12 Το Υπόδειγμα HARCH(p)

Το υπόδειγμα *HARCH(p) (Heterogeneous ARCH)* αναπτύχθηκε από τους Müller, Dacorogna, Davé, Olsen, Pictet and von Weizsäcker (1997) και ειδικεύεται στη μοντελοποίηση της ασυμμετρίας που προκύπτει όταν η μεταβλητότητα προέρχεται από μια ετερογενή σειρά αποδόσεων, δηλαδή από αποδόσεις που δεν ισαπέχουν χρονικά μεταξύ τους. Η περίπτωση αυτή παρατηρείται συχνά όταν αναλύονται δεδομένα υψηλής συχνότητας (high frequency data). Αυτή η ικανότητα το καθιστά διαφορετικό από κάθε άλλο υπόδειγμα της οικογένειας GARCH.

Το HARCH(p) έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \left[\alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} \varepsilon_{t-j} \right)^2 \right] \end{aligned} \qquad (3.46)$$

με περιορισμούς $\alpha_0 > 0$, $\alpha_p > 0$ και $\alpha_i \geq 0$ για $i=1,2,\ldots,p-1$.

Ιδιότητες

Για να εξαχθούν οι ιδιότητες του μοντέλου, θα χρησιμοποιήσουμε το HARCH(2), εφόσον το HARCH(1) δεν διαφέρει σε τίποτα από το απλό ARCH(1). Η μορφή του έχει ως:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})^2 = \\
&\quad \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + 2\alpha_2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Όπως γίνεται αντιληπτό, το μοντέλο έχει δυο μορφές παρουσίασης. Η δεύτερη θυμίζει μια διαδικασία ARCH(2), με τη διαφορά ότι υπάρχει επιπλέον ο τελευταίος όρος με το διπλάσιο γινόμενο. Αυτός είναι ο παράγοντας που λαμβάνει υπόψη την ασυμμετρία, καθώς αν υπάρχουν δυο διαδοχικά σφάλματα με το ίδιο πρόσημο, είτε αυτό είναι αρνητικό, είτε θετικό, η επιρροή στη διακύμανση θα είναι αυξητική και μεγαλύτερη από την περίπτωση όπου τα πρόσημα είναι διαφορετικά και τα σφάλματα αλληλοεξουδετερώνονται. Επομένως, εδώ παίζει σημαντικό ρόλο το πρόσημο των σφαλμάτων προηγούμενων περιόδων (sign effect). Κάποιος θα ανέμενε την τιμή του συντελεστή α_2 να είναι θετική και στατιστικά σημαντική, ώστε να μην αγνοούνται οι ασύμμετρες επιδράσεις.

Η μη-δεσμευμένη διακύμανση βρίσκεται παίρνοντας τις αναμενόμενες τιμές από τις παραμέτρους του μοντέλου:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - 2\alpha_2}$$

Για τάξη μεγαλύτερη, η μη-δεσμευμένη διακύμανση δίνεται ως:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} i \cdot \alpha_i}$$

Συνεπώς θα πρέπει να επιβληθούν οι περαιτέρω περιορισμοί $\alpha_1 + 2\alpha_2 < 1$ στην πρώτη περίπτωση και $\sum_{i=1}^{p} i \cdot \alpha_i < 1$ στη δεύτερη, για να είναι η διακύμανση θετική και για να υπάρχει σύγκλιση των προβλέψεων.

Με βάση το HARCH(2), μπορεί να βρεθεί η τέταρτη ροπή (κύρτωση) των σφαλμάτων. Η αναμενόμενη τιμή της 2m-ιοστής ροπής είναι:

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = E(\sigma_t^{2m}) E(z_t^{2m})$$

άρα αποσκοπώντας στην τέταρτη ροπή, προκύπτει:

$$E(\varepsilon_t^4) = 3E(\sigma_t^4)$$

όπου το 3 είναι η κύρτωση της μεταβλητής $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ (τυποποιημένα κατάλοιπα), για την οποία είναι γνωστό εξαρχής ότι ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Αποδεικνύεται ότι για να είναι πεπερασμένη η τιμή της κύρτωσης στο HARCH(2), θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$3[\alpha_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2] + \alpha_2[1 + 3(\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)] < 1$$

ενώ για μοντέλα υψηλότερης τάξης η συνθήκη γίνεται πολύ πιο πολύπλοκη.

3.1.13 Το Υπόδειγμα IGARCH(p,q)

Η μεταβλητότητα των περισσότερων περιουσιακών στοιχείων όπως και οι προβλέψεις της είναι στάσιμες διαδικασίες και παρουσιάζουν σύγκλιση προς κάποιο μακροχρόνιο μέσο επίπεδο ισορροπίας. Ωστόσο, σε τιμές συναλλάγματος και σε τιμές διαφόρων εμπορευματικών προϊόντων η μεταβλητότητα όχι μόνο δεν παρουσιάζει σύγκλιση, αλλά έχει την ιδιότητα του Τυχαίου Περίπατου (Random Walk). Τα υποδείγματα που είδαμε ως τώρα δεν είναι αξιόπιστα για τη μοντελοποίηση της διακύμανσης σε τέτοιες περιπτώσεις. Το *IGARCH(p,q) (Integrated GARCH)* κατασκευάστηκε γι αυτόν ακριβώς το σκοπό. Οι τάξεις p και q θα πρέπει να είναι ίσες με τη μονάδα, έτσι ώστε για το συντελεστή β_1 να υπάρχει ο συμπληρωματικός συντελεστής $(1-\beta_1)$ και το άθροισμά τους να είναι μονάδα.

Η χρήση του συνιστάται όταν κάποιο GARCH(p,q) παρασταθεί ως ARMA στα τετράγωνα των σφαλμάτων και τα πολυώνυμα παρουσιάζουν μοναδιαία ρίζα.

Το IGARCH(1,1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + (1-\beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.48}$$

με μόνους περιορισμούς τους $\alpha_0>0$ και $0<\beta_1<1$, διότι οι περιορισμοί με σκοπό τη στασιμότητα θα είναι ανούσιοι. Φυσικά εδώ δεν ορίζεται η μη-δεσμευμένη διακύμανση, γιατί στον παρονομαστή του κλάσματος θα υπάρχει μηδενικό.

<u>Προβλέψεις Διακύμανσης</u>

Οι προβλέψεις με το συγκεκριμένο μοντέλο δίνουν για h>1 βήματα μπροστά:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0 + \sigma_{T+h-1|T}^2 \tag{3.49}$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία πολλές φορές, παίρνουμε τον αναδρομικό τύπο:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \alpha_0(h-1) + \sigma_{T+1|T}^2 \tag{3.50}$$

και είναι φανερό ότι για $h \to \infty$ δεν υπάρχει σύγκλιση, απεναντίας οι προβλέψεις τείνουν κι αυτές στο άπειρο.

3.1.14 Πρόσθετες Εξειδικεύσεις

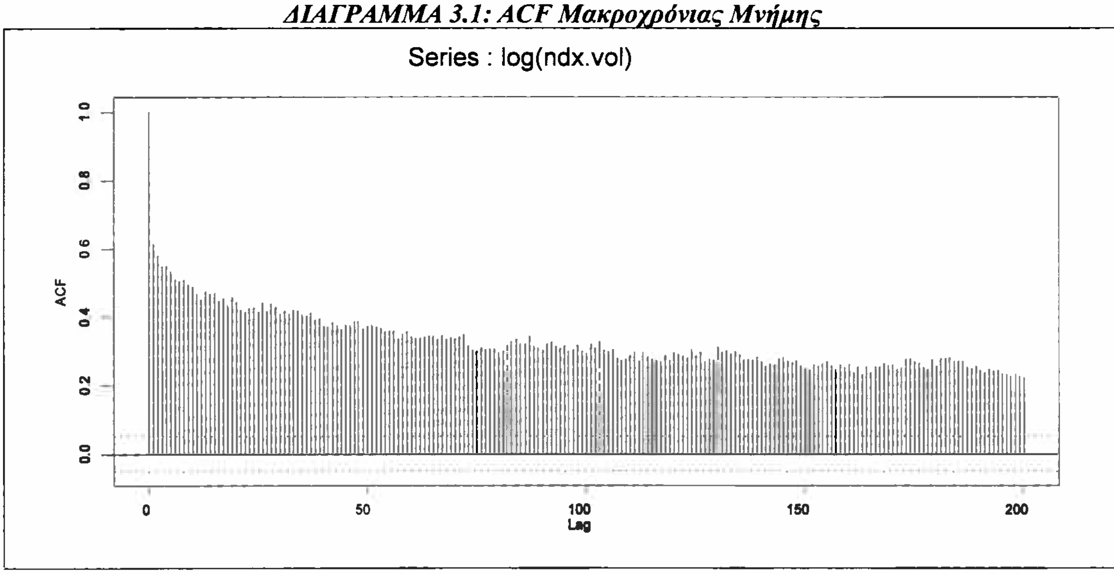
Είδαμε στην Υποενότητα 3.1.2 ότι η εξίσωση των αποδόσεων (mean equation) μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, ανάλογα με τις προτιμήσεις του αναλυτή και με τις ιδιότητες που εμφανίζει η σειρά. Κάτι ανάλογο συμβαίνει όμως και με την εξίσωση της διακύμανσης (variance equation). Εκτός από τις περιπτώσεις κάποιων υποδειγμάτων που παρέχουν δυνατότητα επιλογής για τη συμπερίληψη ή όχι του *'leverage effect'*, είναι κι εδώ δυνατή η χρήση κάποιων εξωγενών ερμηνευτικών μεταβλητών όπως για παράδειγμα ο Όγκος Συναλλαγών (Trading Volume), η ιστορική μεταβλητότητα και η τεκμαρτή μεταβλητότητα[19]. Ακόμη, συνηθίζεται η χρησιμοποίηση ψευδομεταβλητών που εξετάζουν επιδράσεις στο σταθερό όρο της διακύμανσης. Τέτοιο ρόλο μπορεί να παίξουν οι μέρες Δευτέρα και Παρασκευή που εξετάζουν αν η έλευση του Σαββατοκύριακου επηρεάζει την τιμή της μεταβλητότητας (weekend effect), καθώς και ο Όγκος Συναλλαγών (παίρνοντας την τιμή 1 αν ο όγκος κάποιας συγκεκριμένης μέρας ξεπερνά το μέσο εβδομαδιαίο όγκο και 0 στην αντίθετη περίπτωση).

3.2 Μοντέλα Μακροχρόνιας Μνήμης

Στην ενότητα που προηγήθηκε είδαμε πως τα υποδείγματα περιελάμβαναν τη μοντελοποίηση τόσο του μέσου όσο και της διακύμανσης. Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε και με υποδείγματα που μοντελοποιούν μόνο τη μεταβλητότητα (είτε ως διακύμανση είτε ως τυπική απόκλιση). Τα υποδείγματα αυτά ανήκουν στην οικογένεια των *κλασματικά ολοκληρωμένων ARMA* και είναι τα *'Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average-ARFIMA'* και *'Semiparametric Fractionally Autoregressive-SEMIFAR'*.

Επίσης θα δούμε μοντέλα των *κλασματικά ολοκληρωμένων GARCH*, όπως τα *'Fractionally Integrated GARCH-FIGARCH'* και *'Fractionally Integrated EGARCH-FIEGARCH'*, που όπως τα GARCH που αναλύθηκαν ως τώρα, περιλαμβάνουν εκτός από την εξίσωση δεσμευμένης διακύμανσης και την εκτίμηση της εξίσωσης του μέσου.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.1: ACF Μακροχρόνιας Μνήμης



Η χρήση των μοντέλων αυτών ενδείκνυται όταν η σειρά της μεταβλητότητας ή οι λογάριθμοι αυτής παρουσιάζουν ιδιότητες μακροχρόνιας μνήμης (long memory).

[19] Στην περίπτωση που στην εξίσωση της διακύμανσης περιλαμβάνεται ως ερμηνευτική μεταβλητή η ιστορική ή η τεκμαρτή μεταβλητότητα, έχουμε το μοντέλο GX, όπου το G προκύπτει από τον όρο GARCH και το X από το γεγονός ότι στο μοντέλο αυτό η ιστορική και τεκμαρτή μεταβλητότητα συμβολίζονται με το γράμμα X, προς αποφυγή σύγχυσης.

Κάτι τέτοιο γίνεται αντιληπτό με τη βοήθεια της ACF της σειράς που μας ενδιαφέρει (μεταβλητότητα ή λογάριθμοι μεταβλητότητας), καθώς και με αξιόπιστους στατιστικούς ελέγχους[20]. Μια χαρακτηριστική μορφή ACF που παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη παριστάνεται στο παραπάνω γράφημα, το οποίο έχει να κάνει με τους λογαρίθμους της ημερήσιας μεταβλητότητας του δείκτη NASDAQ-100 για το χρονικό διάστημα από 2 Ιανουαρίου 1996 έως 12 Οκτωβρίου 2001. Φαίνεται εύκολα ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης παραμένουν στατιστικά σημαντικοί για πολύ περισσότερες από 200 υστερήσεις, υπερβαίνοντας τα 95% Διαστήματα Εμπιστοσύνης και φθίνοντας με πολύ αργό ρυθμό. Η ερμηνεία ενός τέτοιου γεγονότος είναι ότι η λογαριθμική μεταβλητότητα της περιόδου t εξαρτάται θετικά από την αντίστοιχη της περιόδου t-100, t-200 κ.ο.κ., δηλαδή η παρούσα λογαριθμική μεταβλητότητα «θυμάται» την τιμή που είχε η ίδια πριν από πολλές χρονικές περιόδους και εξαρτάται θετικά απ' αυτήν. Είναι επομένως ευνόητος ο λόγος για τον οποίο τα υποδείγματα αυτά πήραν το όνομα που έχουν.

Σύμφωνα με τον ορισμό της μακρόχρονης μνήμης, μια στάσιμη διαδικασία y_t παρουσιάζει την ιδιότητα αυτήν, αν:

$$\rho_k \to c k^{-\alpha}, \text{για } k \to \infty$$

όπου ρ_k είναι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης k υστερήσεων, c είναι μια θετική σταθερά και α είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1. Οι συντελεστές φθίνουν τόσο αργά που στην ουσία δεν προσθέτονται, γιατί:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k = \infty$$

Για τη μέτρηση του βαθμού μακροχρόνιας μνήμης χρησιμοποιείται ο συντελεστής του Hurst (1951), που ισούται με:

$$H = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad H \in (0.5, 1)$$

και όσο μεγαλύτερη η τιμή του, τόσο πιο έντονη η ιδιότητα της μακροχρόνιας μνήμης που χαρακτηρίζει τη σειρά y_t.

Οι Granger and Joyeux (1980) και ο Hosking (1981) απέδειξαν ανεξάρτητα οι μεν από το δε ότι μια διαδικασία μακράς μνήμης y_t μοντελοποιείται παραμετρικά, επιτρέποντας στην *ολοκλήρωση (integration)* να πάρει μορφή *κλασματικής ολοκλήρωσης (fractional integration)*.

Συγκεκριμένα η διαδικασία y_t μοντελοποιείται ως:

---

[20] Οι πιο γνωστοί έλεγχοι μακροχρόνιας μνήμης είναι το R/S-statistic (Range over Standard deviation) που προτάθηκε από τον Hurst (1951) και το GPH-test που πήρε το όνομά του από τα αρχικά των Geweke and Porter-Hudak (1983), οι οποίοι και το πρότειναν. Απ' αυτούς τους ελέγχους ο πρώτος αποτελεί και μέθοδο εύρεσης του συντελεστή H που θα δούμε στη συνέχεια, ενώ ο τελευταίος αποτελεί και μέθοδο εκτίμησης της παραμέτρου d που επίσης θα δούμε στη συνέχεια. Έμμεσα βέβαια η κάθε μέθοδος εκτιμά και τις δυο παραμέτρους, εφόσον υπό προϋποθέσεις υπάρχει όπως θα φανεί μεταξύ τους ακριβής μαθηματική σχέση. Άλλες μέθοδοι για την εκτίμηση του d είναι η μέθοδος του Περιοδογράμματος (Periodogram method) και η μέθοδος του Whittle (Whittle's method).

$$(1-B)^d (y_t - \mu) = u_t \tag{3.51}$$

όπου B είναι και πάλι ο Οπισθοδρομικός Τελεστής, d είναι η τάξη των διαφορών που δεν παίρνει απαραίτητα ακέραιη τιμή, μ είναι ο μέσος της y_t και u_t είναι μια στάσιμη σειρά σφαλμάτων με βραχυχρόνια μνήμη και μέσο μηδέν.

Πολλές μη-στάσιμες σειρές μετατρέπονται σε στάσιμες θέτοντας d=1, δηλαδή παίρνοντας Πρώτες Διαφορές. Ωστόσο, για άλλες τόσες οικονομικές χρονολογικές σειρές, μια ακέραιη τάξη του d ενδέχεται να είναι υπερβολικά μεγάλη, λόγος για τον οποίο χρειάζεται το d να είναι κλασματικό. Συγκεκριμένα, η κλασματική διαφορά για κάθε d>-1, ορίζεται ως:

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k \tag{3.52}$$

όπου $\binom{d}{k} = \dfrac{d!}{k!(d-k)!}$.

Αποδεικνύεται για τα δυο επόμενα μοντέλα πως (α) αν βρεθεί ότι $|d|>0.5$, η διαδικασία y_t είναι μη-στάσιμη, (β) αν $0<d<0.5$, η y_t είναι στάσιμη και παρουσιάζει μακρόχρονη μνήμη, ενώ τέλος (γ) αν ισχύει $-0.5<d<0$ η y_t είναι στάσιμη κι έχει βραχυχρόνια μνήμη. Βλέπουμε ότι τα μοντέλα της ενότητας αυτής τοποθετούνται μεταξύ των στάσιμων διαδικασιών I(0) και των ολοκληρωμένων διαδικασιών πρώτης τάξης I(1), δηλαδή των μη-στάσιμων σειρών, των οποίων οι πρώτες διαφορές παρουσιάζουν στασιμότητα. Ανήκουν με άλλα λόγια σε μια ενδιάμεση κατηγορία υποδειγμάτων.

Όταν μια σειρά έχει μακρόχρονη μνήμη, τότε επαληθεύεται και η σχέση:

$$d = H - \frac{1}{2}$$

κι άρα οι παράμετροι d και H μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά, γιατί αλληλοπροσδιορίζονται.

3.2.1 Το Υπόδειγμα ARFIMA(p,d,q)

Τα παραδοσιακά υποδείγματα ARMA δεν έχουν την ικανότητα να συλλάβουν την μακρά μνήμη που εμφανίζει μεγάλος αριθμός χρονολογικών σειρών, μεταξύ των οποίων και η μεταβλητότητα.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε το μοντέλο *ARFIMA(p,d,q) (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average)* που έχει την ικανότητα να μοντελοποιεί μακροχρόνια μνήμη απ' τη μια και βραχυχρόνια χαρακτηριστικά μιας στάσιμης σειράς απ' την άλλη.

Τα παραδοσιακά ARIMA(p,d,q) για τη μοντελοποίηση μιας μη-στάσιμης σειράς που στασιμοποιείται μέσω διαφορών, είναι:

$$\Phi(B)(1-B)^d (y_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t \tag{3.53}$$

όπου Φ(B) και Θ(B) είναι πολυώνυμα p και q βαθμού αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\Phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i \quad \text{και} \quad \Theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j B^j$$

Οι ρίζες των πολυωνύμων θα πρέπει να βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου και ο παράγοντας ε_t να κατανέμεται κανονικά και ανεξάρτητα με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση.

Αφήνοντας το d να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, χωρίς να περιοριζόμαστε σε θετικούς ακέραιους, μεταβαίνουμε στα ARFIMA(p,d,q), που περιγράφονται στους Andersen, Bollerslev, Diebold and Ebens (2001) και Andersen, Bollerslev, Diebold and Labys (2003). Η παράμετρος d εκτιμάται μέσω της Μεθόδου Μεγίστης Πιθανοφάνειας (MLE).

Σε πολλές χρονολογικές σειρές υπάρχει το πρόβλημα ότι η στασιμότητα απέχει ελάχιστα από τη μη-στασιμότητα, κατά συνέπεια ο κάθε έλεγχος μπορεί να παράγει διαφορετικό αποτέλεσμα κι έτσι να μη μπορούμε να καταλήξουμε σε ασφαλές συμπέρασμα. Κάποιος όμως εύλογα θα αναρωτηθεί αν πρέπει να διαφοροποιήσει την αρχική του σειρά, προκειμένου να επιτύχει στασιμότητα και στη συνέχεια να εκτιμήσει το υπόδειγμα ARFIMA κι αυτό γιατί η σειρά y_t που μοντελοποιείται θα πρέπει να είναι στάσιμη.

Ο Beran (1995) αντιμετωπίζει αυτή τη δυσκολία προτείνοντας μια παραλλαγή του μοντέλου (3.53). Συγκεκριμένα μετασχηματίζει το μοντέλο σε:

$$\Phi(B)(1-B)^{\delta}[(1-B)^{m} y_t - \mu] = \Theta(B)\varepsilon_t \tag{3.54}$$

που ισχύει για κάθε -0.5<δ<0.5, ενώ τα πολυώνυμα Φ(B) και Θ(B) ορίζονται όπως και πριν. Η παράμετρος m είναι η αναγκαία τάξη των διαφορών προκειμένου να επιτευχθεί στασιμότητα στην y_t κι άρα η τελική παράμετρος που μας ενδιαφέρει ισούται με d=δ+m. Συνήθως επαρκεί να θέσουμε m=0 ή m=1, ενώ αν η παράμετρος εκτιμηθεί με MLE και πάρει την τιμή μηδέν, σημαίνει πως η αρχική σειρά είναι στάσιμη.

Στις σχέσεις (3.53) και (3.54) η σειρά y_t προφανώς συμβολίζει τη μεταβλητότητα, την οποία και ενδιαφερόμαστε να μοντελοποιήσουμε. Οι μορφές που υιοθετεί η y_t είναι κυρίως οι εξής:

$$y_t = \begin{cases} \sigma_t^2 \text{ (διακύμανση των αποδόσεων)} \\ \sigma_t \text{ (τυπική αποκλιση των αποδόσεων)} \\ \ln\sigma_t^2 \text{ (λογάριθμοι της διακύμανσης των αποδόσεων)} \\ \ln\sigma_t \text{ (λογάριθμοι της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων)} \end{cases}$$

Προβλέψεις Διακύμανσης

Το υπόδειγμα (3.53) γράφεται κι ως εξής:

$$\Phi(B)(1-B)^{d}\tilde{y}_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

όπου $\tilde{y}_t = y_t - \mu$. Το παραπάνω μοντέλο δύναται να πάρει τη μορφή ενός AR(∞), καθώς έχουμε:

$$\frac{\Phi(B)(1-B)^d}{\Theta(B)}\tilde{y}_t = \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$\Psi(B)\tilde{y}_t = \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k B^k\right)\tilde{y}_t = \varepsilon_t$$

με $\Psi(B) = \dfrac{\Phi(B)(1-B)^d}{\Theta(B)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k B^k$, όπως τονίζουν οι Pong, Shackleton, Taylor and Xu (2002). Άρα, το παραπάνω γράφεται πιο αναλυτικά ως:

$$\tilde{y}_t = \psi_1\tilde{y}_{t-1} + \psi_2\tilde{y}_{t-2} + \ldots + \psi_\infty\tilde{y}_{t-\infty} + \varepsilon_t = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\tilde{y}_{t-k} + \varepsilon_t \tag{3.55}$$

Για λόγους απλούστευσης βέβαια, η τάξη του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος δεν παραμένει ∞, αλλά περιορίζεται σε μια πεπερασμένη μεν, πολύ υψηλή δε τιμή p (truncation method). Οι συντελεστές του AR(p) είναι οι πρώτοι p συντελεστές του παραπάνω AR(∞). Με άλλα λόγια:

$$\tilde{y}_t = \psi_1\tilde{y}_{t-1} + \psi_2\tilde{y}_{t-2} + \ldots + \psi_p\tilde{y}_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.56}$$

Η πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά είναι:

$$\tilde{y}_{T+1|T} = E(\tilde{y}_{T+1} \mid I_T) =$$
$$E(\psi_1\tilde{y}_T + \psi_2\tilde{y}_{T-1} + \ldots + \psi_p\tilde{y}_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} \mid I_T) =$$
$$\psi_1\tilde{y}_T + \psi_2\tilde{y}_{T-1} + \ldots + \psi_p\tilde{y}_{T+1-p}$$

με την αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών σφαλμάτων να τίθεται ίση με μηδέν. Η πρόβλεψη για h βήματα μπροστά, με $1<h\leq p$ είναι:

$$\tilde{y}_{T+h|T} = E(\tilde{y}_{T+h} \mid I_T) =$$
$$E(\psi_1\tilde{y}_{T+h-1} + \psi_2\tilde{y}_{T+h-2} + \ldots + \psi_p\tilde{y}_{T+h-p} + \varepsilon_{T+h} \mid I_T) =$$
$$\psi_1\tilde{y}_{T+h-1|T} + \psi_2\tilde{y}_{T+h-2|T} + \ldots + \psi_p\tilde{y}_{T+h-p}$$

που εκφράζεται κι ως:

$$\tilde{y}_{T+h|T} = \sum_{k=1}^{h-1}\psi_k\tilde{y}_{T+h-k|T} + \sum_{k=h}^{p}\psi_k\tilde{y}_{T+h-k} \tag{3.57}$$

και αν h>p, η πρόβλεψη γίνεται:

$$\widetilde{y}_{T+h|T} = \sum_{k=1}^{p} \psi_k \widetilde{y}_{T+h-k|T} \quad (3.58)$$

Οι παραπάνω προβλέψεις είναι για τη μεταβλητή $\widetilde{y}_t = y_t - \mu$ κι άρα παίρνουμε την επιθυμητή πρόβλεψη ως $y_{T+h|T} = \widetilde{y}_{T+h|T} + \mu$. Η τελική πρόβλεψη για τη διακύμανση ή την τυπική απόκλιση εξαρτάται από τη μορφή της y_t. Δεν προκύπτει όμως πάντα η πρόβλεψη απ' ευθείας με λύση της $y_{T+h|T}$ ως προς τη μεταβλητότητα, καθώς μια τέτοια κίνηση καταλήγει τις περισσότερες φορές σε μεροληπτικά αποτελέσματα.

Οι Granger and Newbold (1977) για παράδειγμα προτείνουν μια μέθοδο προβλέψεων στην περίπτωση όπου $y_t = \ln(\sigma_t)$, ισχυριζόμενοι ότι δεν επαρκεί απλά η εκθετική συνάρτηση $\sigma_{T+h|T} = \exp(y_{T+h|T})$. Προτείνουν η πρόβλεψη h βημάτων στο μέλλον, να υπολογίζεται ως:

$$\sigma_{T+h|T} = \exp\left(y_{T+h|T} + \frac{1}{2} S_h^2 \right)$$

όπου ο πρώτος όρος αποτελεί τη λογαριθμική πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης, δηλαδή $y_{T+h|T} = E[\ln(\sigma_{T+h}) \mid I_T]$ και ο δεύτερος τη διακύμανση της πρόβλεψης, δηλαδή $S_h^2 = \mathrm{Var}\{E[\ln(\sigma_{T+h}) \mid I_T]\}$.

3.2.2 Το Υπόδειγμα SEMIFAR(p,d)

Το μοντέλο αυτό θυμίζει σε πολλά σημεία το προηγούμενο, έχει όμως κάποιες βασικές διαφορές. Το *SEMIFAR(p,d) (Semiparametric Fractionally Autoregressive)* που προτάθηκε από τους Beran and Ocker (2001) έχει τη μορφή:

$$\Phi(B)(1-B)^{\delta}[(1-B)^{m} y_t - g(i_t)] = \varepsilon_t \quad (3.59)$$

Η συμβολή αυτού του μοντέλου, σε αντίθεση με το ARFIMA, έγκειται στο ότι επιτρέπει στην y_t να έχει τάση, να είναι δηλαδή μη-στάσιμη. Εδώ δεν υπάρχει το πολυώνυμο $\Theta(B)$ κι άρα δεν υπάρχει τμήμα Κινητών Μέσων (Moving Average part). Επίσης, αντί του μέσου μ της y_t, στη θέση του υπάρχει η $g(i_t)$ που είναι μια συνάρτηση εξομάλυνσης της τάσης και ορίζεται στο διάστημα [0, 1], με $i_t = \frac{t}{T}$. Φυσικά κι εδώ οι εκτιμήσεις των συντελεστών επιτυγχάνονται μέσω της μεθόδου MLE, ενώ η y_t παίρνει μια από τις τέσσερις μορφές που είδαμε στην περίπτωση των ARFIMA. Οι περιορισμοί για τις παραμέτρους προκύπτουν έτσι ώστε οι ρίζες του Φ(Β) να βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου και το υπόδειγμα να είναι στάσιμο. Για την παράμετρο d ισχύει ξανά d=δ+m.

3.2.3 Το Υπόδειγμα FIGARCH(m,d,q)

Στα δυο προηγούμενα μοντέλα, απαραίτητη προϋπόθεση ήταν η ύπαρξη της σειράς της μεταβλητότητας, την οποία μοντελοποιούσαμε απευθείας. Στο μοντέλο *FIGARCH(m,d,q) (Fractionally Integrated GARCH)*, όπως άλλωστε και σε κάθε είδους GARCH, αυτή η προϋπόθεση δεν είναι αναγκαία.

Είδαμε στην Υποενότητα 3.1.4 ότι το υπόδειγμα GARCH(p,q) μπορεί να γραφεί σαν ένα ARMA(m,q) στα τετράγωνα των σφαλμάτων, όπου m=max(p,q). Δηλαδή το:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

γράφεται κι ως $\Phi(B)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)u_t$, με $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Τα πολυώνυμα είναι:

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \varphi_m B^m$$
$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \ldots - \beta_q B^q$$

με $\varphi_i = \alpha_i + \beta_i$. Αν υπάρχει μακροχρόνια μνήμη στη μεταβλητότητα, το πολυώνυμο Φ(B)=0 θα παρουσιάζει μοναδιαία ρίζα και το GARCH θα μετατραπεί σε IGARCH.

Για να επιτρέψουμε στη δεσμευμένη διακύμανση να παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη, καθώς και για να αποφύγουμε τη χρήση του IGARCH, γράφουμε το προηγούμενο ARMA(m,q) σαν ARFIMA(m,d,q), δηλαδή:

$$\Phi(B)(1-B)^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)u_t$$

με τις ρίζες των Φ(B)=0 και β(B)=0 να βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου.

Για d=0 έχουμε το απλό GARCH, ενώ για d=1 έχουμε το IGARCH. Αν όμως 0<d<1, τότε *η διαφορά με κλασματική τάξη* των τετραγωνισμένων καταλοίπων $(1-B)^d \varepsilon_t^2$ θα ακολουθεί μια στάσιμη ARMA(m,q) διαδικασία. Το παραπάνω ARFIMA(m,d,q) στα ε_t^2 γράφεται σε όρους δεσμευμένης διακύμανσης ως:

$$\boldsymbol{\beta(B)\sigma_t^2 = \alpha_0 + [\beta(B) - \Phi(B)(1-B)^d]\varepsilon_t^2} \qquad (3.60)$$

Οι Baillie, Bollerslev and Mikkelsen (1996) αποκαλούν το παραπάνω μοντέλο FIGARCH(m,d,q), στο οποίο για 0<d<1 οι συντελεστές των β(B) και Φ(B) συλλαμβάνουν τα βραχυχρόνια χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας, ενώ η παράμετρος d πιάνει τα μακροχρόνια χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας.

3.2.4 Το Υπόδειγμα FIEGARCH(m,d,q)

Το *FIEGARCH(m,d,q) (Fractionally Integrated EGARCH)* αποτελεί το τελευταίο μοντέλο με το οποίο θα ασχοληθούμε. Στο προηγούμενο υπόδειγμα, το οποίο προέρχεται από το GARCH(p,q), θα πρέπει να επιβληθούν περίπλοκοι περιορισμοί για να εξασφαλιστεί η στασιμότητα και η θετικότητα της διακύμανσης.

Κάτι τέτοιο όμως δεν χρειάζεται στο FIEGARCH, το οποίο προέρχεται από το EGARCH(p,q), που όπως είδαμε δεν απαιτεί περιορισμούς στους συντελεστές του.

Το EGARCH εκφράζεται σαν ARMA σε όρους λογαρίθμων της διακύμανσης, η οποία υπ' αυτή την έννοια είναι πάντα θετική. Οι Bollerslev and Mikkelsen (1996) πρότειναν εξής μοντέλο:

$$\Phi(B)(1-B)^d \ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}(\beta_j | z_{t-j} | + \gamma_j z_{t-j}) \tag{3.61}$$

όπου $z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ είναι όπως και στο απλό EGARCH τα τυποποιημένα κατάλοιπα με μέσο 0 και διακύμανση 1. Η διαφορά τους βρίσκεται στην παράμετρο d, η οποία στο FIEGARCH μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή κι όχι αναγκαστικά ακέραιη. Το μοντέλο είναι στάσιμο αν $0<d<1$. Το πολυώνυμο Φ(B) ορίζεται όπως και πριν, ενώ για να υπάρχει *'leverage effect'* θα πρέπει $\gamma_j \neq 0$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε όλα τα μοντέλα μακροχρόνιας μνήμης που αναφέρθηκαν υπάρχει δυνατότητα συμπερίληψης εξωγενών μεταβλητών και ψευδομεταβλητών.

3.3 Επιλογή του Κατάλληλου Υποδείγματος

Μετά την εκτίμηση των μοντέλων, προκύπτει η ανάγκη για διαγνωστικούς ελέγχους, ώστε να κριθεί αν το υπόδειγμα είναι κατάλληλο για τα δεδομένα, αν συλλαμβάνει σε ικανοποιητικό βαθμό τις ιδιότητές τους, αν θα δώσει αξιόπιστες προβλέψεις και γενικά αν εγκρίνεται και προτιμάται.

3.3.1 Διαγνωστικοί Έλεγχοι

Οι διαγνωστικοί έλεγχοι αποτελούν το επόμενο απαραίτητο στάδιο μετά την εκτίμηση του οποιουδήποτε υποδείγματος. Πραγματοποιούνται στα κατάλοιπα ή τα τυποποιημένα κατάλοιπα του μοντέλου και εξετάζουν αν αυτά πληρούν κάποιες αναγκαίες προϋποθέσεις, ενώ σε περίπτωση που το μοντέλο υστερεί σε κάποιον τομέα, οι έλεγχοι αυτοί μας πληροφορούν σχετικά με την ταυτότητά του, έτσι ώστε να επιτευχθεί όσο το δυνατόν πιο εύστοχη διόρθωση. Το πρόβλημα βέβαια είναι πως υπάρχει σχέση ανταλλαγής μεταξύ των διαφόρων κριτηρίων αξιολόγησης, με την έννοια ότι η βελτίωση κάποιου τομέα του μοντέλου κοστίζει τη χειροτέρευση κάποιου άλλου κι έτσι είναι πρακτικά αδύνατον να βρεθούν τέλεια από κάθε άποψη υποδείγματα.

Τα σφάλματα θα πρέπει να κατανέμονται κανονικά και ανεξάρτητα. Η κανονικότητα φαίνεται στο γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, στο ιστόγραμμα των καταλοίπων ή στο QQ-plot. Επίσης μπορούν να εφαρμοστούν στατιστικοί έλεγχοι κανονικότητας όπως ο Jarque-Bera και ο Shapiro-Wilk. Ακόμη, τα σφάλματα θα πρέπει να αποτελούν στάσιμη σειρά με σταθερό μέσο 0 και σταθερή διακύμανση σ^2.

Σημαντικό ρόλο παίζει κι ο έλεγχος αυτοσυσχέτισης των ε_t. Για αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης χρησιμοποιείται ο έλεγχος Durbin-Watson, ενώ για μεγαλύτερη τάξη χρησιμοποιούνται οι έλεγχοι Box-Pierce και Ljung-Box. Επιπλέον οι ACF και PACF των ε_t προσφέρουν έναν οπτικό έλεγχο της απλής και μερικής αυτοσυσχέτισης. Αν διαπιστωθεί σημαντική αυτοσυσχέτιση, σημαίνει πως υπάρχει πρόβλημα στην εξίσωση του μέσου (mean equation) και ίσως θα πρέπει να μεταβληθεί η εξίσωση των αποδόσεων.

Οι αντίστοιχοι έλεγχοι αυτοσυσχέτισης στα ε_t^2 χρησιμοποιούνται για να διαπιστωθεί αν τα σφάλματα έχουν σταθερή διακύμανση. Ένδειξη αυτοσυσχέτισης στα ε_t^2 σημαίνει πως το πρόβλημα είναι κατά πάσα πιθανότητα στην εξίσωση της διακύμανσης (variance equation) κι άρα ίσως μια αλλαγή στις τάξεις ARCH και GARCH να διορθώσει το πρόβλημα. Για εξέταση επιδράσεων ARCH εφαρμόζεται κι ο έλεγχος ARCH-LM, που αποσκοπεί να εξετάσει την προσαρμογή της εξίσωσης διακύμανσης.

3.3.2 Μέτρα Αξιολόγησης

Τα μέτρα αξιολόγησης αποτελούν αριθμητικές παραμέτρους που εξάγονται κατόπιν της εκτίμησης του υποδείγματος, βοηθούν στην αντικειμενική αξιολόγησή του και περιέχονται σε όλα τα στατιστικά-οικονομετρικά πακέτα. Η αριθμητική τους φύση παρέχει τη δυνατότητα άμεσων συγκρίσεων μεταξύ διαφόρων υποδειγμάτων που αφορούν το ίδιο σύνολο δεδομένων.

Συνήθως από ένα σύνολο πραγματικών παρατηρήσεων χρονολογικών σειρών, ένα μεγάλο ποσοστό χρησιμοποιείται για μοντελοποίηση και εκτίμηση, ενώ ένα μικρό τμήμα χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των εκτός δείγματος προβλέψεων (out of sample predictions).

Τα μέτρα που χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον για τον έλεγχο του εκτιμημένου μοντέλου είναι το Akaike Information Criterion-AIC και Bayesian Information Criterion-BIC (ή Schwartz Criterion), τα οποία έχουν ως:

$$AIC = \ln\left(\frac{SSE}{T}\right) + \frac{2k}{T}$$

$$BIC = \ln\left(\frac{SSE}{T}\right) + \frac{k(\ln T)}{T}$$

με SSE (Sum of Squared Errors) να συμβολίζει το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων, k το συνολικό αριθμό των εκτιμημένων συντελεστών συμπεριλαμβανομένων των σταθερών όρων και T το συνολικό αριθμό των παρατηρήσεων.

Το μοντέλο με τη μικρότερη τιμή σε κάποιο από τα δυο αυτά κριτήρια αποτελεί και την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Τα μέτρα που χρησιμοποιούνται τώρα για τον έλεγχο των εκτός δείγματος προβλέψεων είναι περισσότερα και υπολογίζουν κυρίως την απόκλιση (σφάλμα) που υφίσταται μεταξύ των προβλεπόμενων και των πραγματικών τιμών ή των προβλεπόμενων και των εκτιμημένων τιμών σε περίπτωση που δεν διαθέτονται οι πραγματικές παρατηρήσεις.

Τα κυριότερα απ' αυτά τα μέτρα καταγράφονται στον Πίνακα 3.1 που ακολουθεί. Για τους παρακάτω τύπους θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι $e_t = F_t - A_t$ είναι το σφάλμα πρόβλεψης για την περίοδο t, F_t είναι η προβλεπόμενη τιμή για την περίοδο t, A_t είναι η πραγματική ή εκτιμημένη τιμή για την περίοδο t, ενώ N είναι ο συνολικός αριθμός των μελλοντικών προβλέψεων.

Τα MSE και RMSE δίνουν βαρύτητα στα μεγάλα σφάλματα, καθότι αυτά τετραγωνίζονται, ενώ κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με τα MAE και MAPE. Το μοντέλο με τις χαμηλότερες τιμές στα παραπάνω κριτήρια, έχει την καλύτερη προβλεπτική ικανότητα, καθώς περιέχει το μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης. Οπότε αυτό προτιμάται για τον υπολογισμό των μελλοντικών τιμών.

Ο συντελεστής U-Theil παίρνει την τιμή 0 αν οι προβλέψεις είναι απόλυτα ακριβείς, ενώ παίρνει την τιμή 1 αν όλες οι προβλέψεις είναι μηδενικές. Αν το U-Theil ξεπερνά τη μονάδα, τότε οι προβλέψεις είναι τελείως ανακριβείς.

Τέλος, η συνάρτηση LINEX είναι ένα κριτήριο που παρουσιάζεται στους Poon and Granger (2001) και δίνει διαφορετικά βάρη στα θετικά σφάλματα σε σχέση με τα βάρη των αρνητικών σφαλμάτων, δίνει με άλλα λόγια διαφορετική σημασία, ανάλογα με το πρόσημο του σφάλματος πρόβλεψης. Αν α>0, η συνάρτηση καταλήγει σχεδόν γραμμική για υπερτιμημένες προβλέψεις και εκθετική για υποτιμημένες προβλέψεις. Η επιλογή της παραμέτρου α είναι σαφώς υποκειμενική.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων

-Μέσο Σφάλμα Τετραγώνου (Mean Squared Error)	$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e_t^2$
-Τετραγωνική Ρίζα του MSE (Root Mean Squared Error)	$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e_t^2}$
-Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error)	$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \lvert e_t \rvert$
-Μέσο Απόλυτο Ποσοστιαίο Σφάλμα (Mean Absolute Percentage Error)	$\mathrm{MAPE} = \frac{100}{N}\sum_{t=1}^{N} \left\lvert \frac{e_t}{A_t} \right\rvert$
-Συντελεστής του Theil (Theil's Inequality Coefficient)	$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e_t^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} A_t^2}}$
-Συνάρτηση LINEX (Linear-Exponential Function)	$\mathrm{LINEX} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \left[\exp(-\alpha e_t) + \alpha e_t - 1\right]$

4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Στο σημείο αυτό, σκοπός μας είναι η εφαρμογή, εκτίμηση και αξιολόγηση των μοντέλων που αναλύθηκαν στο προηγούμενο μέρος σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς. Στη συνέχεια, προχωρούμε σε επιλογή των πιο αξιόπιστων εξ αυτών και στη χρησιμοποίησή τους για τη διενέργεια μελλοντικών προβλέψεων.

4.1 Δεδομένα Υψηλής Συχνότητας

Στην πρώτη ενότητα αυτού του μέρους θα ασχοληθούμε με στοιχεία υψηλής συχνότητας (high frequency data). Το πρώτο δείγμα έχει να κάνει με το δείκτη DAX και συγκεκριμένα με 114785 τιμές κλεισίματος, που καταγράφηκαν ανά πεντάλεπτο διάστημα (intra-day data), από 16 Φεβρουαρίου 2001 έως 30 Δεκεμβρίου 2004. Συνολικά, αν ληφθούν υπόψη οι αργίες και οι μέρες που για άγνωστους λόγους οι παρατηρήσεις είναι ανεπαρκείς, το δείγμα αποτελείται από 964 ημέρες.

Το δεύτερο δείγμα αποτελείται από 90438 πεντάλεπτες τιμές κλεισίματος, που αφορούν το δείκτη CAC-40. Το χρονικό διάστημα είναι από 12 Απριλίου 2001 μέχρι 31 Δεκεμβρίου 2004, με συνολικά 917 εργάσιμες ημέρες[1].

Το διάστημα των 5 λεπτών έχει κριθεί ως το πλέον κατάλληλο και αμερόληπτο όσον αφορά την ανάλυση της ημερήσιας μεταβλητότητας χρηματιστηριακών δεικτών, καθώς η συχνότητα αυτή είναι ικανή να «πιάσει» τα μικρογεγονότα που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια μιας τυπικής εργάσιμης ημέρας.

4.1.1 Ανάλυση του Δείκτη DAX

Έχοντας τις πεντάλεπτες παρατηρήσεις του DAX για το χρονικό διάστημα που αναφέρθηκε, χρησιμοποιούμε την τετραγωνική ρίζα της σχέσης (2.8) για τον υπολογισμό της ημερήσιας μεταβλητότητας σε όρους τυπικής απόκλισης (daily realized volatility) και τη σχέση (2.2) για τις ημερήσιες αποδόσεις[2] (daily returns).

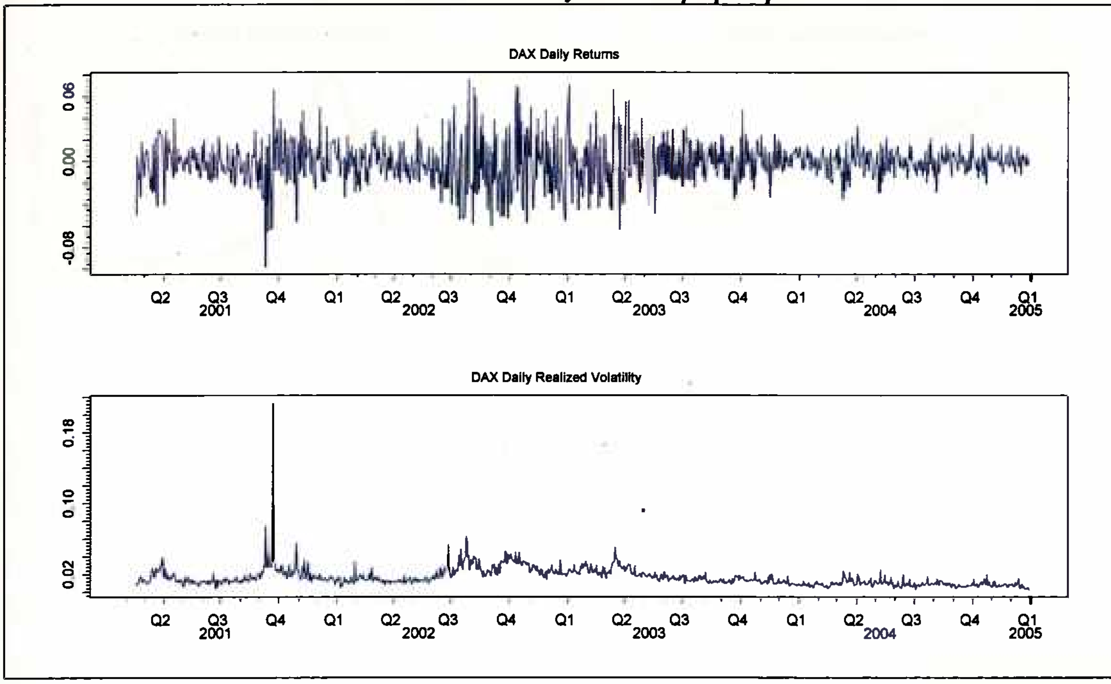
Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται οι ημερήσιες αποδόσεις και η ημερήσια μεταβλητότητα του δείκτη DAX. Είναι εμφανές ότι υπάρχει *'volatility clustering'*, ενώ η μεταβλητότητα αυξομειώνεται ακολουθώντας τις υψηλές ή χαμηλές αποδόσεις. Στο γράφημα της μεταβλητότητας παρατηρούμε μια ακραία τιμή γύρω στο 21%, της οποίας προηγούνται και έπονται κι άλλες υψηλές τιμές. Η παρατήρηση αυτή συνέβη στις 21 Σεπτεμβρίου 2001, δέκα μέρες μετά το τρομοκρατικό χτύπημα της 11ης Σεπτεμβρίου 2001, κάτι που αιτιολογεί απότομες αυξήσεις στη μεταβλητότητα όλων των χρηματιστηριακών δεικτών. Από τα μέσα του 2003 και έπειτα παρατηρείται αισθητή πτώση της μεταβλητότητας και κατά συνέπεια σταθερή διακύμανση στις αποδόσεις, η πορεία των οποίων προσεγγίζει διαδικασία Λευκού Θορύβου (White Noise).

---

[1] Τα αριθμητικά στοιχεία υψηλής συχνότητας αποκτήθηκαν μέσω της ηλεκτρονικής διεύθυνσης http://www.fin-rus.com/analysis/export/default.asp.

[2] Επειδή στη σχέση (2.2) χάνεται η πρώτη απόδοση, το κενό αναπληρώνεται με χρήση της *'cubic-spline interpolation'*.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1: Αποδόσεις και Μεταβλητότητα DAX



Μετά από έλεγχο Dickey-Fuller προκύπτει ότι οι αποδόσεις είναι στάσιμη σειρά. Κάποια στατιστικά μέτρα των αποδόσεων και της μεταβλητότητας είναι:

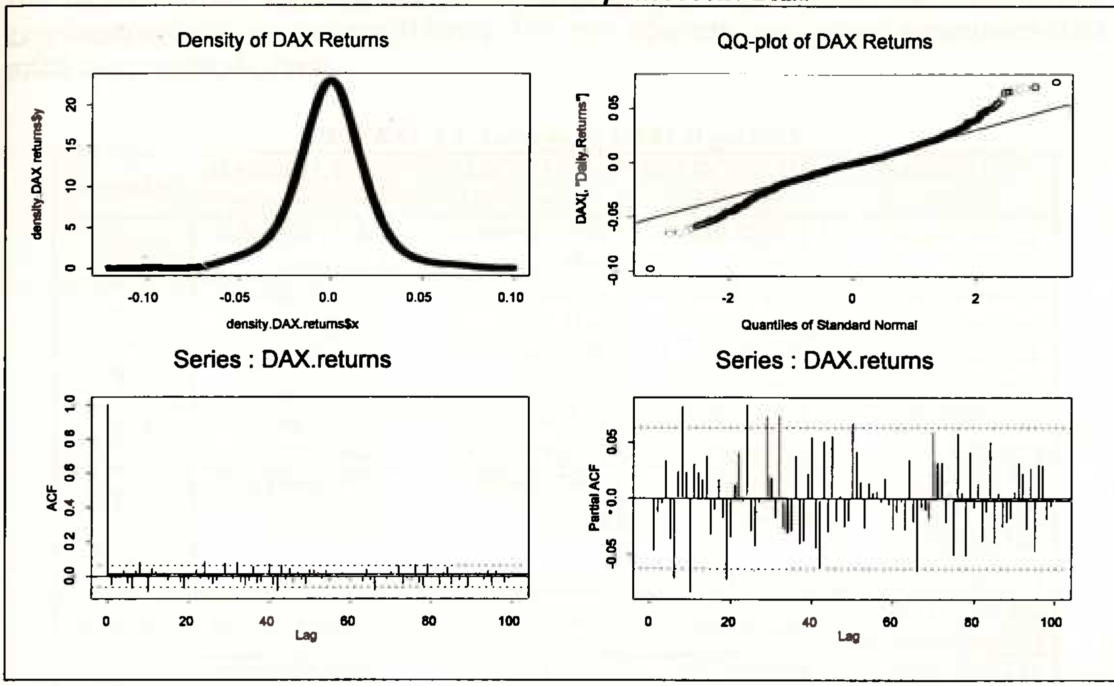
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: Στατιστικά Μέτρα DAX

	Αποδόσεις	**Μεταβλητότητα**
Μέσος	-0.000481	0.017060
Τυπική Απόκλιση	0.019540	0.011140
Ασυμμετρία	-0.051450	6.475000
Κύρτωση	5.034000	102.900000
Ελάχιστο	-0.097610	0.002535
Μέγιστο	0.075530	0.213300

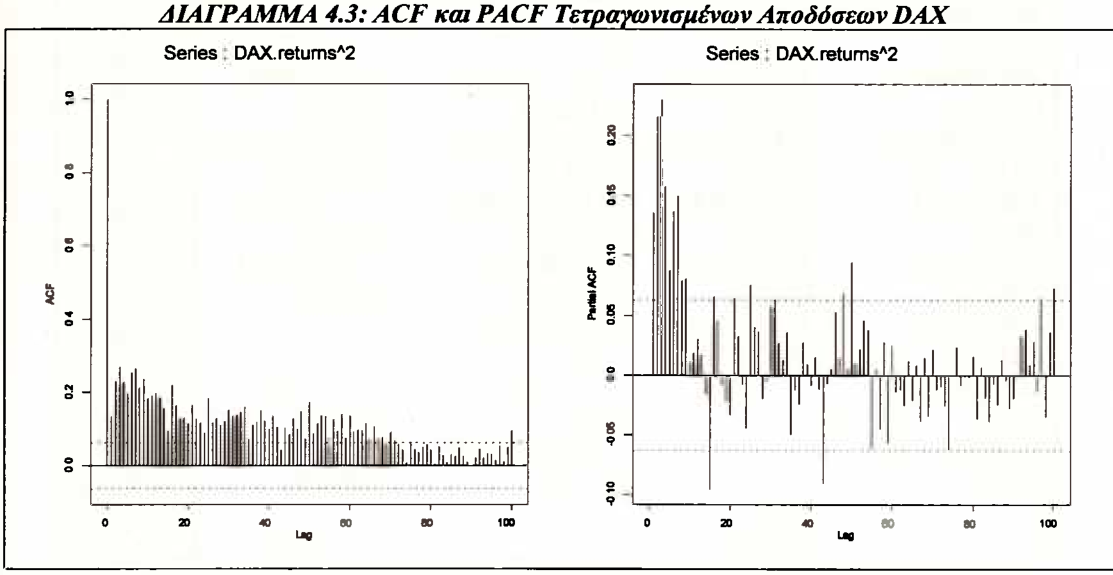
Όπως φαίνεται, οι αποδόσεις έχουν μέσο γύρω στο 0, μικρή αρνητική ασυμμετρία, ενώ υπάρχει υπερβάλλουσα κύρτωση (excess kurtosis). Η μεγάλη κύρτωση γίνεται αντιληπτή στο παρακάτω σχήμα, όπου το QQ-plot και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μας πληροφορούν για παχιές ουρές (fat tails). Οι ενδείξεις αυτές, μαζί με την απόρριψη της κανονικότητας (JB=166.636 και P-value=0.000) παραπέμπουν σε υποδείγματα GARCH για τη μοντελοποίηση της ετεροσκεδαστικότητας, ενώ από τις ACF και PACF των αποδόσεων βλέπουμε ότι δεν υπάρχει σημαντική αυτοσυσχέτιση, παρά μόνο σε μερικούς συντελεστές της PACF οι οποίοι όμως αντιστοιχούν σε μεγάλες υστερήσεις και δεν δημιουργούν ιδιαίτερο πρόβλημα. Θα χρησιμοποιηθεί έτσι η σχέση $\mu_t = c$ στην εξίσωση του μέσου.

Σε υποδείγματα GARCH για τη μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης οδηγούν επίσης οι ACF και PACF των τετραγώνων των αποδόσεων στο Διάγραμμα 4.3, που δείχνουν σημαντική αυτοσυσχέτιση και διακύμανση μεταβαλλόμενη στο χρόνο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.2: Ανάλυση Αποδόσεων DAX



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.3: ACF και PACF Τετραγωνισμένων Αποδόσεων DAX



Μοντέλα της Οικογένειας GARCH

Για τη μοντελοποίηση θα χρησιμοποιηθούν οι παρατηρήσεις από 16 Φεβρουαρίου 2001 μέχρι 30 Σεπτεμβρίου 2004, καθώς οι τρεις τελευταίοι μήνες (62 εργάσιμες μέρες) θα διατεθούν για υπολογισμό προβλέψεων, παρόλο που τα υποδείγματα GARCH προσφέρονται κυρίως για προβλέψεις βραχυχρόνιας φύσης, όπως μια ή δυο μέρες μπροστά. Η χρήση 62 ημερών γίνεται για πρακτικούς λόγους όπως η εξαγωγή των μέτρων προβλεπτικής ικανότητας και η γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων.

Αρχικά, οι εκτιμήσεις για κάποια μοντέλα της οικογένειας GARCH που κρίνονται ως τα πλέον κατάλληλα (από τα κριτήρια AIC και BIC) για τα στοιχεία που διαθέτουμε, δίνονται στον Πίνακα 4.2, με τις παρενθέσεις να περιέχουν τις t-στατιστικές. Στον αμέσως επόμενο πίνακα παρέχονται κάποια κριτήρια αξιολόγησης των υποδειγμάτων, ώστε να επιλεχθούν αυτά που προσαρμόζονται καλύτερα και να χρησιμοποιηθούν για τις προβλέψεις. Για την εξίσωση του μέσου χρησιμοποιείται απλά ένας σταθερός όρος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2: Εκτιμήσεις GARCH για DAX

Μοντέλο:	GARCH(1,1)* με leverage	EGARCH(1,1) με leverage	EGARCH(1,1)* με leverage	PGARCH(1,1) με leverage
μ_t	-0.0004541336 (-0.925)	-0.0009459784 **(-1.956)**	-0.0006322921 **(-1.456)**	-0.0006720122 **(-1.539)**
α_0	0.0000012131 (1.382)	**-0.2814260459 (-3.918)**	**-0.2645878275 (-3.919)**	**0.0000656834 (0.719)**
α_1	0.0237118175 (0.0001306)	**0.1272452149 (3.106)**	**0.1136703324 (3.156)**	**0.0465420524 (2.207)**
β_1	0.9475810481 (72.658)	**0.9779367818 (159.657)**	**0.9798877285 (172.933)**	**0.9487897529 (76.129)**
γ_1	-0.9999000000 (-1.3E-4)	**-0.9990767869 (-2.861)**	**-0.9999000000 (-2.861)**	**-0.9999272778 (-1945.199)**
d	-	-	-	**1.1555340500** (4.001)
Μοντέλο:	TGARCH(2,1)	TGARCH(2,2)*	PGARCH(2,2)	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
μ_t	**-0.0007074046 (-1.561)**	**-0.0005781208** (-1.274)	**-0.0001044654 (-0.237)**	**-0.0012503871** (-1.037)
δ	-	-	-	**0.0439820306 (0.522)**
α_0	**0.0000021665 (2.155)**	**0.0000037201** (2.244)	**0.0001458068 (0.618)**	**0.0000032419** (2.052)
α_1	**-0.0979486519 (-17.871)**	**-0.0890718963** (-2.840)	**-0.0616861409** (-2.125)	**-0.1009720885** (-3.337)
α_2	**0.0945567426 (5.393)**	**0.0927097712** (2.554)	**0.1883004044 (5.141)**	**0.1036167080** (2.948)
β_1	**0.9202815312 (62.575)**	**0.6990882738 (3.446)**	**0.9301880646 (3.582)**	**0.6608846898** (3.481)
β_2	-	**0.1977842078** (1.059)	**-0.0455310435 (-0.190)**	**0.2476634634** (1.414)
γ_1	**0.1142732133 (2.648)**	**0.1300581158** (2.359)	-	**0.1568842988 (2.827)**
γ_2	**0.0326545764 (0.658)**	**0.0271534676 (0.477)**	-	**-0.0122522219** (-0.232)
d	-	-	**1.1037380407** (3.176)	-

Όπου υπάρχει αστερίσκος (*) σημαίνει πως υποθέτουμε κατανομή t-Student για τα σφάλματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3: Μέτρα Σύγκρισης GARCH για DAX

Μοντέλο:	GARCH(1,1)* με leverage	EGARCH(1,1) με leverage	EGARCH(1,1)* με leverage	PGARCH(1,1) με leverage
AIC	-4791.508	-4805.012	-4796.573	-4802.055
BIC	-4762.680	-4780.989	-4767.745	-4773.228
Μοντέλο:	TGARCH(2,1)	TGARCH(2,2)*	PGARCH(2,2)	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
AIC	-4820.669	-4809.850	-4781.946	-4811.475
BIC	-4787.037	-4766.609	-4748.314	-4768.233

Από τα οκτώ παραπάνω μοντέλα, καλύτερα φαίνεται να λειτουργούν το EGARCH(1,1) με leverage, το PGARCH(1,1) με leverage, το TGARCH(2,1) και το

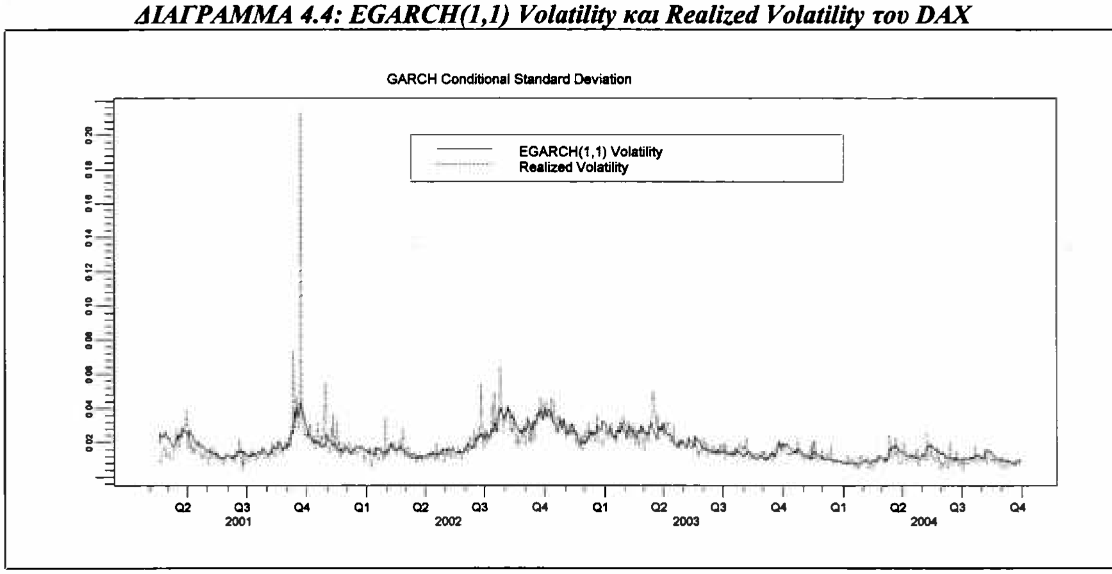
GARCH-M. Αυτό προκύπτει από τα κριτήρια AIC και BIC που στις προκείμενες περιπτώσεις έχουν τις μικρότερες τιμές.

Πιο συγκεκριμένα, στο EGARCH(1,1) βλέπουμε ότι σχεδόν όλοι οι εκτιμητές είναι στατιστικά σημαντικοί, με το σταθερό όρο μ_t=-0.00095 της εξίσωσης του μέσου να είναι οριακά ασήμαντος. Το στοιχείο που μετρά περισσότερο είναι η αρνητική τιμή και η στατιστική σημαντικότητα του συντελεστή γ_1=-0.99908, που υποδηλώνουν ύπαρξη *'leverage effect'*. Η εκθετική φύση του μοντέλου δεν απαιτεί επιπλέον περιορισμούς στους συντελεστές, εφόσον είναι εξ αρχής εξασφαλισμένη η θετικότητα της διακύμανσης. Αρκεί ότι ο β_1=0.97794 είναι διαφορετικός της μονάδας, για να ορίζεται ο εκθέτης της μη-δεσμευμένης διακύμανσης, η ρίζα της οποίας είναι 0.01696 (μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση).

Όσον αφορά το μοντέλο PGARCH(1,1), παρατηρούμε ότι μόνο οι συντελεστές μ_t=-0.00067 και α_0=0.00007 είναι στατιστικά ασήμαντοι, ενώ ικανοποιείται ο περιορισμός $\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\beta_1=0.98592<1$, προκειμένου να ορίζεται η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση, που ισούται με 0.01379. Υπάρχει σαφώς μοντελοποίηση του *'leverage effect'*, καθώς ο γ_1=-0.99993 είναι αρνητικός και στατιστικά σημαντικός, ενώ τέλος ο εκθέτης d=1.15553 είναι θετικός και στατιστικά σημαντικός, όπως απαιτεί το υπόδειγμα.

Στα γραφήματα που ακολουθούν φαίνονται οι εκτιμημένες τιμές της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης μέσω των μοντέλων, πάνω στην *'realized volatility'*, για το χρονολογικό διάστημα που αναλύεται.

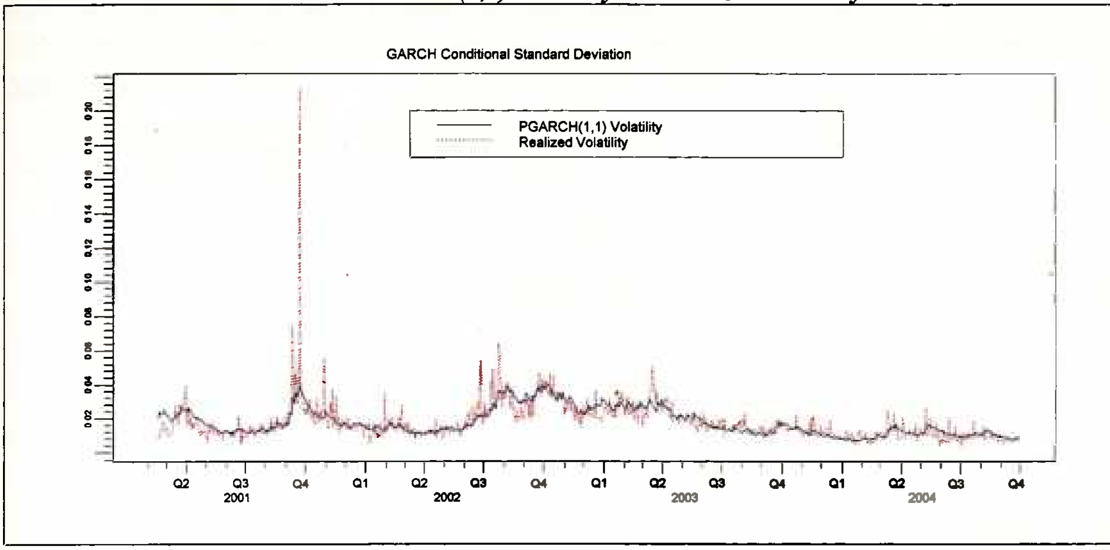
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.4: EGARCH(1,1) Volatility και Realized Volatility του DAX



Φαίνεται καθαρά στα Διαγράμματα 4.4 και 4.5 ότι και τα δυο μοντέλα προσαρμόζονται αρκετά ικανοποιητικά και ακολουθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό την επιθυμητή πορεία. Το EGARCH(1,1) δείχνει πως «πιάνει» κάπως καλύτερα τις μικρές μετακινήσεις της μεταβλητότητας, ενώ το PGARCH(1,1) βρίσκεται σε μια περισσότερο σταθερή πορεία, σύμφωνη με την εκάστοτε τάση της μεταβλητότητας.

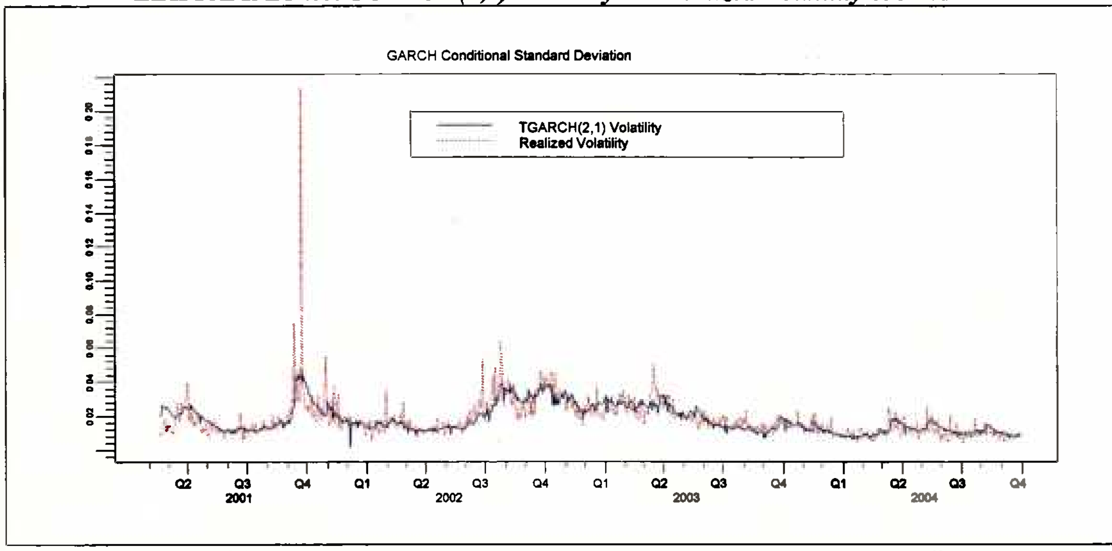
Κανένα φυσικά εκ των δυο υποδειγμάτων δεν κατορθώνει να προσεγγίσει την τιμή του 21% που συνέβη μετά το τρομοκρατικό χτύπημα στις Η.Π.Α., επιβεβαιώνοντας ότι πρόκειται απλά για μια ακραία τιμή που οφείλεται σε τυχαίο περιστατικό και σε καμιά περίπτωση δεν χαρακτηρίζει την υπό κανονικές συνθήκες πορεία της μεταβλητότητας.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.5: PGARCH(1,1) Volatility και Realized Volatility του DAX



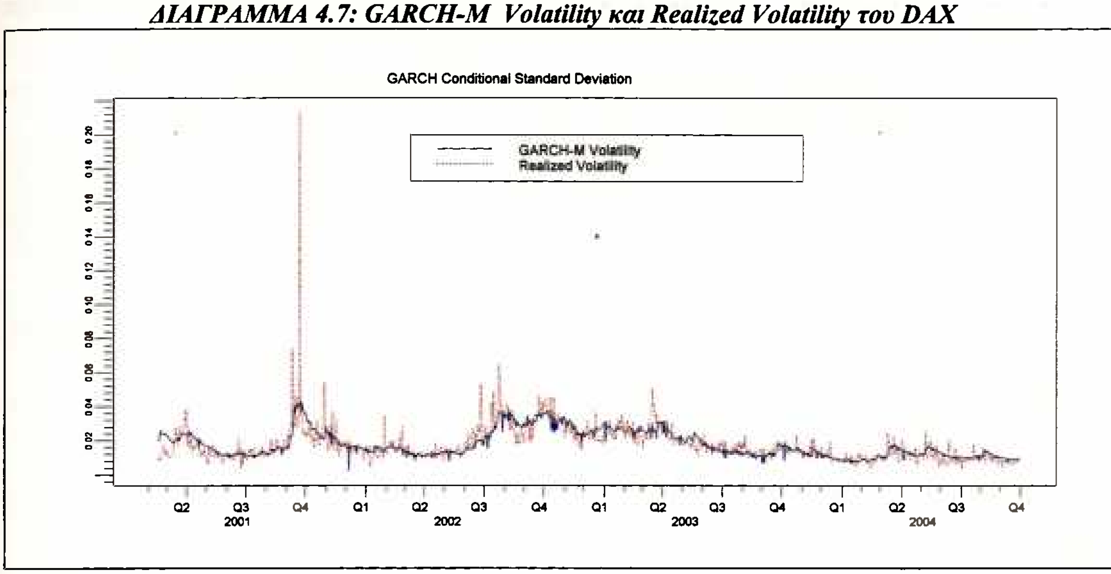
Σχετικά τώρα με τα άλλα δυο εκτιμημένα μοντέλα, όσον αφορά το TGARCH(2,1), βλέπουμε ότι οι συντελεστές μ_t=-0.00071 και γ_2=0.03265 είναι στατιστικά ασήμαντοι. Ο περιορισμός $\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2} + \beta_1$=0.99035<1 ικανοποιείται και κατά συνέπεια ορίζεται η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση, που είναι ίση με 0.01499. Οι τιμές των συντελεστών που μοντελοποιούν την ασυμμετρία είναι θετικές (γ_1=0.11427 και γ_2=0.03265), όπως αναμενόταν να συμβεί, ενώ μόνο ο πρώτος εξ αυτών είναι σημαντικός. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου παριστάνονται στο Διάγραμμα 4.6.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.6: TGARCH(2,1) Volatility και Realized Volatility του DAX



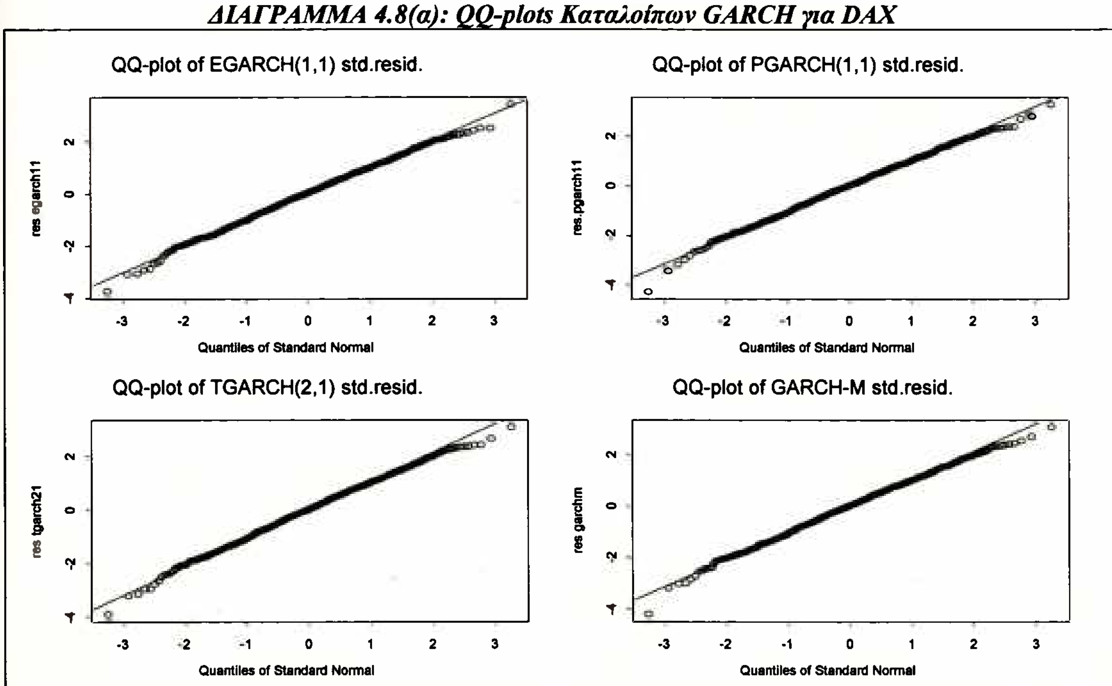
Το μοντέλο GARCH-M έχει αρκετούς ασήμαντους συντελεστές, μεταξύ των οποίων κι ο δ=0.04398, που συμβολίζει *την ανταμοιβή για τον κίνδυνο* κι εφόσον είναι θετικός σημαίνει πως υψηλές τιμές της παρελθούσας τυπικής απόκλισης οδηγούν σε υψηλές αποδόσεις, κάτι που δείχνει απολύτως φυσιολογικό. Ισχύει ακόμη ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2} + \beta_1 + \beta_2 = 0.98351 < 1$ κι έτσι ορίζεται η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση, ίση με 0.01402. Η ασυμμετρία λαμβάνεται υπόψη από τον $\gamma_1 = 0.15688$, λόγω του θετικού προσήμου και της σημαντικότητας. Οι εκτιμήσεις δίνονται στο Διάγραμμα 4.7.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.7: GARCH-M Volatility και Realized Volatility του DAX



Τα δυο τελευταία διαγράμματα δεν παρουσιάζουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ τους, ενώ όπως και τα προηγούμενα, δεν φτάνουν στο επίπεδο της ακραίας τιμής.

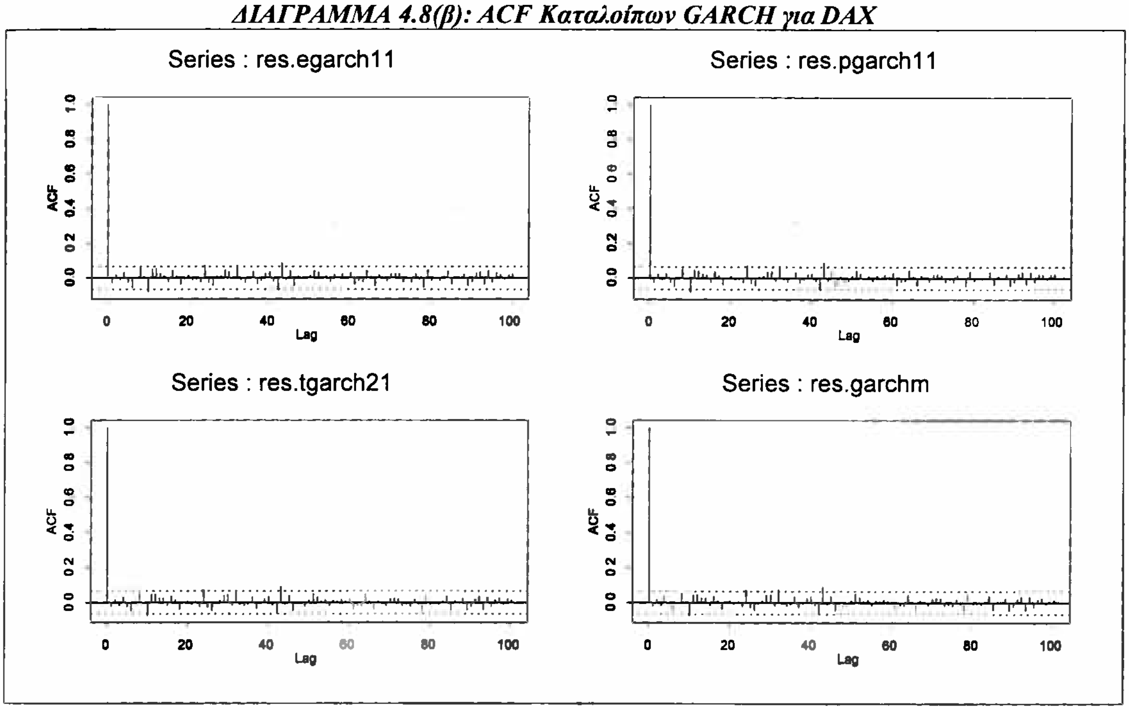
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.8(α): QQ-plots Καταλοίπων GARCH για DAX



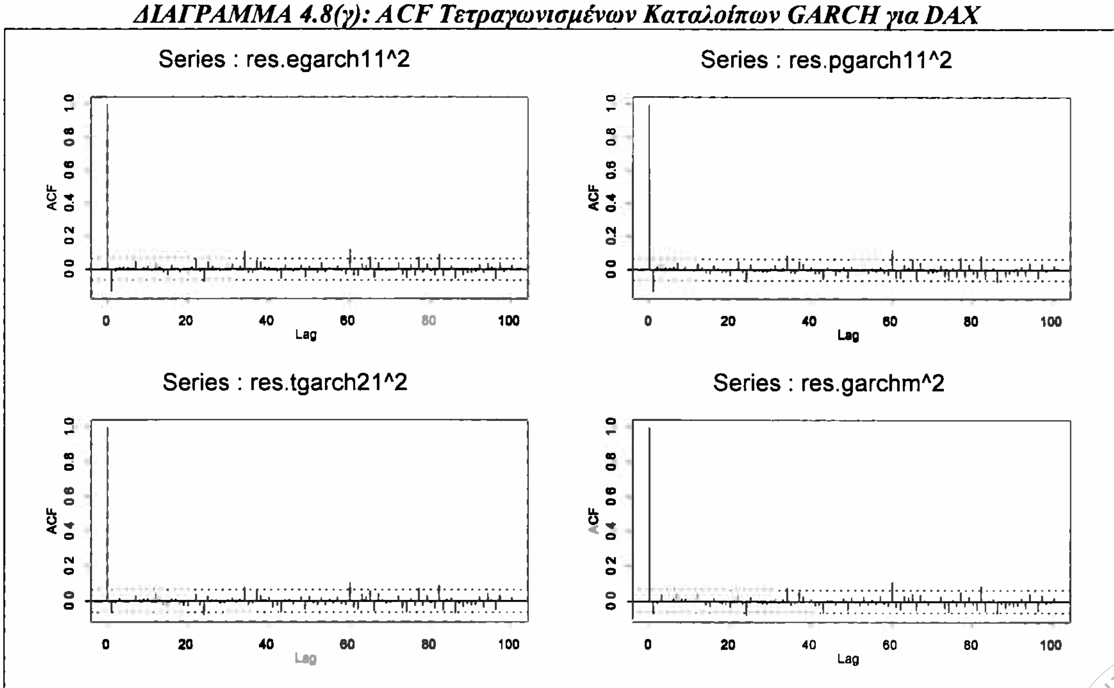
Στο Διάγραμμα 4.8(α) γίνεται διαγνωστικός έλεγχος για τα μοντέλα που εκτιμήθηκαν. Τα τυποποιημένα κατάλοιπα προσαρμόζονται αρκετά καλά πάνω στη γραμμή των 45°, πράγμα που σημαίνει ότι πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό την κανονική κατανομή. Ακόμη, υπάρχουν κάποιες ακραίες τιμές που γίνονται πιο εμφανείς στα EGARCH(1,1) και TGARCH(2,1), δίχως όμως να προκαλούν ιδιαίτερο πρόβλημα.

Στα 4.8(β) και (γ) εξετάζεται η εξίσωση στο μέσο και η εξίσωση της διακύμανσης αντίστοιχα. Οι ACF των ε_t και των ε_t^2 δείχνουν ότι σε όλα τα μοντέλα η αυτοσυσχέτιση έχει απαλειφθεί κι άρα οι εξισώσεις των αποδόσεων και της δεσμευμένης διακύμανσης εξειδικεύτηκαν ικανοποιητικά. Στο 4.8(γ) βέβαια οι δυο πρώτες ACF δείχνουν ότι ίσως υπάρχει μικρό πρόβλημα στην πρώτη υστέρηση.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.8(β): ACF Καταλοίπων GARCH για DAX



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.8(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων GARCH για DAX



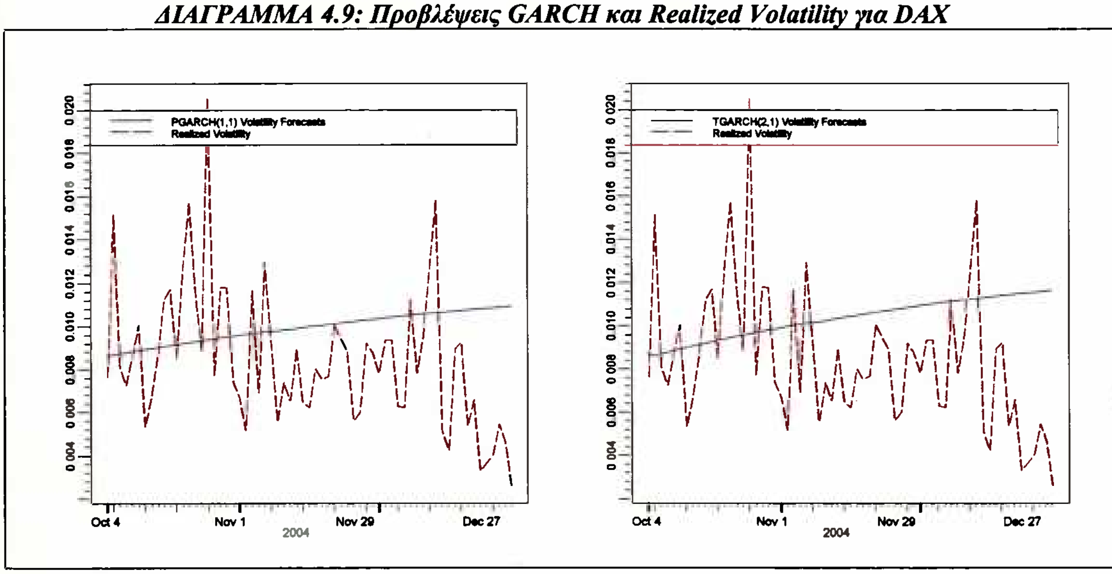
Μετά τους διαγνωστικούς ελέγχους μπορούμε να προχωρήσουμε στις προβλέψεις που αφορούν την εκτός δείγματος χρονική περίοδο από 1 Οκτωβρίου 2004 ως 30 Δεκεμβρίου 2004 (62 εργάσιμες μέρες). Τα μέτρα προβλεπτικής ικανότητας για τα παραπάνω μοντέλα δίνονται στον Πίνακα 4.4, με το LINEX να υπολογίζεται για α=0.5.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων GARCH για DAX

Μοντέλο:	EGARCH(1,1) με leverage	PGARCH(1,1) με leverage	TGARCH(2,1)	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
MSE	0.0000558927	0.0000143715	0.0000166306	0.0000177702
RMSE	0.0074761416	0.0037909754	0.0040780618	0.0042154713
MAE	0.0063860151	0.0030612564	0.0033611278	0.0035386935
MAPE	103.698%	47.619%	52.949%	56.076%
U-Theil	0.8236510278	0.4176540390	0,4492825301	0.4644210100
LINEX	0.0000069754	0.0000017961	0.0000020780	0.0000022201

Γίνεται αντιληπτό ότι οι προβλέψεις του πρώτου μοντέλου δίνουν τις χειρότερες τιμές στα κριτήρια. Αυτό οφείλεται στο ότι οι εκτιμήσεις των συντελεστών α_1=0.12725 και β_1=0.97794 του EGARCH(1,1) έχουν άθροισμα μεγαλύτερο της μονάδας, επομένως το μοντέλο εκρήγνυται (explosive) και οι προβλέψεις δεν συγκλίνουν. Από τα υπόλοιπα υποδείγματα, το PGARCH(1,1) και το TGARCH(2,1) παρέχουν τις πιο αξιόπιστες προβλέψεις. Το Διάγραμμα 4.9 απεικονίζει τις προβλέψεις των δυο τελευταίων μοντέλων, πάνω στη *'realized volatility'*, για το εκτός δείγματος χρονικό διάστημα που αναφέρθηκε πριν. Ο χρονικός ορίζοντας είναι μακροχρόνιος όπως τονίσαμε και πριν για πρακτικούς λόγους. Ως εκ τούτου οι προβλέψεις πέραν των δυο βημάτων αποκλίνουν από τις πραγματικές παρατηρήσεις.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.9: Προβλέψεις GARCH και Realized Volatility για DAX



Παρατηρούμε κατά συνέπεια ότι οι προβλέψεις και στις δυο περιπτώσεις αρχικά αυξάνονται και στη συνέχεια τείνουν να σταθεροποιηθούν προς το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας[3] (μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση), που είναι 0.01379 στην πρώτη περίπτωση και 0.01499 στη δεύτερη. Το πρόβλημα είναι ότι η εκτός

[3] Η σύγκλιση επιτυγχάνεται μετά από περίπου 1000 προβλέψεις μπροστά και για τα δυο μοντέλα. Στο Διάγραμμα 4.9 φαίνονται μόνο 62 προβλέψεις, γεγονός που αιτιολογεί τη συνεχή αυξητική τους τάση και την απουσία σύγκλισης.

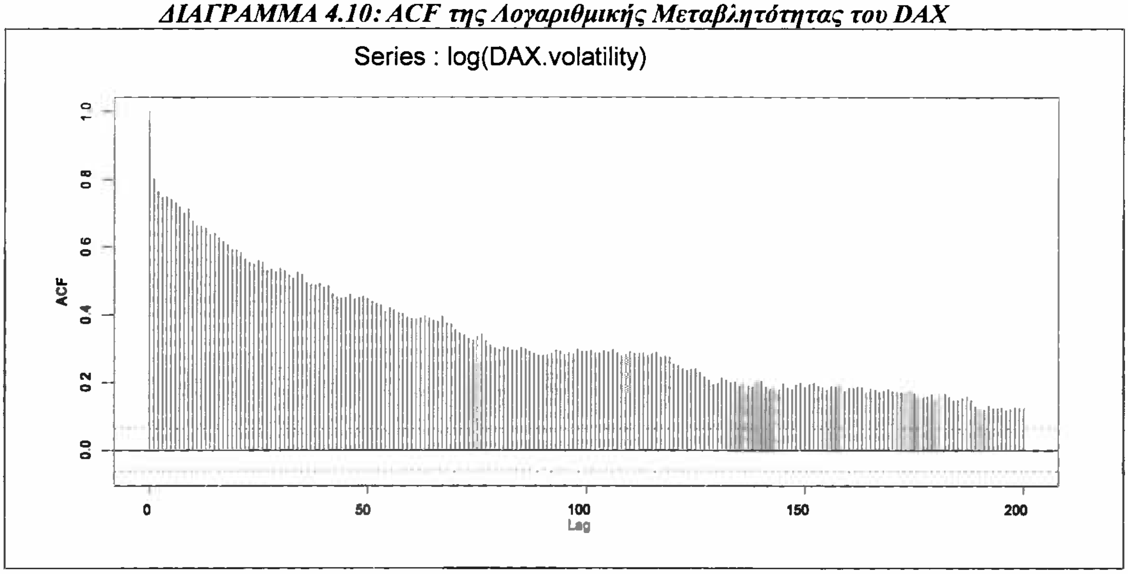
ανάλυσης πραγματική σειρά παρουσιάζει μια σχετικά απότομη πτώση, η οποία φυσικά δεν μπορούσε να προβλεφθεί στο χρονικό σημείο που συνέβη, γεγονός που προκαλεί αύξηση των μέτρων αξιολόγησης.

Μοντέλα Μακροχρόνιας Μνήμης

Στα μοντέλα μακροχρόνιας μνήμης (LMM), η πρώτη ενέργεια που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε αν η σειρά που σκοπεύουμε να μοντελοποιήσουμε έχει τα απαραίτητα χαρακτηριστικά.

Συνήθως στα υποδείγματα ARFIMA χρησιμοποιείται η σειρά των λογαρίθμων της τυπικής απόκλισης ($\ln\sigma_t$) των αποδόσεων, ως η μεταβλητή υπό ανάλυση. Στο Διάγραμμα 4.10 φαίνεται η ACF της λογαριθμικής μεταβλητότητας του δείκτη DAX, με 200 υστερήσεις. Ένας οπτικός έλεγχος παραπέμπει σε ύπαρξη μακροχρόνιας μνήμης, καθώς η σημερινή λογαριθμική μεταβλητότητα «θυμάται» την τιμή της πριν από πολλές χρονικές περιόδους, κι αυτό γιατί οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης παραμένουν σημαντικοί για περισσότερες από 200 υστερήσεις.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.10: ACF της Λογαριθμικής Μεταβλητότητας του DAX



Το δείγμα που θα χρησιμοποιηθεί για τα μοντέλα αυτά είναι παρόμοιο με αυτό που είχαμε προηγουμένως, αφήνοντας ξανά 62 εργάσιμες ημέρες εκτός ανάλυσης για τον έλεγχο αξιοπιστίας των προβλέψεων.

Ο Πίνακας 4.5 παρουσιάζει την εκτίμηση οκτώ μοντέλων που ταιριάζουν καλύτερα στα αριθμητικά μας στοιχεία, επιλογή που βασίστηκε στα κριτήρια αξιολόγησης AIC, BIC και Log-likelihood, τα οποία δίνονται στον Πίνακα 4.6. Στην εξίσωση του μέσου χρησιμοποιείται απλά σταθερός όρος, ενώ στις παρενθέσεις δίνονται οι t-στατιστικές.

Από τα εκτιμημένα μοντέλα πιο κατάλληλα δείχνουν να προσαρμόζονται το ARFIMA(1,d,1), το SEMIFAR(0,d), το FIEGARCH(2,d,0) με leverage και το FIEGARCH(2,d,1) με leverage.

Στο ARFIMA(1,d,1) μόνο ο συντελεστής d=0.06383 που δείχνει την κλασματική τάξη των διαφορών είναι οριακά ασήμαντος, αλλά εφόσον ισχύει ότι $0<d<0.5$, συμπεραίνουμε ότι η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη και παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη. Ακόμη, οι συντελεστές $\varphi_1=0.98192$ και $\theta_1=0.74932$ είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότεροι της μονάδος και το μοντέλο είναι κατά συνέπεια στάσιμο και συγκλίνει.

Το SEMIFAR(0,d) έχει μόνο το συντελεστή d=0.41771, που είναι σημαντικός και ανήκει στο διάστημα (0, 0.5), κάτι που όπως και πριν μας πληροφορεί ότι η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη κι έχει μακροχρόνια μνήμη. Στα παραπάνω μοντέλα η τιμή της παραμέτρου m έχει εκτιμηθεί ίση με 0, γεγονός που αιτιολογεί τις χαμηλές τιμές του παράγοντα d και αποτελεί μια ακόμη επιβεβαίωση της στασιμότητας της σειράς $\ln\sigma_t$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5: Εκτιμήσεις LMM για DAX

Μοντέλο:	ARFIMA(0,d,1)	ARFIMA(0,d,2)	ARFIMA(1,d,1)	SEMIFAR(0,d)
φ_1	-	-	0.9819205 (120.551)	-
θ_1	0.1178952 (2.419)	0.1178889 (1.987)	0.7493238 (30.567)	-
θ_2	-	0.0297700 (0.684)	-	-
d	0.4905396 (12.755)	0.4930487 (9.908)	0.0638339 (1.769)	0.4177149 (15.952)
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(2,d,0) με leverage	FIEGARCH(2,d,1) με leverage
μ_t	0.0000561104 (0.119)	-0.0000500911 (-0.105)	-0.0002501106 (-0.605)	-0.0006261635 (-1.380)
α_0	2.823120E-12 (0.3E-6)	2.137993E-11 (2.1E-6)	-0.1307795869 (-3.799)	-0.0920540350 (-4.268)
φ_1	-0.3722898488 (-7.852)	-0.4796522354 (-8.151)	-0.3014970070 (-4.163)	-0.2768174001 (-4.023)
φ_2	-	-0.1931611844 (-3.068)	0.4473965833 (6.220)	0.3722045976 (5.299)
β_1	-	-	-	0.6612431562 (5.694)
γ_1	-	-	-0.1820770127 (-3.836)	-0.1563658619 (-3.576)
γ_2	-	-	0.0274477264 (0.475)	0.0642585074 (1.319)
d	0.3712956769 (8.236)	0.4493215575 (8.646)	0.8259706187 (15.996)	0.6583705154 (8.465)

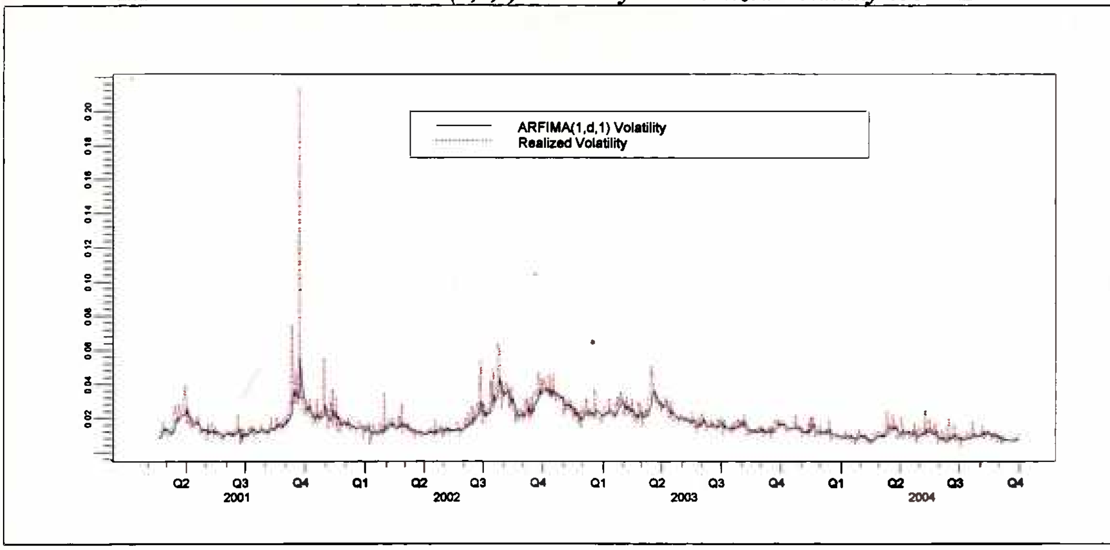
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6: Μέτρα Σύγκρισης LMM για DAX

Μοντέλο:	ARFIMA(0,d,1)	ARFIMA(0,d,2)	ARFIMA(1,d,1)	SEMIFAR(0,d)
Log-likelihood	-88.537	-88.445	-78.528	-81.936
BIC	190.683	197.305	177.467	170.669
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(2,d,0) με leverage	FIEGARCH(2,d,1) με leverage
AIC	-4765.485	-4773.882	-4828.063	-4833.894
BIC	-4746.266	-4749.859	-4794.431	-4795.457

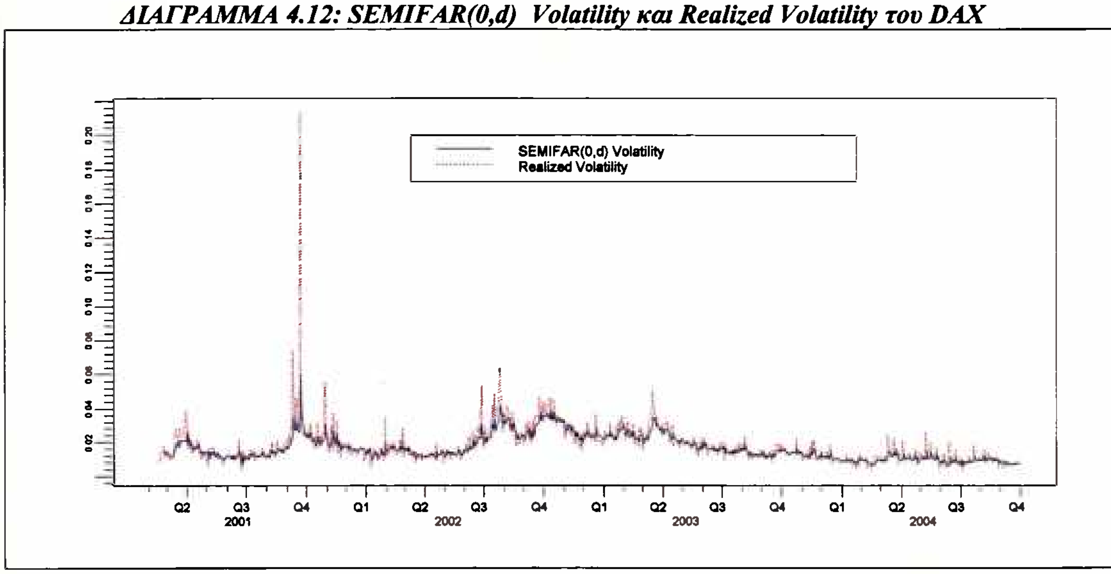
Οι εκτιμήσεις των δυο πρώτων μοντέλων φαίνονται στα Διαγράμματα 4.11 και 4.12. Η μοντελοποίηση είναι σαφώς καλύτερη σε σχέση με τα υποδείγματα GARCH, καθώς «συλλαμβάνονται» οι απότομες μετακινήσεις της μεταβλητότητας, ενώ και στο σημείο της ακραίας τιμής τα συγκεκριμένα μοντέλα προσαρμόζονται αρκετά καλύτερα χωρίς βέβαια να κατορθώσουν να προσεγγίσουν εκείνο το επίπεδο.

Το FIEGARCH(2,d,0) που είναι και το επόμενο μοντέλο, έχει ασήμαντους τους συντελεστές μ_t=-0.00025 και γ_2=0.02745, ενώ το άθροισμα $\varphi_1+\varphi_2$=0.14590 είναι μικρότερο της μονάδος δείχνοντας μοντέλο που δεν εκρήγνυται. Οι συντελεστές ασυμμετρίας γ_1=-0.18208 και γ_2=0.02745 είναι διάφοροι του μηδενός, συνεπώς το *'leverage effect'* μοντελοποιείται. Η παράμετρος d=0.82597 βρίσκεται στο διάστημα (0, 1), που σημαίνει πως το μοντέλο είναι στάσιμο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.11: ARFIMA(1,d,1) Volatility και Realized Volatility του DAX

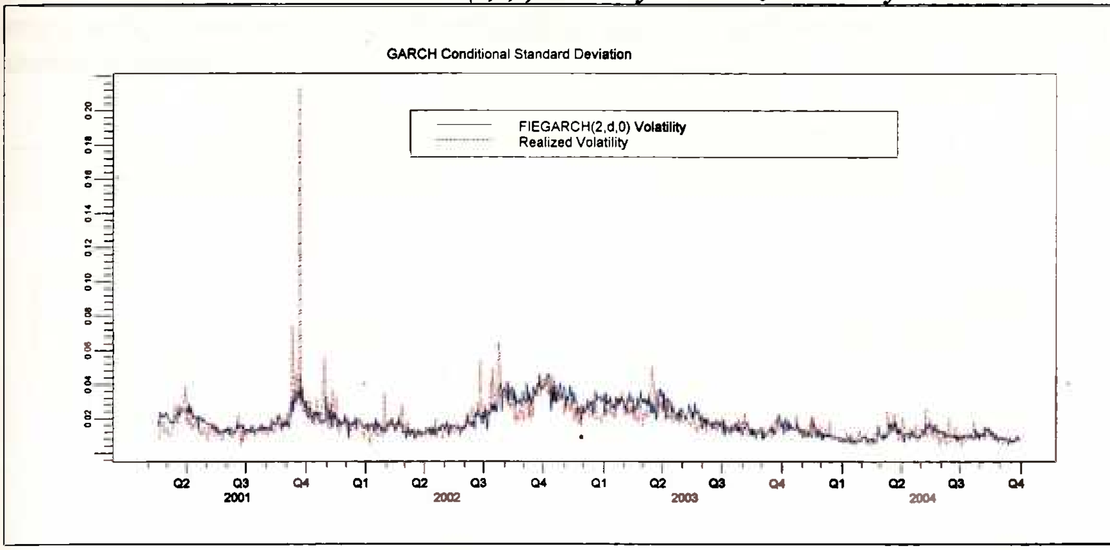


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.12: SEMIFAR(0,d) Volatility και Realized Volatility του DAX

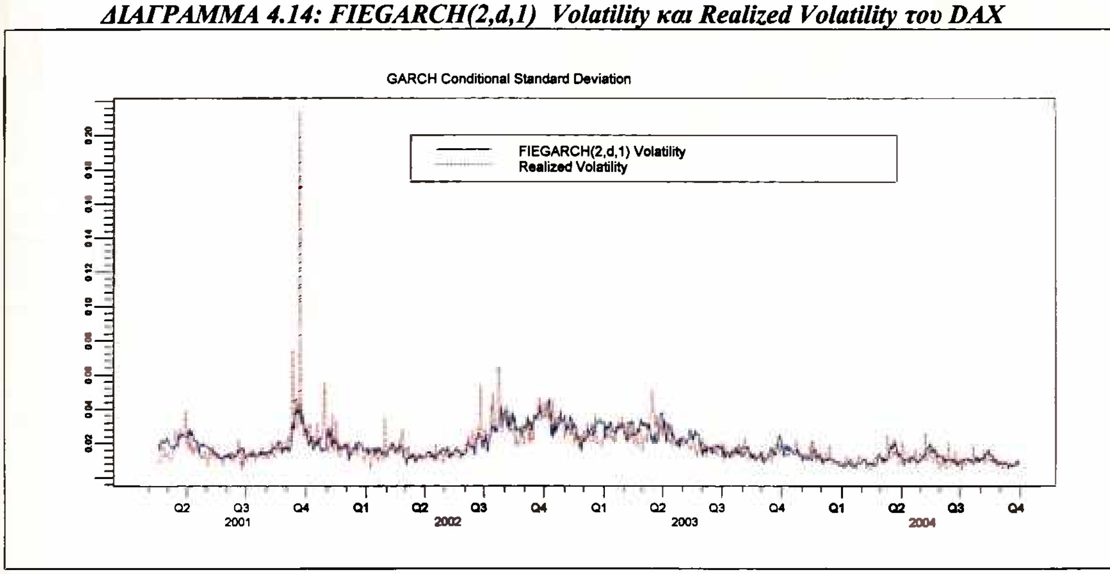


Τέλος, το FIEGARCH(2,d,1) παρουσιάζει μη-σημαντικότητα στους συντελεστές μ_t=-0.00063 και γ_2=0.06426, το μοντέλο δεν εκρήγνυται, υπάρχει ασυμμετρία γιατί οι παράμετροι γ_1=-0.15637 και γ_2=0.06426 διαφέρουν του μηδενός, ενώ η παράμετρος d=0.65837 δείχνει στασιμότητα, εφόσον ισχύει 0<d<1. Οι εκτιμήσεις των FIEGARCH(2,d,0) και FIEGARCH(2,d,1) παριστάνονται στα Διαγράμματα 4.13 και 4.14, όπου παρατηρούμε ότι το FIEGARCH(2,d,0) πλησιάζει λίγο καλύτερα την πραγματική πορεία σε σχέση με το FIEGARCH(2,d,1). Η ακραία τιμή που παρατηρήθηκε διαφεύγει κι εδώ από την αντίληψη των δυο υποδειγμάτων.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.13: FIEGARCH(2,d,0) Volatility και Realized Volatility του DAX



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.14: FIEGARCH(2,d,1) Volatility και Realized Volatility του DAX



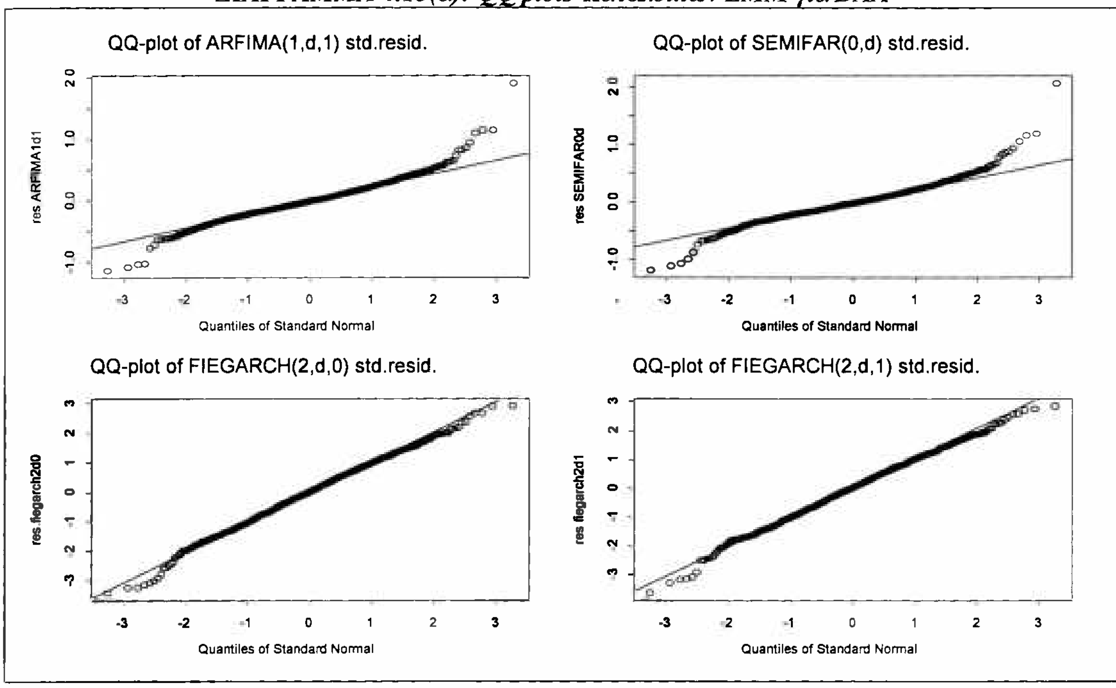
Στα Διαγράμματα 4.15(α), (β) και (γ) πραγματοποιείται διαγνωστικός έλεγχος των τυποποιημένων καταλοίπων από τα υποδείγματα LMM που μόλις είδαμε.

Τα αποτελέσματα στο 4.15(α) δείχνουν πως τα κατάλοιπα του ARFIMA(1,d,1) και του SEMIFAR(0,d) δεν κατανέμονται κανονικά, επιδεικνύοντας παχιές ουρές και συνεπώς τα συγκεκριμένα μοντέλα αποδεικνύονται προβληματικά στη μοντελοποίηση της μακροχρόνιας μνήμης. Αντιθέτως, τα FIEGARCH(2,d,0) και FIEGARCH(2,d,1) φαίνεται να παράγουν σφάλματα που πλησιάζουν σε πολύ υψηλότερο βαθμό τα επιθυμητά χαρακτηριστικά της κανονικότητας.

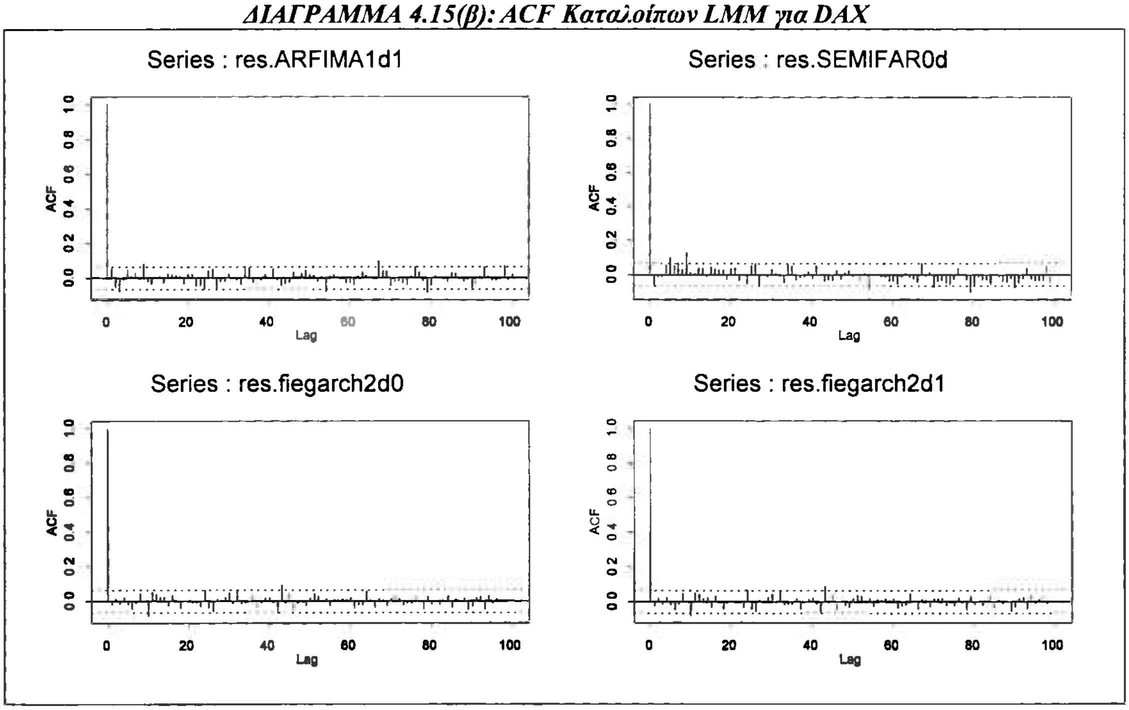
Στο 4.15(β) ελέγχεται η εξίσωση της λογαριθμικής διακύμανσης όσον αφορά τα ARFIMA(1,d,1) και SEMIFAR(0,d), ενώ για τα FIEGARCH(2,d,0) και FIEGARCH(2,d,1) γίνεται έλεγχος της εξίσωσης του μέσου. Όλα τα υποδείγματα εμφανίζουν αρκετά ικανοποιητική προσαρμογή, ίσως όμως να υφίστανται κάποια μικρής σημασίας προβλήματα στα ARFIMA(1,d,1) και SEMIFAR(0,d), λόγω μερικών σημαντικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης σε μεγάλες υστερήσεις.

Ο επόμενος έλεγχος αφορά την εξίσωση της διακύμανσης για τα FIEGARCH(2,d,0) και FIEGARCH(2,d,1), καθώς περιλαμβάνει τα τετραγωνισμένα κατάλοιπα των εν λόγω μοντέλων. Πραγματοποιείται στο Διάγραμμα 4.15(γ) και δείχνει πως υπάρχει αρκετά καλή προσαρμογή και για τα δυο μοντέλα, με κάποιες σημαντικές αυτοσυσχετίσεις σε υστερήσεις μεγάλου βαθμού να μη δημιουργούν ιδιαίτερα μεγάλο πρόβλημα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.15(α): QQ-plots Καταλοίπων LMM για DAX

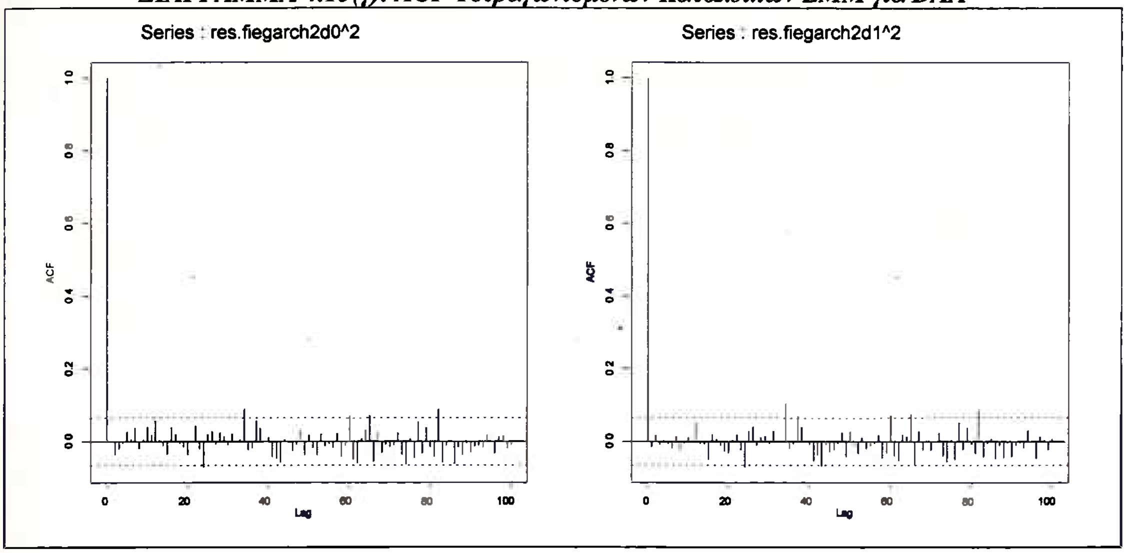


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.15(β): ACF Καταλοίπων LMM για DAX

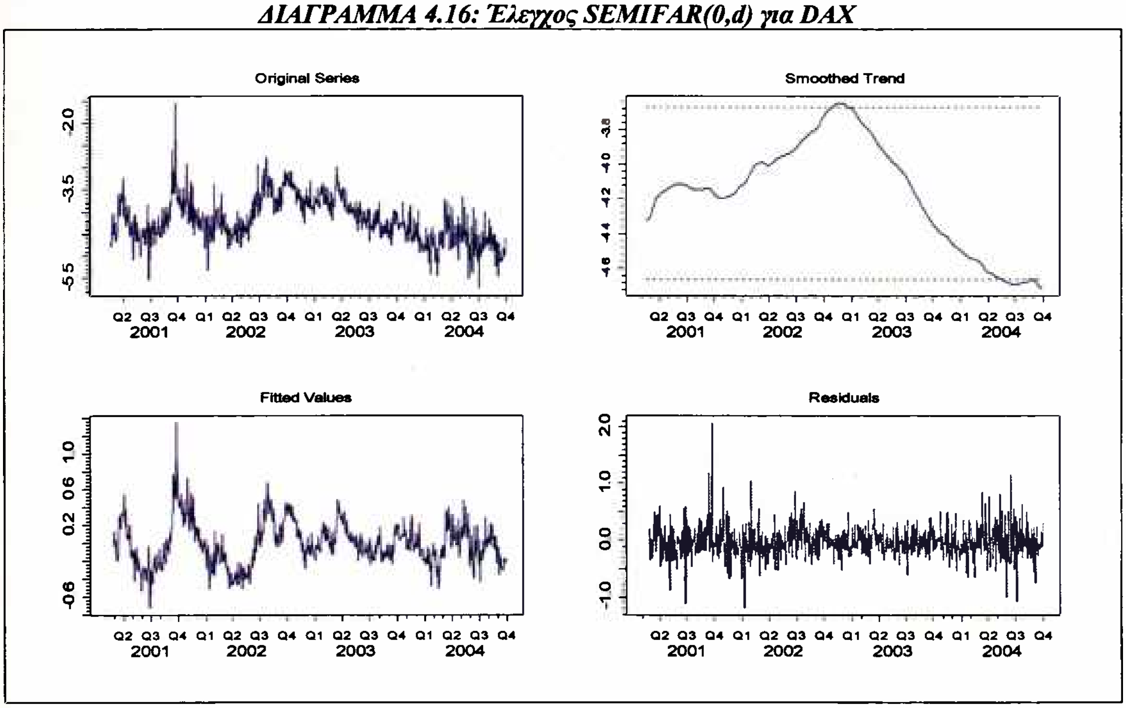


Ο τελευταίος έλεγχος γίνεται αποκλειστικά για το υπόδειγμα SEMIFAR(0,d), ώστε να διαπιστωθεί αν όντως είναι απαραίτητη η χρήση του, καθώς όπως ειπώθηκε στην Υποενότητα 3.2.2, το συγκεκριμένο μοντέλο λειτουργεί πιο αποδοτικά αν η αρχική σειρά που μοντελοποιείται (στην περίπτωσή μας η $\ln \sigma_t$) εμφανίζει κάποια οποιουδήποτε είδους τάση. Στο Διάγραμμα 4.16 δίνονται κάποια στοιχεία για την αρχική σειρά, όπως και για το ίδιο το μοντέλο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.15(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων LMM για DAX



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.16: Έλεγχος SEMIFAR(0,d) για DAX



Παρατηρούμε στο 4.16 ότι το SEMIFAR(0,d) προσαρμόζει πολύ καλά τις εκτιμημένες τιμές των λογαρίθμων της μεταβλητότητας, που δείχνουν να μετακινούνται από την αρχή ως το τέλος σε πλήρη αναλογία με τις παρατηρούμενες τιμές. Στο γράφημα που παρουσιάζει την τάση της σειράς των λογαρίθμων, φαίνεται ότι καταρχάς το πρώτο μισό των παρατηρήσεων ακολουθεί έντονα αυξητική τάση, ενώ στις υπόλοιπες συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο, με κλίση που μεταβάλλεται σχεδόν κατά 90°. Η τάση σε δυο σημεία υπερβαίνει τα άνω και κάτω διαστήματα εμπιστοσύνης κι έτσι θεωρείται σημαντική, δικαιολογώντας τη χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου. Τέλος, από το γράφημα των καταλοίπων μπορούμε να αντιληφθούμε το λόγο για τον οποίο αυτά παρουσίασαν παχιές ουρές στο Διάγραμμα

4.15(α), καθώς είναι φανερό ότι σε αρκετά σημεία υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις που ξεφεύγουν από το μέσο εύρος μεταβολής της σειράς.

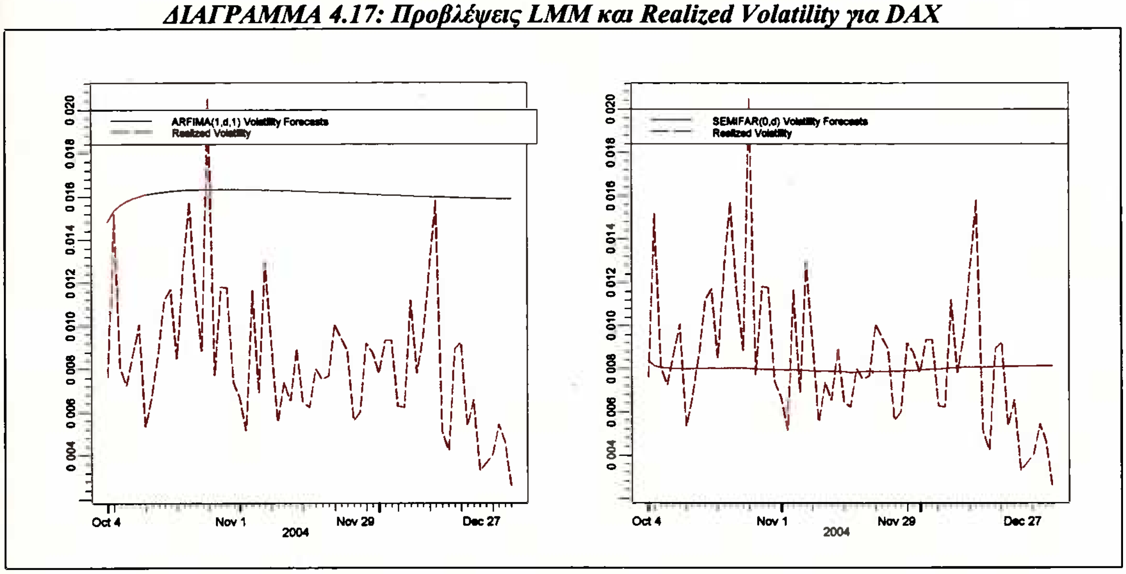
Αν τώρα προχωρήσουμε και στις προβλέψεις[4] των τεσσάρων παραπάνω μοντέλων, τότε παίρνουμε τον Πίνακα 4.7 με τα απαραίτητα μέτρα αξιολόγησης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.7: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων LMM για DAX

Μοντέλο:	ARFIMA(1,d,1)	SEMIFAR(0,d)	FIEGARCH(2,d,0) με leverage	FIEGARCH(2,d,1) με leverage
MSE	0.0000677630	0.0000105709	0.0000803131	0.0001997904
RMSE	0.0082318296	0.0032512917	0.0089617594	0.0141347229
MAE	0.0077266046	0.0023733121	0.0072807824	0.0116813439
MAPE	118.806%	31.531%	120.200%	189.497%
U-Theil	0.9069056271	0.3581967658	0.9873224320	1.5572309440
LINEX	0.0000084572	0.0000013224	0.0000100179	0.0000248913

Παρόλο που τα ARFIMA(1,d,1) και SEMIFAR(0,d) κρίθηκαν ως τα πλέον προβληματικά υποδείγματα κατόπιν των διαγνωστικών ελέγχων, στον τομέα των προβλέψεων φαίνεται να λειτουργούν καλύτερα από τα FIEGARCH(2,d,0) και FIEGARCH(2,d,1) σύμφωνα με τα περισσότερα κριτήρια, με το FIEGARCH(2,d,1) να δίνει τις χειρότερες προβλέψεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι πραγματικές παρατηρήσεις μετά την περίοδο ανάλυσης παρουσιάζουν σημαντική πτώση, ενώ οι προβλέψεις των δυο τελευταίων ξεκινούν και συνεχίζουν να κινούνται ανοδικά. Αντιθέτως, στα δυο πρώτα μοντέλα υπάρχει σύγκλιση των προβλέψεων μετά από πολλά μελλοντικά βήματα. Η σύγκλιση γίνεται αντιληπτή στο επόμενο διάγραμμα που παρουσιάζει τις προβλέψεις μέσω ARFIMA(1,d,1) και SEMIFAR(0,d) μαζί με τις πραγματικές παρατηρήσεις για το διάστημα 1 Οκτωβρίου 2004 ως 30 Δεκεμβρίου 2004.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.17: Προβλέψεις LMM και Realized Volatility για DAX



Το SEMIFAR(0,d) φαίνεται να προσεγγίζει σε μεγαλύτερο βαθμό το μέσο όρο των προβλέψεων και χάρη σ' αυτή την ιδιότητα παρέχει τα καλύτερα μέτρα προβλεπτικής ικανότητας, σε σχέση πάντα με τα υπόλοιπα εκτιμημένα μοντέλα.

Μπορούμε χρησιμοποιώντας τα τέσσερα μοντέλα με τις καλύτερες προβλέψεις να συγκρίνουμε την ικανότητά τους για δίκαιη τιμολόγηση των OPTIONS,

[4] Οι προβλέψεις είναι κι εδώ μακροπρόθεσμες για τους ίδιους πρακτικούς λόγους με πριν.

χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Black and Scholes της Υποενότητας 2.2.1. Επιλέγοντας για παράδειγμα τυχαία τις ημερομηνίες 11 Ιουλίου 2001 και 30 Δεκεμβρίου 2004 (τελευταία μέρα του δείγματος), παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα έχει τις τιμές που φαίνονται στον Πίνακα 4.8, όπου και για τις δυο ημερομηνίες υπάρχει η *'realized volatility'*. Για την πρώτη ημερομηνία υπάρχουν επιπρόσθετα οι εκτιμήσεις των τεσσάρων μοντέλων, ενώ για την δεύτερη διαθέτονται επιπρόσθετα οι προβλέψεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.8: Τιμές της Μεταβλητότητας του DAX

	11 Ιουλίου 2001		*30 Δεκεμβρίου 2004*	
	Realized Volatility	**Εκτίμηση της Volatility**	**Realized Volatility**	**Πρόβλεψη της Volatility**
PGARCH(1,1) με leverage		0.0127463411		0.0109161345
TGARCH(2,1)	0.0147550744	0.0115598686	0.0025345207	0.0116438026
ARFIMA(1,d,1)		0.0120857374		0.0158715892
SEMIFAR(0,d)		0.0121333241		0.0081665555

Έχοντας τις παραπάνω τιμές, μας δίνεται η δυνατότητα σύγκρισης των δίκαιων τιμών των OPTIONS που προκύπτουν από τη μεταβλητότητα των εκτιμημένων μοντέλων, με τη τιμή που αποκτάται μέσω της ιστορικής μεταβλητότητας για τις συγκεκριμένες ημερομηνίες. Στις 11 Ιουλίου 2001 ο δείκτης DAX έκλεισε στις 5801.40 μονάδες, ενώ στις 30 Δεκεμβρίου 2004 η τιμή του διαμορφώθηκε στις 4256.08 μονάδες. Με επιτόκιο αγοράς 5.5%, λήξη σε 90 μέρες και τιμή εξάσκησης 5850 στην πρώτη περίπτωση και 4300 στη δεύτερη, παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα, σύμφωνα πάντα με τη μέθοδο των Black and Scholes.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.9: Αποτίμηση OPTIONS για τον DAX

	11 Ιουλίου 2001				*30 Δεκεμβρίου 2004*			
	Δίκαιη Τιμή με Realized Volatility		**Δίκαιη Τιμή με Εκτιμήσεις**		**Δίκαιη Τιμή με Realized Volatility**		**Δίκαιη Τιμή με Προβλέψεις**	
	CALL	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**
PGARCH(1,1) με leverage			34.4150	4.2150			17.8370	3.8350
TGARCH(2,1)	36.1320	5.9320	33.4800	3.2800	14.0090	0.0070	18.3520	4.3500
ARFIMA(1,d,1)			33.8860	3.6860			21.5110	7.5100
SEMIFAR(0,d)			33.9230	3.7230			16.0270	2.0260

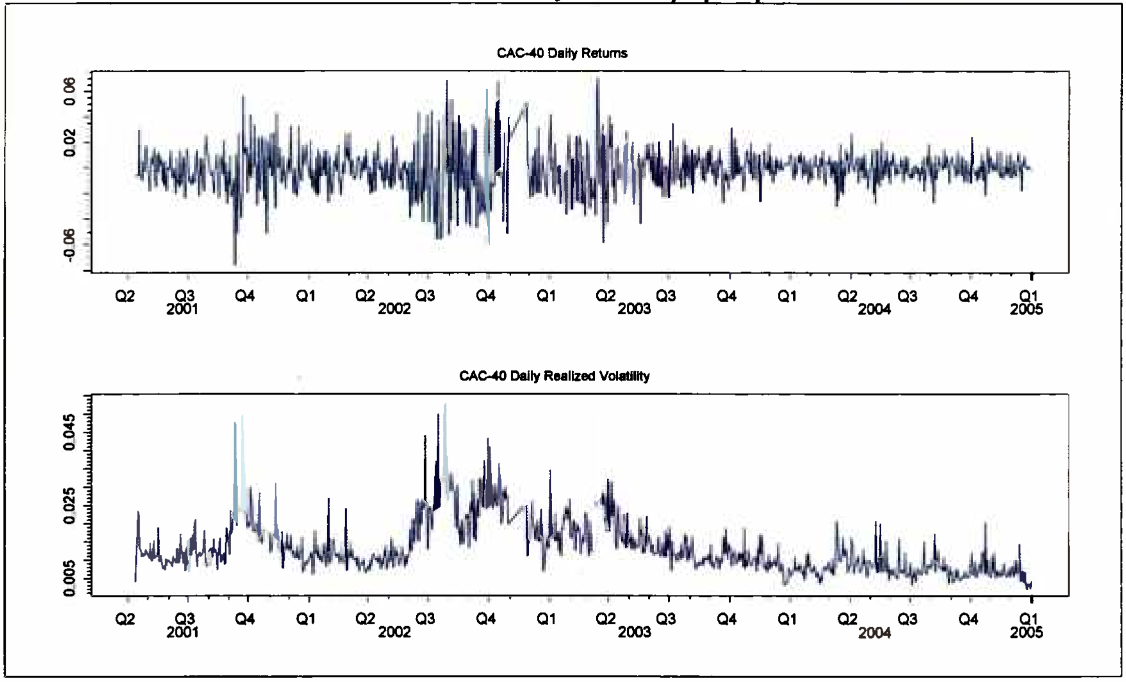
Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται εκτιμήσεις (11 Ιουλίου 2001) τα αποτελέσματα εμφανώς συγκλίνουν περισσότερο σε σύγκριση με την περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται προβλέψεις (30 Δεκεμβρίου 2004), γεγονός που οφείλεται στο ότι οι προβλέψεις είναι πολύ μακροπρόθεσμου χαρακτήρα και από ένα σημείο και ύστερα παραμένουν σταθερές στο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας τους, χωρίς δυνατότητα προσαρμογής στις πραγματικές αυξομειώσεις της μεταβλητότητας. Αυτό προκαλεί και την απόκλιση μεταξύ της δίκαιης τιμής μέσω *'realized volatility'* και της τιμής μέσω των προβλέψεων, εφόσον η κάθε περίπτωση χρησιμοποιεί διαφορετική μεταβλητότητα.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι παρόλο που και στις δυο ημερομηνίες τα CALLS είναι OTM και τα PUTS είναι ITM, τα πρώτα εμφανίζονται ακριβότερα από τα δεύτερα. Αυτό οφείλεται στην ημερομηνία ωρίμανσης που είναι αρκετά μακροπρόθεσμη, τόσο ώστε στη διάρκεια ζωής του δικαιώματος να υπάρχει αυξημένη πιθανότητα ανόδου του δείκτη. Δηλαδή είναι υψηλή η πιθανότητα μετατροπής των CALLS σε ITM και των PUTS σε OTM, κάτι που αντανακλάται στην τιμή τους.

4.1.2 Ανάλυση του Δείκτη CAC-40

Όπως στην περίπτωση του δείκτη DAX, έτσι κι εδώ χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (2.2) και (2.8) για τον υπολογισμό των αποδόσεων και της μεταβλητότητας αντίστοιχα. Στο Διάγραμμα 4.18 φαίνεται ότι οι αποδόσεις του CAC-40 παρουσιάζουν *'volatility clustering'* και η μεταβλητότητα ακολουθεί πορεία ανάλογη με τις αυξομειώσεις των αποδόσεων. Παρατηρείται ακόμη υψηλή μεταβλητότητα γύρω από την 11η Σεπτεμβρίου 2001, χωρίς όμως να υπάρχουν υπερβολικά υψηλές τιμές (ακραίες τιμές) όπως στην περίπτωση του DAX. Υψηλή μεταβλητότητα όμοιου μεγέθους υφίσταται και από τα μέσα του 2002 ως τα μέσα του 2003, ενώ από εκεί κι έπειτα κυμαίνεται σε σταθερά χαμηλά επίπεδα[5].

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.18: Αποδόσεις και Μεταβλητότητα CAC-40



ΠΙΝΑΚΑΣ 4.10: Στατιστικά Μέτρα CAC-40

	Αποδόσεις	Μεταβλητότητα
Μέσος	-0.000378	0.013950
Τυπική Απόκλιση	0.016780	0.007955
Ασυμμετρία	0.016650	1.611000
Κύρτωση	5.510000	6.272000
Ελάχιστο	-0.075880	0.002237
Μέγιστο	0.070020	0.053370

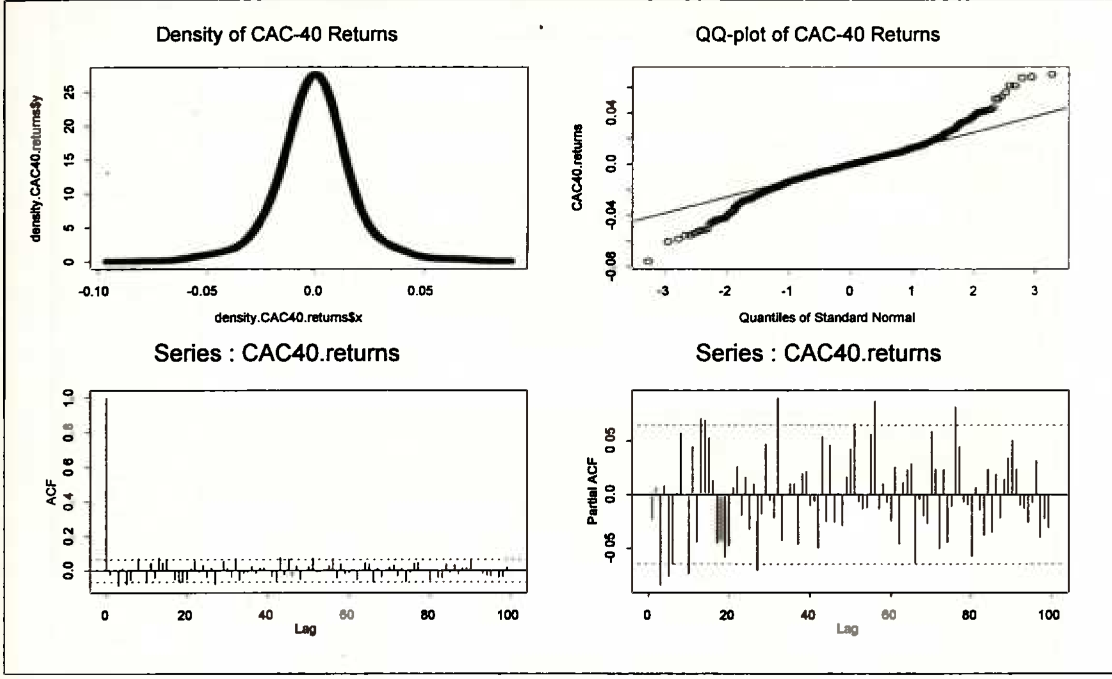
Από τα στατιστικά μέτρα του Πίνακα 4.10 διαπιστώνουμε ότι ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο 0, υπάρχει ελαφρά θετική ασυμμετρία, ενώ εμφανίζεται και υπερβάλλουσα κύρτωση. Η υψηλή κύρτωση σε συνδυασμό με το Διάγραμμα 4.19

[5] Μια απότομη μεταπήδηση που παρατηρείται περίπου στη μέση των χρονολογικών σειρών οφείλεται σε έλλειψη δεδομένων για κάποιες συγκεκριμένες ημέρες. Τα στοιχεία δεν ήταν διαθέσιμα για άγνωστους λόγους.

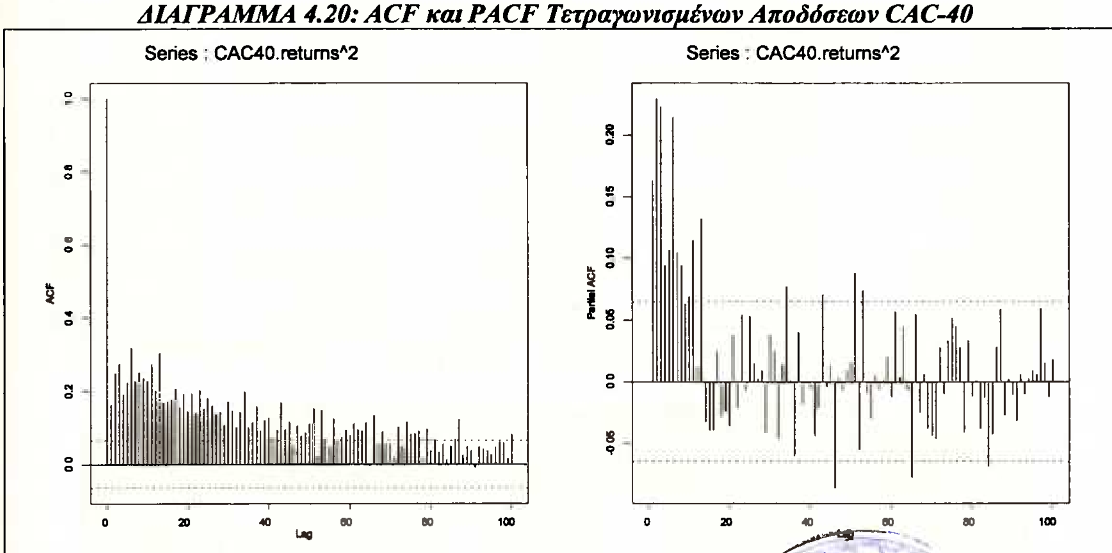
(στο QQ-plot) που δείχνει πως υπάρχουν παχιές ουρές στην κατανομή των αποδόσεων, αποτελεί πρόσφορο έδαφος για εφαρμογή των μοντέλων GARCH. Η απόρριψη κανονικότητας στις αποδόσεις επιβεβαιώνεται και στατιστικά (JB=240.775 και P-value=0.000). Οι ACF και PACF των αποδόσεων δείχνουν ότι δεν υπάρχουν ιδιαίτερα σημαντικές αυτοσυσχετίσεις, οπότε σε γενικές γραμμές θα αρκούσε ένας απλός σταθερός όρος για την εξίσωση του μέσου.

Από το Διάγραμμα 4.20 τέλος, το οποίο απεικονίζει τις ACF και PACF των τετραγώνων των αποδόσεων, μας δίνεται μια ακόμη ένδειξη για χρήση των υποδειγμάτων GARCH, διότι η δεσμευμένη διακύμανση φαίνεται να μην είναι σταθερή στο χρόνο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.19: Ανάλυση Αποδόσεων CAC-40



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.20: ACF και PACF Τετραγωνισμένων Αποδόσεων CAC-40



Μοντέλα της οικογένειας GARCH

Ως δείγμα θα χρησιμοποιηθούν τα στοιχεία από 12 Απριλίου 2001 μέχρι τις 30 Σεπτεμβρίου 2004, καθώς το διάστημα από 1 Οκτωβρίου ως 31 Δεκεμβρίου του έτους 2004 (64 εργάσιμες ημέρες) θα διατεθεί για την αξιολόγηση των προβλέψεων.

Στον Πίνακα 4.11 παραθέτονται οι εκτιμήσεις των πιο κατάλληλων GARCH για τα δεδομένα που εξετάζουμε και στον αμέσως επόμενο πίνακα δίνονται τα απαραίτητα κριτήρια αξιολόγησης. Στις παρενθέσεις είναι οι t-στατιστικές, ενώ η εξίσωση του μέσου περιλαμβάνει απλά το σταθερό όρο μ_t.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.11: Εκτιμήσεις GARCH για CAC-40

Μοντέλο:	EGARCH(1,1) με leverage	TGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)*	PGARCH(1,1) με leverage
μ_t	-0.0006834645 (-1.590)	-0.0005635581 (-1.305)	-0.0003833543 (-0.912)	-0.0001578678 (-0.398)
α_0	-0.2681139099 (-4.842)	0.0000023678 (2.891)	0.0000018894 (2.307)	0.0000134141 (0.706)
α_1	0.1213306716 (3.888)	-0.0125171497 (-1.025)	-0.0156400616 (-1.184)	0.0381760675 (1.314)
β_1	0.9798373240 (197.147)	0.9221059727 (59.456)	0.9295848143 (56.456)	0.9492904946 (89.589)
γ_1	-0.9999725359 (-3.467)	0.1645240063 (5.988)	0.1555049922 (5.031)	-0.9999322108 (-1167.090)
d	-	-	-	1.3959551934 (4.978)
Μοντέλο:	GARCH(2,2) με leverage	TGARCH(2,2)	TGARCH(2,2)*	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
μ_t	-0.0004512311 (-1.075)	-0.0004022798 (-0.935)	-0.0003572089 (-0.863)	-0.0018328302 (-2.096)
δ	-	-	-	0.1159860939 (1.579)
α_0	0.0000034103 (2.505)	0.0000036754 (2.745)	0.0000028689 (2.083)	0.0000057582 (3.147)
α_1	-0.0786374855 (-2.867)	-0.0010519454 (-0.091)	-0.1115188113 (-4.192)	-0.1585961741 (-9.260)
α_2	0.2036650400 (5.487)	-0.0212336156 (-1.648)	0.1131913629 (3.336)	0.1666040319 (5.872)
β_1	0.6481833430 (3.020)	-0.0683553121 (-4.790)	0.7183681043 (2.705)	0.5217071027 (7.026)
β_2	0.2126025624 (1.065)	0.9310220886 (68.454)	0.1568371821 (0.635)	0.3066927142 (4.168)
γ_1	0.2365442173 (1.286)	0.1458418120 (6.407)	0.0648297540 (1.702)	0.1171912232 (2.956)
γ_2	-0.2205181874 (-4.377)	0.1383940200 (6.117)	0.1639737443 (2.952)	0.1683986734 (3.519)

Όπου υπάρχει αστερίσκος (*) σημαίνει πως υποθέτουμε κατανομή t-Student για τα σφάλματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.12: Μέτρα Σύγκρισης GARCH για CAC-40

Μοντέλο:	EGARCH(1,1) με leverage	TGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)*	PGARCH(1,1) με leverage
AIC	-4829.819	-4827.975	-4828.078	-4824.267
BIC	-4806.075	-4804.231	-4799.586	-4795.774
Μοντέλο:	GARCH(2,2) με leverage	TGARCH(2,2)	TGARCH(2,2)*	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
AIC	-4840.990	-4829.059	-4840.528	-4844.133
BIC	-4803.000	-4791.069	-4797.790	-4801.395

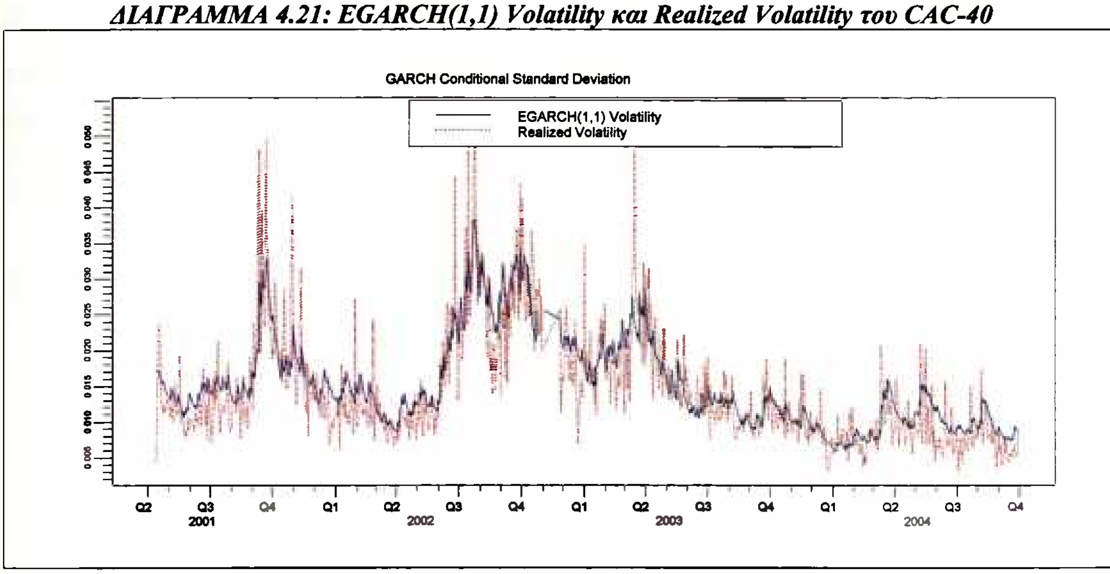
Από τα υποδείγματα που εκτιμήθηκαν, καλύτερα δείχνουν να προσαρμόζονται σύμφωνα με τα κριτήρια AIC και BIC το EGARCH(1,1) με leverage, το GARCH(2,2) με leverage, το TGARCH(2,2)* και το GARCH-M.

Στο EGARCH(1,1) μόνο ο σταθερός όρος μ_t=-0.00068 είναι ασήμαντος, με τους υπόλοιπους εκτιμητές σημαντικούς. Ο γ_1=-0.99997 είναι αρνητικός και σημαντικός, επομένως υπάρχει *'leverage effect'*. Ο β_1=0.97984 διαφέρει απ' τη μονάδα κι αυτό αρκεί για να ορίζεται ο εκθέτης της μη-δεσμευμένης διακύμανσης. Η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση ισούται με 0.01429.

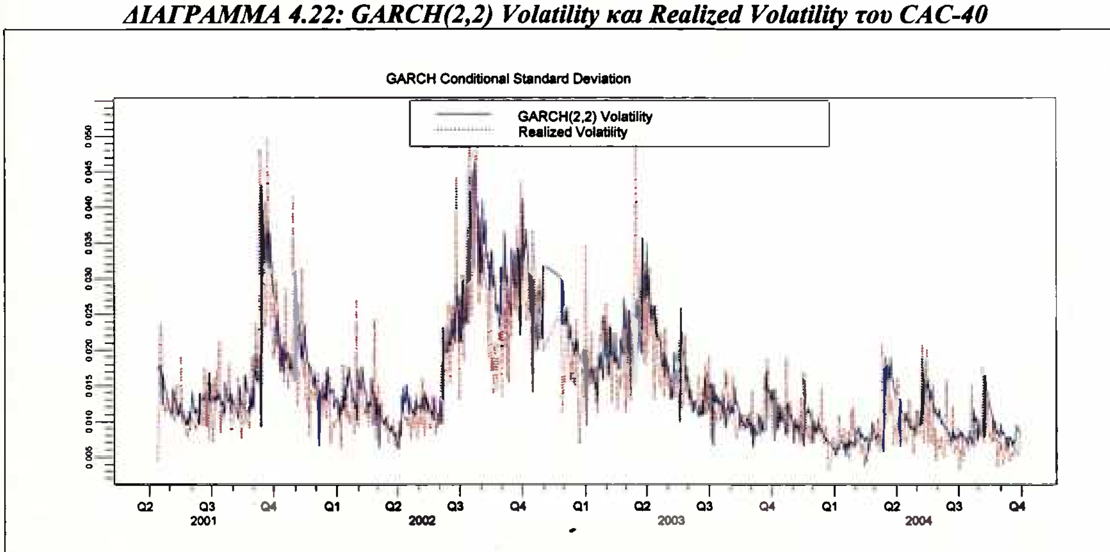
Το GARCH(2,2) έχει ασήμαντους τους μ_t=-0.00045, β_2=0.21260 και γ_1=0.23654. Ισχύει ο περιορισμός $\alpha_1(1+\gamma_1^2)+\alpha_2(1+\gamma_2^2)+\beta_1+\beta_2$=0.99132<1, άρα το μοντέλο δεν εκρήγνυται κι ορίζεται η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση, ίση με 0.01982. Το *'leverage effect'* μοντελοποιείται μόνο με τον γ_2=-0.22052, εφόσον μόνο αυτός έχει αρνητικό πρόσημο και είναι στατιστικά σημαντικός.

Οι εκτιμήσεις των μοντέλων φαίνονται στα Διαγράμματα 4.21 και 4.22.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.21: EGARCH(1,1) Volatility και Realized Volatility του CAC-40



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.22: GARCH(2,2) Volatility και Realized Volatility του CAC-40

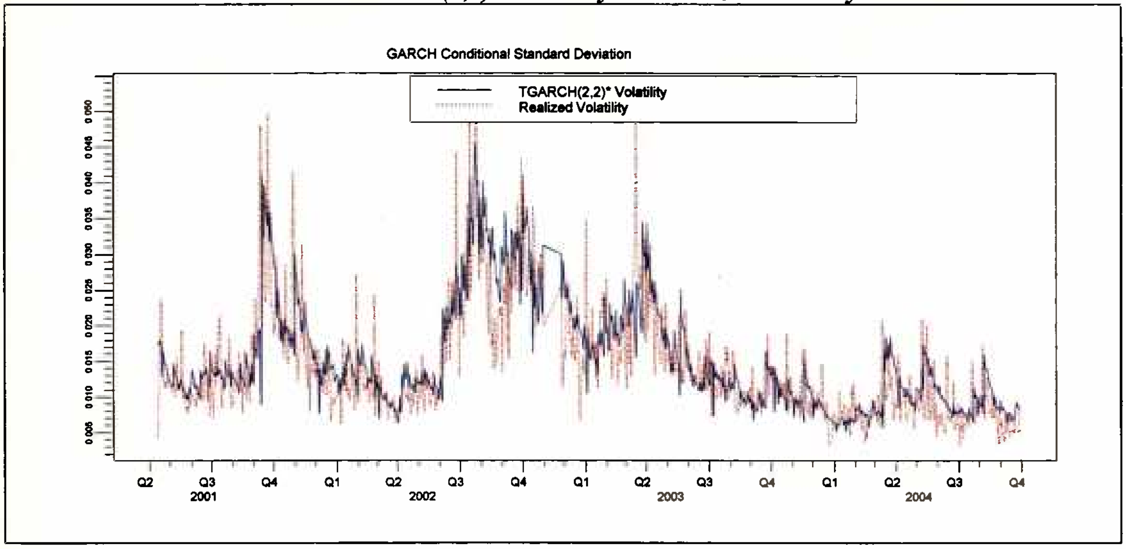


Το GARCH(2,2) δείχνει να προσαρμόζεται καλύτερα στις απότομες αλλαγές της μεταβλητότητας, γιατί όπως βλέπουμε ακολουθεί μια συγκριτικά περισσότερο ανώμαλη πορεία που πλησιάζει στην πραγματικότητα. Η έλλειψη ακραίων τιμών ασφαλώς βοηθά σε μεγάλο βαθμό τα μοντέλα να υιοθετήσουν την επιθυμητή πορεία.

Όσον αφορά τα άλλα δυο μοντέλα, το TGARCH(2,2)* έχει ασήμαντους τους εκτιμητές μ_t=-0.00036, β_2=0.15684 και γ_1=0.06483. Ο περιορισμός $\alpha_1+\alpha_2+\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2}+\beta_1+\beta_2$=0.99128<1 ισχύει και συνεπώς ορίζεται η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση που τώρα είναι 0.01814. Η επίδραση της ασυμμετρίας μοντελοποιείται, καθώς οι γ_1=0.06483 και γ_2=0.16397 είναι θετικοί, με το δεύτερο να είναι σημαντικός και τον πρώτο οριακά ασήμαντος.

Το GARCH-M τέλος έχει μόνο έναν ασήμαντο συντελεστή, τον δ=0.11599 που παριστάνει την *ανταμοιβή κινδύνου*. Το θετικό του πρόσημο σημαίνει πως υψηλή παρελθούσα τυπική απόκλιση (κίνδυνος) προκαλεί φυσιολογική άνοδο στις παρούσες αποδόσεις. Όπως και στο προηγούμενο υπόδειγμα, έτσι και τώρα μας ενδιαφέρει ότι $\alpha_1+\alpha_2+\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2}+\beta_1+\beta_2$=0.97920<1, πράγμα που σημαίνει ότι η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση ορίζεται και είναι 0.01664. Η ασυμμετρία εξακολουθεί να μοντελοποιείται, με τους γ_1=0.11719 και γ_2=0.16840 να είναι θετικοί και σημαντικοί. Οι εκτιμήσεις των TGARCH(2,2)* και GARCH-M φαίνονται στα Διαγράμματα 4.23 και 4.24 αντίστοιχα.

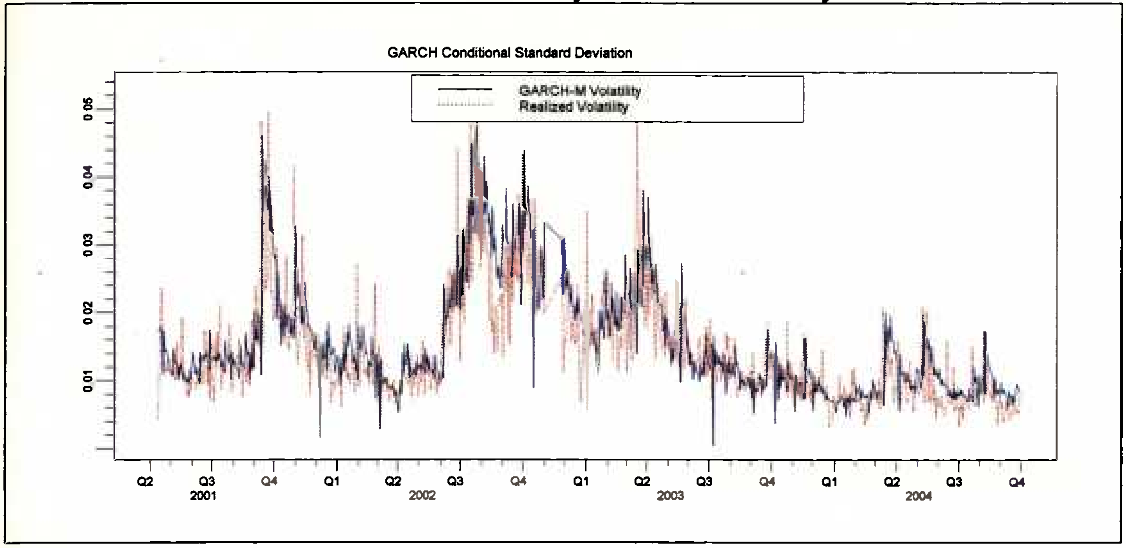
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.23: TGARCH(2,2)* Volatility και Realized Volatility του CAC-40



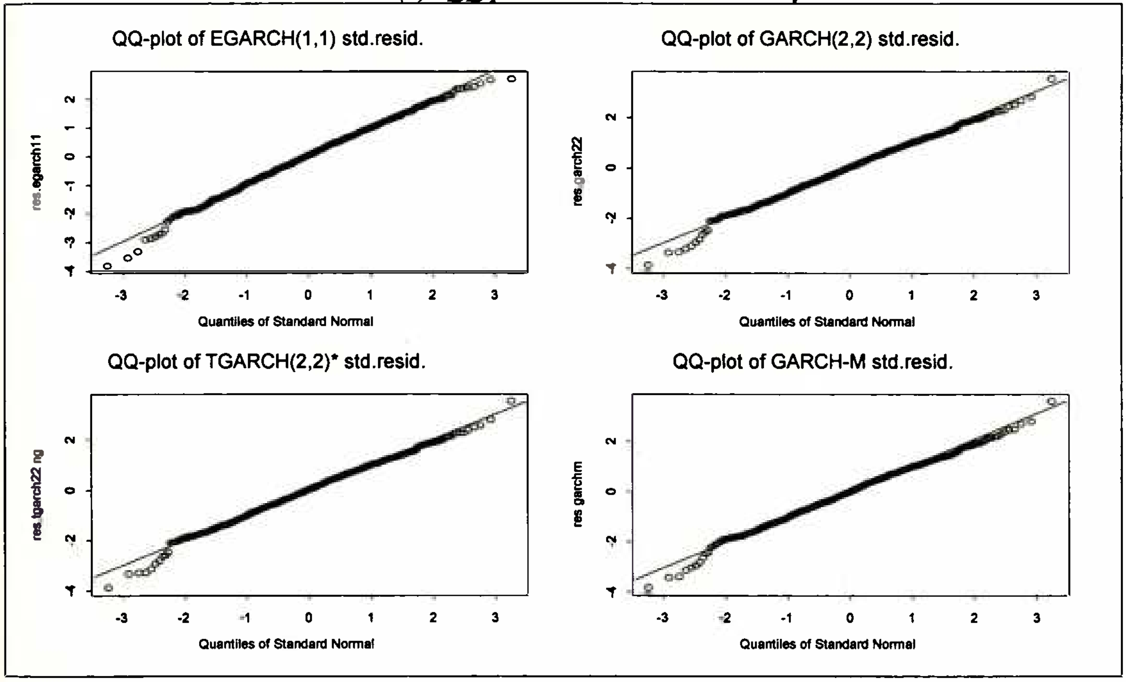
Από τα δυο διαγράμματα μπορούμε να διακρίνουμε πως το GARCH-M προσαρμόζεται ελαφρώς καλύτερα από το TGARCH(2,2)*, αλλά έχει το μειονέκτημα ότι σε μερικά σημεία υποεκτιμά έντονα την πραγματική μεταβλητότητα. Το θετικό είναι ότι και τα δυο «πιάνουν» τόσο τα υψηλά όσο και τα χαμηλά σημεία με αρκετά μεγάλη αποτελεσματικότητα.

Στο Διάγραμμα 4.25(α) γίνεται διαγνωστικός έλεγχος για τα μοντέλα που είδαμε και συγκεκριμένα γίνεται έλεγχος κανονικότητας των τυποποιημένων σφαλμάτων. Τα τέσσερα υποδείγματα παρουσιάζουν όμοια εικόνα, η οποία όμως δεν είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη, γιατί όπως βλέπουμε τα κατάλοιπα όλων των μοντέλων έχουν ακραίες τιμές στο κάτω τμήμα της κατανομής τους, με αποτέλεσμα να μη βρίσκονται πάνω στη γραμμή των 45° στο συγκεκριμένο σημείο. Υπάρχουν παχιές ουρές και κύρτωση που θέτουν υπό αμφισβήτηση την υπόθεση της κανονικότητας.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.24: GARCH-M Volatility και Realized Volatility του CAC-40



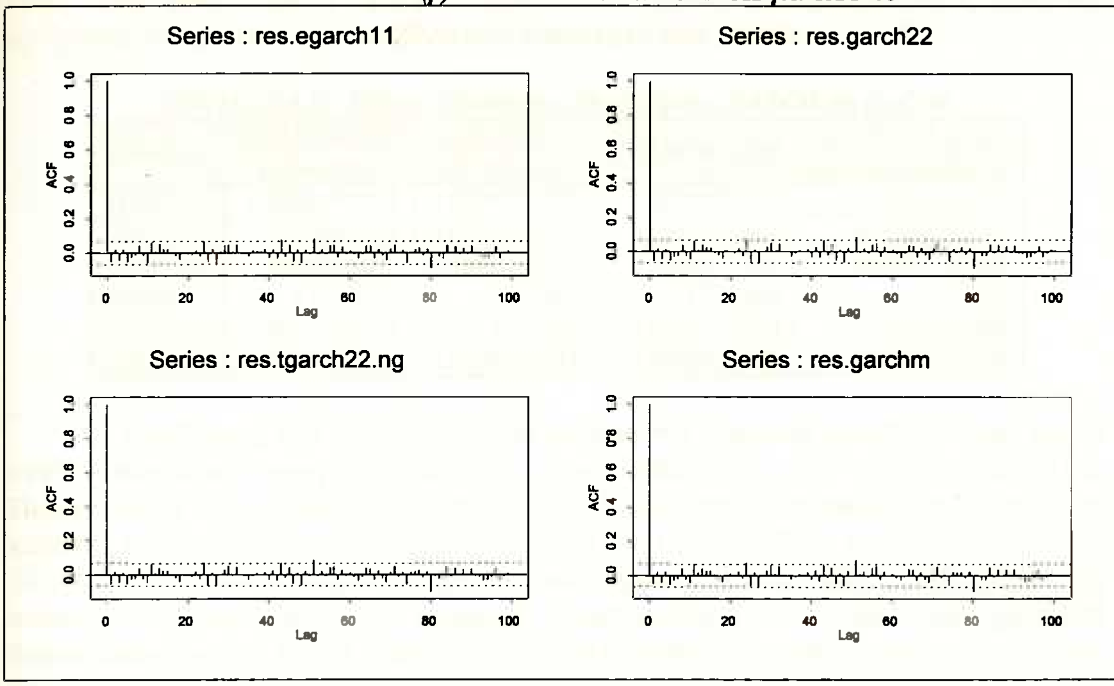
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.25(α): QQ-plots Καταλοίπων GARCH για CAC-40



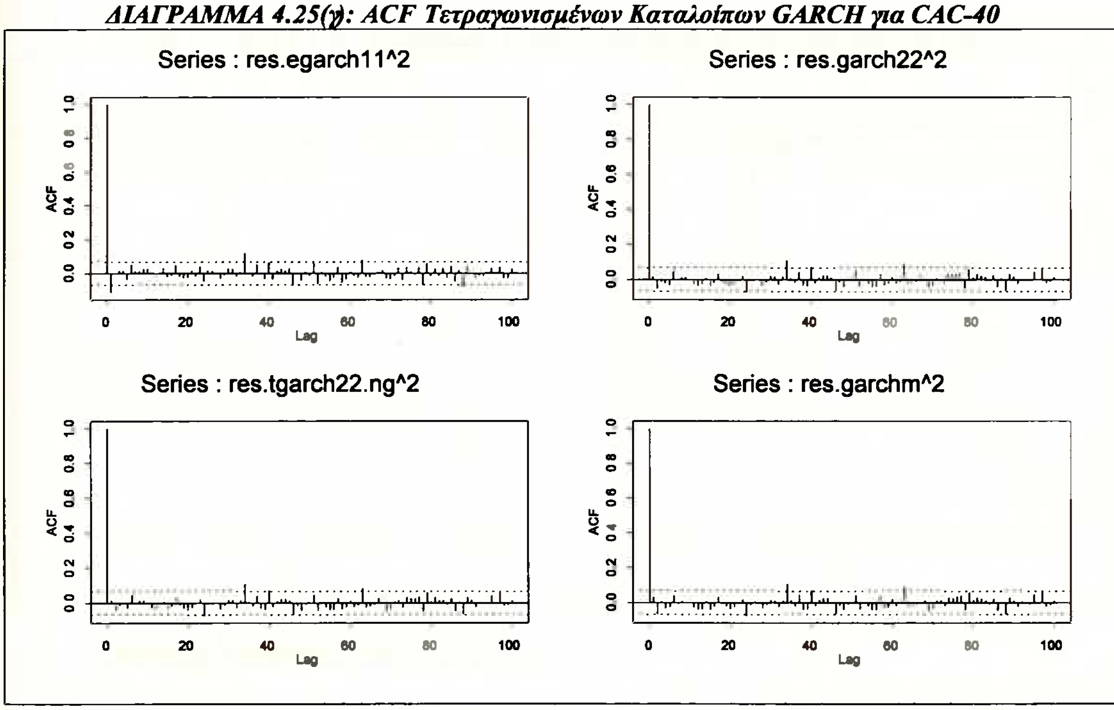
Στο 4.25(β) εξετάζεται η εξίσωση του μέσου. Οι ACF των τυποποιημένων σφαλμάτων από όλα τα μοντέλα δείχνουν ότι η εξίσωση των αποδόσεων εξειδικεύτηκε αποτελεσματικά, καθώς απαλείφθηκε η αυτοσυσχέτιση σε μεγάλο αριθμό υστερήσεων.

Στο 4.25(γ) αντίστοιχα εξετάζεται η εξίσωση της διακύμανσης, καθώς περιέχονται οι ACF των τετραγωνισμένων σφαλμάτων από τα τέσσερα μοντέλα. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι και η εξίσωση διακύμανσης των υποδειγμάτων είναι αρκετά αξιόπιστη, με κάποιες ωστόσο σημαντικές αυτοσυσχετίσεις να εμφανίζονται σποραδικά, περίπου από την υστέρηση 30 μέχρι την υστέρηση 65.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.25(β): ACF Καταλοίπων GARCH για CAC-40



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.25(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων GARCH για CAC-40



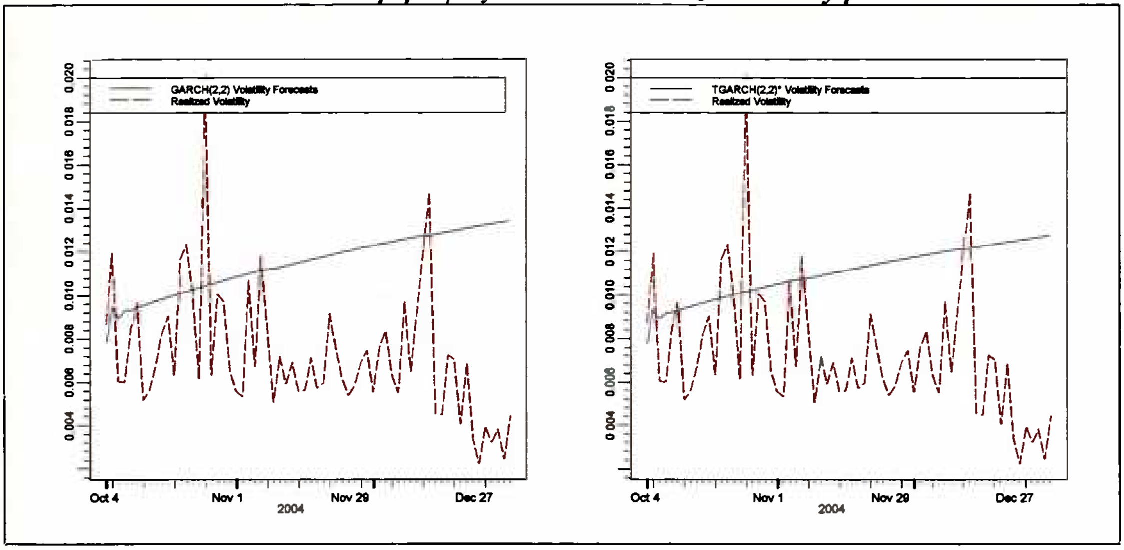
Οι προβλέψεις με τα τέσσερα υποδείγματα που αναλύθηκαν, πραγματοποιούνται για το εκτός δείγματος διάστημα από 1 Οκτωβρίου 2004 έως 31 Δεκεμβρίου 2004, που αποτελείται από 64 εργάσιμες ημέρες. Ο Πίνακας 4.13 περιλαμβάνει τα μέτρα προβλεπτικής ικανότητας που παράγουν οι προβλέψεις, μετά από σύγκριση με την πραγματική μεταβλητότητα του ίδιου χρονικού διαστήματος. Κανένα από τα μοντέλα δεν φαίνεται να δίνει τις επιθυμητές τιμές στα μέτρα αξιολόγησης, ωστόσο αν μπορούμε να ξεχωρίσουμε κάποια απ' αυτά, θα παίρναμε το GARCH(2,2) και το TGARCH(2,2)*, καθώς έχουν τα κριτήρια με τις χαμηλότερες τιμές. Εδώ γίνεται για ακόμη μια φορά εμφανές ότι ο μακροπρόθεσμος χρονικός ορίζοντας δυσχεραίνει την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.13: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων GARCH για CAC-40

Μοντέλο:	EGARCH(1,1) με leverage	GARCH(2,2) με leverage	TGARCH(2,2)*	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
MSE	0.0000482895	0.0000315068	0.0000273734	0.0000362492
RMSE	0.0069490614	0.0056130902	0.0052319593	0.0060207286
MAE	0.0060928091	0.0048599420	0.0045157738	0.0052529022
MAPE	117.417%	94.126%	87.398%	101.374%
U-Theil	0.8937524768	0.7219267483	0.6729076538	0.7743550896
LINEX	0.0000060276	0.0000039341	0.0000034183	0.0000045258

Οι προβλέψεις των δυο τελευταίων μαζί με την ιστορική μεταβλητότητα για το εκτός δείγματος χρονικό διάστημα παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.26. Παρατηρούμε ότι οι προβλέψεις ξεκινούν ανοδικά ώσπου να υπάρξει σύγκλιση στο επίπεδο ισορροπίας[6], που είναι 0.01982 για το GARCH(2,2) και 0.01814 για το TGARCH(2,2)* αντίστοιχα. Τα μέτρα έχουν πάρει αρκετά υψηλές τιμές λόγω της πτώσης που παρουσιάζει η ιστορική μεταβλητότητα στο τέλος του χρονικού διαστήματος και η οποία δημιουργεί μεγάλη απόκλιση μεταξύ πραγματικών και προβλεπόμενων τιμών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.26: Προβλέψεις GARCH και Realized Volatility για CAC-40



Μοντέλα Μακροχρόνιας Μνήμης

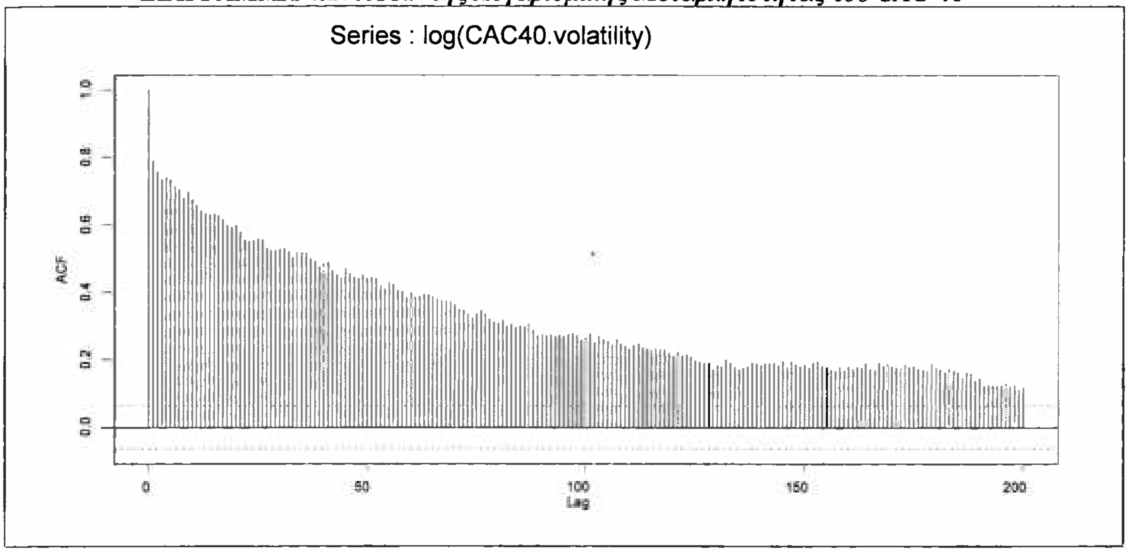
Με μια πρώτη ματιά στο Διάγραμμα 4.27, η ACF των λογαρίθμων της μεταβλητότητας του CAC-40 δείχνει πως η σειρά παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη, εφόσον η αυτοσυσχέτιση παραμένει σημαντική για περισσότερες από 200 υστερήσεις. Συνέπεια τούτου είναι η εξάρτηση της κάθε παρατήρησης από παρατηρήσεις του μακρινού παρελθόντος.

Η σειρά $\ln\sigma_t$ θα χρησιμοποιηθεί στα υποδείγματα ARFIMA και SEMIFAR για τη μοντελοποίηση της λογαριθμικής μεταβλητότητας. Το δείγμα που θα αναλυθεί

[6] Η σύγκλιση επιτυγχάνεται μετά από περίπου 1500 προβλέψεις, ενώ στο Διάγραμμα 4.26 φαίνονται μόνο οι 64 πρώτες προβλέψεις.

είναι όπως και στην περίπτωση των GARCH υποδειγμάτων από 12 Απριλίου 2001 ως 30 Σεπτεμβρίου 2004, ενώ οι τιμές από 1 Οκτωβρίου 2004 ως 31 Δεκεμβρίου του ίδιου έτους (64 συνολικά εργάσιμες ημέρες) θα διατεθούν για έλεγχο των μελλοντικών προβλέψεων.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.27: ACF της Λογαριθμικής Μεταβλητότητας του CAC-40



Ο Πίνακας 4.14 περιλαμβάνει οκτώ εκτιμημένα μοντέλα, που επιλέχθηκαν με βάση τα κριτήρια AIC, BIC και Log-likelihood. Η εξίσωση του μέσου αποτελείται από ένα σταθερό όρο και στις παρενθέσεις δίνονται οι t-στατιστικές για τον έλεγχο σημαντικότητας των συντελεστών.

Στον Πίνακα 4.15 αναγράφονται τα διάφορα κριτήρια αξιολόγησης (AIC, BIC και Log-likelihood) των εκτιμημένων υποδειγμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως από την πρώτη κατηγορία λειτουργούν καλύτερα τα ARFIMA(2,d,2) και SEMIFAR(0,d), ενώ από τη δεύτερη τα FIEGARCH(2,d,1) με leverage και FIEGARCH(2,d,2) με leverage.

Στο πρώτο μοντέλο οι συντελεστές d=0.37624 και θ_2=-0.60542 είναι στατιστικά ασήμαντοι. Αξιοσημείωτο είναι ότι ισχύει 0<d<0.5 που σημαίνει πως η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη σειρά και παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη. Το πρόβλημα είναι ότι οι φ_1=1.49332 και θ_1=1.54732 είναι μεγαλύτεροι της μονάδος κι άρα τα πολυώνυμα Φ(Β) και Θ(Β) έχουν ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου. Το θετικό είναι ότι ικανοποιείται ο περιορισμός $\varphi_1+\varphi_2$=0.97767<1.

Στο SEMIFAR(0,d) ο μοναδικός του συντελεστής d=0.40321 είναι σημαντικός και ανήκει στο διάστημα (0, 0.5). Δηλαδή και πάλι επιβεβαιώνεται πως η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη κι έχει μακρόχρονη μνήμη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.14: Εκτιμήσεις LMM για CAC-40

Μοντέλο:	ARFIMA(0,d,0)	ARFIMA(0,d,1)	ARFIMA(2,d,2)	SEMIFAR(0,d)
φ_1	-	-	1.4933234 (6.427)	-
φ_2	-	-	-0.5156556 (-2.487)	-
θ_1	-	**0.1272350 (2.558)**	1.5473159 (8.757)	-
θ_2	-	-	-0.6054185 (-1.979)	-
d	0.4588940 (17.099)	0.4897410 (12.461)	0.3762385 (1.304)	0.4032082 (14.972)
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(2,d,1) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
μ_t	0.0002974427 (0.706)	0.0002420195 **(0.580)**	-0.0003872970 **(-0.967)**	-0.0003705656 **(-0.935)**
α_0	2.246700E-13 (3.7E-8)	**3.277867E-11 (5.1E-6)**	**-0.1100583566 (-4.491)**	**-0.1278698060 (-4.551)**
φ_1	-0.3955336225 (-7.789)	**-0.5101274147 (-9.671)**	**-0.2046027304 (-2.708)**	**-0.2243384787 (-2.747)**
φ_2	-	**-0.2429345504 (-4.655)**	**0.3195965979 (3.802)**	**0.3581792800 (4.132)**
β_1	-	-	**0.6519490825 (4.336)**	**0.3443230977** (1.171)
β_2	-	-	-	0.2454947295 (1.090)
γ_1	-	-	-0.0691316392 (-1.422)	-0.0592238354 (-1.191)
γ_2	-	-	-0.0321148141 (-0.592)	-0.0622048879 (-1.206)
d	0.3778875141 (8.085)	0.4853167172 (9.668)	**0.6507743738 (6.834)**	**0.6544965165 (6.476)**

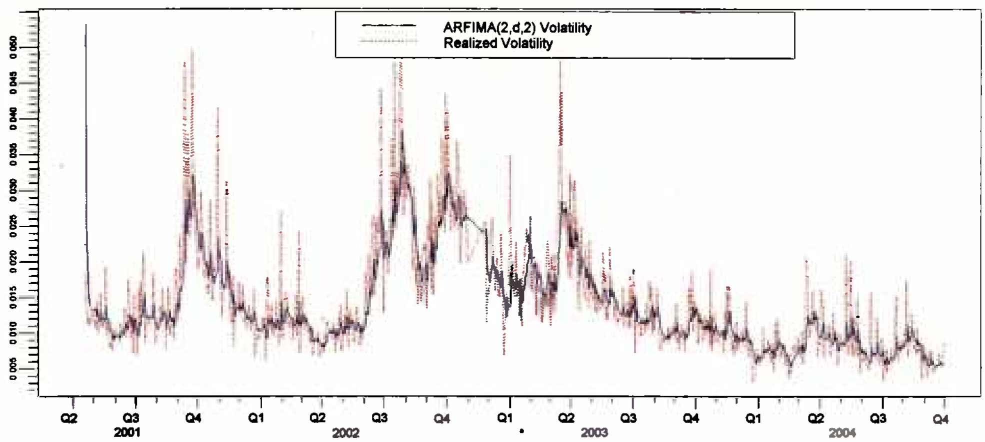
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.15: Μέτρα Σύγκρισης LMM για CAC-40

Μοντέλο:	ARFIMA(0,d,0)	ARFIMA(0,d,1)	ARFIMA(2,d,2)	SEMIFAR(0,d)
Log-likelihood	-97.784	-93.093	-78.946	-85.456
BIC	202.317	199.683	191.624	177.653
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(2,d,1) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
AIC	-4797.744	-4812.394	-4844.359	-4843.500
BIC	-4778.749	-4788.651	-4806.369	-4800.761

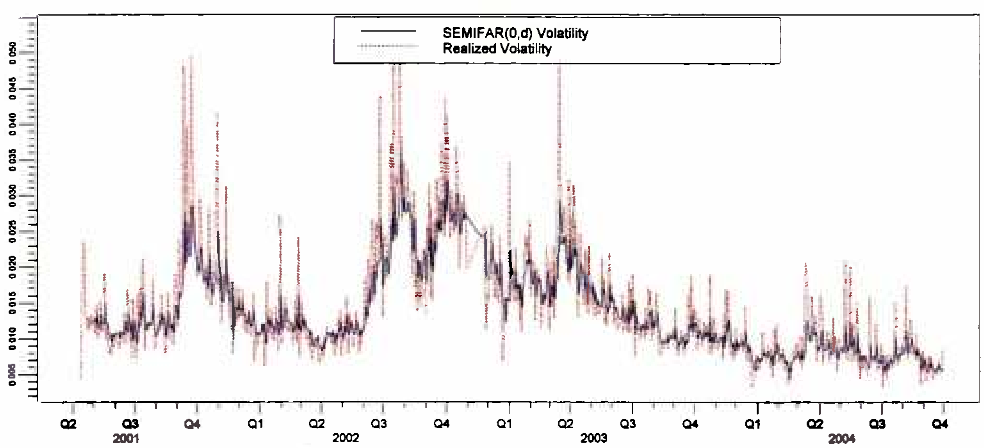
Οι εκτιμήσεις του ARFIMA(2,d,2) και SEMIFAR(0,d) μαζί με την ιστορική μεταβλητότητα για το χρονικό διάστημα της μοντελοποίησης φαίνονται στα Διαγράμματα 4.28 και 4.29 της επόμενης σελίδας.

Τα γραφήματα δείχνουν καλή προσαρμογή εκ μέρους και των δυο υποδειγμάτων, με το SEMIFAR(0,d) να μοντελοποιεί κάπως καλύτερα τις απότομες αυξομειώσεις. Το ARFIMA(2,d,2) δεν δίνει καλές εκτιμήσεις στις πρώτες παρατηρήσεις του δείγματος, καθώς υπερεκτιμά εμφανώς τη μεταβλητότητα, αλλά στη συνέχεια η πορεία που ακολουθεί είναι πολύ κοντά στην ιστορική μεταβλητότητα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.28: ARFIMA(2,d,2) Volatility και Realized Volatility του CAC-40



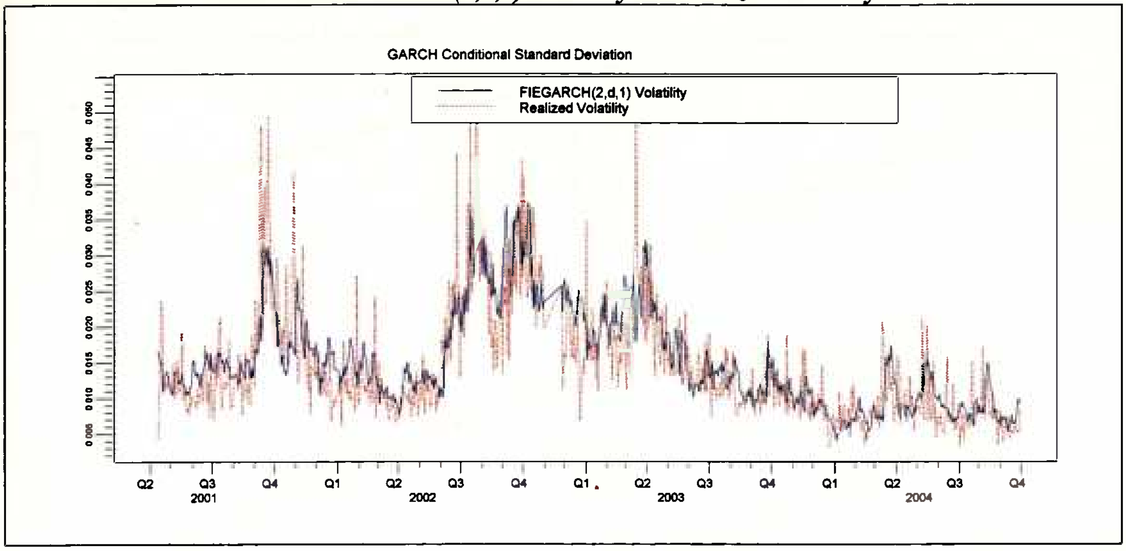
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.29: SEMIFAR(0,d) Volatility και Realized Volatility του CAC-40



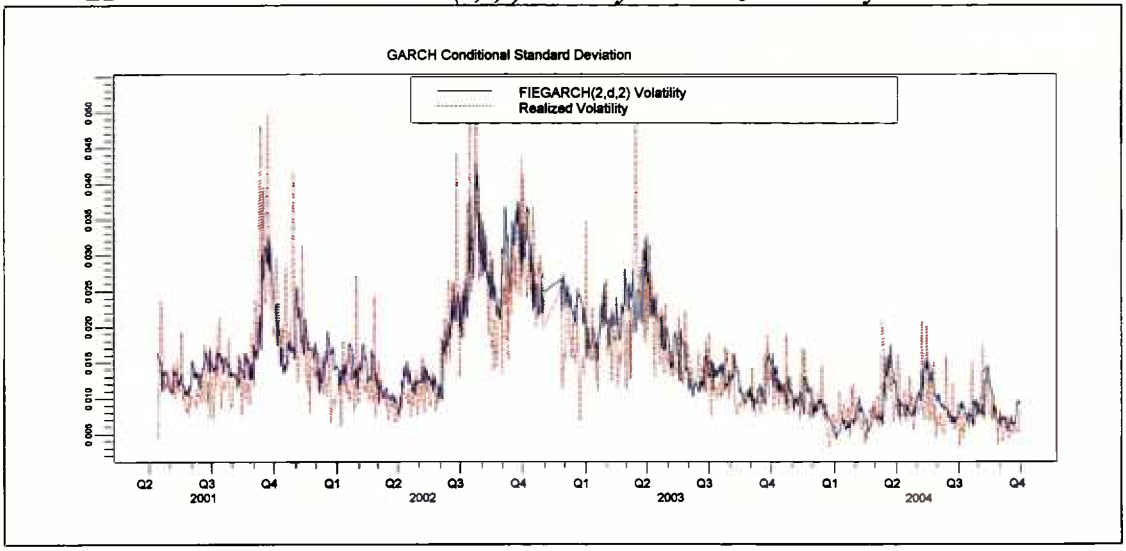
Στο τρίτο μοντέλο, που είναι το FIEGARCH(2,d,1) είναι στατιστικά ασήμαντοι οι εκτιμητές μ_t=-0.00039, γ_1=-0.06913 και γ_2=-0.03211, ενώ το άθροισμα $\varphi_1+\varphi_2$=0.11499 είναι μικρότερο της μονάδος κι επομένως το μοντέλο δεν εκρήγνυται. Οι συντελεστές ασυμμετρίας που είδαμε παραπάνω, αν και ασήμαντοι, είναι διάφοροι του μηδενός, συνεπώς το *'leverage effect'* μοντελοποιείται. Τέλος, ο συντελεστής d=0.65077 βρίσκεται στο διάστημα (0, 1) κι άρα το μοντέλο θεωρείται στάσιμο.

Το τελευταίο μοντέλο είναι το FIEGARCH(2,d,2). Εκεί υπάρχουν οι ασήμαντοι συντελεστές μ_t=-0.00037, β_1=0.34432, β_2=0.24549, γ_1=-0.05922 και γ_2=-0.06220. Το μοντέλο δεν εκρήγνυται διότι $\varphi_1+\varphi_2$=0.13384<1. Οι παράμετροι της ασυμμετρίας παρόλο που είναι ασήμαντοι, διαφέρουν του μηδενός και συνεπώς λαμβάνεται υπόψη το *'leverage effect'*. Τέλος, για τον d=0.65450 ισχύει 0<d<1 και το μοντέλο είναι στάσιμο. Στα Διαγράμματα 4.30 και 4.31 δίνονται οι εκτιμήσεις των δυο τελευταίων μοντέλων.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.30: FIEGARCH(2,d,1) Volatility και Realized Volatility του CAC-40



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.31: FIEGARCH(2,d,2) Volatility και Realized Volatility του CAC-40

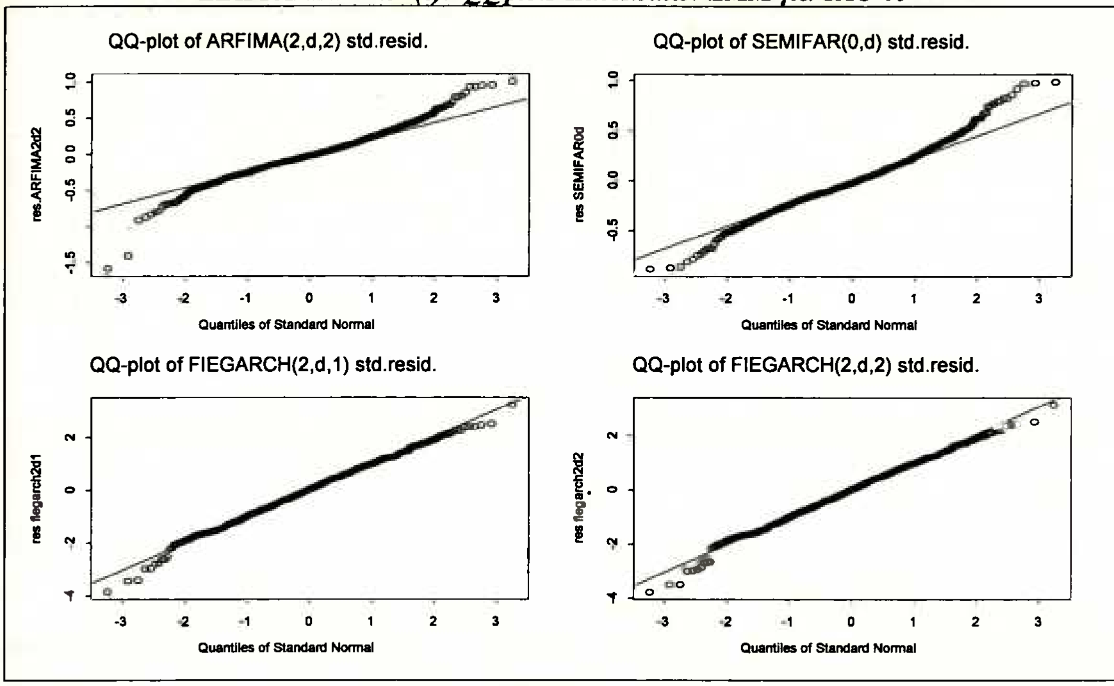


Η διαφορά μεταξύ των παραπάνω διαγραμμάτων αν και μικρή, καθιστά το δεύτερο ελαφρώς καλύτερο από το πρώτο, γιατί το FIEGARCH(2,d,2) λειτουργεί λίγο πιο αποτελεσματικά στις απότομες και μικρές μεταβολές.

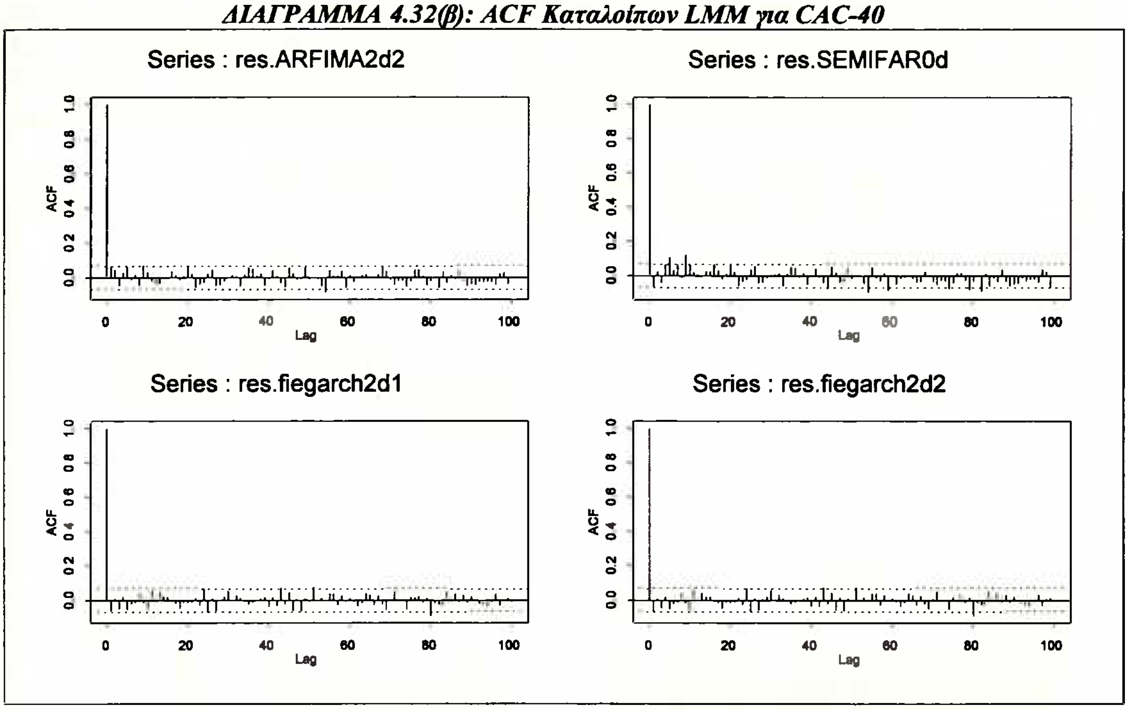
Από το διαγνωστικό έλεγχο του Διαγράμματος 4.32(α) διαπιστώνουμε πως τα σφάλματα των ARFIMA(2,d,2) και SEMIFAR(0,d) δεν κατανέμονται κανονικά, κάτι που γίνεται αντιληπτό από τις παχιές ουρές. Αντίθετα, τα κατάλοιπα των FIEGARCH(2,d,1) και FIEGARCH(2,d,2) πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό τα χαρακτηριστικά της κανονικότητας.

Στο 4.32(β) παρουσιάζονται οι ACF των σφαλμάτων του κάθε μοντέλου. Όσον αφορά τα ARFIMA(2,d,2) και SEMIFAR(0,d) γίνεται έλεγχος της εξίσωσης λογαριθμικής διακύμανσης, ενώ για τα FIEGARCH(2,d,1) και FIEGARCH(2,d,2) ελέγχεται η εξίσωση του μέσου. Η αυτοσυσχέτιση έχει απαλειφθεί σε όλα τα γραφήματα, εκτός από αυτό του SEMIFAR(0,d), που εμφανίζει κάποιους σημαντικούς συντελεστές ιδιαίτερα στις πρώτες 10 υστερήσεις.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.32(α): QQ-plots Καταλοίπων LMM για CAC-40

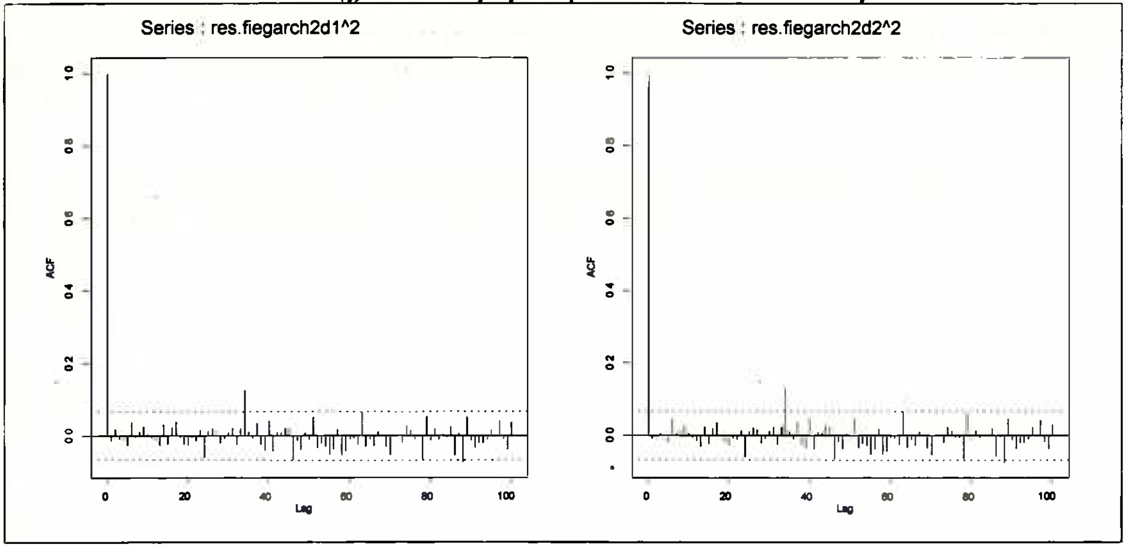


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.32(β): ACF Καταλοίπων LMM για CAC-40



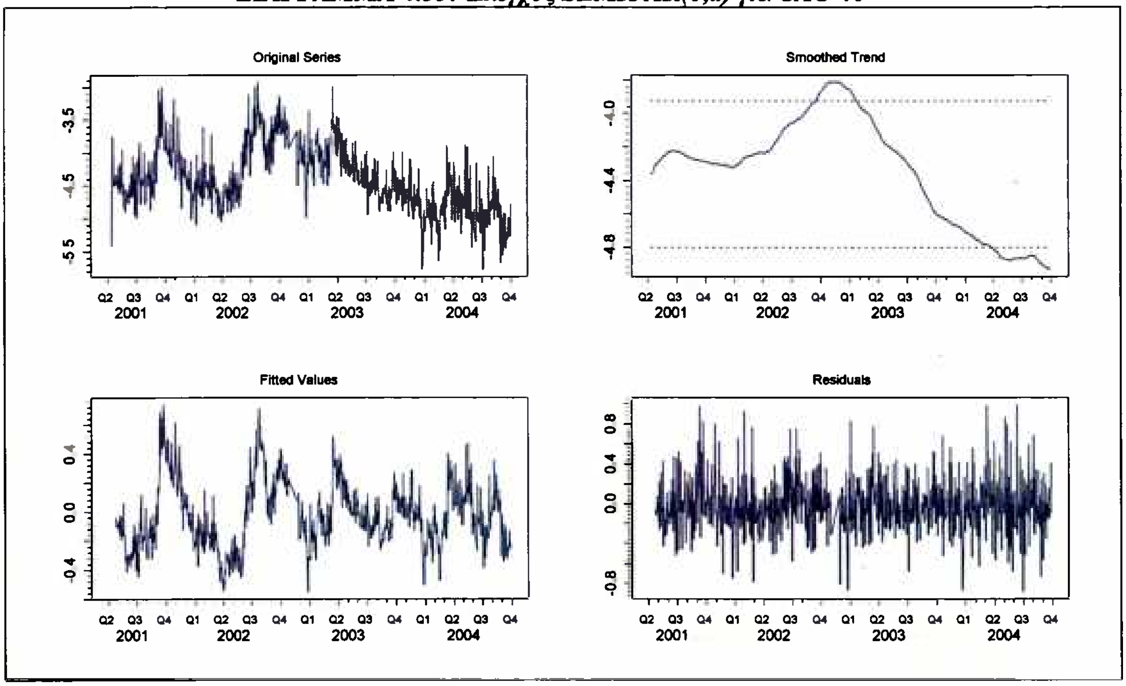
Στο 4.32(γ) τέλος ελέγχεται η εξίσωση διακύμανσης για τα FIEGARCH(2,d,1) και FIEGARCH(2,d,2), καθώς δίνονται οι ACF για τα τετραγωνισμένα σφάλματα. Η αυτοσυσχέτιση δείχνει να έχει απαλειφθεί, με μόνο ένα σημαντικό συντελεστή σε υστέρηση 34 και για τα δυο υποδείγματα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.32(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων LMM για CAC-40



Στο επόμενο διάγραμμα εξετάζεται το υπόδειγμα SEMIFAR(0,d) για το πόσο αποτελεσματικά προσαρμόζεται. Η αρχική σειρά $\ln\sigma_t$ φαίνεται να έχει τάση, που αρχικά έχει θετική κλίση κι έπειτα στρέφεται κατά 90°, ενώ θεωρείται σημαντική εφόσον σε δυο σημεία υπερβαίνει τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Οι εκτιμημένες τιμές των λογαρίθμων προσεγγίζουν κατά πολύ τις πραγματικές. Τα σφάλματα από την άλλη έχουν κάποιες ακραίες τιμές που αιτιολογούν το γεγονός ότι δεν κατανέμονται κανονικά παρουσιάζοντας παχιές ουρές, όπως φαίνεται και στο 4.32(α).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.33: Έλεγχος SEMIFAR(0,d) για CAC-40



Προχωρώντας σε μελλοντικές προβλέψεις (1 Οκτωβρίου 2004 ως 31 Δεκεμβρίου 2004) με τα μοντέλα που λειτουργούν καλύτερα, αποκτούμε τα μέτρα αξιολόγησης του Πίνακα 4.16. Βλέπουμε ότι πιο αποδοτικά λειτουργούν τα SEMIFAR(0,d) και FIEGARCH(2,d,1), παρόλο που το δεύτερο παράγει αντικειμενικά κακές προβλέψεις. Το ARFIMA(2,d,2) κάνει πάρα πολύ κακή δουλειά.

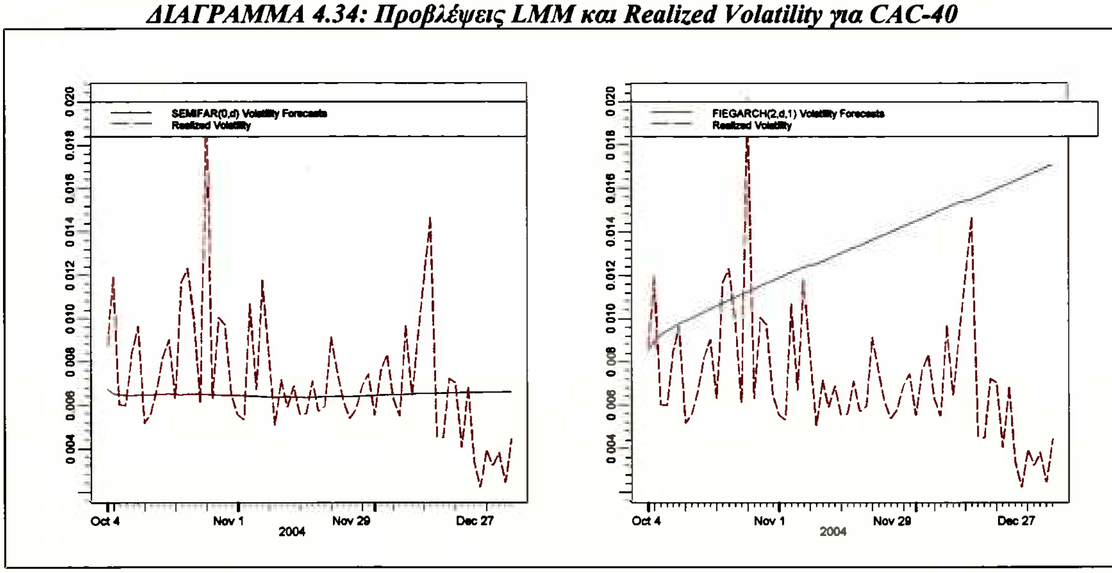
στο συγκεκριμένο τομέα κι αυτό οφείλεται στους συντελεστές του, που όπως είδαμε υπερέβαιναν τη μονάδα, ενώ και το FIEGARCH(2,d,2) δεν προσφέρει τις καλύτερες δυνατές προβλέψεις. Ο μακροπρόθεσμος χρονικός ορίζοντας αποδεικνύεται κρίσιμος παράγοντας για ακόμη μια φορά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.16: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων LMM για CAC-40

Μοντέλο:	ARFIMA(2,d,2)	SEMIFAR(0,d)	FIEGARCH(2,d,1) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
MSE	0.0009810098	0.0000092085	0.0000551242	0.0000627838
RMSE	0.0313210755	0.0030345492	0.0074245700	0.0079236258
MAE	0.0298860849	0.0020538730	0.0063869385	0.0068210152
MAPE	472.885%	30.661%	124.354%	132.655%
U-Theil	4.0283553746	0.3902880856	0.9549099379	1.0190959296
LINEX	0.0001219114	0.0000011523	0.0000068796	0.0000078346

Το Διάγραμμα 4.34 παρουσιάζει τις προβλέψεις των SEMIFAR(0,d) και FIEGARCH(2,d,1), μαζί με τις τιμές της ιστορικής μεταβλητότητας για το ίδιο διάστημα. Το SEMIFAR(0,d) δείχνει για ακόμη μια φορά ότι προσαρμόζεται πολύ αποτελεσματικά κι έτσι δικαιολογούνται οι χαμηλές τιμές των κριτηρίων προβλεπτικής ικανότητας. Το FIEGARCH(2,d,1) από την άλλη δεν παρουσιάζει σημάδια σύγκλισης, ούτε μετά από μεγάλο αριθμό προβλέψεων, κάτι που σαφώς αποτελεί αρνητικό στοιχείο. Αν δημιουργήσουμε ένα παρόμοιο γράφημα για το ARFIMA(2,d,2) θα δούμε ότι οι προβλέψεις του συγκλίνουν σε κάποιο σημείο ισορροπίας, βρίσκονται όμως συνεχώς σε πολύ υψηλότερο επίπεδο από αυτό των πραγματικών παρατηρήσεων, λόγος για τον οποίο τα κριτήρια που του αντιστοιχούν δεν έδωσαν τις επιθυμητές τιμές.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.34: Προβλέψεις LMM και Realized Volatility για CAC-40



Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις και τις προβλέψεις για κάποιες τυχαίες ημερομηνίες, μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε το VaR (Value at Risk), που προκύπτει από την εκάστοτε τιμή της μεταβλητότητας. Για παράδειγμα, στις 11 Οκτωβρίου 2001 (ένα μήνα μετά το τρομοκρατικό χτύπημα) και στις 31 Δεκεμβρίου 2004 (τελευταία μέρα του δείγματος), η μεταβλητότητα διαμορφώθηκε όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.17. Για την πρώτη ημερομηνία διαθέτονται εκτός από την *'realized volatility'* και οι εκτιμήσεις, ενώ για τη δεύτερη οι προβλέψεις που είναι μακροπρόθεσμες και παρουσιάζουν απόκλιση από την πραγματικότητα. Τα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται είναι αυτά που παρήγαγαν τις πιο αποτελεσματικές προβλέψεις [GARCH(2,2) με leverage και TGARCH(2,2)* από τα GARCH - SEMIFAR(0,d) και FIEGARCH(2,d,1) με leverage από τα LMM].

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.17: Τιμές της Μεταβλητότητας του CAC-40

	11 Οκτωβρίου 2001		*31 Δεκεμβρίου 2004*	
	Realized Volatility	**Εκτίμηση της Volatility**	**Realized Volatility**	**Πρόβλεψη της Volatility**
GARCH(2,2) με leverage	0.0176113952	0.0168911788	0.0044589880	0.0134041256
TGARCH(2,2)*		0.0177666632		0.0127401370
SEMIFAR(0,d)		0.0187062978		0.0066498845
FIEGARCH(2,d,1) με leverage		0.0146255341		0.0170647611

Για την εύρεση του VaR θα εφαρμοστεί η προσέγγιση **Δέλτα-Γάμμα**, που έχει ως $\mathrm{VaR} = \alpha\sigma S\sqrt{\Delta^2 + \frac{1}{2}\Gamma^2\sigma^2}$ και χρησιμοποιείται για την εύρεση **VaR των OPTIONS**. Στην προηγούμενη σχέση το α συμβολίζει το επίπεδο εμπιστοσύνης της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, σ είναι η μεταβλητότητα σε οποιαδήποτε μορφή διατίθεται (τεκμαρτή, πραγματική, εκτιμημένη, προβλεπόμενη κλπ.), S είναι η SPOT τιμή του δείκτη ή της μετοχής πάνω στην οποία διαπραγματεύεται το OPTION, Δ είναι η παράμετρος Δέλτα του OPTION και Γ η παράμετρος Γάμμα του OPTION. Εφόσον διαθέτουμε ημερήσια μεταβλητότητα, θα υπολογίσουμε το VaR μιας ημέρας για α=5%.

Είδαμε στο Μέρος 2 ότι αν χρησιμοποιηθεί το μοντέλο των Black and Scholes (BS) για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, τότε $\Delta_{CALL} = N(d)$, $\Delta_{PUT} = N(d) - 1$ και $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$. Επιπλέον ισχύει ότι $\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT}$.

Στις 11 Οκτωβρίου 2001 ο CAC-40 έκλεισε στις 4330.60 μονάδες και στις 31 Δεκεμβρίου 2004 στις 3821.16 μονάδες. Με επιτόκιο αγοράς 5.5%, λήξη σε 90 μέρες, τιμές εξάσκησης 4350 στην πρώτη περίπτωση και 3850 στη δεύτερη και χρησιμοποιώντας τις τιμές της μεταβλητότητας από τον Πίνακα 4.17, προκύπτουν οι παρακάτω δίκαιες τιμές.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.18: Αποτίμηση OPTIONS για τον CAC-40

	11 Οκτωβρίου 2001				*31 Δεκεμβρίου 2004*			
	Δίκαιη Τιμή με Realized Volatility		**Δίκαιη Τιμή με Εκτιμήσεις**		**Δίκαιη Τιμή με Realized Volatility**		**Δίκαιη Τιμή με Προβλέψεις**	
	CALL	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**
GARCH(2,2) με leverage	42.1060	2.9110	41.7560	2.5610	23.0280	0.0080	25.5300	2.5100
TGARCH(2,2)*			42.1830	2.9890			25.2050	2.1850
SEMIFAR(0,d)			42.6680	3.4730			23.1860	0.1670
FIEGARCH(2,d,1) με leverage			40.7720	1.5780			27.5310	4.5110

Βλέπουμε ότι όπως και στην περίπτωση του DAX, έτσι και στον CAC-40 τα CALLS είναι ακριβότερα από τα PUTS, αν και τα πρώτα είναι OTM, ενώ τα δεύτερα

ΙΤΜ. Αυτό προφανώς οφείλεται στη μακροπρόθεσμη ημερομηνία ωρίμανσης που επιτρέπει αύξηση της πιθανότητας να αντιστραφούν οι καταστάσεις των OPTIONS από ΟΤΜ σε ΙΤΜ και αντίστροφα.

Στον επόμενο πίνακα δίνεται η παράμετρος Δ για κάθε μια από τις περιπτώσεις, σύμφωνα με τη μέθοδο BS. Τα πρόσημα του Δ επιβεβαιώνουν τη θεωρία, καθώς είναι θετικά για τα CALLS και αρνητικά για τα PUTS.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.19: Δέλτα των OPTIONS για τον CAC-40

	11 Οκτωβρίου 2001				*31 Δεκεμβρίου 2004*			
	Δέλτα με Realized Volatility		**Δέλτα με Εκτιμήσεις**		**Δέλτα με Realized Volatility**		**Δέλτα με Προβλέψεις**	
	CALL	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**
GARCH(2,2) με leverage	0.85176	-0.14824	0.86174	-0.13826	0.99683	-0.00317	0.81889	-0.18111
TGARCH(2,2)*			0.84966	-0.15034			0.83105	-0.16895
SEMIFAR(0,d)			0.83730	-0.16270			0.96649	-0.03351
FIEGARCH(2,d,1) με leverage			0.89536	-0.10464			0.76341	-0.23659

Η εύρεση του Γ μπορεί να επιτευχθεί με χρήση του μοντέλου BS. Αυξάνοντας την τιμή του δείκτη (S) κατά μια μονάδα, στην παράσταση $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$ ο παρονομαστής (μεταβολή του S) θα είναι 1 και το Γ θα ισούται απλά με τη μεταβολή του Δ που δίνεται μέσω του BS. Ο Πίνακας 4.20 δίνει την παράμετρο Γ για κάθε περίπτωση, ενώ ισχύει $\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT}$ κι έτσι βλέπουμε πως το Γ είναι ίδιο μεταξύ CALLS και PUTS για κάθε ένα από τα υποδείγματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.20: Γάμμα των OPTIONS για τον CAC-40

	11 Οκτωβρίου 2001		*31 Δεκεμβρίου 2004*	
	Γάμμα με Realized Volatility	**Γάμμα με Εκτιμήσεις**	**Γάμμα με Realized Volatility**	**Γάμμα με Προβλέψεις**
GARCH(2,2) με leverage	0.00602	0.00598	0.00097	0.01017
TGARCH(2,2)*		0.00603		0.01022
SEMIFAR(0,d)		0.00604		0.00549
FIEGARCH(2,d,1) με leverage		0.00565		0.00942

Το VaR μιας ημέρας για τα OPTIONS εκφρασμένο σε μονάδες του δείκτη CAC-40, για επίπεδο εμπιστοσύνης c=95% (ή α=5%=1-c) δίνεται στον Πίνακα 4.21.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.21: Value at Risk των OPTIONS για τον CAC-40

	11 Οκτωβρίου 2001				*31 Δεκεμβρίου 2004*			
	VaR με Realized Volatility		**VaR με Εκτιμήσεις**		**VaR με Realized Volatility**		**VaR με Προβλέψεις**	
	CALL	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**	**CALL**	**PUT**
GARCH(2,2) με leverage	3.2480	0.5650	3.1520	0.5060	0.8490	0.0030	2.0970	0.4640
TGARCH(2,2)*			3.2690	0.5780			2.0230	0.4110
SEMIFAR(0,d)			3.3910	0.6590			1.2280	0.0430
FIEGARCH(2,d,1) με leverage			2.8350	0.3310			2.4890	0.7710

Η ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων έχει ως εξής: Για παράδειγμα στις 11 Οκτωβρίου 2001 το VaR ενός CALL με βάση τη μεταβλητότητα που εκτιμήθηκε μέσω του μοντέλου TGARCH(2,2)* είναι 3.2690 σε όρους μονάδων του CAC-40. Αυτό σημαίνει πως στη συγκεκριμένη ημερομηνία είμαστε κατά 95% σίγουροι πως την επόμενη μέρα (εφόσον έχουμε ημερήσιο VaR) η μέγιστη απώλεια (ζημιά) που ενδέχεται να υποστεί το CALL που κατέχει κάποιος επενδυτής δεν θα υπερβεί τις 3.2690 μονάδες. Αυτό το συμπέρασμα προέκυψε μέσω της προσέγγισης Δέλτα-Γάμμα, θα μπορούσαν όμως τα αποτελέσματα να είναι διαφορετικά αν είχε χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη μέθοδος για τον υπολογισμό του VaR. Οπότε τα αποτελέσματα εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από ποικιλία υποκειμενικών κριτηρίων.

4.2 Ημερήσια Δεδομένα και Χρήση της Μεθόδου των Garman and Klass

Στην ενότητα αυτή θα επεξεργαστούμε ημερήσια αριθμητικά δεδομένα. Είδαμε ως τώρα ότι οι πιο αποτελεσματικές και αμερόληπτες εκτιμήσεις της ημερήσιας πραγματοποιηθείσας μεταβλητότητας (daily realized volatility) αποκτώνται με χρήση στοιχείων υψηλής συχνότητας (high frequency data), αλλά η εύρεση τέτοιων στοιχείων αποδεικνύεται πολλές φορές μια δύσκολη ενέργεια. Από την άλλη πλευρά, τα δεδομένα ημερήσιας συχνότητας βρίσκονται πολύ πιο εύκολα, αλλά δεν δίνουν τις πλέον αξιόπιστες εκτιμήσεις. Στην Υποενότητα 2.1.3 παρόλα αυτά, όπου αναλύθηκε η μέθοδος των Garman and Klass διαπιστώσαμε πως υπάρχει δυνατότητα αποτελεσματικής εκτίμησης της ημερήσιας μεταβλητότητας ακόμη κι όταν τα διαθέσιμα στοιχεία είναι ημερήσια. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται μέσω του εκτιμητή (2.19) που χρησιμοποιεί ημερήσιες τιμές *'high'*, *'low'*, *'open'* και *'close'*, ώστε να εξάγει μια όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματική ημερήσια μεταβλητότητα.

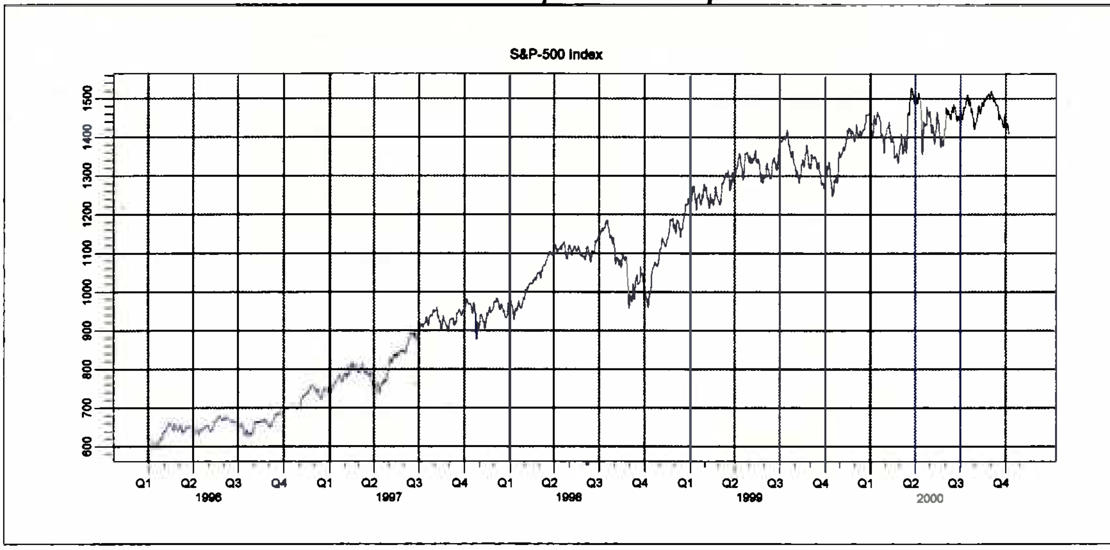
Τα στοιχεία που διαθέτουμε έχουν να κάνουν με ημερήσιες τιμές (high, open, low, close) του δείκτη S&P-500 από 2 Ιανουαρίου 1996 ως 6 Οκτωβρίου 2000, με συνολικά 1205 εργάσιμες ημέρες.

4.2.1 Ανάλυση του Δείκτη S&P-500

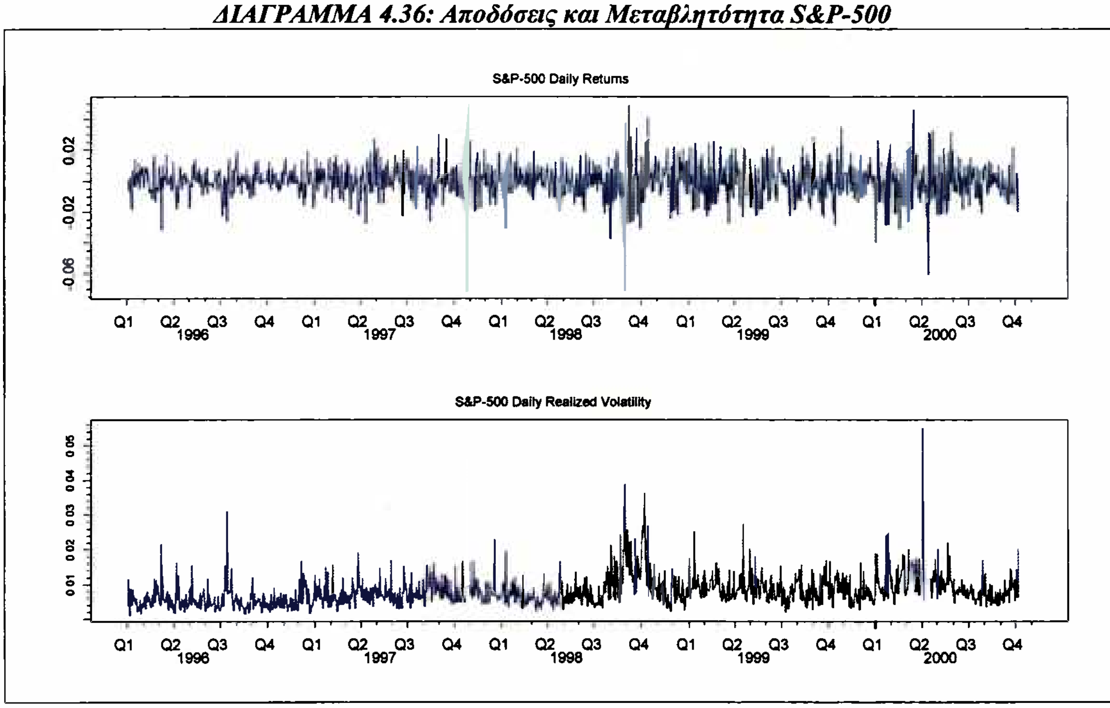
Η εικόνα του δείκτη για το χρονικό διάστημα που διαθέτουμε είναι αυτή του Διαγράμματος 4.35. Βλέπουμε μια συνεχή άνοδο στις τιμές κλεισίματος του δείκτη με κατά διαστήματα μικρές πτώσεις.

Η σχέση (2.2) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των αποδόσεων, ενώ για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας χρησιμοποιείται η (2.19) από την μέθοδο των Garman and Klass. Οι δυο αυτές μεταβλητές παριστάνονται στο Διάγραμμα 4.36. Οι αποδόσεις παρουσιάζουν *'volatility clustering'* σε τρία κυρίως σημεία, όπου και η μεταβλητότητα δείχνει να είναι υψηλότερη σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία. Η μεταβλητότητα δεν φαίνεται να έχει μεγάλες κι απότομες αυξομειώσεις παρά μόνο στο δεύτερο μισό του 1996 και στο πρώτο μισό του 2000. Η μέθοδος των Garman and Klass με μια πρώτη ματιά φαίνεται να αποδίδει αρκετά ικανοποιητικά στον προσδιορισμό της μεταβλητότητας.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.35: Πορεία του Δείκτη S&P-500



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.36: Αποδόσεις και Μεταβλητότητα S&P-500



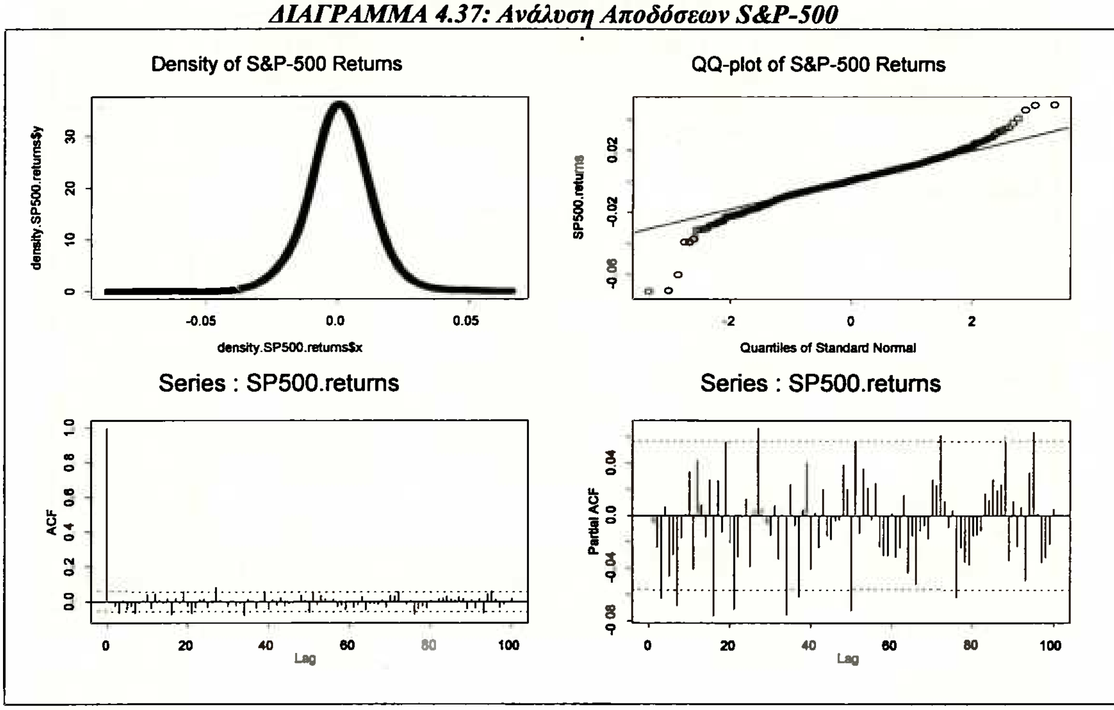
Ο Πίνακας 4.22 δείχνει κάποια χρήσιμα στατιστικά μέτρα για τις δυο παραπάνω σειρές. Οι αποδόσεις έχουν μέσο πολύ κοντά στο 0, αρνητική ασυμμετρία και υπερβάλλουσα κύρτωση. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται και στο Διάγραμμα 4.37, όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και το QQ-plot επιδεικνύουν εκτός των άλλων και παχιές ουρές. Ένας έλεγχος κανονικότητας των αποδόσεων δείχνει ότι απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (JB=821.203 και P-value=0.000) κι άρα δεν υφίσταται κανονικότητα. Τα στοιχεία που έχουμε μέχρι αυτό το σημείο αποτελούν τις κατάλληλες προϋποθέσεις για εφαρμογή των μοντέλων GARCH, άποψη που ενισχύεται κι από τις ACF και PACF των τετραγώνων των αποδόσεων του Διαγράμματος 4.38, που δείχνουν μεταβλητότητα ασταθή στο χρόνο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.22: Στατιστικά Μέτρα S&P-500

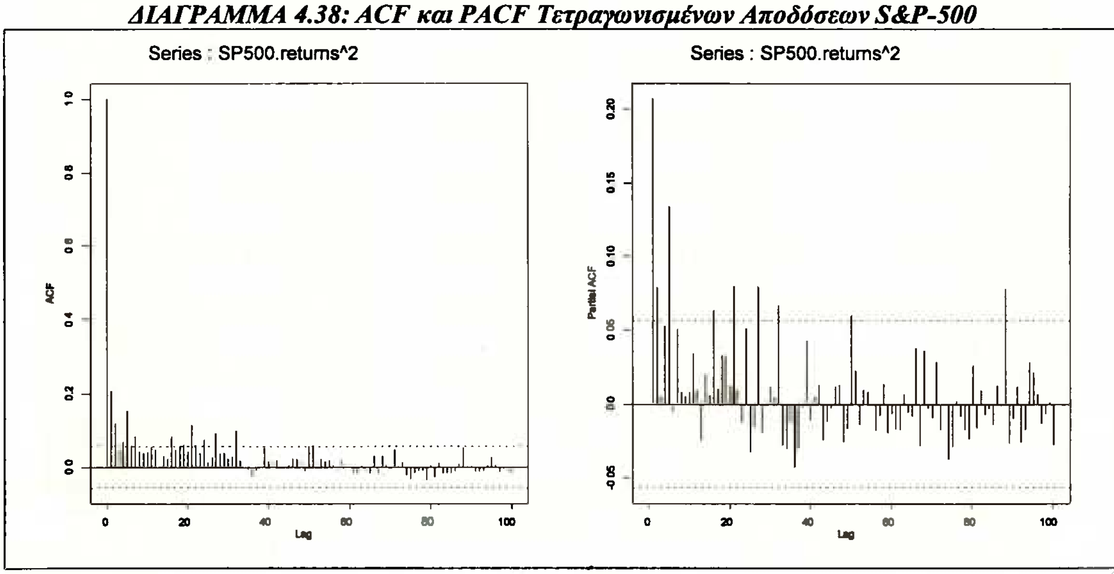
	Αποδόσεις	**Μεταβλητότητα**
Μέσος	0.000681	0.008611
Τυπική Απόκλιση	0.011400	0.004875
Ασυμμετρία	-0.407000	2.623000
Κύρτωση	6.963000	16.830000
Ελάχιστο	-0.071130	0.001459
Μέγιστο	0.049890	0.055230

Οι ACF και PACF των αποδόσεων (Διάγραμμα 4.37) από την άλλη δείχνουν ότι στην εξίσωση του μέσου θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί απλά ένας σταθερός όρος, καθώς δεν υφίστανται σημαντικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.37: Ανάλυση Αποδόσεων S&P-500



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.38: ACF και PACF Τετραγωνισμένων Αποδόσεων S&P-500



Μοντέλα της Οικογένειας GARCH

Το δείγμα των παρατηρήσεων που θα χρησιμοποιηθεί αφορά τη χρονική περίοδο 2 Ιανουαρίου 1996 μέχρι 28 Απριλίου 2000 (1093 ημέρες). Από 1 Μαΐου 2000 ως 6 Οκτωβρίου 2000 (112 ημέρες) θα πραγματοποιηθούν και θα αξιολογηθούν οι εκτός δείγματος προβλέψεις, που εδώ συνιστούν ακόμη πιο μακροπρόθεσμο χρονικό ορίζοντα σε σχέση με προηγούμενες περιπτώσεις.

Οι εκτιμήσεις για μοντέλα που επιλέχθηκαν με βάση τα κριτήρια AIC και BIC δίνονται στον Πίνακα 4.23, όπου η εξίσωση του μέσου αποτελείται από ένα σταθερό όρο. Στις παρενθέσεις είναι οι t-στατιστικές, ενώ τα κριτήρια αξιολόγησης παραθέτονται στον Πίνακα 4.24.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.23: Εκτιμήσεις GARCH για S&P-500

Μοντέλο:	GARCH(1,1)* με leverage	TGARCH(1,1)*	PGARCH(1,1)* με leverage	GARCH-M με $(\sigma_{t-1})^2$ και PGARCH(1,1)* με leverage
μ_t	0.0008367223 (2.882)	0.0009210924 (3.233)	0.0007602916 (2.603)	-0.0004296526 (-0.749)
δ	-	-	-	11.2493740090 (2.168)
α_0	0.0000046975 (2.484)	0.0000040627 (3.180)	0.0003180506 (0.711)	0.0004933469 (0.804)
α_1	0.0217730779 (0.017)	-0.0271978731 (-1.564)	0.0526812970 (2.497)	0.0639424536 (3.227)
β_1	0.9113366491 (30.408)	0.9010246389 (38.614)	0.9252646096 (41.237)	0.9078599847 (42.747)
γ_1	-0.9910542477 (-0.017)	0.1833507680 (5.774)	-0.9999327721 (-2250.245)	-0.9999936259 (-2922.756)
d	-	-	1.0235394445 (3.450)	0.9873176944 (3.911)
Μοντέλο:	GARCH(2,2)* με leverage	TGARCH(2,2)	PGARCH(2,2) με leverage	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
μ_t	0.0008262766 (2.878)	0.0006495093 (2.070)	0.0006097554 (1.991)	-0.0011062748 (-0.959)
δ	-	-	-	0.1848985118 (1.543)
α_0	0.0000063514 (0.834)	0.0000128638 (5.314)	0.0007040279 (0.557)	0.0000172554 (5.080)
α_1	0.0137397624 (0.050)	-0.0108857975 (-0.723)	0.0570219085 (2.290)	-0.0121852841 (-0.854)
α_2	0.0241033568 (0.382)	-0.0403713564 (-2.775)	-0.0006353906 (-0.009)	-0.0390407406 (-2.557)
β_1	0.6542491289 (0.415)	-0.1225769440 (-5.434)	0.7524865002 (0.513)	-0.1539168777 (-5.888)
β_2	0.2286417416 (0.159)	0.8549014865 (46.650)	0.1514937221 (0.113)	0.8375836212 (37.221)
γ_1	-0.8976834569 (-0.047)	0.2121839493 (8.332)	-0.8774804739 (-1.695)	0.2137435519 (8.710)
γ_2	-0.3316250003 (-0.279)	0.2327554284 (10.480)	-0.9999162285 (-0.031)	0.2351398002 (10.158)
d	-	-	0.9341100837 (5.098)	-

Όπου υπάρχει αστερίσκος (*) σημαίνει πως υποθέτουμε κατανομή t-Student για τα σφάλματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.24: Μέτρα Σύγκρισης GARCH για S&P-500

Μοντέλο:	GARCH(1,1)* με leverage	TGARCH(1,1)*	PGARCH(1,1)* με leverage	GARCH-M με $(\sigma_{t-1})^2$ και PGARCH(1,1)* με leverage
AIC	-6867.691	-6880.246	-6879.599	-6885.726
BIC	-6837.717	-6850.271	-6844.628	-6845.759
Μοντέλο:	GARCH(2,2)* με leverage	TGARCH(2,2)	PGARCH(2,2) με leverage	GARCH-M με σ_{t-1} και TGARCH(2,2)
AIC	-6853.886	-6839.830	-6808.881	-6840.466
BIC	-6808.924	-6799.864	-6763.919	-6795.504

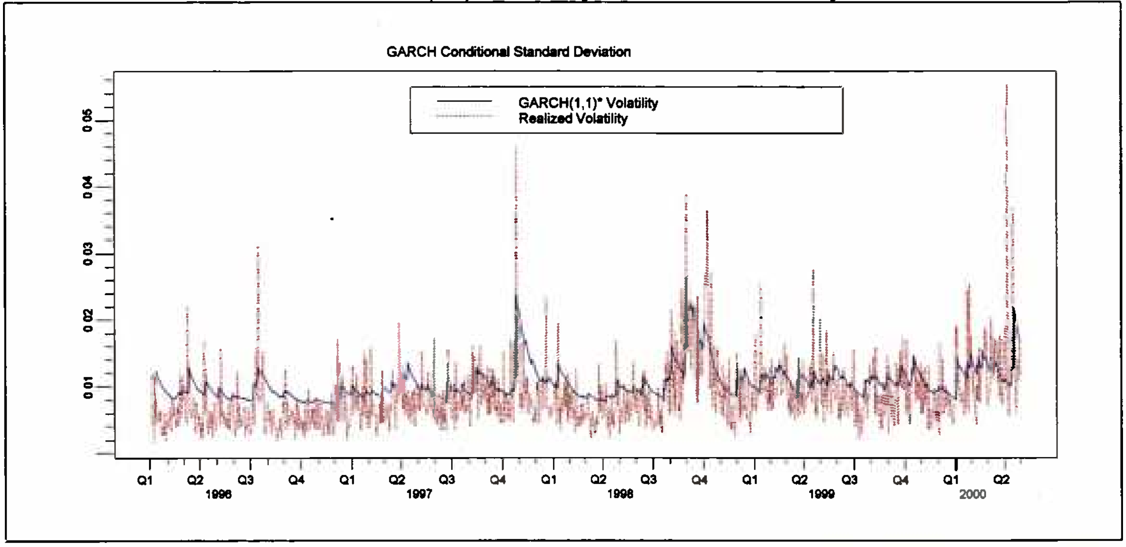
Τα μοντέλα του Πίνακα 4.23 που δείχνουν να προσαρμόζονται πιο ικανοποιητικά από τα υπόλοιπα, είναι το GARCH(1,1)* με leverage, το TGARCH(1,1)*, το PGARCH(1,1)* με leverage και το GARCH-M με PGARCH(1,1)*.

Στο πρώτο μοντέλο οι συντελεστές α_1=0.02177 και γ_1=-0.99105 είναι στατιστικά ασήμαντοι. Ο περιορισμός $\alpha_1(1+\gamma_1^2)+\beta_1$=0.95449<1 ικανοποιείται κι επομένως το μοντέλο δεν εκρήγνυται. Η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.01016. Ο γ_1=-0.99105 έχει αρνητικό πρόσημο, ώστε να μοντελοποιείται το *'leverage effect'*, το πρόβλημα όμως είναι η στατιστική του ασημαντότητα.

Οι συντελεστές του TGARCH(1,1)* είναι όλοι στατιστικά σημαντικοί, εκτός από τον α_1=-0.02720. Η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση ορίζεται και ισούται με 0.01085, εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη $\alpha_1+\frac{\gamma_1}{2}+\beta_1$=0.96550<1. Ο συντελεστής ασυμμετρίας γ_1=0.18335 έχει θετική τιμή, όπως ορίζει η θεωρία κι επιπλέον είναι σημαντικός, κάτι που σημαίνει πως λαμβάνονται υπόψη οι ασύμμετρες επιδράσεις.

Στα επόμενα δυο γραφήματα παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις της μεταβλητότητας από τα δυο παραπάνω μοντέλα, πάνω στην ιστορική μεταβλητότητα του ίδιου χρονικού διαστήματος.

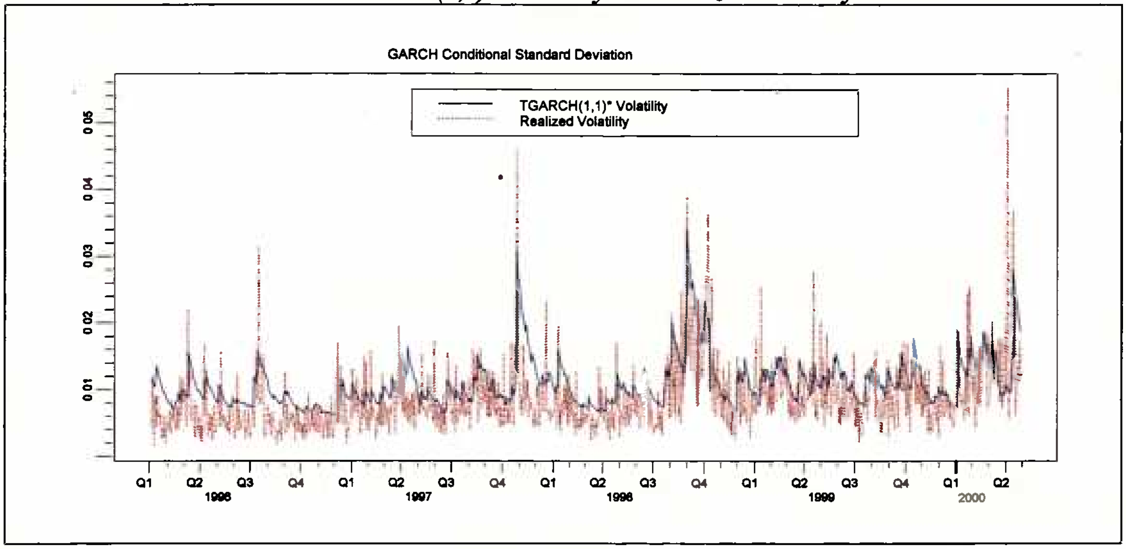
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.39: GARCH(1,1)* Volatility και Realized Volatility του S&P-500



Στο Διάγραμμα 4.39 βλέπουμε πως οι εκτιμήσεις του GARCH(1,1)* είναι αρκετά καλές, δεν ακολουθούν όμως με ακρίβεια τις απότομες μεταβολές κι αυτό αποτελεί μειονέκτημα. Προσαρμόζονται κυρίως στη γενική τάση που ακολουθεί η μεταβλητότητα κι επιπλέον το μοντέλο φαίνεται να υπερεκτιμά τη μεταβλητότητα στο πρώτο τέταρτο του χρονικού διαστήματος.

Αντιθέτως από το Διάγραμμα 4.40 γίνεται αντιληπτό ότι το TGARCH(1,1)* παράγει πολύ καλύτερες εκτιμήσεις που ακολουθούν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια τις απότομες μεταβολές, ενώ και αυτό υπερεκτιμά τη μεταβλητότητα στο πρώτο τέταρτο περίπου των παρατηρήσεων. Ακόμη, το TGARCH(1,1)* πιάνει πολύ πιο αποτελεσματικά τα υψηλά σημεία που σποραδικά εμφανίζει η μεταβλητότητα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.40: TGARCH(1,1)* Volatility και Realized Volatility του S&P-500



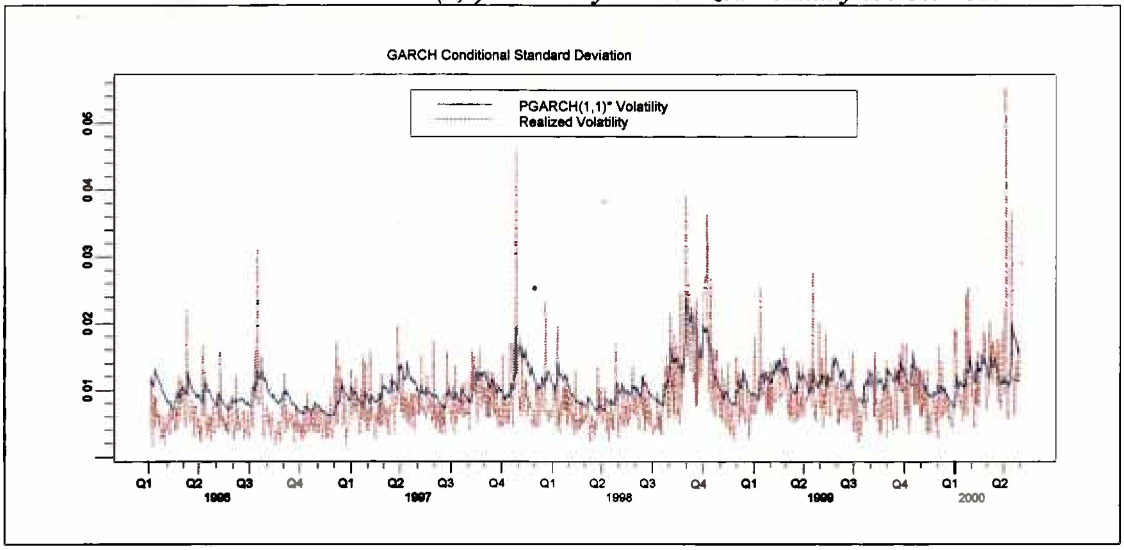
Στο PGARCH(1,1)* που είναι και το επόμενο μοντέλο, όλοι οι εκτιμητές είναι σημαντικοί, εκτός από τον α_0=0.00032. Ο περιορισμός $\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\beta_1$=0.96730<1 ικανοποιείται και κατά συνέπεια υπάρχει η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση, η οποία ισούται με 0.01107. Η ασυμμετρία στις επιδράσεις μοντελοποιείται, εφόσον ο συντελεστής γ_1=-0.99993 είναι αρνητικός και στατιστικά σημαντικός. Ο εκθέτης d=1.02354 τέλος είναι θετικός και σημαντικός, γεγονός που συνάδει με τη θεωρία του υποδείγματος.

Το GARCH-M με PGARCH(1,1)* περιέχει δυο ασήμαντους συντελεστές, τους μ_t=-0.00043 και α_0=0.00049. Οι περιορισμοί που ισχύουν εδώ είναι όμοιοι με αυτούς του προηγούμενου μοντέλου. Διαπιστώνουμε ότι $\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\beta_1$=0.95888 κι άρα η μη-δεσμευμένη τυπική απόκλιση ορίζεται και είναι στο επίπεδο του 0.01120. Το *'leverage effect'* λαμβάνεται υπόψη, καθώς ο γ_1=-0.99999 έχει αρνητικό πρόσημο και στατιστική σημαντικότητα, ενώ και ο d=0.98732 είναι θετικός και σημαντικός. Ενδιαφέρον παρουσιάζει κι ο δ=11.24937 που όπως είδαμε μετρά την *ανταμοιβή του κινδύνου*. Το ότι είναι θετικός και στατιστικά σημαντικός, σημαίνει πως υψηλές τιμές της παρελθούσας διακύμανσης οδηγούν σε υψηλές παρούσες αποδόσεις, κάτι που φαντάζει απολύτως λογικό.

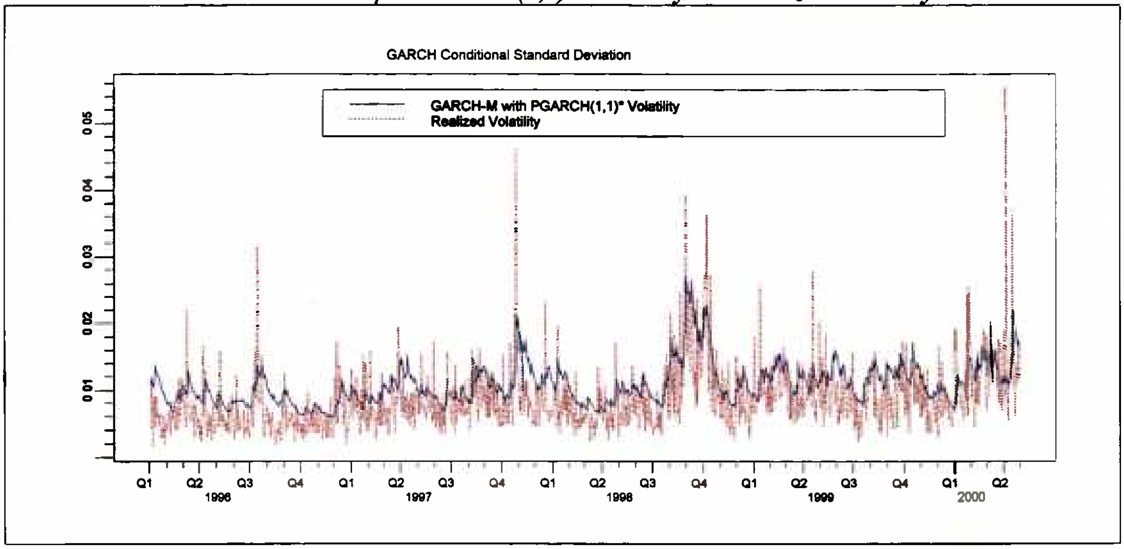
Οι εκτιμήσεις του PGARCH(1,1)* παριστάνονται στο Διάγραμμα 4.41, όπου βλέπουμε πως υφίσταται αρκετά ικανοποιητική προσαρμογή. Υπάρχει κι εδώ υπερτίμηση στο πρώτο πέμπτο περίπου των παρατηρήσεων, ενώ τα υψηλά σημεία δεν προσεγγίζονται πολύ ικανοποιητικά.

Το Διάγραμμα 4.42 αφορά τις εκτιμήσεις του GARCH-M με PGARCH(1,1)*. Η εικόνα είναι σχεδόν ίδια με την προηγούμενη, καθώς κι εδώ δεν προσεγγίζονται με τον πλέον αποδοτικό τρόπο τα υψηλά σημεία κι επιπρόσθετα υπάρχει υπερεκτίμηση της μεταβλητότητας στην αρχή του δείγματος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.41: PGARCH(1,1)* Volatility και Realized Volatility του S&P-500



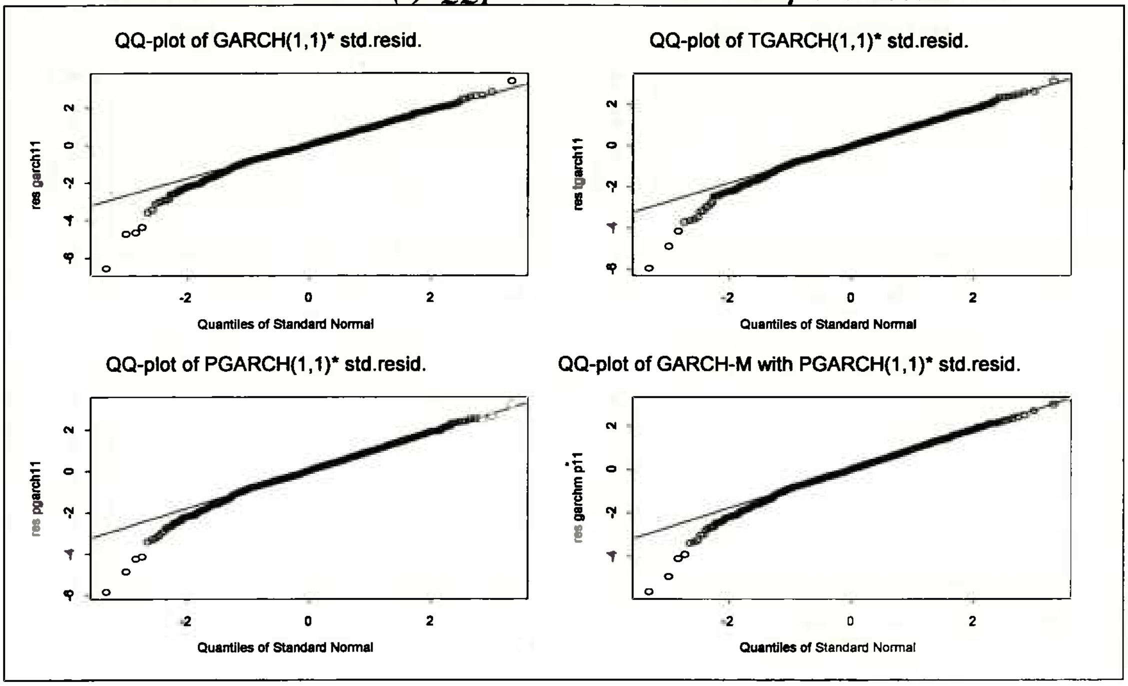
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.42: GARCH-M με PGARCH(1,1)* Volatility και Realized Volatility του S&P-500



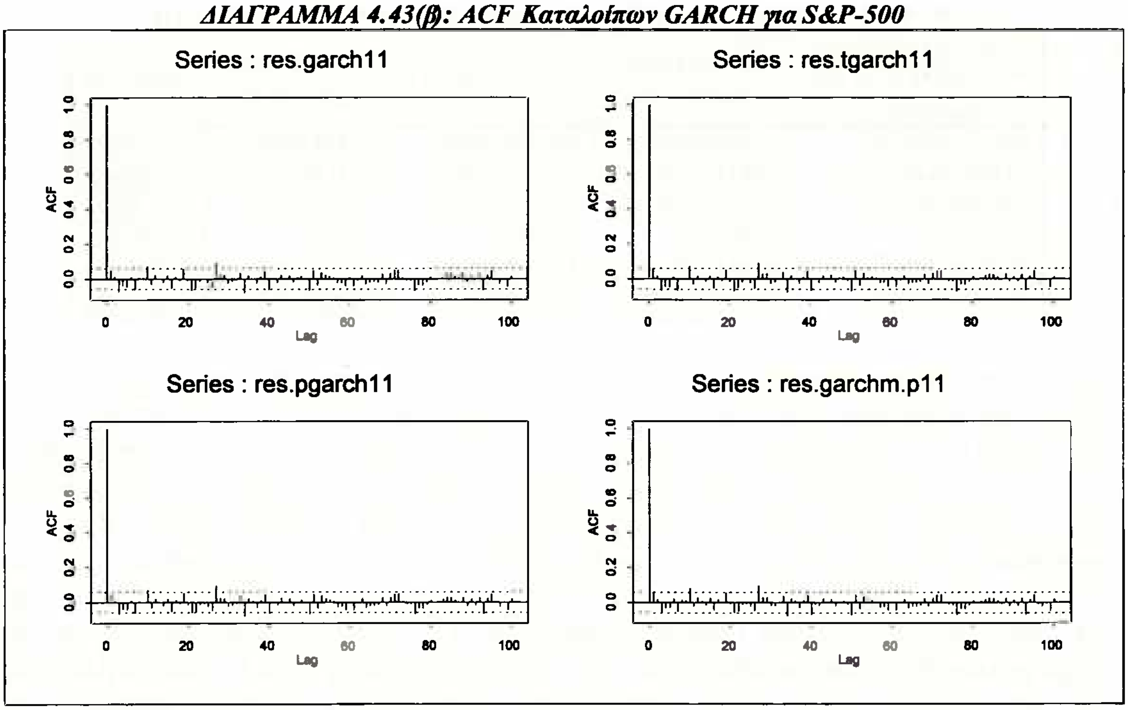
Στο διάγραμμα που ακολουθεί [Διάγραμμα 4.43(α)], γίνεται διαγνωστικός έλεγχος στα σφάλματα των εκτιμημένων μοντέλων που μόλις αναλύθηκαν. Η εικόνα των τυποποιημένων καταλοίπων είναι πανομοιότυπη και για τα τέσσερα υποδείγματα. Η κατανομές δείχνουν προβληματικές και στις τέσσερις περιπτώσεις, καθώς τα QQ-plots παρουσιάζουν απόκλιση από τη γραμμή των 45° στο κάτω τμήμα τους. Κατά συνέπεια τα σφάλματα δεν κατανέμονται κανονικά, επιδεικνύοντας ακραίες τιμές και παχιές ουρές.

Στη συνέχεια, μέσω του Διαγράμματος 4.43(β), ελέγχεται η εξίσωση του μέσου για τα μοντέλα. Τα αποτελέσματα δείχνουν αρκετά καλή εξειδίκευση της εξίσωσης, με κάποιους σημαντικούς ωστόσο συντελεστές να εμφανίζονται σποραδικά και να προκαλούν προβλήματα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.43(α): QQ-plots Καταλοίπων GARCH για S&P-500



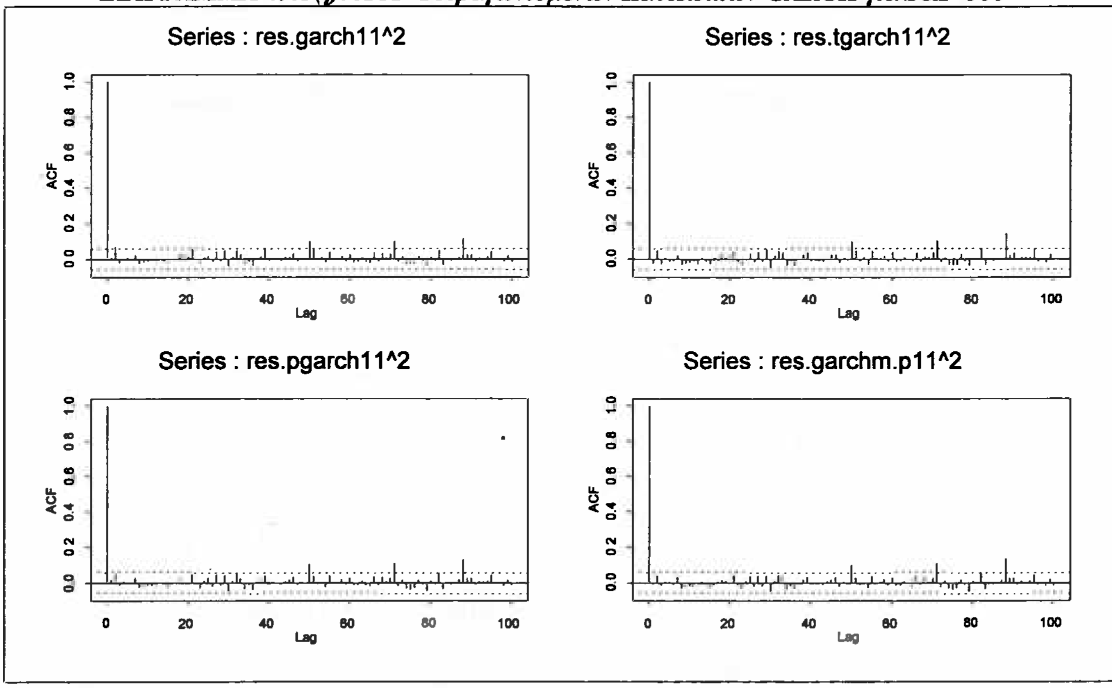
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.43(β): ACF Καταλοίπων GARCH για S&P-500



Στο Διάγραμμα 4.43(γ) τέλος ελέγχεται η προσαρμοστικότητα της εξίσωσης διακύμανσης. Οι ACF των τετραγώνων των τυποποιημένων καταλοίπων δείχνουν τώρα μια διαφορετική εικόνα, καθώς η αυτοσυσχέτιση φαίνεται να έχει απαλειφθεί πλήρως, με εξαίρεση κάποιες υστερήσεις υψηλής τάξης που όμως δεν δημιουργούν ιδιαίτερα μεγάλο πρόβλημα.

Επόμενο στάδιο αποτελούν οι προβλέψεις των μοντέλων, που ανήκουν στην περίοδο από 1 Μαΐου 2000 ως 6 Οκτωβρίου 2000 (112 εργάσιμες ημέρες). Ο Πίνακας 4.25 περιλαμβάνει τα μέτρα αξιολόγησης που προκύπτουν για κάθε μια περίπτωση.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.43(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων GARCH για S&P-500



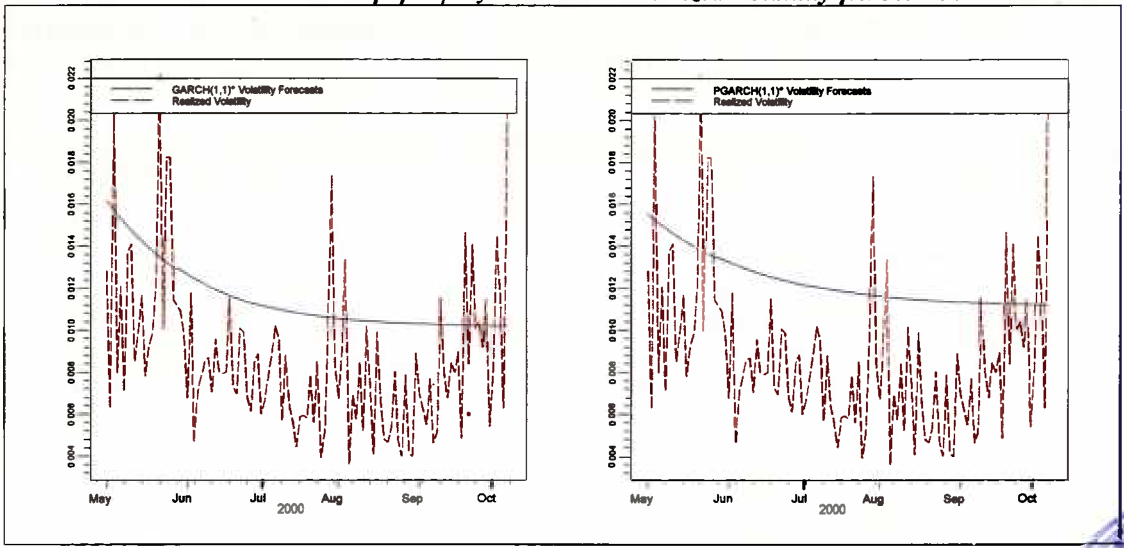
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.25: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων GARCH για S&P-500

Μοντέλο:	GARCH(1,1)* με leverage	TGARCH(1,1)*	PGARCH(1,1)* με leverage	GARCH-M με $(\sigma_{t-1})^2$ και PGARCH(1,1)* με leverage
MSE	0.0000189119	0.0000299349	0.0000240895	0.0000244579
RMSE	0.0043487834	0.0054712778	0.0049081082	0.0049454883
MAE	0.0037960377	0.0049832877	0.0044312201	0.0044683485
MAPE	55.191%	72.408%	65.449%	65.792%
U-Theil	0.4586558627	0.5770426783	0.5176465229	0.5215889066
LINEX	0.0000023627	0.0000037382	0.0000030089	0.0000030548

Τα μέτρα του παραπάνω πίνακα δείχνουν ότι και τα τέσσερα μοντέλα κρίνονται πολύ αποτελεσματικά στον προβλεπτικό τομέα. Οι τιμές δεν ξεπερνούν σε καμιά περίπτωση τα επιθυμητά όρια. Τα δυο μοντέλα που επιλέγονται με βάση την αξιολόγηση των προβλέψεων, είναι το GARCH(1,1)* και το PGARCH(1,1)*.

Στο Διάγραμμα 4.44 φαίνονται οι προβλέψεις των επιλεγμένων μοντέλων μαζί με την ιστορική μεταβλητότητα που έλαβε χώρα κατά το εκτός δείγματος διάστημα των 112 ημερών. Είναι εμφανές ότι οι προβλέψεις προσεγγίζουν την πραγματικότητα σε μεγάλο βαθμό, παρόλο που στα περισσότερα σημεία υπάρχει υπερεκτίμηση της μεταβλητότητας. Χαρακτηριστικό και των δυο περιπτώσεων είναι η σύγκλιση προς το σταθερό επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας, που είναι 0.01016 για το GARCH(1,1)* και 0.01107 για το PGARCH(1,1)*. Το GARCH(1,1)* φυσικά βρίσκεται ελαφρώς πιο κοντά στις πραγματικές τιμές και γι αυτό το λόγο παράγει μέτρα με συγκριτικά χαμηλότερες τιμές.

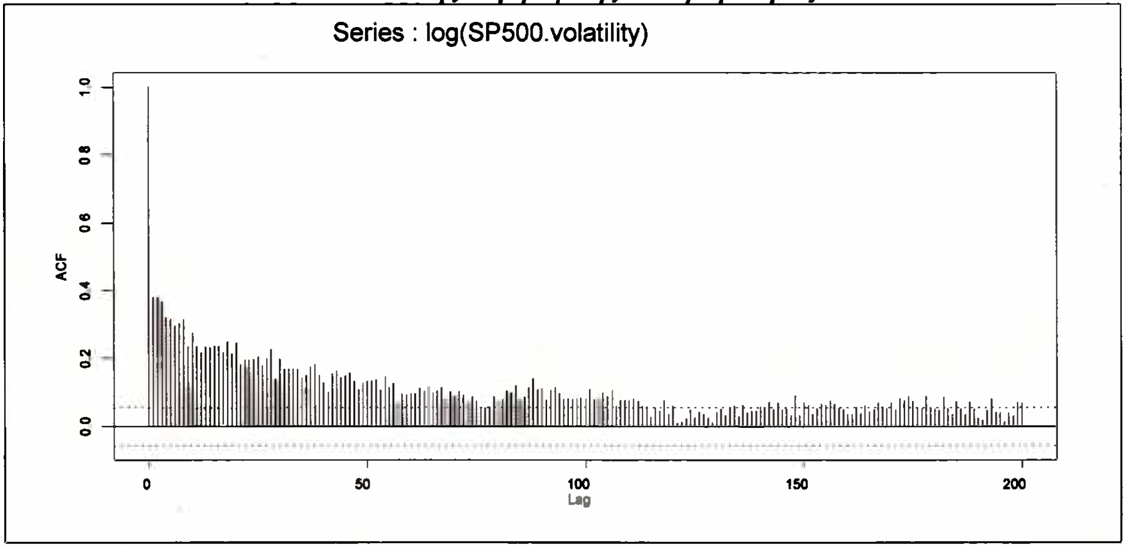
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.44: Προβλέψεις GARCH και Realized Volatility για S&P-500



Μοντέλα Μακροχρόνιας Μνήμης

Στα υποδείγματα μακροχρόνιας μνήμης ARFIMA και SEMIFAR θα χρησιμοποιηθεί η σειρά $\ln\sigma_t$. Παρακολουθώντας το Διάγραμμα 4.45, διαπιστώνουμε πως η σειρά της λογαριθμικής μεταβλητότητας παρουσιάζει ιδιότητες μακροχρόνιας μνήμης. Αυτό φαίνεται καθώς υπάρχουν συντελεστές αυτοσυσχέτισης που παραμένουν σημαντικοί ακόμη και μετά από 100 χρονικές υστερήσεις, κάτι που υποδηλώνει εξάρτηση των τρεχουσών παρατηρήσεων από παρατηρήσεις του παρελθόντος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.45: ACF της Λογαριθμικής Μεταβλητότητας του S&P-500



Το δείγμα που αναλύεται ανήκει όπως και στην περίπτωση των GARCH, στη χρονική περίοδο από 2 Ιανουαρίου 1996 μέχρι 28 Απριλίου 2000 (1093 ημέρες). Από 1 Μαΐου 2000 ως 6 Οκτωβρίου 2000 (112 ημέρες) οι παρατηρήσεις θα διατεθούν για τον έλεγχο αξιοπιστίας των προβλέψεων. Ο Πίνακας 4.26 περιέχει τις εκτιμήσεις των οκτώ μοντέλων που ταιριάζουν καλύτερα στα αριθμητικά μας στοιχεία, επιλογή που βασίστηκε στα κριτήρια AIC, BIC και Log-likelihood του αμέσως επόμενου πίνακα.

Με μια ματιά στα μέτρα αξιολόγησης, είναι εμφανές ότι τα υποδείγματα που λειτουργούν πιο αποδοτικά είναι το ARFIMA(1,d,0), το SEMIFAR(1,d), το FIEGARCH(1,d,2) με leverage και το FIEGARCH(2,d,2) με leverage.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.26: Εκτιμήσεις LMM για S&P-500

Μοντέλο:	ARFIMA(1,d,0)	ARFIMA(1,d,2)	ARFIMA(2,d,1)	SEMIFAR(1,d)
φ_1	-0.1849425 (-4.404)	0.9588957 (49.518)	0.8445689 (12.712)	-0.1638976 (-3.828)
φ_2	-	-	0.1200753 (2.166)	-
θ_1	-	1.0602360 (11.642)	0.9378436 (80.384)	-
θ_2	-	-0.1259313 .(-1.290)	-	-
d	0.3662864 (10.938)	0.2730130 (3.046)	0.2664603 (4.561)	0.3361307 (9.883)
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(1,d,2) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
μ_t	0.0010742274 (3.314)	0.0010365848 (3.184)	0.0008268159 (3.005)	0.0008534253 (2.943)
α_0	0.0000188096 (5.851)	0.0000222641 (5.274)	-0.1525593946 (-4.367)	-0.0647129180 (-3.351)
φ_1	-0.2622125085 (-8.271)	-0.2252205063 (-4.272)	0.1575628142 (4.468)	-0.0546069127 (-0.967)
φ_2	-	0.0821886562 (1.941)	-	0.1250438827 (2.023)
β_1	-	-	0.4523680147 (6.621)	0.9043137774 (6.542)
β_2	-	-	-0.5251166346 (-6.893)	-0.2387763351 (-2.135)
γ_1	-	-	-0.2456638918 (-8.613)	-0.3137366027 (-7.582)
γ_2	-	-	-	0.2432472907 (5.447)
d	0.3225759113 (11.803)	0.2731734653 (5.317)	0.6872079460 (14.329)	0.6788476210 (8.563)

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.27: Μέτρα Σύγκρισης LMM για S&P-500

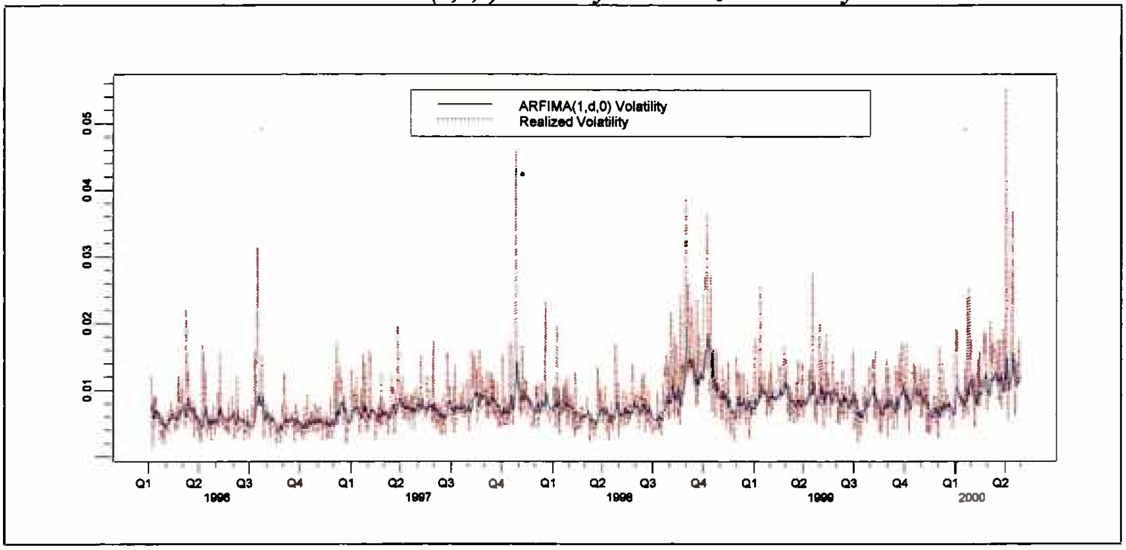
Μοντέλο:	ARFIMA(1,d,0)	ARFIMA(1,d,2)	ARFIMA(2,d,1)	SEMIFAR(1,d)
Log-likelihood	-628.597	-624.907	-625.088	-614.129
BIC	1271.184	1277.794	1278.151	1242.238
Μοντέλο:	FIGARCH(1,d,0)	FIGARCH(2,d,0)	FIEGARCH(1,d,2) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
AIC	-6796.881	-6797.050	-6879.432	-6881.191
BIC	-6776.898	-6772.072	-6844.462	-6836.229

Ξεκινώντας με το ARFIMA(1,d,0), βλέπουμε πως όλοι οι συντελεστές του είναι στατιστικά σημαντικοί. Εφόσον $0<d<0.5$, η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη και παρουσιάζει μακροχρόνια μνήμη. Ο εκτιμητής $\varphi_1=-0.18494$ είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερος της μονάδος, με συνέπεια το μοντέλο να μην εκρήγνυται.

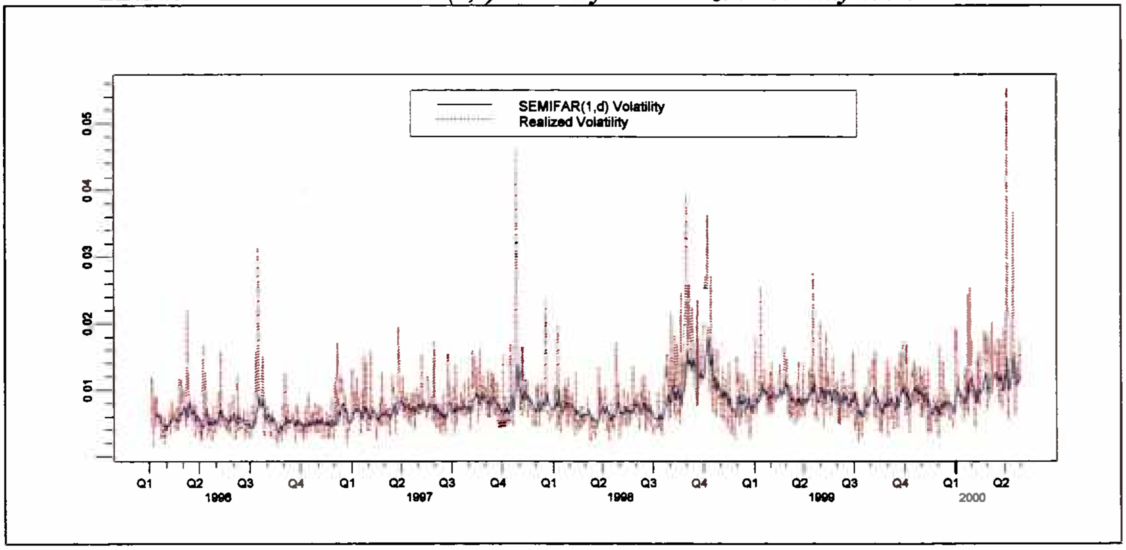
Στατιστική σημαντικότητα υπάρχει και στους συντελεστές του SEMIFAR(1,d). Ισχύει και πάλι ότι $0<d<0.5$, οπότε επιβεβαιώνεται για ακόμη μια φορά ότι η $\ln\sigma_t$ είναι στάσιμη κι έχει μακροχρόνια μνήμη. Ο $\varphi_1=-0.16390$ είναι μικρότερος της μονάδας σε απόλυτη τιμή, με αποτέλεσμα να έχουμε πάλι στάσιμο μοντέλο.

Οι εκτιμήσεις των δυο τελευταίων μοντέλων φαίνονται στα επόμενα δυο διαγράμματα. Στο Διάγραμμα 4.46 είναι οι εκτιμήσεις του ARFIMA(1,d,0), ενώ στο 4.47 είναι οι εκτιμήσεις του SEMIFAR(1,d). Η προσαρμογή μεταξύ των δυο περιπτώσεων δεν παρουσιάζει σχεδόν καμιά διαφορά, καθώς και τα δυο μοντέλα «πιάνουν» τη μέση τάση της μεταβλητότητας και χάνουν αρκετά όσον αφορά τα υψηλά σημεία.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.46: ARFIMA(1,d,0) Volatility και Realized Volatility του S&P-500



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.47: SEMIFAR(1,d) Volatility και Realized Volatility του S&P-500

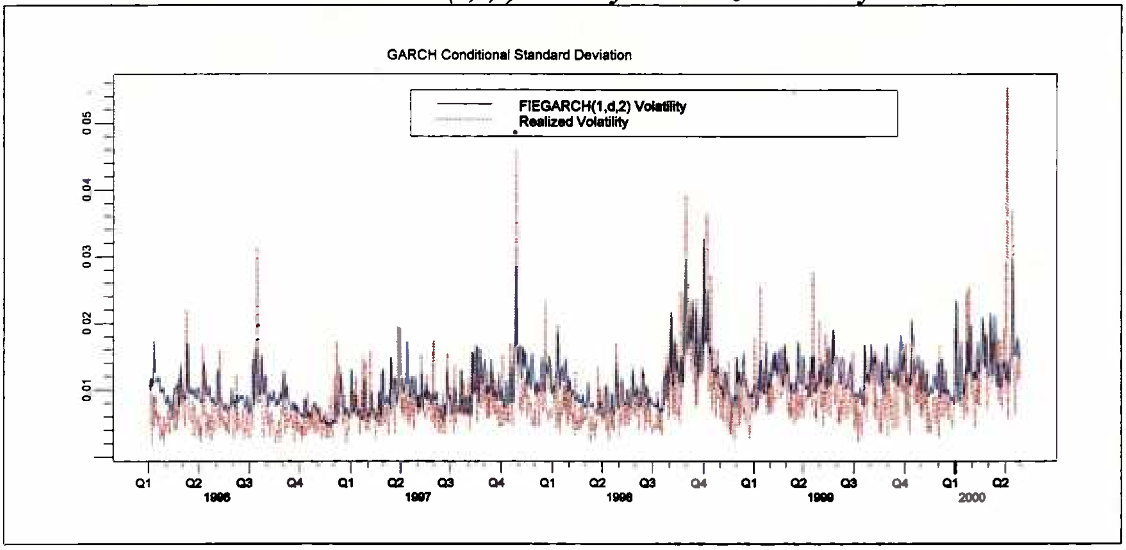


Σχετικά με τα επόμενα δυο μοντέλα, το FIEGARCH(1,d,2) έχει όλους τους εκτιμητές του στατιστικά σημαντικούς. Το μοντέλο δεν εκρήγνυται, καθώς ο φ_1=0.15756 είναι μικρότερος της μονάδας. Ο συντελεστής γ_1=-0.24566 που μοντελοποιεί την ασυμμετρία είναι διάφορος του μηδενός και στατιστικά σημαντικός. Ο εκθέτης d=0.68721 τέλος, ανήκει στο διάστημα (0, 1), κάτι που επίσης καθιστά το μοντέλο στάσιμο.

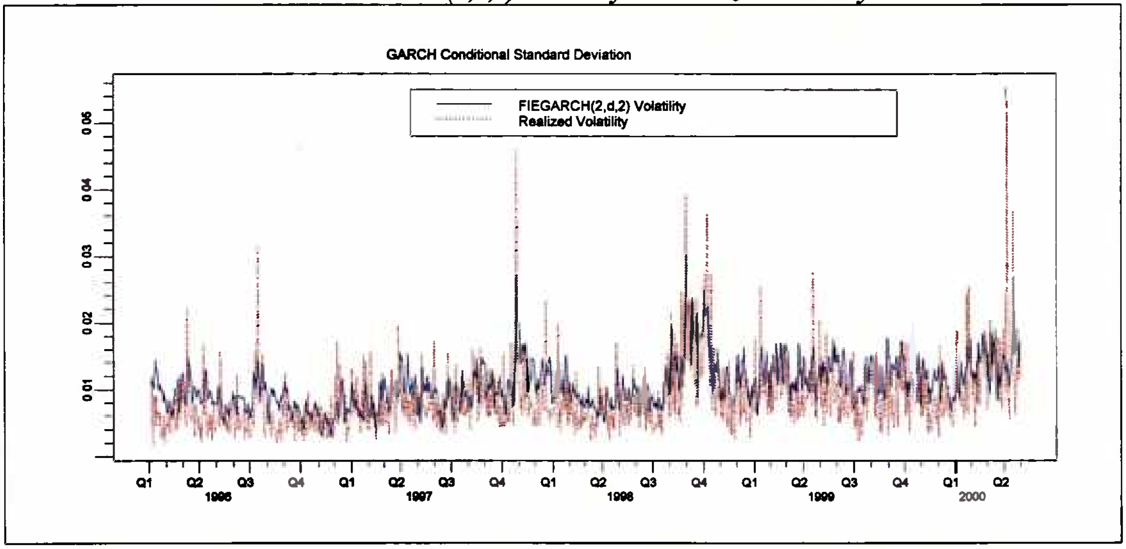
Το FIEGARCH(2,d,2) έχει μόνο ένα ασήμαντο συντελεστή, τον φ_1=-0.05461. Το άθροισμα $\varphi_1 + \varphi_2$=0.07044<1 υποδηλώνει στάσιμο μοντέλο, ενώ το *'leverage effect'* λαμβάνεται υπόψη, από τη στιγμή που οι γ_1=-0.31374 και γ_2=0.24325 είναι στατιστικά σημαντικοί. Ακόμη, το υπόδειγμα θεωρείται στάσιμο για τον επιπρόσθετο λόγο ότι ο d=0.67885 είναι μεταξύ του 0 και του 1.

Στα Διαγράμματα 4.48 και 4.49 δίνονται οι εκτιμήσεις των δυο μοντέλων. Η εικόνα δείχνει πολύ καλύτερη από κάθε προηγούμενο υπόδειγμα. Το FIEGARCH(1,d,2) και το FIEGARCH(2,d,2) εκτός του ότι παρακολουθούν αποτελεσματικά τις απότομες μεταβολές της σειράς, έχουν και το πλεονέκτημα να «πιάνουν» τα υψηλά σημεία με πολύ πιο ικανοποιητικό τρόπο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.48: FIEGARCH(1,d,2) Volatility και Realized Volatility του S&P-500



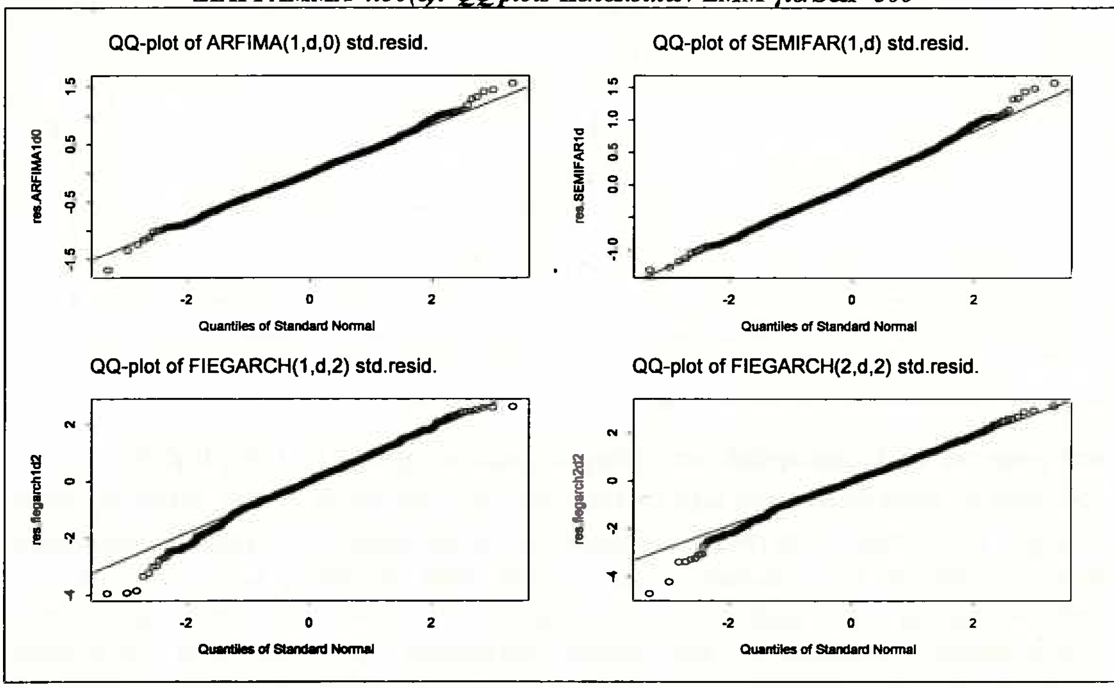
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.49: FIEGARCH(2,d,2) Volatility και Realized Volatility του S&P-500



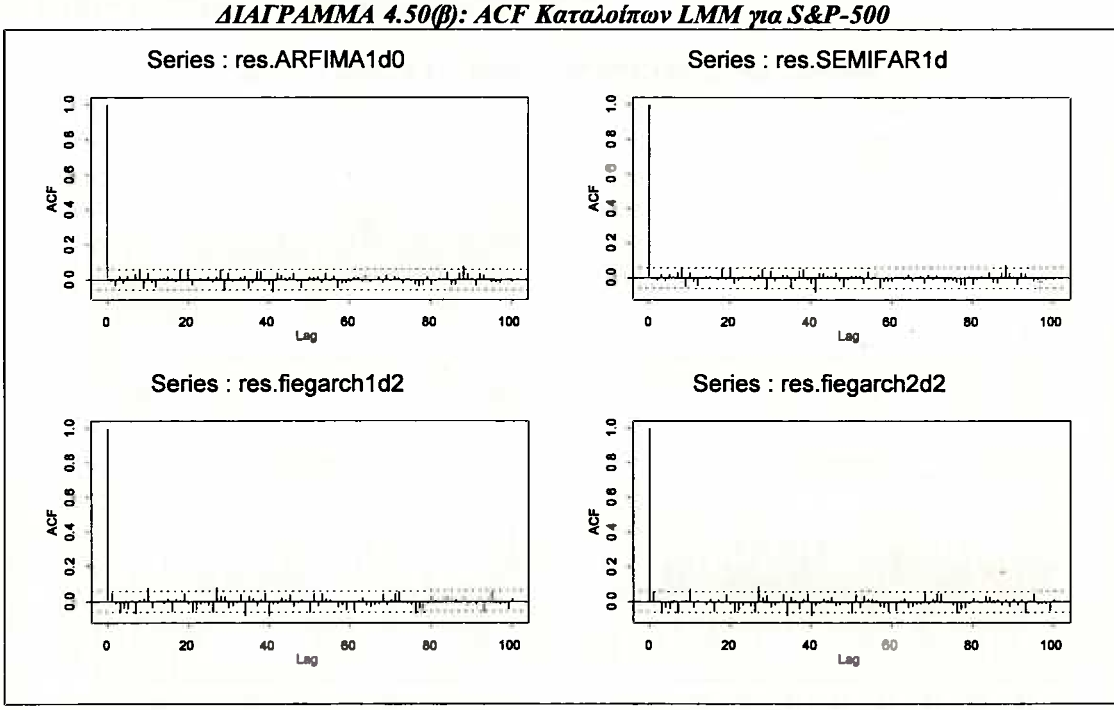
Στο Διάγραμμα 4.50(α) ελέγχεται η κανονικότητα των τυποποιημένων σφαλμάτων από τα υποδείγματα LMM. Τα ARFIMA(1,d,0) και SEMIFAR(1,d) παρουσιάζουν μια πολύ καλή εικόνα, με σφάλματα που υιοθετούν τα χαρακτηριστικά της κανονικότητας. Αντίθετα, τα FIEGARCH(1,d,2) και FIEGARCH(2,d,2) έχουν παχιές ουρές στα κάτω τμήματα των γραφημάτων τους, όπως ακριβώς συνέβαινε και στην περίπτωση των απλών GARCH.

Στο 4.50(β) γίνεται διαγνωστικός έλεγχος για την καταλληλότητα της εξίσωσης λογαριθμικής διακύμανσης, όσον αφορά τα ARFIMA(1,d,0) και SEMIFAR(1,d), ενώ απ' την άλλη, όσον αφορά τα FIEGARCH(1,d,2) και FIEGARCH(2,d,2) ελέγχεται η εξίσωση του μέσου. Η αυτοσυσχέτιση δείχνει πως έχει απαλειφθεί σχεδόν πλήρως σε όλες τις περιπτώσεις, με όλα τα μοντέλα να παρουσιάζουν σποραδικά κάποιους σημαντικούς συντελεστές κυρίως σε μεγάλες υστερήσεις.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.50(α): QQ-plots Καταλοίπων LMM για S&P-500

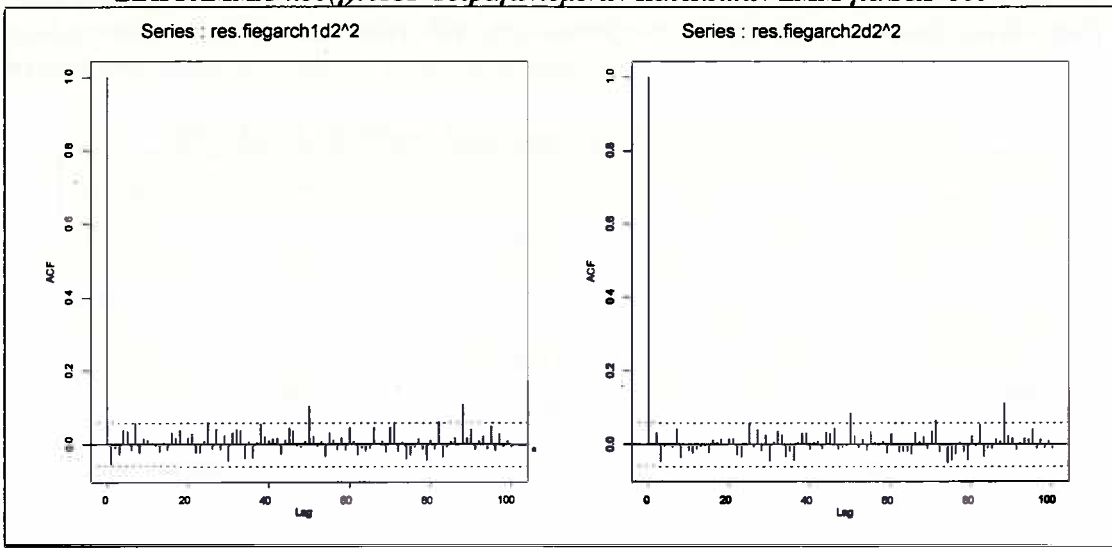


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.50(β): ACF Καταλοίπων LMM για S&P-500



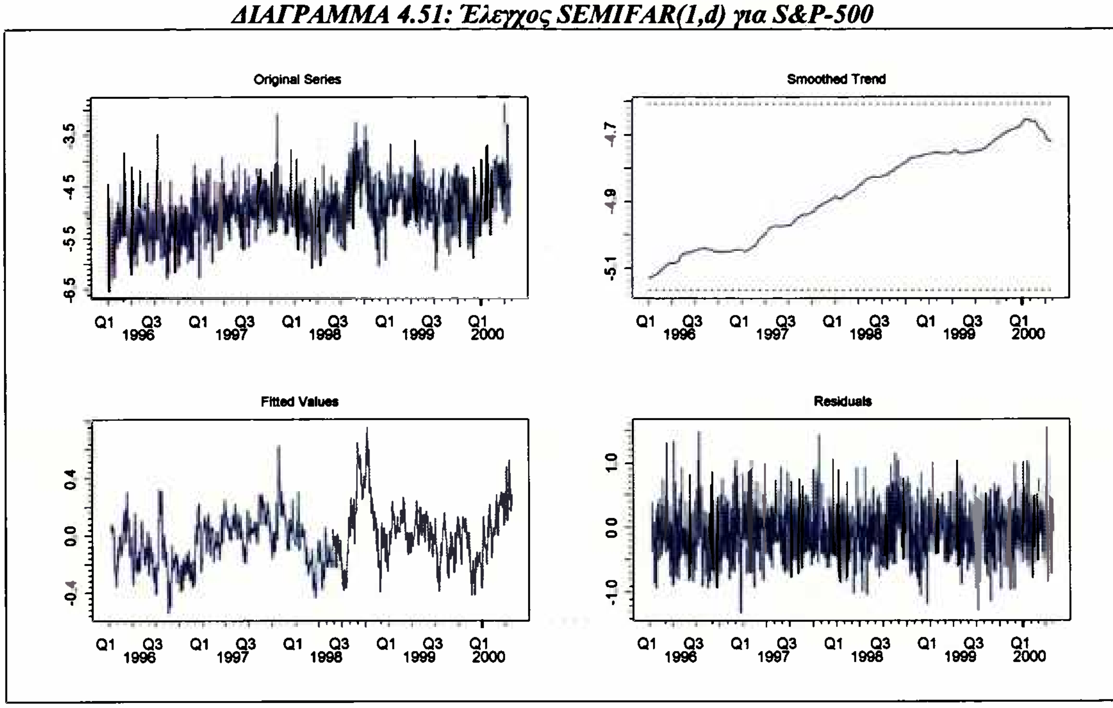
Στο Διάγραμμα 4.50(γ) ελέγχεται η εξίσωση διακύμανσης για τα FIEGARCH(1,d,2) και FIEGARCH(2,d,2). Οι ACF των τετραγωνισμένων σφαλμάτων δείχνουν ότι δεν υφίσταται σημαντική αυτοσυσχέτιση στη σειρά των ε_t^2 κι έτσι η εξειδίκευση της διακύμανσης μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστη. Υπάρχουν μόνο δυο σημαντικοί συντελεστές σε τάξη υστέρησης 50 και 88 εκατέρωθεν.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.50(γ): ACF Τετραγωνισμένων Καταλοίπων LMM για S&P-500



Το SEMIFAR(1,d) ελέγχεται απομονωμένα στο Διάγραμμα 4.51 ως προς την καταλληλότητά του. Η σειρά $\ln\sigma_t$ δεν φαίνεται να έχει σημαντική τάση (η τάση δεν υπερβαίνει το εύρος των διαστημάτων εμπιστοσύνης), κάτι που σημαίνει ότι η χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου ίσως να μην είναι αναγκαία για τα στοιχεία που διαθέτουμε. Από την άλλη, οι εκτιμημένοι λογάριθμοι της μεταβλητότητας πλησιάζουν κατά πολύ την πραγματική σειρά, ενώ τα σφάλματα προσεγγίζουν διαδικασία Λευκού Θορύβου που σε συνδυασμό με το QQ-plot του Διαγράμματος 4.50(α) επιβεβαιώνουν την κανονικότητά τους.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.51: Έλεγχος SEMIFAR(1,d) για S&P-500



Η πραγματοποίηση μελλοντικών προβλέψεων με τα υποδείγματα LMM έχει ως αποτέλεσμα τα μέτρα αξιολόγησης του Πίνακα 4.28. Είναι εμφανές ότι μόνο τα ARFIMA(1,d,0) και SEMIFAR(1,d) ανταποκρίνονται σωστά στον τομέα των προβλέψεων, από τη στιγμή που παράγουν τα κριτήρια με τις πιο χαμηλές τιμές.

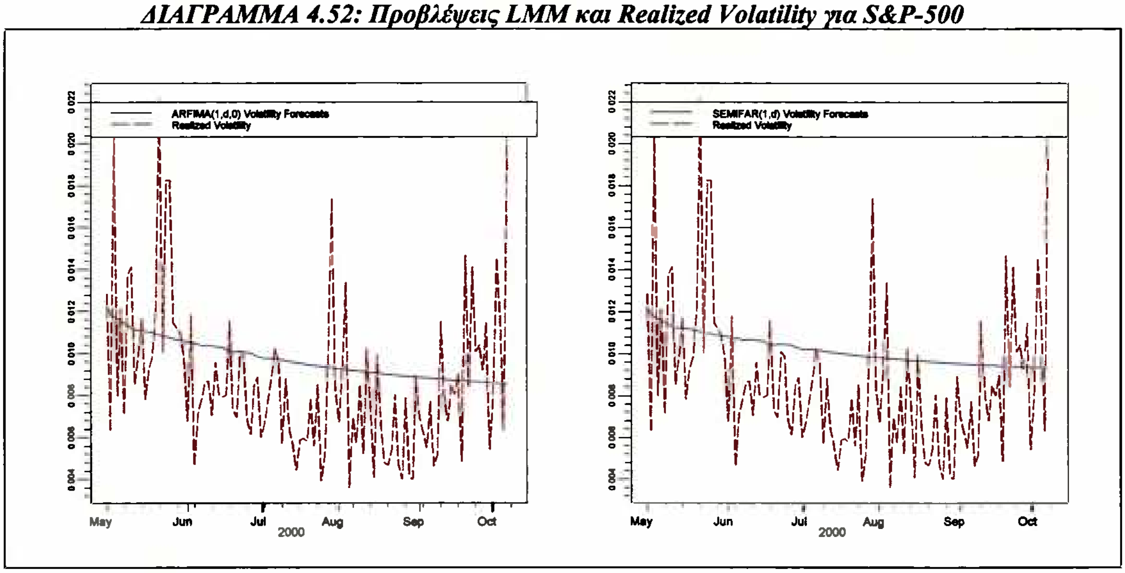
Απεναντίας, τα FIEGARCH(1,d,2) και FIEGARCH(2,d,2) κρίνονται ακατάλληλα για μελλοντικές προβλέψεις, διότι δεν παρουσιάζουν σύγκλιση σε καμιά μελλοντική στιγμή, όσο μακροπρόθεσμη κι αν είναι αυτή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.28: Μέτρα Αξιολόγησης Προβλέψεων LMM για S&P-500

Μοντέλο:	ARFIMA(1,d,0)	SEMIFAR(1,d)	FIEGARCH(1,d,2) με leverage	FIEGARCH(2,d,2) με leverage
MSE	0.0000129141	0.0000140437	0.0001499075	0.0317593954
RMSE	0.0035936130	0.0037474892	0.0122436730	0.1782116589
MAE	0.0028109821	0.0030327548	0.0115216520	0.1392731364
MAPE	38.818%	43.171%	169.273%	1929.095%
U-Theil	0.3790098347	0.3952387918	1.2913111299	18.7955606092
LINEX	0.0000016148	0.0000017556	0.0000186951	0.0037932689

Στο Διάγραμμα 4.52 δίνονται οι προβλέψεις των ARFIMA(1,d,0) και SEMIFAR(1,d) μαζί με την ιστορική μεταβλητότητα της αντίστοιχης χρονικής περιόδου[7]. Η πορεία των προβλέψεων είναι όμοια για τα δυο μοντέλα, με καθοδική αρχικά κίνηση και στη συνέχεια σταθεροποίηση (σύγκλιση) στο μέσο επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας. Οι χαμηλές τιμές στα κριτήρια αξιολόγησης δικαιολογούνται από τη συνεχώς μικρή απόσταση μεταξύ των δυο σειρών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.52: Προβλέψεις LMM και Realized Volatility για S&P-500



Η μέθοδος των Garman and Klass μετά απ' όλα αυτά αποδεικνύεται εξίσου αξιόπιστη με τη χρήση κλασσικών στατιστικών τύπων για την εύρεση της ημερήσιας μεταβλητότητας. Επομένως, ακόμη και σε περιπτώσεις όπου τα στοιχεία υψηλής συχνότητας (high frequency data) είναι δυσεύρετα για διάφορους λόγους, υπάρχει η εναλλακτική λύση της χρησιμοποίησης ημερήσιων δεδομένων, που υπό άλλες συνθήκες θα κρινόντουσαν ακατάλληλα για το συγκεκριμένο σκοπό.

[7] Η περίοδος είναι από 1 Μαΐου 2000 ως 6 Οκτωβρίου του ίδιου έτους.

5 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

5.1 Ανακεφαλαίωση

Στα γραπτά τμήματα που προηγήθηκαν αναφέρθηκαν οι σημαντικότερες σύγχρονες χρήσεις της μεταβλητότητας, δόθηκαν οι πιο συνήθεις ορισμοί της, αναλύθηκαν διάφοροι τρόποι υπολογισμού της σε ημερήσια βάση με τη χρήση είτε ημερήσιων είτε υψηλότερης συχνότητας αριθμητικών στοιχείων και παρουσιάστηκαν κάποιες από τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Αποδείχθηκε μέσω εφαρμογών ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι εξίσου αξιόπιστα είτε προέρχονται από δεδομένα υψηλής συχνότητας, είτε προέρχονται από δεδομένα ημερήσιας συχνότητας υπό την προϋπόθεση ότι στα δεύτερα εφαρμόζεται η μέθοδος που προτάθηκε για τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Περιγράφηκαν ακόμη λεπτομερώς τα υποδείγματα που προτάθηκαν από τους ειδικούς, για τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας χρηματιστηριακών αγαθών και περιουσιακών στοιχείων χρηματοοικονομικής φύσης, όπως και οι ιδιότητες και αδυναμίες των μοντέλων.

Μεγάλη σημασία δόθηκε στην εφαρμογή των περισσοτέρων εκ των αναφερόμενων υποδειγμάτων σε πραγματικά στοιχεία της οικονομίας. Έγινε χρήση των μοντέλων που ανήκουν στην κατηγορία GARCH, όπως και αυτών της κατηγορίας LMM που ειδικεύονται στη μοντελοποίηση της μακροχρόνιας μνήμης, ενώ η σύγκριση μεταξύ τους έδειξε πως άλλες φορές προτιμότερη λύση αποτελούν τα πρώτα κι άλλες φορές τα δεύτερα. Η προτίμηση με άλλα λόγια εναλλάσσεται, εξαρτώμενη κυρίως από τη φύση και τα χαρακτηριστικά των εκάστοτε διαθέσιμων αριθμητικών στοιχείων. Η χρήση εκτιμήσεων και προβλέψεων σε πρακτικό επίπεδο έδειξε ότι δεν υπάρχουν ιδιαίτερα σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ των μοντέλων με άμεση συνέπεια την εξαγωγή αποτελεσμάτων που παρουσιάζουν ομοιότητα όταν η μεταβλητότητα χρησιμοποιείται ως εισροή σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Φυσικά η ποικιλία των υποδειγμάτων δεν περιορίζεται μόνο σε αυτά που αναγράφονται εδώ. Υπάρχουν πολλές άλλες κατηγορίες που έχουν προταθεί, με διαφορετικές ιδιότητες, διαφορετικά χαρακτηριστικά και εντελώς διαφορετική φιλοσοφία.

5.2 Βασικά Συμπεράσματα

Η πρακτική ενασχόληση με τη μοντελοποίηση της ημερήσιας μεταβλητότητας, είτε αυτή έγινε απευθείας, είτε ως δεύτερη ροπή μιας οποιασδήποτε χρονολογικής σειράς επιβεβαίωσε το γεγονός ότι η επιλογή του μοντέλου στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό τόσο στο είδος της ανάλυσης που εφαρμόζεται, όσο και στις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που κάθε φορά διαθέτονται.

Το ότι κάποιο μοντέλο κρίνεται καλύτερο και αποτελεσματικότερο στον τομέα των εκτιμήσεων έναντι κάποιου άλλου, λαμβάνοντας υπόψη διαγνωστικούς ελέγχους και μέτρα αξιολόγησης, σημαίνει τις περισσότερες φορές ότι θα είναι πιο αποδοτικό και αποτελεσματικό και στον τομέα των προβλέψεων, εφόσον βέβαια αυτές είναι βραχυχρόνιες συμβαδίζοντας έτσι με τη φιλοσοφία των υποδειγμάτων GARCH. Ένα ακόμη βασικό συμπέρασμα που αποτελεί επακόλουθο του προηγούμενου, αφορά το χρονικό ορίζοντα των προβλέψεων που όπως απεδείχθη μέσω πρακτικών εφαρμογών, όταν είναι μακροχρόνιος (μεγαλύτερος των δυο βημάτων στο μέλλον) υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να ελαττώσει την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων και να επιδεινώσει επομένως τα κριτήρια προβλεπτικής ικανότητας.

Η πορεία της μεταβλητότητας μετά την περίοδο της ανάλυσης μπορεί να προβλεφθεί με αρκετή ακρίβεια, παρόλο που η εξέλιξή της επηρεάζεται από διάφορα οικονομικά και κοινωνικά συμβάντα, όπως κρίσεις, υφέσεις, διαταραχές, πολέμους, κυβερνητικά-πολιτικά μέτρα, οικονομικές μεταρρυθμίσεις, οικονομικά μεγέθη, μελλοντικές προσδοκίες των επενδυτών κ.λ.π.

Οι μελλοντικές προβλέψεις στην ουσία βέβαια πραγματοποιούνται υπό την προϋπόθεση ότι η οικονομία θα χαρακτηρίζεται στο προσεχές μέλλον από τις ίδιες ή παρόμοιες συνθήκες με αυτές που επικρατούν τώρα, ούτως ώστε να μην υπάρχει μεγάλο περιθώριο για ραγδαίες μεταβολές στην τρέχουσα οικονομική κατάσταση. Είναι με άλλα λόγια δεσμευμένες ή υπό συνθήκη εκτιμήσεις που στηρίζονται στην υπόθεση της σταθερότητας κι εφόσον επικρατήσουν κανονικές και ομαλές συνθήκες, μπορούν να αποδειχθούν αξιόπιστες σε μεγάλο βαθμό και να χρησιμοποιηθούν επιτυχώς σε πολλούς τομείς της οικονομικής δραστηριότητας.

Βιβλιογραφία – Αρθρογραφία

1. Alexander C. (2001), "Market Models - A Guide to Financial Data Analysis", John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK.
2. Andersen T. G. and Bollerslev T. (1998), "Answering the Sceptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts", *International Economic Review*, **39** (4), 885-905.
3. Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X. and Ebens H. (2001), "The Distribution of Realized Stock Return Volatility", *Journal of Financial Economics*, **61**, 43-76.
4. Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X. and Labys P. (2001), "The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility", *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 42-55.
5. Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X. and Labys P. (2003), "Modeling and Forecasting Realized Volatility", *Econometrica*, **71**, 579-625.
6. Areal N. and Taylor S. J. (2002), "The Realized Volatility of FTSE-100 Futures Prices", *Journal of Futures Markets*, **22**, 627-648.
7. Baillie R. T., Bollerslev T. and Mikkelsen H. O. (1996), "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, **74**, 3-30.
8. Barone-Adesi G. and Whaley R. E. (1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, **42**, 301-320.
9. Beran J. (1995), "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory ARIMA Models", *Journal of Royal Statistical Society Series B*, **57** (4), 659-672.
10. Beran J. and Ocker D. (2001), "Volatility of Stock Market Indices - An Analysis Based on SEMIFAR Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, **19** (1), 103-116.
11. Black F. (1976), "Studies in Stock Price Volatility Changes", *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section*, American Statistical Association, 177-181.
12. Black F. and Scholes M. (1973), "The Pricing of Option and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.
13. Bodie Z. and Merton R. C. (1995), "The Information Role of Asset Prices: The Case of Implied Volatility", Working Paper, Harvard Business School.
14. Bollerslev T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
15. Bollerslev T. and Mikkelsen H. O. (1996), "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics*, **73**, 151-184.
16. Brooks C. (2002), "Introductory Econometrics for Finance", Cambridge University Press.
17. Chriss N. A. (1997), "Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models", Irwin.
18. Dacorogna M. M., Gençay R., Müller U. A., Olsen R. B. and Pictet O. V. (2001), "An Introduction to High-Frequency Finance", Academic Press, San Diego.
19. Ding Z., Granger C. W. J. and Engle R. F. (1993), "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
20. Donaldson R. G. and Kamstra M. J. (2001), "Volatility Forecasts, Trading Volume and the ARCH vs Option-Implied Volatility Tradeoff", Department of Economics, Simon Fraser University, Burnaby, Canada.

21. Duan J. C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, **5** (1), 13-32.
22. Dumas B., Fleming J. and Whaley R. (1998), "Implied Volatility Functions: Empirical Tests", *Journal of Finance*, **53**, 2059-2106.
23. Engle R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation", *Econometrica*, **50** (4), 987-1007.
24. Engle R. F. and Ng V. K. (1993), "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, **48** (5), 1749-1778.
25. Engle R. F., Lilien D. M. and Robins R. P. (1987), "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term-Structure: The ARCH-M Model", *Econometrica*, **50** (2), 391-407.
26. Figlewski S. (1997), "Forecasting Volatility", *Financial Markets, Institutions and Instruments*, **6** (1), 1-88.
27. Figlewski S. (2004), "Forecasting Volatility", New York University Stern School of Business.
28. Garman M. B. and Klass M. J. (1980), "On the Estimation of Security Price Volatility from Historical Data", *Journal of Business*, **53** (1), 67-78.
29. Geweke J. and Porter-Hudak S. (1983), "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models", *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221-238.
30. Glosten L. R., Jagannathan R. and Runkle D. E. (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance*, **48** (5), 1779-1801.
31. Granger C. W. J. and Joyeux R. (1980), "An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 15-39.
32. Granger C. W. J. and Newbold P. (1977), "Forecasting Economic Time Series", Academic Press, London, UK.
33. Gujarati D. N. (1995), "Basic Econometrics", 3rd Edition, McGraw-Hill Inc., New York, USA.
34. Hansen P. R. and Lunde A. (2002), "Volatility Estimation Using High-Frequency Data with Partial Availability", Discussion Paper, Brown University Working Paper.
35. Hansen P. R. and Lunde A. (2003), "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?", Discussion Paper, Brown University Working Paper.
36. Heston S. L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, **6** (2), 327-343.
37. Hol E. and Koopman S. J. (2002), "Stock Index Volatility Forecasting with High-Frequency Data", Discussion Paper, Timbergen Institute, Amsterdam-Rotterdam, The Netherlands.
38. Hol E., Jungbacker B. and Koopman S. J. (2004), "Forecasting Daily Variability of the S&P-100 Stock Index Using Historical, Realized and Implied Volatility Measurements", Discussion Paper, Timbergen Institute, Amsterdam-Rotterdam, The Netherlands.
39. Hosking J. R. M. (1981), "Fractional Differencing", *Biometrika*, **68**, 165-176.
40. Hull J. and White A. (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, **42** (2), 281-300.
41. Hurst H. E. (1951), "Long Term Storage Capacity of Reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, **116**, 770-799.

42. Martens M. (2002), "Measuring and Forecasting S&P-500 Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data", *Journal of Futures Markets*, **22**, 497-518.
43. Müller U. A., Dacorogna M. M., Davé R. D., Olsen R. B., Pictet O. V. and von Weizsäcker J. E. (1997), "Volatilities of Different Time Resolutions - Analysing the Dynamics of Market Components", *Journal of Empirical Finance*, **4**, 213-239.
44. Neely C. J. (2003), "Forecasting Foreign Exchange Volatility: Is Implied Volatility the Best we Can Do?", Working Paper 2002-017D, Research Division, Federal Reserve Bank of Saint Louis.
45. Nelson D. B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, **59** (2), 347-370.
46. Parkinson M. (1976), "The Random Walk Problem: Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Displacement (Diffusion Constant)", Working Paper, University of Florida.
47. Pindyck R. S. and Rubinfeld D. L. (1998), "Econometric Models and Economic Forecasts", 4th Edition, McGraw-Hill Inc., New York, USA.
48. Pong S., Shackleton M. B., Taylor S. J. and Xu X. (2002), "Forecasting Sterling/Dollar Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models", Working Paper 2002/010, Department of Accounting and Finance, Lancaster University Management School.
49. Poon S.-H. and Granger C. W. J. (2001), "Forecasting Financial Market Volatility - A Review", Working Paper, Strathclyde University and University of California, San Diego.
50. Tsay R. S. (2001), "Analysis of Financial Time Series", John Wiley & Sons Inc., New York, USA.
51. Zivot E. and Wang J. (2003), "Modeling Financial Time Series with S-PLUS", Springer-Verlag Inc., New York, USA.