

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**  
MSc Εφαρμοσμένα Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

ΜΠΕΪΖΙΑΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΗ-  
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ  $X^2$  ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

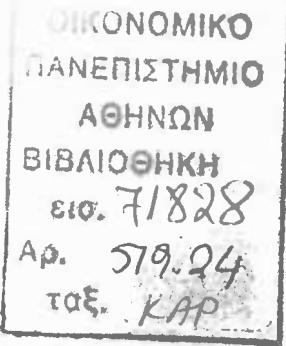
ΚΑΡΕΛΑΣ Α. ΙΩΑΝΝΗΣ



Διατριβή  
υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των απαραίτητων  
προϋποθέσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος

ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2003





# ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
MSc Εφαρμοσμένα Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΠΕΪΖΙΑΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΗ-  
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ  $X^2$  ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

ΚΑΡΕΛΑΣ Α. ΙΩΑΝΝΗΣ



Διατριβή

υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των απαραίτητων  
προϋποθέσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος

ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2003



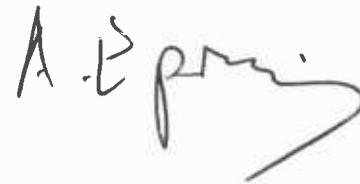
Εγκρίνουμε τη διατριβή του Καρέλα Ιωάννη

Αθήνα, Ιανουάριος 2003

Τσιώνας Ευθύμιος  
Οικονομικό Παν/μιο Αθηνών



Επίσκοπος Αθανάσιος  
Οικονομικό Παν/μιο Αθηνών





## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ειλικρινά, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Ευθύμιο Τσιώνα για την διαρκή, ατέρμονη και απρόσκοπτη επίβλεψη και φροντίδα της μελέτης αυτής. Μου παρείχε απλόχερα τόσο πολύ γνώση σε ιδιαίτερα μικρό χρονικό διάστημα. Επιπλέον, θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Αθανάσιο Επίσκοπο, ο οποίος με βοήθησε στην συλλογή των στοιχείων από την Ομοσπονδιακή Κεντρική Τράπεζα των ΗΠΑ.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή
2. Προηγούμενες μελέτες
3. Το υπόδειγμα
4. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)
5. Προγενέστερες (prior) κατανομές
6. Δειγματοληψία κατά Gibbs και οι μεταγενέστερες (posterior) κατανομές
7. Δεδομένα και εμπειρική εφαρμογή των Cox et al (1985) για τα επιτόκια
8. Αποτελέσματα –Συμπεράσματα
9. Βιβλιογραφία
10. Παράρτημα



## 1. Εισαγωγή

Σκοπός της έρευνας μας είναι να εξαγάγουμε συμπεράσματα μεθόδων της Μπεϋζιανής Θεωρίας για μια νέα σύνθετη μη κεντρική  $X^2$  κατανομή, (compound non central  $X^2$  distribution), όταν η μη κεντροποιημένη παράμετρος ακολουθεί Γάμμα κατανομή. Οι προτεινόμενες μέθοδοι έχουν επικεντρωθεί γύρω από αριθμητικές τεχνικές που βασίζονται στην δειγματοληψία του Gibbs (Gibbs sampling) με προσαύξηση δεδομένων.

Η προσέγγιση του θέματος με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζει δύο σοβαρά και ευδιάκριτα πλεονεκτήματα. Πρώτον, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή την συνάρτηση κατανομής της σύνθετης μη κεντρικής  $X^2$  κατανομής - κάτι που εμπεριέχει ειδικές συναρτήσεις και ιδιαίτερα δύσκολα αριθμητικά θέματα. Δεύτερον, οι ακριβείς οριακές μεταγενέστερες (posterior) κατανομές και οι μεταγενέστερες ροπές μπορούν να εξαχθούν εύκολα χωρίς την ανάγκη να καταφύγουμε σε ασυμπτωτικές αναλύσεις. Οι αριθμητικές Μπεϋζιανές μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί στην παρούσα έρευνα έχουν βασιστεί πάνω στην ιεραρχική αναπαράσταση της μη κεντρικής  $X^2$  κατανομής, σαν μια Poisson μίξη από μη κεντρικές  $X^2$  κατανομές με διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας. Μία άλλη βαθμίδα στην ιεραρχία καθορίζεται για τις μη παρατηρήσιμες, λανθασμένες-αφανείς (latent), μη κεντροποιημένες παραμέτρους. Όλες οι μεταγενέστερες εξαρτημένες κατανομές που απαιτούνται για την εφαρμογή της δειγματοληψίας του Gibbs φαίνεται να είναι υποκείμενες στην παραγωγή τυχαίων αριθμών.

Το υπόλοιπο της έρευνας είναι οργανωμένο ως εξής: Στο κεφάλαιο 2 αναφέρονται οι προγενέστερες μελέτες που έχουν γίνει πάνω στο θέμα μας. Το υπόδειγμα μας παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3, ενώ στο κεφ. 4 γίνεται αναφορά στην τεχνική Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Στην συνέχεια, στο

κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται οι προγενέστερες (prior) κατανομές και στο κεφάλαιο 6 γίνεται αναφορά στη δειγματοληψία κατά Gibbs και στις μεταγενέστερες (posterior) κατανομές. Κατόπιν παρουσιάζονται τα δεδομένα και η εμπειρική εφαρμογή τους, στο κεφ. 7, ενώ στο κεφάλαιο 8 παρατίθενται τ' αποτελέσματα και τα συμπεράσματα.



## 2. Προηγούμενες μελέτες

Η μη κεντρική  $X^2$  κατανομή έχει επικρατήσει σαν μια περιορισμένη περίπτωση της κατανομής του συντελεστή πολλαπλής συσχέτισης, σύμφωνα με τον Fisher (1928). Μια γενική χρήσιμη εφαρμογή της κατανομής είναι, στην προσέγγιση της ισχύς των  $X^2$  τεστ στους πίνακες ενδεχομένου και της ασυμπτωτικής κατανομής της λογαριθμικής πιθανότητας ποσοστού για σειρές εναλλακτικών υποθέσεων που συγκλίνουν στο μηδέν. Μεγάλη προσπάθεια έχει γίνει για να επιτευχθούν ακριβείς προσεγγίσεις της συνάρτησης κατανομής της μη κεντρικής  $X^2$  κατανομής, βλέπε Boomsma & Molenaar (1994), Ding (1992), Farebrother (1987), Narula & Desu (1981) και Temme (1993).

Η εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας της μη κεντροποιημένης παραμέτρου και οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής είναι μια δύσκολη υπόθεση λόγω της έντονα μη γραμμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας, βλέπε Meyer (1967) και Dwivedi & Pandey (1995). Ο Anderson (1981a,b) περιέγραψε την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας (MLE) με γνωστούς βαθμούς ελευθερίας. Τα μέσα τετράγωνα των σφαλμάτων της εκτίμησης μεγίστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος των ροπών υπολογίστηκαν από τους Alam & Saxena (1982) για μια μη κεντρική Γάμμα κατανομή χρησιμοποιώντας τεχνικές προσομοίωσης. Ο De Waal (1974) μελέτησε την Μπεϋζιανή εκτίμηση όταν μία μοναδική παρατήρηση είναι διαθέσιμη. Άλλοι εκτιμητές παρουσιάστηκαν από τους Perlman & Rasmussen (1975), Neff & Strawderman (1976) και Kubokawa, Robert & Saleh (1993). Αυτοί οι εκτιμητές διαμοιράζουν τις ιδιότητες και έχουν μικρότερα μέσα τετράγωνα σφαλμάτων σε σύγκριση με τον εκτιμητή των ροπών, και είναι όλοι εφαρμόσιμοι μόνο όταν μία μοναδική παρατήρηση είναι διαθέσιμη. Οι Shao & Strawderman (1995) μας παρέχουν ένα ρητό εκτιμητή που επιδρά πάνω στο πραγματικό τμήμα του UMVUE της μη κεντροποιημένης



παραμέτρου μιας μη κεντρικής  $X^2_{(\mu/2)}$ . Ο López-Blazquez (2000) κάνει μια

επέκταση για τους αμερόληπτους εκτιμητές βασισμένη πάνω στον αριθμητικό μέσο της αναλυτικής συνάρτησης της μη κεντροποιημένης παραμέτρου μιας μη κεντρικής  $X^2$  κατανομής. Ήα πρέπει ωστόσο να αναφερθεί και η έρευνα του Marchand (1996), ο οποίος μιας δίνει μια σαφή φόρμουλα για τον υπολογισμό των ροπών μιας περικομμένης (fruncated) μη κεντρικής  $X^2$  κατανομής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ιδιόμορφων βαθμών ελευθερίας, αυτή η φόρμουλα είναι υπολογίσιμη από χειροκίνητο υπολογιστή.

Οι σύνθετες μη κεντρικές  $X^2$  κατανομές οδηγούν στις λεγόμενες  $\bar{X}^2$  κατανομές που έχουν ορισθεί από τους Conoway, Pillers, Robertson & Sconing (1990). Αυτές οι κατανομές είναι βασικά ένα πεπερασμένο μίγμα κεντρικών  $X^2$  μεταβλητών τυχαίων τιμών, αλλά προκύπτουν επίσης ως σύνθετες μη κεντρικές  $X^2$  κατανομές όταν η μη κεντροποιημένη παράμετρος ορίζει μια κατανομή (Johnson, Kotz & Balakrishnan, 1995, σελ 471). Σύμφωνα με το συγγραφέα δεν υπάρχει δημοσιευμένη έρευνα για την εκτίμηση των σύνθετων μη κεντρικών  $X^2$  κατανομών, ούτε από την Μπεϋζιανή πλευρά αλλά και ούτε και από την πλευρά της δειγματικής θεωρίας.

Σε αυτήν την μελέτη, η σύνθετη μη κεντρική  $X^2$  κατανομή εισάγεται κάτω από την υπόθεση ότι η μη κεντροποιημένη παράμετρος ακολουθεί Γάμμα κατανομή. Υπάρχουν κάποιες ενδιαφέρουσες οικονομικές εφαρμογές για την μη κεντρική  $X^2$  κατανομή. Οι Cox, Ingersoll & Ross (1985) δείχνουν ότι αυτή έχει εφαρμοστεί στην κατανομή του επιτοκίου το χρόνο  $s$ , υπό όρους της αξίας του στην τρέχουσα ημερομηνία  $t$ . Ο Boyle (1978) δείχνει πώς η κατανομή έχει εφαρμογές που σχετίζονται με ασφαλιστικές απαιτήσεις. Ο Schroder (1989) παρουσιάζει τη σχέση της με τη διαδικασία εξάπλωσης (diffusion) της «συνεχής ελαστικότητας της διακύμανσης» για τιμές μετοχών. Αυτή η βιβλιογραφία μας

δίνει το κίνητρο για να σκεφτούμε πιθανές εφαρμογές της κατανομής σε αποδόσεις μετοχών.

Η σύνθεση αποδεικνύεται να είναι σημαντική σε οικονομικές εφαρμογές της κατανομής. Για παράδειγμα, η δομή του μοντέλου των επιτοκίων των Cox, Ingersoll & Ross (1985) προβλέπει μια μη κεντρική  $X^2$  κατανομή για τα επιτόκια με μια στοχαστική μη κεντροποιημένη παράμετρο. Δεδομένου ότι, οι περισσότερες δημοσιευμένες έρευνες αφορούν την εκτίμηση μη κεντρικών  $X^2$  παραμέτρων, μόνο όταν μία μοναδική παρατήρηση είναι διαθέσιμη διαφαίνεται η ανάγκη να θεωρήσουμε διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων σε ένα πιο γενικό υπόβαθρο από όπου οι πολλαπλάσιες παρατηρήσεις έχουν συλλεχθεί.

Οι Schlogl E. & Schlogl L. (1997) μας παρουσιάζουν την απλή και την πολύ-παραγοντική ερμηνεία-εκδοχή των όρων ενός δομικού μοντέλου, στο οποίο οι δυναμικές των παραγόντων δίνονται από την τετραγωνικής μορφής τύπου διάχυσης με σταθερές παραμέτρους ξεχωριστών βημάτων, των Cox, Ingersoll & Ross.

### 3. Το υπόδειγμα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μη κεντρικής  $X^2$  μεταβλητής ορίζεται ως εξής:

$$f(x | \nu, \lambda) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\lambda + x)\}}{2^{\nu/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\lambda\right)^j \frac{x^{(\nu/2)+j-1}}{j! \Gamma(\frac{1}{2}\nu + j)} = \\ \exp\{-\frac{1}{2}(\lambda + x)\} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(\nu-2)/4} I_{(\nu-2)/2}(\sqrt{\lambda x}), \quad x \geq 0 \quad (1)$$

όπου  $\nu > 0$  οι βαθμοί ελευθερίας, λη παράμετρος μη κεντροποίησης και η  $I_a(y)$  η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης α ορίζεται ως

$$I_a(y) = \left(\frac{1}{2}y\right)^a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}y^2\right)^j}{j! \Gamma(a+j+1)}$$

Η συνάρτηση (1) είναι η συνήθης μορφή. Αφού εισάγουμε την παράμετρο κλίμακας  $\sigma$ , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

$$f(x | \nu, \lambda, \sigma) = \sigma^{-1} f(\sigma^{-1}x; \nu, \lambda)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι μία μίξη από μη κεντρικές  $X^2$  κατανομές με βαρύτητες ίσες των πιθανοτήτων κατανομών Poisson με παράμετρο  $1/2\lambda$ . Ας υποθέσουμε ότι  $\lambda$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα με παράμετρο κλίμακας  $q$  και παράμετρο μορφής  $p$  (και οι δυο είναι θετικές), π.χ.

$$f(\lambda; p, q) = q^p \Gamma(p)^{-1} \lambda^{p-1} \exp(-q\lambda)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η άνευ όρων (συνήθης μορφή) κατανομή είναι

$$f(x | \nu) = \int_0^{\infty} f(x | \nu, \lambda) f(\lambda | p, q) d\lambda$$

Η συνάρτηση πιθανότητας ξεκάθαρα εμπεριέχει ένα γινόμενο απείρων αθροισμάτων και δεν μπορεί να μετατραπεί σε απλούστερες μορφές διαμέσου επαρκών στατιστικών ή άλλων μέσων. Μπορούμε, παρόλα αυτά να απλοποιήσουμε της συμπερασματικές διαδικασίες εκμεταλλευόμενοι την

ιδιότητα της μίξης των μη κεντρικών  $X^2$  κατανομών στην μορφή του ιεραρχικού μοντέλου. Για να περιγράψουμε το ιεραρχικό μοντέλο, έστω  $\mathbf{X} = \{x_i; i = 1, \dots, n\}$  τυχαίο δείγμα από μη κεντρική  $X^2$  κατανομή. Το μοντέλο ορίζεται ως εξής :

$$f(x_i | \nu, \sigma, J_i) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2\sigma} x_i\} (\frac{x_i}{\sigma})^{(\nu/2+J_i-1)}}{2^{(\nu/2)+J_i} \Gamma(\frac{1}{2}\nu + J_i)\sigma} \quad (2)$$

$$f(J_i | \lambda_i) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda_i) \frac{(\frac{1}{2}\lambda_i)^{J_i}}{J_i!}, \quad J_i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$f(\lambda_i | p, q) = q^p \Gamma(p)^{-1} \lambda_i^{p-1} \exp(-q\lambda_i) \quad (4)$$

για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Σε αυτό το ιεραρχικό μοντέλο, κάθε παρατήρηση  $x_i$  έχει επιλεχθεί από μια κεντρική  $X^2$  κατανομή με  $\nu + 2J_i$  βαθμούς ελευθερίας, όπου οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $J_i$  ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο  $\frac{1}{2}\lambda_i$ . Έστω επίσης  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]'$ .

## 4. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

### I) Εισαγωγή

Από τη μορφή του θεωρήματος του Bayes μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι τεχνικές δυσκολίες εμφανίζονται στον υπολογισμό των μεταγενέστερων και οριακών μεταγενέστερων πυκνοτήτων, οι οποίες απαιτούνται για την εξαγωγή συμπεράσματος κατά Bayes. Για παράδειγμα, δυσεπίλυτα ολοκληρώματα στα οποία αναλυτικοί υπολογισμοί είναι αδύνατοι. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα -κύριο πρόβλημα για την εξαγωγή συμπερασμάτων κατά Bayes-έχει προταθεί η χρήση της αριθμητικής ολοκλήρωσης ή αναλυτικές διαδικασίες προσέγγισης. Η πιο διαδεδομένη τεχνική είναι η Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

### II) Μέθοδοι Monte Carlo



Το κλειδί της ιδέας αυτής είναι απλό. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$I = \int g(\theta) f(\theta) d\theta$$

όπου  $f(\theta)$  είναι ανάλογο της κατανομής από την οποία μπορούμε εύκολα να πάρουμε ένα δείγμα. Ένας ακριβής τρόπος για να γίνει αυτό είναι να παράγουμε τυχαίες μεταβλητές  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$  από  $f(\theta)$  και μετά, ακολουθώντας τον κανόνα των Μεγάλων Αριθμών

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta^i) f(\theta^i) \right) = I$$

Βλέπε Hammersley & Handscomb (1964).



### III) Μέθοδος MCMC

Η μέθοδος Markov Chain Monte Carlo είναι μια πιο γενική μέθοδος Monte Carlo, η οποία προσεγγίζει την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών από μια μεταγενέστερη πυκνότητα, όταν η πυκνότητα αυτή δε μπορεί να προσομοιωθεί απευθείας (Gilks et al, 1996 και Tierney, 1994).

Η κεντρική ιδέα είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε δείγμα από μεταγενέστερη κατανομή  $f(\theta|D)$  όπου  $\theta \in \Theta \subset R^k$  δηλώνει τις άγνωστες παραμέτρους και  $D$  δηλώνει τα δεδομένα, αλλά δε μπορούμε να το κάνουμε αυτό απευθείας. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αλυσίδα Markov με σταθερό διάστημα  $\theta$ , από το οποίο είναι ακριβές να πάρουμε δείγμα και του οποίου η κατανομή ισορροπίας είναι  $f(\theta|D)$ . Αν τότε εφαρμόζαμε την αλυσίδα για μεγάλο χρονικό διάστημα, θα παίρναμε δείγμα από την κατανομή ισορροπίας της και επομένως θα είχαμε δείγμα από  $f(\theta|D)$ .

Για παράδειγμα, αν θέλαμε να ολοκληρώσουμε

$$\int_{\Theta} g(\theta) f(\theta | D) d\theta$$

όπου  $f(\theta|D)$  δεν είναι ένα από τα γνωστά είδη κατανομών και δεν μπορούμε να προσομοιώσουμε από αυτό. Έτσι, κατασκευάζουμε μια αλυσίδα Markov με κατανομή ισορροπίας την  $f(\theta|D)$ . Αν τώρα η  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$  είναι μια πραγματοποίηση αυτής της αλυσίδας, τότε καθώς το  $n \rightarrow +\infty$

$$\theta^n \rightarrow \theta \sim f(\theta | D),$$

στην κατανομή και

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta^i) f(\theta^i | D)$$

είναι η σχεδόν σωστή λύση του παραπάνω ολοκληρώματος.

Βεβαίως διαδοχικά  $\theta^n$  θα είναι αρκετά συσχετιζόμενα, έτσι ώστε, αν τα πρώτα από αυτά τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα αξιοποιούνταν για να μιμηθούν

ένα τυχαίο δείγμα από  $f(\theta|D)$ , κατάλληλη διάταξη στο χώρο θα απαιτούνταν μεταξύ των πραγματοποιήσεων ή παράλληλες ανεξάρτητες σειρές μετρήσεων της αλυσίδας θα έπρεπε να μελετηθούν.

Παρακάτω, στο κεφάλαιο 6, περιγράφουμε την πιο διαδεδομένη μορφή της έννοιας της αλυσίδας Markov, την δειγματοληψία κατά Gibbs.

## 5. Προγενέστερες κατανομές (prior distributions)

Μπορούμε να ορίσουμε μια ποικιλία από προγενέστερες (prior) κατανομές στις δομικές παραμέτρους  $\nu$ ,  $\sigma$ ,  $p$  και  $q$  αλλά είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε η αναφορά των προγενέστερων να είναι επιλεγμένη από τη Γάμμα κατανομή. Για το  $\sigma$  και το  $\lambda$  αυτές οι προγενέστερες είναι υπό συνθήκες συζυγείς και διευκολύνουν τις λειτουργίες της δειγματοληψίας κατά Gibbs. Επομένως, η από κοινού προγενέστερη ορίζεται ως

$$P(\nu, \sigma, p, q) \propto P(\nu)P(\sigma)P(p)P(q) \propto \{q^{\theta_q-1} \exp(-\xi_q q)\} \{p^{\theta_p-1} \exp(-\xi_p p)\} \{\lambda^{\theta_\lambda-1} \exp(-\xi_\lambda \lambda)\} \{\sigma^{\theta_\sigma-1} \exp(-\xi_\sigma \sigma)\} \quad (5)$$

όπου  $a, r, s, \xi_p, \xi_q, \theta_q \geq 0$  είναι υπέρ-παράμετροι. Μία μη πληροφοριακή προγενέστερη κατανομή μπορεί να ορισθεί αν θέσουμε όλες τις παραμέτρους ίσες με το μηδέν. Η μεταγενέστερη κατανομή δίνεται από το θεώρημα του Bayes ως

$$P(\nu, \sigma, p, q | \mathbf{X}) \propto L(\nu, \sigma, p, q; \mathbf{X})P(\nu, \sigma, p, q)$$

όπου  $L(\nu, \sigma, p, q; \mathbf{X})$  είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας. Στο ιεραρχικό πλαίσιο, μπορούμε να θεωρήσουμε τα  $J_i$ 's και τα  $\lambda_i$ s ως παραμέτρους έτσι ώστε να παραγοντοποιήσουμε την μεταγενέστερη κατανομή σε μια εύχρηστη μορφή. Εάν ορίσουμε  $\mathbf{J} = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_n]'$ , η προσαυξημένη (augmented) μεταγενέστερη κατανομή μπορεί να γραφεί

$$P(\nu, \lambda, \sigma, p, q, \mathbf{J} | \mathbf{X}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^n f(x_i | \nu, \lambda_i, \sigma, J_i) \right\} \{P(\nu, \sigma, p, q) \prod_{i=1}^n f(J_i | \lambda_i) \prod_{i=1}^n f(\lambda_i | p, q)\} \quad (6)$$

Ο όρος μέσα στην πρώτη αγκύλη είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας του επαυξημένου μοντέλου και ο όρος μέσα στη δεύτερη αγκύλη είναι η επαυξημένη προγενέστερη κατανομή για παραμέτρους  $\nu, \sigma, p, q$  ακολουθούμενη

από την προγενέστερη του  $J/\lambda$  και την προγενέστερη του  $\lambda/p,q$ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\int \sum_{J \in S} P(\nu, \lambda, \sigma, p, q, J | \mathbf{X}) d\lambda = P(\nu, \sigma, p, q | \mathbf{X}) \quad (7)$$

όπου  $S = \{0, 1, 2, \dots\}^n$  και  $P(\nu, \sigma, p, q | \mathbf{X}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^n f(x_i | \nu, \sigma, p, q) \right\} P(\nu, \sigma, p, q)$  είναι η

“δομική” μεταγενέστερη. Η “δομική” πυκνότητα ορίζεται ως

$$f(x | \nu, \sigma, p, q) = \int f(x | \nu, \lambda, \sigma) f(\lambda | p, q) d\lambda \quad (8)$$

Αυτή είναι διαθέσιμη σε κλειστή μορφή. Το πρόβλημα είναι ότι η “δομική” πυκνότητα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και το ίδιο ισχύει και για τη “δομική” πιθανοφάνεια ή επομένως τη μεταγενέστερη  $P(\nu, \sigma, p, q | \mathbf{X})$ . Συνεπώς, η Μπεϋζιανή ανάλυση σε όρους διανυσματικών παραμέτρων  $\nu, \sigma, p, q$  είναι αδύνατη. Παρόλα αυτά, η τυπική ολοκλήρωση της επαυξημένης μεταγενέστερης, λαμβάνοντας υπόψη τις κρυμμένες παραμέτρους  $J$  και  $\lambda$ , δίνει τη γνήσια, “δομική” μεταγενέστερη. Ως αποτέλεσμα, υπολογιστικά οφέλη αναμένονται αν θεωρήσουμε το επαυξημένο διάνυσμα παραμέτρων  $\nu, \sigma, p, q, J, \lambda$  γιατί η δομή του ιεραρχικού μοντέλου περιλαμβάνει μόνο τυπικές κατανομές. Εναλλακτικά, αυτό μας παρακινεί να σκεφτούμε την δειγματοληψία κατά Gibbs για να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς που απαιτούνται για τον υπολογισμό των οριακών-περιθωρίων μεταγενέστερων πυκνοτήτων και ροπών.

Στη μελέτη μας, οι προγενέστερες (prior) κατανομές έχουν ταξινομηθεί με βάση δύο μοντέλα (βλέπε Παράρτημα: 1<sup>o</sup> και 2<sup>o</sup> Μοντέλο).

### Στο πρώτο μοντέλο:

- η παράμετρος  $\nu$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $a=5$  και  $b=1$
- η παράμετρος  $p$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.1$  και  $d=0.1$
- η παράμετρος  $q$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.1$  και  $d=0.1$
- η παράμετρος  $c$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.1$  και  $d=0.1$

**Στο δεύτερο μοντέλο:**

η παράμετρος  $\nu$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $a=1$  και  $b=0,1$

η παράμετρος  $\rho$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.01$  και  $d=0.01$

η παράμετρος  $q$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.01$  και  $d=0.01$

η παράμετρος  $c$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $c=0.01$  και  $d=0.01$



## 6. Δειγματοληψία κατά Gibbs & οι μεταγενέστερες κατανομές (posterior distributions)

Η Μπεϋζιανή συμπερασματολογία θα βασιστεί σε υπολογιστικές τεχνικές οργανωμένες γύρω από τη δειγματοληψία κατά Gibbs, βλέπε Gelfand & Smith (1990), Tanner & Wong (1987) και Tierney (1994). Η δειγματοληψία κατά Gibbs τοποθετεί μια αλυσίδα Markov στο διάστημα της παραμέτρου που απαιτεί γνώση των εξαρτημένων κατανομών. Ο σκοπός της δειγματοληψίας κατά Gibbs είναι να παρέχει τυχαίες επιλογές από πολυ-μεταβλητές κατανομές. Κάτω από ήπιες συνθήκες κανονικότητας (Roberts & Smith, 1994), το δείγμα κατά Gibbs συγκλίνει σε μεταγενέστερη Kernel κατανομή. Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται στην περίπτωση των σύνθετων μη κεντρικών  $X^2$  κατανομών. Σίγουρα, όμως, το δείγμα κατά Gibbs δεν είναι τυχαίο γιατί οι διαδοχικές επιλογές είναι εξαρτημένες.

Οι αποτελεσματικές εφαρμογές της δειγματοληψίας κατά Gibbs απαιτούν ότι οι μεταγενέστερες εξαρτημένες κατανομές είναι διαθέσιμες σε κλειστή, κοντινή μορφή και είναι υποκείμενες σε παραγωγή τυχαίων αριθμών. Αυτό το θέμα θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή της παραμέτρου κλίμακας σ είναι

$$P(\sigma | \nu, p, q, \lambda, \mathbf{J}, \mathbf{X}) \propto \sigma^{-(\frac{1}{2}n\nu + \sum J_i + r + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma}(s + \sum x_i)\right\} \quad (10)$$

η οποία είναι μια αντιστραμμένη Γάμμα κατανομή,  
 $IG(\frac{1}{2}n\nu + \sum J_i + r, \frac{1}{2}(s + \sum x_i))$ .

Η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή των βαθμών ελευθερίας ν είναι

$$P(\nu | \sigma, p, q, \mathbf{J}, \mathbf{X}) \propto \frac{\exp(-Q\nu)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{1}{2}\nu + J_i)} \quad (11)$$

όπου  $Q = a - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{2\sigma}\right)$ . Αυτή η κατανομή δεν είναι μια γνωστή οικογένεια

επαρκής απομίμησης, μπορεί να βασιστεί πάνω σε ένα βέλτιστο αποδεκτό δείγμα χρησιμοποιώντας εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο  $\theta$ . Αυτή η παράμετρος επιλέγεται, έτσι ώστε η μέγιστη διαφορά, απόσταση μεταξύ των δυο κατανομών να ελαχιστοποιηθεί (Geweke, 1993). Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι αυτό καταλήγει στην παρακάτω μη γραμμική εξίσωση

$$\theta - Q - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{1}{2}\theta^{-1} + J_i\right) = 0 \quad (12)$$

όπου  $\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz}$  είναι δίγαμμα συνάρτηση. Η εξίσωση μπορεί να λυθεί με διχοτόμηση.

Η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή του  $q$  δίνεται από

$$P(q | \nu, \sigma, p, \lambda, \mathbf{J}, \mathbf{X}) \propto q^{np + \theta_q - 1} \exp\left\{-\left(\sum \lambda_i + \xi_q\right)q\right\} \quad (13)$$

όπου είναι Γάμμα κατανομή,  $G(np + \theta_q, \sum \lambda_i + \xi_q)$ .

Η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή του  $p$  δίνεται από

$$P(p | \nu, \sigma, q, \lambda, J, X) \propto \Gamma(p)^{-n} \exp(-Sp) \quad (14)$$

όπου  $S = \xi_p - \sum \log \lambda_i - n \log q$ .

Οι τυχαίες επιλογές από αυτήν την κατανομή μπορούν να παραχθούν χρησιμοποιώντας πάλι την διαδικασία βέλτιστης αποδοχής με μια κατανομή εκθετικής προέλευσης, με παράμετρο  $\theta$ . Η παράμετρος ικανοποιεί τη μη γραμμική εξίσωση

$$\theta - S - n\psi(\theta^{-1}) = 0 \quad (15)$$

Η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή των κρυμμένων μεταβλητών λικανοποιεί την

$$\lambda_i | \nu, \sigma, p, q, \mathbf{J}, \mathbf{X} \sim G(J_i + p, q + \frac{1}{2}), \text{ για κάθε } i = 1, \dots, n \quad (16)$$

Τέλος, η μεταγενέστερη εξαρτημένη κατανομή κάθε κρυμμένης μεταβλητής  $J_i$  δίνεται από

$$\Pr(J_i = k | \lambda, \sigma, \nu, p, q, \mathbf{X}) \propto \frac{\left(\frac{\lambda, x_i}{4\sigma}\right)^k}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + k)k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

από την οποία η παραγωγή τυχαίων αριθμών είναι ευθεία, άμεση, γιατί η κατανομή είναι διακριτή. Βλέπε Ripley (1987.p71) για το σχετικό αλγόριθμο. Στην πράξη, το ανώτερο όριο πρέπει να τοποθετηθεί στο  $k$  για λόγους προσομοίωσης. Το όριο επιλέγεται έτσι ώστε η τελευταία υπολογιζόμενη πιθανότητα να είναι μικρότερη από  $10^{-12}$ .

Το βασικό υπολογιστικό όριο στο πλάνο ενεργειών της δειγματοληψίας κατά Gibbs είναι οφειλόμενο στην επιλογή  $2n$  τυχαίων αριθμών για τις κρυμμένες μεταβλητές. Παρόλα αυτά, αυτό είναι ένα επουσιώδες κεφάλαιο. Κάθε  $\lambda_i$  έχει μια κατανομή Γάμμα ενώ κάθε  $J_i$  έχει μια διακριτή κατανομή. Επομένως, η δειγματοληψία κατά Gibbs με προσαύξηση δεδομένων συνθέτει μια αποτελεσματική λύση για το πρόβλημα ολοκλήρωσης της Μπεϋζιανής θεωρίας.

## 7. Δεδομένα και εμπειρική εφαρμογή των Cox et al (1985) για επιτόκια

Θέλοντας να δούμε πως εφαρμόζεται ένα ορθολογικό μοντέλο τιμολόγησης κεφαλαίων πρέπει να μελετήσουμε την καμπύλη των επιτοκίων, σύμφωνα με τους Cox et al (1985). Σε αυτό το μοντέλο, οι τρέχουσες τιμές και οι στοχαστικές ιδιότητες όλων των πιθανών απαιτήσεων, συμπεριλαμβανομένων και των ομολόγων, έχουν αγτληθεί ενδογενώς. Οι προβλέψεις, η αρνητική στάση στην ανάληψη κινδύνου, οι εναλλακτικές επενδύσεις και οι προτιμήσεις για το χρόνο κατανάλωσης, έχουν κάποιο ρόλο στον καθορισμό της καμπύλης των επιτοκίων. Συνεπώς, το μοντέλο περιλαμβάνει τους κύριους παράγοντες που παραδοσιακά αναφέρονται, με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να είναι συνεπές με τη συμπεριφορά μεγιστοποίησης και τις ορθολογικές προσδοκίες.

Εξερευνώντας συγκεκριμένα παραδείγματα, (Cox et al, 1985), εξασφαλίζουμε απλές ολοκληρωμένες μορφές λύσεων για τιμές ομολόγων, οι οποίες βασίζονται σε αξιοσημείωτες οικονομικές μεταβλητές και μπορούν να δοκιμαστούν. Ο συνδυασμός των εξισορροπιστικών διαχρονικών αρχών τιμολόγησης κεφαλαίων και της κατάλληλης σύνθεσης υποκειμένων στοχαστικών διαδικασιών μαζί παρέχει ένα δυνατό εργαλείο για την άντληση συνεπών και ενδεχομένως αντικρούσιμων θεωριών.

Οι Cox et al μας αποδεικνύουν ότι η μη κεντρική  $X^2$  κατανομή εφαρμόζεται ως η κατανομή του επιτοκίου σε χρόνο  $s$ , δεδομένης της αξίας του στον τρέχοντα χρόνο  $S$ .

Επιδιώκοντας να ανακαλύψουμε τα στοιχεία εκείνα που θα είχαν την καλύτερη εφαρμογή στο μοντέλο μας, καταλήξαμε στα τριμηνιαία επιτόκια της δευτερογενούς αγοράς δανεισμού του κράτους στις ΗΠΑ (treasury bills) και για τα οποία συγκεντρώσαμε 5380 παρατηρήσεις για το διάστημα 1/4/1982-

16/8/2002. Η δειγματοληψία κατά Gibbs έχει εκτελεστεί χρησιμοποιώντας 105.000 επαναλήψεις, οι 5000 πρώτες εκ των οποίων έχουν απορριφθεί για να μετριάσουν την επίδραση των start up επιπτώσεων.

Τα αποτελέσματα, καθώς και τα συμπεράσματα παρατίθενται και αξιολογούνται παρακάτω.

## 8. Αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Τα, ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, αποτελέσματα της μελέτης μας παρατίθενται παρακάτω (βλέπε Παράρτημα: Πίνακας 1, 1<sup>o</sup> και 2<sup>o</sup> Διάγραμμα).

Στον Πίνακα 1 έχουμε συγκεντρώσει τα **Κομβικά Στατιστικά (Node Statistics)** και τα οποία εμφανίζουν συνοπτικά στατιστικά για τις μεταβλητές που συμμετέχουν στην επιλεγμένη αλυσίδα. Η ποσότητα που αναφέρεται στη στήλη για το MC σφάλμα μας δίνει μία εκτίμηση για το  $\frac{\sigma}{N^{1/2}}$ , το τυπικό σφάλμα

Monte Carlo του μέσου. Η μέθοδος της επεξεργασίας των μέσων, που σχεδιάστηκε από τον Roberts (1996), χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του  $\sigma$ .

Στη συνέχεια παρατίθενται τα Διαγράμματα 1 και 2, στα οποία περιέχονται : Το **Ίχνος (Trace)** το οποίο αναπαριστά γραφικά την τιμή της κάθε μεταβλητής απέναντι στον αριθμό των παρατηρήσεων. Το ίχνος είναι δυναμικό.

Η **Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation Function)** η οποία αναπαριστά γραφικά τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της κάθε μεταβλητής.

Η **Οριακή Μεταγενέστερη Κατανομή (Marginal Posterior Distribution)** ή **Πυκνότητα του Πυρήνα (Kernel Density)** η οποία σχηματίζει γραφικά μία επίπεδη εκτίμηση της πυκνότητας του πυρήνα για τη μεταβλητή, αν είναι συνεχής, ή ένα ιστόγραμμα, αν είναι διακριτή.

Από τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των στοιχείων μας μπορούν να εξαχθούν μερικά χρήσιμα συμπεράσματα:

Στο 1<sup>o</sup> Μοντέλο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, ενώ στη μεταβλητή  $r$  η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρουσιάζει σταθεροποίηση γύρω από τη μονάδα, στις μεταβλητές  $v$  και  $q$  φθίνει προσεγγίζοντας το μηδέν, ενώ και για τις τρεις μεταβλητές ο κινητός μέσος προσεγγίζει τις τιμές του μέσου 7.418 , 16.84 και 1.936 αντίστοιχα. Περνώντας στη συνέχεια στη γραφική αναπαράσταση της

τιμής της μεταβλητής απέναντι στον αριθμό των παρατηρήσεων, βλέπουμε ότι μόνο η μεταβλητή  $q$  παρουσιάζει κάποια σχετική εξομάλυνση, κάτι που εύκολα διακρίνεται και στο γραφικό αποτύπωμα του ολοκληρωμένου ίχνους της. Τέλος, ο γραφικός σχηματισμός της επίπεδης εκτίμησης πυκνότητας του πυρήνα μας δίνει μια ιδιαίτερα καλή συμπεριφορά για τη  $n$ , εν αντιθέσει με τις  $p$  και  $q$ .

Στο 2<sup>o</sup> Μοντέλο, τροποποιώντας τους συντελεστές των μεταβλητών, έχουμε μια αισθητή βελτίωση, τόσο στο ίχνος (Trace) των  $p$  και  $q$ , όσο και στη συμπεριφορά της πυκνότητας της μεταβλητής  $p$ .



## Βιβλιογραφία

- Alam K., and L. Saxena 1982, Estimation of the noncentrality parameter of a chi-square distribution, *Annals of Statistics* 10, 1012-16
- Anderson D. A. 1981a, The circular structural model, *Journal of the Royal Statistical Society B* 43, 131-43
- Anderson D. A. 1981b, Maximum Likelihood estimation in the non-central chi-distribution with unknown scale parameter, *Sankhya B* 43, 58-67
- Boomsma A. and I. W. Molenaar 1994, Four electronic tables for probability distributions, *The American Statistician* 48, 153-162
- Boyle P. P. 1978, The Poisson-exponential model and the non-central chi-squared distribution, *Scandinavian Actuarial Journal*, 108-111
- Conoway M., Pillers C, Robertson T., and Sconing J. 1990, The power of the circular cone test: A noncentral chi-bar-square distribution, *Canadian Journal of Statistics* 18, 63-70
- Cox J., E Ingersoll, and S. A. Ross 1985, A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53, 385-407
- De Waal D. J. 1974, Bayes estimate of the noncentrality parameter in multivariate analysis, *Communications in Statistics* 3, 73-9
- Ding C. G. 1992, Algorithm AS 275. Computing the non-central  $\chi^2$  distribution function, *Applied Statistics* 41, 478-82
- Dwivedi T. D., and J. N. Pandey, A note on Meyer's maximum likelihood estimate of the non-centrality estimate of the non-central  $\chi^2$  variate, *Sankhya B* 37, 453-6
- Farebrother R. W. 1987, Algorithm AS 231. The distribution of a noncentral  $\chi^2$  variable with nonnegative degrees of freedom, *Applied Statistics* 36, 402-5
- Fisher, R. A. 1928, The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient, *Proceedings of the Royal Society of London* 121A, 654-73



- Gelfand A. E. and A. F. M. Smith 1990, Sampling based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association* 85, 398-409
- Geweke J. 1993, Bayesian treatment of the independent Student-t linear model, *Journal of Applied Econometrics*, 8, S19-S40
- Gilks W. R., S. Richardson and D. J. Spiegelhalter (1996), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman and Hall
- Hammersley, J. M. and D. C. Handscomb (1964), *Monte Carlo Methods*, Chapman and Hall, UK
- Johnson N. L., Kotz S and Balakrishman N., Continuous univariate distributions, volume 2, second edition, Wiley, New York.
- Kubokawa T., C. P. Robert, and A. K. Md E. Saleh 1993, Estimation of noncentrality parameters, *Canadian Journal of Statistics* 21, 45-57
- López-Blazquez, F. 2000, Unbiased estimation in the non-central chi-square distribution, *Journal of Multivariate Analysis* 75, 1-12
- Marchand, E. 1996, Computing the moments of a truncated noncentral chi-square distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 55, 23-29
- Meyer P. L. 1967, The maximum likelihood estimate of the non-centrality parameter of a non-central  $\chi^2$  variate, *Journal of the America Statistical Association* 61, 1258-64
- Narula S. C., and M. M. Desu 1981, Algorithm AS 170. Computation of probability and non-centrality parameter of a non-central  $\chi^2$  distribution, *Applied Statistics* 30, 349-52
- Neff N., and W. E. Stawderman 1976, Further remarks on estimating the parameters of a noncentral chi-square, *Communications in Statistics-Theory and Methods* A5, 66-76
- Perlman M. D., and U. Rasmussen 1975, Some remarks on estimating a non-centrality parameter, *Communications in Statistics* 4, 455-68

- Roberts C. O., and Smith A. F. M. 1994, Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Hastings-Metropolis algorithms, *Stochastic Processes and their Applications* 49, 207-216.
- Ripley B. D. 1987, *Stochastic simulation*, Wiley, New York.
- Schlogl, E. and Schlogl, L., 1997, A Tractable Term Structure Model with endogenous interpolation and positive interest rates, University of Bonn, Discussion paper B-396
- Schroder M. 1989, Computing the constant elasticity of variance option pricing formula, *Journal of Finance* 44, 211-19
- Tanner, M. A. and Wong, W. H. 1987, The calculation of posterior distributions by data augmentation (with discussion), *Journal of the American Statistical Association* 82, 528-550
- Temme N. M. 1993, Asymptotic and numerical aspects of the noncentral chi-square distribution, *Computers in Mathematics and Applications* 25, 55-63
- Tierney, L. 1994, Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion), *Annals of Statistics* 22, 1701-1762.
- Yi-Shi Shao, P. and Strawderman, E. W. 1995, Improving on the Positive Part of the UMVUE of a Noncentrality Parameter of a Noncentral Chi-Square distribution, *Journal of Multivariate Analysis* 53, 52-66

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



## ΠΙΝΑΚΑΣ 1

### Μεταγενέστερα Αποτελέσματα

	v	p	q
<b>Μεταγενέστερος Μέσος</b>			
Μοντέλο A	7.418	16.84	1.936
	(3.289)	(18.77)	(3.658)
Μοντέλο B	13.09	269.0	1.007
	(13.92)	(154.7)	(5.056)
<b>Σφάλμα Monte Carlo</b>			
Μοντέλο A	0.098	0.905	0.091
Μοντέλο B	0.430	8.237	0.183
25%			
Μοντέλο A	2.243	0.034	0.057
Μοντέλο B	0.307	43.89	0.137
97.5%			
Μοντέλο A	14.79	62.67	11.99
Μοντέλο B	52.32	638.0	2.67

- Σε παρένθεση οι μεταγενέστερες τυπικές αποκλίσεις.

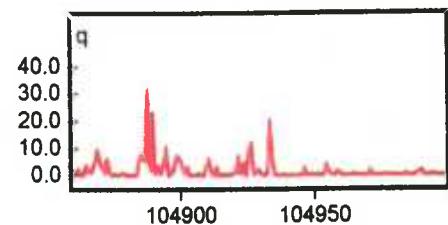
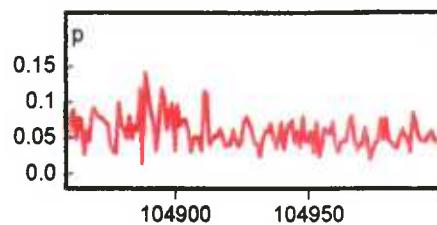
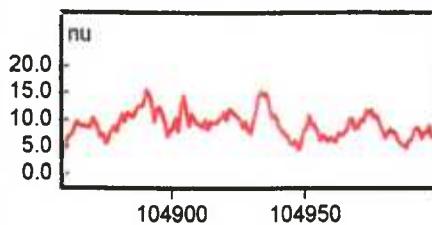
Μοντέλο A :     $v \sim G(a,b)$   
                              $p \sim G(c,d)$   
                              $q \sim G(c,d)$

# ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1

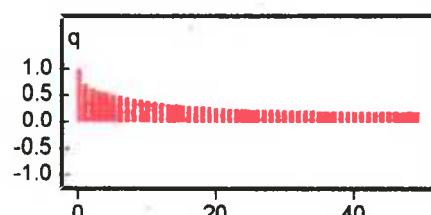
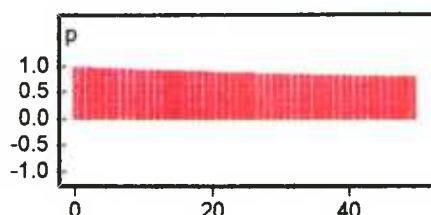
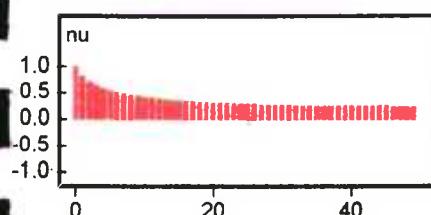
Μοντέλο A  
 $(\alpha=5, \beta=1, c=0.1, d=0.1)$



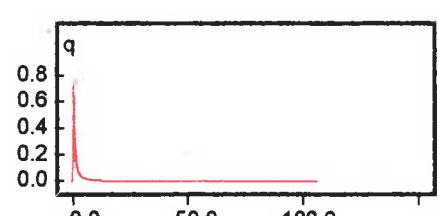
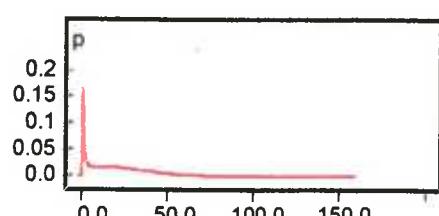
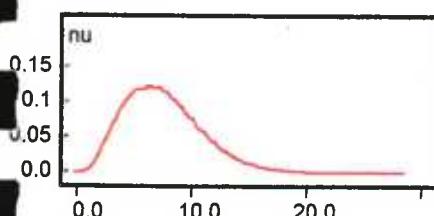
## A. TRACE PLOTS



## B. AUTOCORRELATION FUNCTIONS



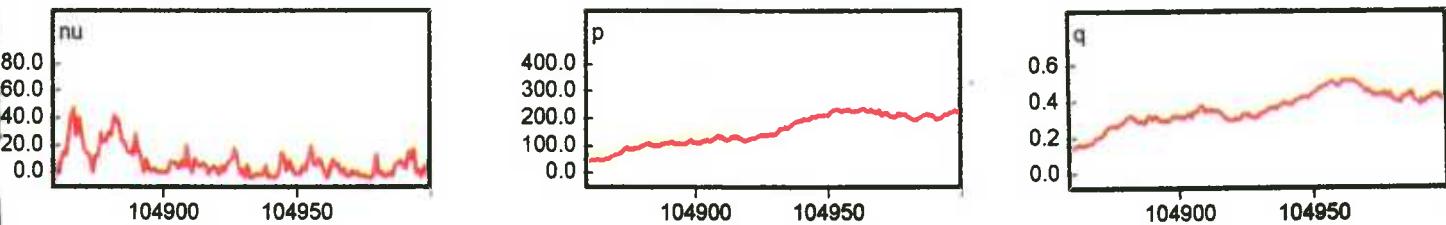
## C. MARGINAL POSTERIOR DISTRIBUTIONS



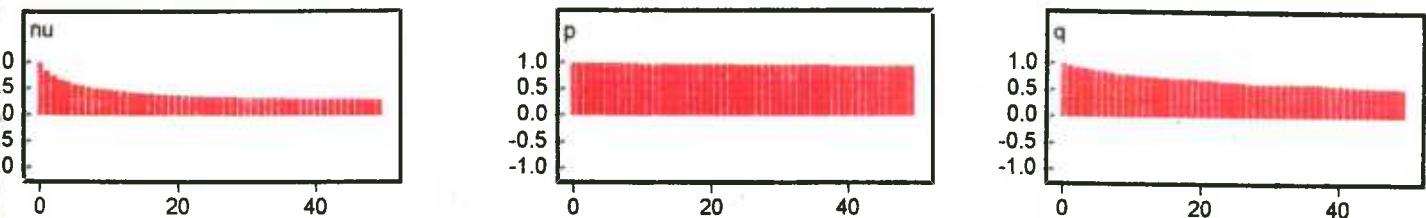
## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2

Μοντέλο Β  
 $(\alpha=1, \beta=0.1, \gamma=0.01, \delta=0.01)$

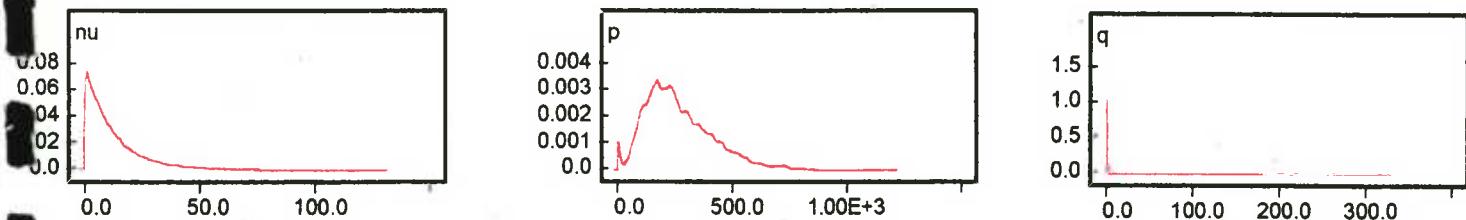
### A. TRACE PLOTS



### B. AUTOCORRELATION FUNCTIONS



### C. MARGINAL POSTERIOR DISTRIBUTIONS



Δωρεά

