

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Γεωργία Θ. Γκίκα

ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Στατιστική Μερικής Φοίτησης (Part-time)
με κατεύθυνση «Ποσοτικές Μέθοδοι
στη Λήψη Αποφάσεων»

Αθήνα
Νοέμβριος 2013

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Επαμεινώνδα Κυριακίδη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Είμαι απόφοιτη του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών και εργάζομαι στη Διεύθυνση Εσωτερικής Επιθεώρησης της Τράπεζας της Ελλάδος από το 2007.Μιλάω πολύ καλά Αγγλικά και Γαλλικά. Μ' αρέσει να ταξιδεύω, η μουσική και ο χορός.

ABSTRACT

Georgia Gkika November 2013

SIMULATION

In formulating a stochastic model to describe a real phenomenon, it used to be that one compromised between choosing a model that is realistic replica of the actual situation and choosing one whose mathematical analysis is tractable. However, the relatively recent advent of fast and inexpensive computational power has opened up another approach-namely, to try to model the phenomenon as faithfully as possible and then to rely on a simulation study to analyze it.

In this text we show how to analyze a model by use of a simulation study. In particular we first show how a computer can be utilized to generate random (more precisely, pseudorandom) numbers, and then how these random numbers can be used to generate the values of random variables from arbitrary distributions. Using the concept of discrete events we show how to use random variables to generate the behavior of a stochastic model overtime. A variety of examples-relating to both single and multiple server queueing systems, to an insurance risk model, to an inventory system, to a machine repair model, and to the exercising of a stock option-are presented.

.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Γεωργία Γκίκα Νοέμβριος 2013

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Για τη δημιουργία ενός στοχαστικού μοντέλου που περιγράφει ένα πραγματικό φαινόμενο έπρεπε κάποιος να συμβιβαστεί διαλέγοντας ανάμεσα σε ένα μοντέλο πανομοιότυπο της πραγματικής κατάστασης και σε ένα μοντέλο ευέλικτης μαθηματικής ανάλυσης. Ωστόσο, η έλευση της γρήγορης και ανέξοδης δύναμης των υπολογιστών μας έδωσε μια καινούργια προσέγγιση, να προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε το φαινόμενο όσο πιο πιστά γίνεται και μετά να στηριχτούμε σε μια μελέτη προσομοίωσης για να το αναλύσουμε. Αντί λοιπόν να παρατηρούμε πραγματοποιήσεις του φαινομένου στην πραγματικότητα, μπορούμε να «αναπαραστήσουμε» το φαινόμενο μέσα σε μία κατάλληλη «εικονική πραγματικότητα» ενός Η/Υ. Αυτή είναι η βασική ιδέα της εναλλακτικής εικονικής πειραματικής μεθόδου που είναι γνωστή ως «προσομοίωση» (Simulation).

Στην παρούσα εργασία δείχνουμε πώς να αναλύσουμε ένα μοντέλο με τη χρήση μιας μελέτης προσομοίωσης. Αναλυτικότερα, πρώτα δείχνουμε πώς ένας υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία τυχαίων (συγκεκριμένα ψευδοτυχαίων) αριθμών και μετά πώς αυτοί οι τυχαίοι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργήσουν τις τιμές τυχαίων μεταβλητών από αυθαίρετες κατανομές. Χρησιμοποιώντας την έννοια των διακριτών γεγονότων θα δείξουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τυχαίες μεταβλητές για να δημιουργήσουμε την συμπεριφορά ενός στοχαστικού μοντέλου στην πάροδο του χρόνου. θα εξετάσουμε την προσομοίωση διαφορετικών στοχαστικών μοντέλων που εξελίσσονται στο χρόνο όπως ενός συστήματος εξυπηρέτησης, ενός συστήματος ελέγχου αποθεμάτων, ενός συστήματος αξιοπιστίας και μιας χρηματιστηριακής αγοράς.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

1. Εισαγωγή 1

2. Στοιχεία Πιθανοτήτων 3

2.1 Γεγονότα και Δειγματικός Χώρος 3

2.2 Θεωρία Πιθανοτήτων 4

2.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία 5

2.4 Τυχαίες Μεταβλητές 7

2.5 Μέση τιμή και Διασπορά Τυχαίας Μεταβλητής 10

2.5.1 Μέση τιμή 10

2.5.2 Διασπορά 12

2.5.3 Συνδιακύμανση 13

2.6 Ανισότητα Chebyshev και ο Νόμος των Μεγάλων αριθμών 13

2.7 Βασικές Διακριτές Κατανομές 15

2.7.1 Κατανομή Bernoulli 15

2.7.2 Διωνυμική κατανομή 16

2.7.3 Κατανομή Poisson 17

2.7.4 Γεωμετρική κατανομή 18

2.7.5 Κατανομή Pascal (Αρνητική Διωνυμική) 19

2.7.6 Υπεργεωμετρική κατανομή 20

2.8 Βασικές Συνεχείς Κατανομές 21

2.8.1 Ομοιόμορφη κατανομή 21

2.8.2 Κανονική κατανομή 22

2.8.3 Εκθετική κατανομή 28

2.9 Στοχαστικές Ανελίξεις 29

2.9.1 Ανέλιξη Poisson 30

2.9.2 Η μη ομογενής ανέλιξη Poisson 32

2.10 Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας, δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας και δεσμευμένη μέση τιμή 33

3. Τυχαίοι Αριθμοί 37

3.1 Παράγωγη ψευδοτυχαίων αριθμών 38

3.2 Υπολογισμός ολοκληρώματος μέσω προσομοίωσης 40

4. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών από Διακριτές Κατανομές 43

4.1 Η μέθοδος της Αντιστροφής 43

4.1.1. Ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ κατανομή (U$\{1,2,\ldots,n\}$). 45

4.1.2. Γεωμετρική κατανομή (Ge(p)) 46
4.1.3. Η κατανομή Poisson (Po(λ)) 47
4.1.4 Η Διωνυμική κατανομή (B(n,p)) 48
4.2 Η μέθοδος Απόρριψης 50
4.3 Η μέθοδος της σύνθεσης 51
5. Παραγωγή τυχαίων αριθμών από Συνεχείς κατανομές 53
5.1 Η μέθοδος της Αντιστροφής 53
5.1.1. Ομοιόμορφη κατανομή στο (α,β) (U(a, b)). 54
5.1.2. Εκθετική κατανομή (Exp(λ)). 54
5.1.3. Τυχαίοι αριθμοί από την κατανομή Poisson μέσω της εκθετικής κατανομής. 55
5.1.4. Η κατανομή Γάμμα (G(a, λ)). 55
5.2. Η μέθοδος απόρριψης. 56
5.2.1. Η Κατανομή Βήτα (Be(a, b)). 57
5.2.2. Η κατανομή Γάμμα (G(a,λ)). 59
5.2.3. Η κανονική κατανομή. 61
5.3. Η πολική (ή Box-Muller) μέθοδος παραγωγής κανονικών τ.μ. 63
5.4. Προσομοίωση ανέλιξης Poisson. 67
5.5. Μη ομογενής διαδικασία Poisson. 69
5.5.1. Μέθοδος εκλέπτυνσης της ομογενούς διαδικασίας Poisson. 69
5.5.2. Η μέθοδος παραγωγής των ενδιάμεσων χρόνων. 71
5.5.3. Η μέθοδος μετασχηματισμού της ομογενούς διαδικασίας Poisson. 72
6. Προσομοίωση Στοχαστικών Μοντέλων σε Διακριτό Χρόνο 75
6.1. Συστήματα Εξυπηρέτησης 76
6.1.1. Σύστημα Αναμονής με Έναν Εξυπηρετητή. 77
6.1.2. Σύστημα Αναμονής με Δυο Εξυπηρετητές σε Σειρά. 79
6.1.3. Σύστημα Αναμονής με Δυο Παράλληλους Εξυπηρετητές. 82
6.2. Συστήματα ελέγχου αποθεμάτων 85
6.3. Προσομοίωση ανάλυσης ασφαλιστικού ρίσκου 87
6.4. Προσομοίωση συστήματος αξιοπιστίας 90
6.5. Προσομοίωση Χρηματιστηριακών Προϊόντων 92
6.6. Επαλήθευση της ορθότητας της προσομοίωσης 95

1. Εισαγωγή

Η μελέτη συστημάτων με μαθηματικές μεθόδους απαιτεί αφενός πλήρη γνώση του υπάρχοντος ή προτεινομένου συστήματος και αφετέρου δυνατότητα αναπαράστασης του συστήματος με μαθηματικά μοντέλα. Επειδή, όμως, οι δύο αυτές προϋποθέσεις σχεδόν ποτέ δεν πληρούνται σε πολύπλοκα συστήματα, αναπτύχθηκαν άλλες μεθοδολογίες μελέτης και ανάλυσης συστημάτων, οι οποίες αν και δεν είναι τόσο ακριβείς όσο οι μαθηματικές μέθοδοι, προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα. Μία από αυτές τις μεθόδους είναι η προσομοίωση, η οποία γνώρισε μεγάλη εξέλιξη κυρίως λόγω της ανάπτυξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στις μεθόδους προσομοίωσης το σύστημα αναπαρίσταται εικονικά (μέσω ενός Η/Υ) και παρακολουθείται η εξέλιξή του καταγράφοντας τα χαρακτηριστικά του που μας ενδιαφέρουν. Έτσι, η συμπεριφορά του συστήματος είναι γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Ο εναλλακτικός «εμπειρικός» ή «πειραματικός» αυτός τρόπος μελέτης βασίζεται στην παρακολούθηση της εξέλιξης του συστήματος στο χρόνο (δηλαδή παρακολούθηση πολλών πραγματοποιήσεων του συστήματος), καταγραφή των διαφόρων μεγεθών που το αφορούν και εξαγωγή «εμπειρικών» συμπερασμάτων.

Για παράδειγμα, ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α μπορεί πολύ απλά να γίνει καταγράφοντας το πλήθος των πραγματοποιήσεων στα οποία εμφανίστηκε το Α. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, η πιθανότητα είναι ασυμπτωτικά ίση με την οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του Α. Προφανώς, η μελέτη μέσω αυτής της «πειραματικής» μεθόδου είναι καλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των πραγματοποιήσεων του φαινομένου που παρατηρούμε. Στην πραγματικότητα όμως, η παρακολούθηση πολλών πραγματοποιήσεων ενός φαινομένου είναι συνήθως ανέφικτη ή πολυέξοδη. Σε αυτό το σημείο έρχεται να μας βοηθήσει η τεράστια υπολογιστική ισχύς των Η/Υ. Πράγματι, αντί να παρατηρούμε πραγματοποιήσεις του φαινομένου στην πραγματικότητα, μπορούμε να «αναπαραστήσουμε» το φαινόμενο μέσα σε μία κατάλληλη «εικονική πραγματικότητα» ενός Η/Υ. Φυσικά θα πρέπει και πάλι να θεωρήσουμε κάποιες απλουστεύσεις του φαινομένου αλλά συνήθως είναι πολύ λιγότερες από τις απλουστεύσεις που θα κάναμε κατά τη αναλυτική μελέτη του. Από τη στιγμή τώρα που αναπαρίσταται σχετικά ικανοποιητικά το φαινόμενο από τον Η/Υ, μπορούμε να

το πραγματοποιήσουμε χιλιάδες ή εκατομμύρια φορές και να καταγράψουμε τα χαρακτηριστικά του. Αυτή είναι η βασική ιδέα της εναλλακτικής εικονικής πειραματικής μεθόδου που είναι γνωστή ως «προσομοίωση» (Simulation).

Ορισμένα παραδείγματα όπου μπορεί να αξιοποιηθεί η μέθοδος της προσομοίωσης είναι π.χ.:

• Συστήματα ουρών αναμονής (π.χ. τράπεζες, νοσοκομεία, δίκτυα υπολογιστών, κ.ο.κ.)

• Έλεγχος αποθεμάτων αποθηκών

• Αξιοπιστία πολύπλοκων συστημάτων

• Κίνηση μετοχών σε μία χρηματιστηριακή αγορά

• Εξάπλωση ασθενειών ή γενικότερα χαρακτηριστικών σε έναν πληθυσμό

• Μελέτη μετεωρολογικών φαινομένων κ.ο.κ.

Με τη μέθοδο της προσομοίωσης όμως είναι δυνατή και η μελέτη κάποιων πολύπλοκων στατιστικών προβλημάτων όπως π.χ.:

• Προσεγγιστικός υπολογισμός της μέσης τιμής μιας πολύπλοκης συνάρτησης

• Προσεγγιστική εύρεση της κατανομής κάποιας πολύπλοκης στατιστικής συνάρτησης

• Ασυμπτωτική συμπεριφορά πολύπλοκων στοχαστικών μοντέλων

• Προσεγγιστικός υπολογισμός του p-value ή της ισχύος ενός ελέγχου μιας υπόθεσης σε ένα σύνθετο μοντέλο κ.ο.κ

2. Στοιχεία Πιθανοτήτων

2.1 Γεγονότα και Δειγματικός Χώρος

Ένα εμπειρικό φαινόμενο λέγεται τυχαίο αν χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα, ότι η παρατήρησή του, κάτω από τις ίδιες πρακτικά συνθήκες δεν οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα, δηλ. δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του. Το στοιχείο του τυχαίου βρίσκεται στην αδυναμία μας να προβλέψουμε το αποτέλεσμα. Ένα τέτοιο τυχαίο εμπειρικό φαινόμενο ονομάζεται τυχαίο πείραμα ή στοχαστικό πείραμα.

Παράδειγμα ενός τυχαίου πειράματος είναι ο τερματισμός σε μια κούρσα ταχύτητας ανάμεσα σε 7 άλογα.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος τύχης λέγεται δειγματικός χώρος και συμβολίζεται συνήθως με το Ω. Για το παραπάνω πείραμα τύχης ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{ολοι\ οι\ δυνατοι\ συνδιασμοι\ (1,2,3,4,5,6,7)\}$$

Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα $(3,4,1,7,6,5,2)$ σημαινει ότι το άλογο νούμερο 3 τερμάτισε πρώτο, το άλογο νούμερο 4 τερμάτισε δεύτερο κ. ο. κ.

Κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου λέγεται στοιχειώδης ενδεχόμενο, ενώ κάθε υποσύνολο Α του δειγματικού χώρου Ω λέγεται ενδεχόμενο ή γεγονός. Σε μία εκτέλεση ενός στοχαστικού πειράματος με δειγματικό χώρο Ω ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται αν και μόνο αν το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του πειράματος αυτού είναι στοιχείο που ανήκει στο Α.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \{ολα\ τα\ αποτελεσματα\ του\ \Omega\ που\ ξεκινουν\ με\ 5\}$$

Τότε το Α είναι το ενδεχόμενο το οποίο το άλογο νούμερο 5 τερματίζει πρώτο.

Ειδικά ο δειγματικός χώρος Ω λέγεται ΒΕΒΑΙΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ, ενώ το κενό σύνολο λέγεται ΑΔΥΝΑΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ.

Ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζουν ενδεχόμενα τα οποία προκύπτουν μετά από συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Τα βασικότερα από τα ενδεχόμενα αυτά είναι τα ακόλουθα.

Η ένωση δύο ενδεχομένων (συνόλων) Α και Β (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο Α∪Β της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β. Γενικότερα, η ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$ της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστον από τα ν ενδεχόμενα.

Η τομή δύο ενδεχομένων (συνόλων) Α και Β (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο $A \cap B \equiv AB$ της πραγματοποίησης και των δύο ενδεχομένων A και B. Γενικότερα, η τομή των ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\nu$ της πραγματοποίησης και των ν ενδεχομένων.

Αν η τομή των ενδεχομένων Α και Β είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A και B καλούνται ξένα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα (ή ασυμβίβαστα) ενδεχόμενα.

Το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο A^c της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α. Το ενδεχόμενο A^c καλείται αντίθετο του ενδεχομένου Α.

2.2 Θεωρία Πιθανοτήτων

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανοτήτων

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου). Μια συνάρτηση η οποία σε κάθε ενδεχόμενο Α⊆ Ω αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό Ρ(Α) καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα αξιώματα (συνθήκες):

(α) μη αρνητικότητας, $0 \le P(A) \le 1$ για κάθε ενδεχόμενο Α⊆ Ω ,

(β) νορμαλισμού, Ρ(Ω) =1,

(γ) αριθμήσιμης προσθετικότητας,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i).$$

για οποιαδήποτε ακολουθία κατά ζεύγη ξένων (αμοιβαίως αποκλειομένων) ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega, i = 1,2,\dots,\nu,\dots$.

Σημειώνουμε ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας δεν καθορίζει κάποια έκφραση (τύπο) υπολογισμού της (συνάρτησης) πιθανότητας $P(A)$ για κάθε

ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Απλώς περιορίζεται στον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $P(A), A \subseteq \Omega$ για να είναι πιθανότητα. Η ύπαρξη πρόσθετων στοιχείων σχετικών με το δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του δύναται να οδηγήσει στον προσδιορισμό μιας έκφρασης (τύπου) υπολογισμού της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου.

2.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας αναφύεται στις περιπτώσεις όπου μερική γνώση, ως προς την έκβαση, ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και πιθανότητα P(A) για κάθε ενδεχόμενο A⊆ Ω. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο εκτέλεσής του πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο A⊆ Ω . Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο σύνολο A και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο B (ως προς το δειγματικό χώρο Ω) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο Γ = AB το οποίο συμβολίζεται με B| A και διαβάζεται: το ενδεχόμενο B δεδομένου του (ενδεχομένου) A. Η πιθανότητα του ενδεχομένου B δεδομένου του A, η οποία συμβολίζεται με P(B| A), B ⊆ Ω και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα (δεδομένου του A), συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες P(A) και P(AB).

Ορισμός Δεσμευμένης Πιθανότητας

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του A, είναι μία συνάρτηση $P, (B|A)\ B, \subseteq \Omega$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Όταν $P(A) = 0\ \eta\ P(B|A)$ δεν ορίζεται. Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ η $P(B|A)$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A.

Η δεσμευμένη πιθανότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έκφραση της πιθανότητας της τομής ενδεχομένων. Γενικότερα αποδεικνύεται το θεώρημα.

Θεώρημα (Πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων). Έστω $A_i \subseteq \Omega \quad i = 1,2,\ldots,\nu$, ενδεχόμενα με $P(A_1A_2 \ldots A_{\nu-1}) > 0$. Τότε

$$P(A_1A_2 \dots A_{\nu-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_\nu|A_1 \dots A_{\nu-1}).$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα πιθανοτήτων με τη χρησιμοποίηση δεσμευμένων πιθανοτήτων του ενδεχομένου αυτού. Η ανάλυση αυτή απαιτεί την έννοια της διαμέρισης του δειγματικού χώρου Ω η οποία ορίζεται ως εξής:

Μία συλλογή $A_1A_2 \dots A_{\nu-1}$ ν ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega, i = 1,2,\dots,\nu$, τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, και η ένωσή τους είναι το Ω, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu = \Omega$, καλείται διαμέριση του Ω.

Θεώρημα (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, Θ.Ο.Π.). Αν τα ενδεχόμενα $A_1A_2 \dots A_\nu$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa) > 0, \kappa = 1,2,\dots,\nu$ και B είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω, τότε

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa)P(B|A_\kappa).$$

Θεώρημα (Θεώρημα (Τύπος) του Bayes). Αν τα ενδεχόμενα $A_1A_2 \dots A_\nu$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa) > 0\ \kappa = 1,2,\dots,\nu$ και B είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω με $P(B) > 0$, τότε

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa)P(B|A_\kappa)}, r = 1,2,\dots,\nu$$

Στοχαστική Ανεξαρτησία

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι (α) αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, $AB = \emptyset$, τότε $P(B|A) = 0$, επειδή δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α αποκλείεται η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B, ενώ (β) αν το ενδεχόμενο Α είναι υποενδεχόμενο του ενδεχομένου $B, A \subseteq B$, τότε $P(B|A) = 1$, επειδή η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του ενδεχομένου Β. Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις όπου η γνώση της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α μας παρέχει μία πολύ θετική πληροφορία για την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Β. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες η γνώση της πραγματοποίησης ενός

ενδεχομένου Α δεν έχει καμιά επίδραση στην πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου Β, δηλαδή

$$P(B|A) = P(B).$$

Στην περίπτωση αυτή το ενδεχόμενο B καλείται στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου A. Επειδή, σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό νόμο, ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B),$$

στην περίπτωση που το ενδεχόμενο Β είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου Α έπεται ότι

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = P(A)$$

δηλαδή και το ενδεχόμενο Α είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου Β και επιπλέον

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Με τη χρησιμοποίηση της τελευταίας αυτής σχέσης εισάγεται η έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων. Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και Α,Β ⊆ Ω. Τα ενδεχόμενα Α και Β καλούνται στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

2.4 Τυχαίες Μεταβλητές

Τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) ενός δειγματικού χώρου στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) δύνανται να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ποσοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος, ή συμβολικές εκφράσεις με γράμματα του αλφαβήτου, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που περιγράφουν ποιοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος. Οι περιπτώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ενιαία με την αντιστοίχηση σε κάθε δειγματικό σημείο ενός πραγματικού αριθμού. Επιπλέον, σε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο) το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε δειγματικά σημεία. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.

Ορισμός Η συνάρτηση F η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = P(X \leq x)$$

καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X.

Διακριτές και Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Η μελέτη πολλών σημαντικών εννοιών που συνδέονται με τις τυχαίες μεταβλητές διευκολύνεται με το διαχωρισμό των δύο βασικών κατηγοριών: των διακριτών και των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Σχετικά θέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός. Μία τυχαία μεταβλητή Χ καλείται διακριτή (ή απαριθμητή) αν παίρνει, με πιθανότητα 1, αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο) σύνολο τιμών $R_X = \{x_0, x_1, \dots, x_\nu, \dots\}$. Η συνάρτηση f η οποία σε κάθε σημείο x_κ, κ = 0,1,2,…, αντιστοιχεί στην πιθανότητά του

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \kappa = 0,1,2, \dots,$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την παράσταση $R_X = \{x_0\} \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\nu\} \cup \dots$, η συνθήκη $P(X \in R_X)$ δύναται να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P\,(X = x_\kappa) = 1.$$

Επίσης η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική

$$f(x_\kappa) \geq 0, \kappa = 0,1,2, \dots, \text{και } f(x) = 0, x \notin R_X$$

και

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής. Γενικότερα ισχύει η σχέση

$$F(x) = \sum_{x_\kappa \le x} f(x_\kappa), -\infty < x < \infty,$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλα τα x_κ τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του x. Σημειώνεται ότι η συνάρτηση κατανομής F μιας διακριτής τ.μ. X είναι σταθερή κατά διαστήματα και αυξάνει μόνο με άλματα στα σημεία $x_\kappa \in R_X$.

Ορισμός Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,

$$f(x) \ge 0, -\infty < x < \infty,$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x)dx} = 1$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ να ισχύει

$$\mathrm{P(a} < X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)dx}$$

Η $f(x)$ καλείται πυκνότητα πιθανότητας ή απλώς πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X.

Άμεση συνέπεια των ορισμών της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ και της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι η σχέση

$$\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} f(\mathrm{t})dt\,, -\infty < x < \infty,$$

που δείχνει ότι η συνάρτηση κατανομής F μιας συνεχούς τ.μ. X είναι συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς, αν η X είναι συνεχής τ.μ., τότε για κάθε $x \in R$,

$$P(X < x) = \mathrm{F(x)} = P(X \leq x).$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x τότε παραγωγίζοντας τη παραπάνω σχέση παίρνουμε την

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Η πυκνότητα $f(x)$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας, δεν παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου. Η πιθανότητα $P(X = x_0) = 0$ και επομένως η $f(x_0)$ δεν παριστάνει βέβαια αυτή την πιθανότητα. Μόνον όταν η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται μεταξύ δύο σημείων, δίνει κάποια πιθανότητα. Κατά προσέγγιση για μικρό $\Delta x > 0$ έχουμε

$$P(x < X \leq x + \Delta x) \cong f(x)\Delta x.$$

2.5 Μέση τιμή (ή Μαθηματική Ελπίδα) και διασπορά Τυχαίας Μεταβλητής

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, δύναται να εκφρασθεί είτε από τη συνάρτηση κατανομής είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας αυτής. Μια περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της κατανομής της. Η μέση τιμή (ή μαθηματική ελπίδα) που αποτελεί μέτρο θέσης ή κεντρικής τάσης και η διασπορά που αποτελεί μέτρο συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας είναι οι πιο βασικές παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

2.5.1 Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών και έχει εισάχθει ως μαθηματική ελπίδα για τους παίκτες τυχερών παιχνιδιών. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός (α) Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \kappa = 0,1,2, \ldots,$$

Τότε η μέση τιμή αυτής, συμβολιζόμενη με *E(X)* ή μ_X ή απλώς μ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση

$$\mu \equiv E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa)$$

(β) Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x)$ $-\infty < x < \infty$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση

$$\mu \equiv E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Αξίζει να σημειωθεί η αναλογία μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική. Αν μια μονάδα μάζας κατανέμεται στα σημεία $x_0, x_1, \ldots$ μιας ευθείας και $f(x_\kappa)$ είναι η μάζα στο σημείο x_κ, $\kappa = 0,1,2,\ldots$ τότε η παραπάνω σχέση παριστάνει το κέντρο βάρους (περί την αρχή). Κατά τον ίδιο τρόπο αν η μονάδα μάζας έχει συνεχή κατανομή σε μια ευθεία και αν η *f(x)* παριστάνει την πυκνότητα μάζας στο *x* τότε η παραπάνω σχέση ορίζει και πάλι το κέντρο βάρους. Με την έννοια αυτή η μέση τιμή θεωρείται ως το κέντρο της κατανομής πιθανότητας, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή *X* παίρνει τιμές «γύρω» από τη μέση της τιμή μ.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή *X*, διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \kappa = 0,1,2, \ldots$, ή συνεχή με πυκνότητα $f_X(x)$ $-\infty < x < \infty$. Σημειώνουμε ότι μια συνάρτηση αυτής $Y = g(X)$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή και η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y_r) = P(Y = y_r), r = 0,1,2, \ldots$, ή πυκνότητας $f_Y(y)$ $-\infty < y < \infty$ αυτής προσδιορίζεται μέσω της συνάρτησης πιθανότητας $f_X(x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,2, \ldots$, ή της πυκνοτητας $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X. Είναι επομένως ενδιαφέρον και έχει έννοια ο υπολογισμός της μέσης τιμής της $Y = g(X)$. Ο υπολογισμός αυτός δύναται να γίνει, σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, αφού πρώτα υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας της *Y*. Τούτο δεν είναι αναγκαίο να γίνεται σε κάθε μερική περίπτωση. Σχετικά ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση Αν η *X* είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \kappa = 0,1,2, \ldots$, τοτε

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa)$$

ενώ αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f_X(x)$ τοτε

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Συνέπεια της πρόταση είναι και η παρακάτω πρόταση

Πρόταση Αν a *και* β σταθερές, τότε

$$E[aX + \beta] = aE[X] + \beta$$

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι για ν τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_\nu$ ισχυει

$$E\left[\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right] = \sum_{i=1}^{\nu} E[X_i]$$

2.5.2 Διασπορά

Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί ένα μέτρο της συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας της κατανομής της. Η ύπαρξη κατανομών οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή και των οποίων οι τιμές είναι περισσότερο ή λιγότερο διασπαρμένες καθιστά αναγκαία την εισαγωγή ενός τέτοιου μέτρου. Η διασπορά, η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση των κατανομών αυτών, είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της απόκλισης $g(X) = (X - \mu)^2$, της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή $\mu = E(X)$ και υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του ορισμού της μέσης τιμής ανάλογα με το αν X είναι διακριτή ή συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός. Έστω Χ μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε η διασπορά ή διακύμανση της X, συμβολιζόμενη με $Var(X)$ ή σ_X^2 ή απλώς σ^2 αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma^2 \equiv Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς $Var(X)$,

$$\sigma \equiv \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Καλείται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X.

Στη επόμενη πρόταση φαίνονται δυο βασικές ιδιότητες της διασποράς

Πρόταση Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $E(X)$ και διασπορά $Var(X)$ και a, β σταθερές. Τότε

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

$$Var(aX + \beta) = a^2 Var(X).$$

2.5.3 Συνδιακύμανση

Αποτελεί ένα μέτρο που εκφράζει το βαθμό κάποιας μορφής εξάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός Η συνδιακύμανση δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y, συμβολιζόμενη με $Cov(X,Y)$ ορίζεται από την σχέση

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Μια χρήσιμη σχέση για την συνδιακύμανση δίνεται από την σχέση

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Ενώ η μέση τιμή του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών είναι ίσο με το άθροισμα των μέσων τιμών αυτών, αυτό δεν ισχύει πάντοτε για την διασπορά. Γενικά για την διασπορά ισχύει η σχέση

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Πρόταση Εάν X και Y είναι δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε

$$Cov(X,Y) = 0$$

και έτσι

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Τέλος, για την μέτρηση του βαθμού συσχετίσεως δύο μεταβλητών χρησιμοποιούμαι τον συντελεστή συσχέτισης ρ, ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός (ανεξάρτητος από μονάδες μέτρησης) και επομένως επιτρέπει συγκρίσεις του βαθμού συσχέτισης ανάμεσα σε διάφορες μεταβλητές. Οι τιμές που παίρνει είναι:

- ρ=0, οι μεταβλητές δε συσχετίζονται
- ρ=1, τέλεια θετική συσχέτιση
- ρ= -1, τέλεια αρνητική συσχέτιση

2.6 Ανισότητα Chebyshev και ο Νόμος των Μεγάλων αριθμών.

Οι ανισότητες των Markov και Chebyshev παρέχουν κάποια φράγματα για την κατανομή της X όταν είναι γνωστή η μέση τιμή και η διασπορά της. Η ανισότητα του Chebyshev δίνει ένα φράγμα, συναρτήσει της διασποράς της X και της σταθεράς c, για την πιθανότητα η X να αποκλίνει από τη μέση τιμή της περισσότερο από c. Δεν υποθέτει τίποτε άλλο για την κατανομή της X παρά μόνο το ότι έχει πεπερασμένη διασπορά.

Πρόταση (Ανισότητα Markov) Αν η τυχαία μεταβλητή X παίρνει μόνο μη-αρνητικες τιμές, τότε για κάθε τιμή $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Συνέπεια της Ανισότητας Markov αποτελεί η Ανισότητα Chebyshev.

Πρόταση (Ανισότητα Chebyshev) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με μεση τιμη μ και διασπορα σ^2. Τότε για κάθε τιμή $k > 0$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Με την βοήθεια της Ανισότητας του Chebyshev αποδεικνύεται ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών.

Ορισμός Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την ίδια συνάρτηση κατανομής F . Τότε οι $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ καλούνται τυχαίο δείγμα μεγέθους ν. Οι $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ καλούνται επίσης ανεξάρτητες και ισόνομες (ισόνομες = έχουν την ίδια κατανομή, δηλ. διέπονται από τον ίδιο "νόμο" πιθανότητας), και για συντομία "ανισ" κατ' αντιστοιχία του i.i.d.=independent, identically distributed.

Θεώρημα (Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν μέση τιμή μ. Τοτε για κάθε τιμή $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_\nu}{\nu} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ όταν } \nu \to \infty$$

Γενίκευση του Ασθενής Νομού των Μεγάλων Αριθμών αποτελεί ο ισχυρός νόμος τον μεγάλων αριθμών

Θεώρημα (Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μμεταβλητές που έχουν μέση τιμή μ. Τοτε

$$P\left(\lim_{\nu\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_\nu}{\nu}=\mu\right)=1$$

Η ερμηνεία του Ισχυρού Νομού των Μεγάλων Αριθμών είναι ότι ο δειγματικός μέσος μιας ακολουθίας ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία κοινή κατανομή συγκλίνει σχεδόν βεβαίως προς τον θεωρητικό μέσο (τη μέση τιμή) της κατανομής. Στην πράξη, η συνθήκη $\nu \to \infty$ μεταφράζεται ως "μεγάλο ν", και οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + \cdots + X_\nu$ μπορούν να θεωρηθούν ως ένα "μεγάλο" τυχαίο δείγμα.

2.7 Βασικές Διακριτές Κατανομές

2.7.1 Κατανομή Bernoulli

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο A στον Ω. Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A στον Ω, τότε τα ενδεχόμενα (A, A') αποτελούν μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, εφ' όσον $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$. Το ενδεχόμενο A χαρακτηρίζεται συνήθως ως επιτυχία και το A' ως αποτυχία. Παριστάνοντας με ε την επιτυχία και α την αποτυχία ο δειγματικός χώρος δύναται να παρασταθεί ως $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$. Ένα τέτοιο τυχαίο πείραμα καλείται δοκιμή **Bernoulli**. Έστω

$$P(\{\varepsilon\}) = p$$

και

$$P(\{\alpha\}) = 1 - P(\{\varepsilon\}) = 1 - p = q$$

και ας θεωρήσουμε την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν-ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται (μηδέν-ένα) κατανομή Bernoulli με παράμετρο p. (Συμβολίζουμε $X \sim b(p)$).

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής, όπως επίσης η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Bernoulli δίδονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ q, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Η μέση τιμή και διασπορά της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = p \text{ και } \sigma^2 = Var(X) = pq$$

2.7.2 Διωνυμική κατανομή

Ορισμός Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$),

$$P(\{\varepsilon\}) = p, P(\{\alpha\}) = q = 1 - p,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική με παραμέτρους ν και p. (Συμβολίζουμε με $X \sim b(v, p)$).

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της διωνυμικής κατανομής φαίνονται στην επομένη πρόταση.

Πρόταση. Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \binom{v}{x} p^x q^{v-x}, \qquad x = 0, 1, \dots, v$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]} \binom{v}{\kappa} p^\kappa q^{v-\kappa}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Επίσης, η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής μπορεί να ορισθεί και αναδρομικά σύμφωνα με την σχέση

$$p_{x+1} = \frac{v - x}{x + 1} \frac{p}{q} p_x$$

Μια σχέση που είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό διωνυμικών πιθανοτήτων και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην στατιστική.

Στη επόμενη πρόταση φαίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της διωνυμικής κατανομής.

Πρόταση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \nu p \; και \; \sigma^2 = Var(X) = \nu pq$$

2.7.3 Κατανομή Poisson

Ορισμός Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2, \ldots$$

όπου $0 < \lambda < \infty$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ. (Συμβολίζουμε με $X \sim P(\lambda)$) .

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \qquad x = 0,1,2,\ldots, \qquad f(x) = 0, \qquad x \notin \{0,1,2,\ldots\}$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

όπου [x] παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Για να υπολογιστούν οι Πιθανότητες Poisson χρησιμοποιείται η αναδρομική σχέση που προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}} = \frac{\lambda}{x+1}$$

Η κατανομή Poisson μελετήθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Simeon Denia Poisson (1781-1840) ως προσεγγιστική κατανομή της διωνυμικής κατανομής. Σχετικά ο Poisson απέδειξε το 1837 την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διωνυμική κατανομή. Αν για $\nu \to \infty$ το $p \to 0$ έτσι ώστε $\nu p = \lambda$ (ή γενικότερα $\lim_{\nu\to\infty} \nu p = \lambda$), όπου $\lambda > 0$ σταθερά, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2, \ldots$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική για $\nu \geq 20$ και $p \leq \frac{10}{\nu}$. Επειδή η πιθανότητα p εμφάνισης ενός ενδεχομένου (επιτυχίας) υποτίθεται μικρή (θεωρητικά $p \to 0$ για $\nu \to \infty$) η κατανομή Poisson θεωρείται ως κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων. Επίσης αναφέρεται και ως *νόμος των μικρών αριθμών*.

Η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Poisson φαίνονται στη ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \lambda \, και \, \sigma^2 = Var(X) = \lambda.$$

2.7.4 Γεωμετρική κατανομή

Ορισμός Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),

$$P(\{\varepsilon\}) = p, \qquad P(\{\alpha\}) = q = 1 - p,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική με παράμετρο p. (Συμβολίζουμε $X \sim G(p)$).

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της γεωμετρικής κατανομής φαίνονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \qquad x = 1,2, \ldots$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1 - q^{[x]}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Στην επόμενη πρόταση φαίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής.

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{\mathrm{p}^2}$$

Η έλλειψη μνήμης αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της γεωμετρικής κατανομής. Η ιδιότητα αυτή φαίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Τότε

$$P(X > \kappa + r | X > \kappa) = P(X > r), \qquad \kappa, r = 0,1,2, \dots$$

Σημειώνεται ότι η ιδιότητα αυτή σημαίνει έλλειψη μνήμης της γεωμετρικής κατανομής με την ακόλουθη έννοια: Η πιθανότητα να απαιτηθούν επιπρόσθετα περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία δεδομένου ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί επιτυχία στις κ πρώτες δοκιμές είναι η ίδια με την (μη δεσμευμένη) πιθανότητα να απαιτηθούν περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία. Επομένως η πληροφορία μη επίτευξης του στόχου (επιτυχία) ξεχνιέται και η προσπάθεια συνεχίζεται όπως όταν πρωταρχίζει.

2.7.5 Κατανομή Pascal (Αρνητική Διωνυμική)

Ορισμός. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),

$$P(\{\varepsilon\}) = p, \qquad P(\{\alpha\}) = q = 1 - p,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Pascal ή Αρνητική Διωνυμική, με παραμέτρους r και p. (Συμβολίζουμε $X \sim NB(r, p)$)

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της κατανομής Pascal φαίνονται στην ακόλουθη πρόταση

Πρόταση Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Pascal με παραμέτρους r και p δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \dots$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < r \\ \sum_{\kappa=r}^{[x]} \binom{\kappa-1}{r-1} p^r q^{\kappa-r}, & r \le x < \infty \end{cases}$$

όπου $[x]$ παριστάνειτο ακέραιο μέρος του x

Στη επόμενη πρόταση φαίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Pascal.

Πρόταση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pascal. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p} \quad και \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

2.7.6 Υπεργεωμετρική Κατανομή

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο πληθυσμό του οποίου τα στοιχεία, σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό, κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες. Έστω ότι ένα δείγμα συγκεκριμένου μεγέθους επιλέγεται από τον πληθυσμό αυτό, χωρίς επανάθεση. Ο αριθμός των στοιχείων της μιας ή της άλλης κατηγορίας που περιλαμβάνονται στο δείγμα αποτελεί αντικείμενο πιθανοθεωρητικής μελέτης. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός Έστω ότι από μια κάλπη που περιέχει Λ άσπρα και Μ μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, ν σφαιρίδια. Στο τυχαίο (στοχαστικό) αυτό πείραμα έστω Χ ο αριθμός των άσπρων σφαιριδίων τα οποία εξάγονται. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Χ καλείται υπεργεωμετρική με παραμέτρους Λ, Μ και ν. (Συμβολίζουμε $X \sim \Upsilon\Gamma(\Lambda, M, \nu)$).

Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής με παραμέτρους Λ,Μ και ν δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{\Lambda}{x}\binom{M}{\nu - x}}{\binom{\Lambda + M}{\nu}}$$

Στην επόμενη πρόταση φαίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της υπεργεωμετρικής κατανομής.

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{\nu\Lambda}{\Lambda + M} \quad και \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{\nu\Lambda M}{(\Lambda + M)^2}\frac{\Lambda + M - \nu}{\Lambda + M - 1}$$

2.8 Βασικές Συνεχείς Κατανομές

2.8.1 Ομοιόμορφη Κατανομή

Η απλούστερη συνεχής κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη η οποία εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος με συνεχή (μη απαριθμητό) δειγματικό χώρο Ω. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στον Ω με πεδίο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha < \beta$ πραγματικοί αριθμοί. Η ομοιόμορφη εκχώρηση πιθανότητας εκφράζεται από τη σχέση

$$P(x_1 < X \leq x_2) = c(x_2 - x_1), \qquad \alpha \leq x_1 \leq x_2 \leq \beta$$

όπου c προσδιοριστέα σταθερά. Θέτοντας $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, στην οποία η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, οπότε $P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in R$, η εκχώρηση πιθανότητας δεν γίνεται σε σημεία αλλά σε διαστήματα και είναι ανάλογη του μήκους των. Τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι διαστήματα του ιδίου μήκους είναι ισοπίθανα.

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις δίδεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \\ \dfrac{x - a}{\beta - \alpha}, & a \leq x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και έτσι παραγωγίζοντάς την συνάγουμε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & x < a \text{ ή } x > \beta \end{cases}$$

Ορισμός Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & x < a \text{ ή } x > \beta \end{cases}$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $U(\alpha, \beta)$ και καλείται ομοιόμορφη ή ορθογώνια στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τα σημεία α και β είναι παράμετροι της κατανομής. (Το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συμβολίζεται με $X \sim U(\alpha, \beta)$).

Στην επόμενη πρόταση φαίνονται η μέση τιμή και η διασπορά της ομοιόμορφης κατανομής

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha, \beta)$. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

2.8.2 Κανονική Κατανομή

Η Κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, κυρίως λόγω της ευρείας χρησιμότητάς της σε ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Μερικοί από τους λόγους που εξηγούν την εξέχουσα θέση της είναι οι εξής:

• πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά (π.χ. ύψος, βάρος, βαθμολογία σε τεστ κ.λ.π.) ακολουθούν (περιγράφονται ικανοποιητικά από) την Κανονική κατανομή.

• τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν Κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό, η Κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων.

• το άθροισμα και ο μέσος όρος μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ακολουθεί κατά προσέγγιση την Κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το ποια κατανομή ακολουθούν οι αρχικές παρατηρήσεις.

• πολλές κατανομές, τόσο διακριτές όσο και συνεχείς, μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να προσεγγισθούν από την Κανονική κατανομή.

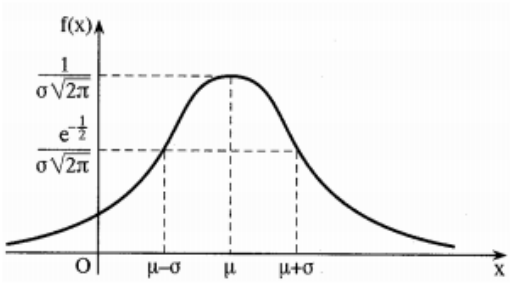
Η Κανονική κατανομή χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους De Moivre και Laplace για την προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής $b(\nu, p)$ (όταν $\nu \to \infty$) ενώ αργότερα ο Gauss τη χρησιμοποίησε για να περιγράψει τα τυχαία σφάλματα των μετρήσεων. Η ονομασία "Κανονική" (Normal) δόθηκε πιο πρόσφατα από τον Karl Pearson.

Ορισμός Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ θα λέμε ότι ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 $(-\infty \leq \mu \leq \infty,\ \sigma^2 > 0)$ αν η πυκνότητα $f(x)$ της Χ δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x < \infty.$$

Συμβολικά θα γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Οι επόμενες ιδιότητες της συνάρτησης $f(x) = f(x;\mu,\sigma^2)$ διευκολύνουν στην κατασκευή της γραφικής της παράστασης, η οποία είναι κωδωνοειδούς μορφής, συμμετρική γύρω από το μ και οι «ουρές» της πλησιάζουν τον οριζόντιο άξονα ομαλά (ασυμπτωτικά), όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Η πυκνότητα της κανονικής $N(\mu, \sigma^2)$.

Πρόταση (α) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει ένα μόνο τοπικό μέγιστο (το οποίο είναι και ολικό) στη θέση $x = \mu$ με αντίστοιχη μέγιστη τιμή

$$\max_{-\infty < x < \infty} f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

(β) Η συνάρτηση f είναι συμμετρική γύρω από το σημείο μ,

(γ) Τα σημεία $\mu \pm \sigma$ αποτελούν σημεία καμπής της f.

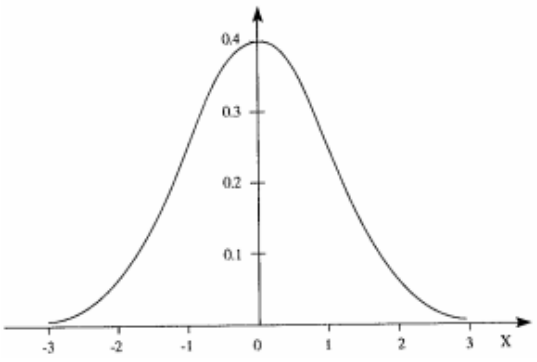
Η ειδική περίπτωση $\mu = 1, \sigma = 0$ παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ένας απλός γραμμικός μετασχηματισμός της $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μπορεί εύκολα να μας οδηγήσει στην $N(0,1)$.

Η κατανομή $N(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη Κανονική κατανομή. Μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $N(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη Κανονική τυχαία μεταβλητή και συμβολίζεται συνήθως με Z. Για τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής συνήθως χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $\varphi(z)$ και $\Phi(z)$, δηλαδή

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(y)dy \quad -\infty < z < \infty$$

Σύμφωνα με την προηγουμενη προταση, η συνάρτηση πυκνότητας $\varphi(z)$ είναι συμμετρική γύρω από τον κατακόρυφο άξονα (δηλαδή ισχύει $\varphi(-z) = \varphi(z)$ για κάθε $-\infty < z < \infty$), παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 0$ (με μέγιστη τιμή $1/2\pi \cong 0.40$) και έχει ως σημεία καμπής τα σημεία $0 \pm 1 = \pm 1$.



Η πυκνότητα $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ *της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής* $N(0, 1)$.

Δυστυχώς καμία από τις γνωστές τεχνικές ολοκλήρωσης δεν επιτρέπει τον αναλυτικό υπολογισμό της Φ(z). Στην πράξη, η εύρεση των τιμών της για συγκεκριμένα $-\infty < z < \infty$ γίνεται μέσω πινάκων της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής οι οποίοι μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο Πιθανοτήτων και Στατιστικής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι απαραίτητο να πινακοποιηθούν οι τιμές της $\Phi(z)$ για $z < 0$ καθως όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε z ισχύει $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1, -\infty < z < \infty$.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ιδιότητα για $z = 0$ βρίσκουμε $\Phi(0) = 0{,}5$. Επίσης

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1,$$

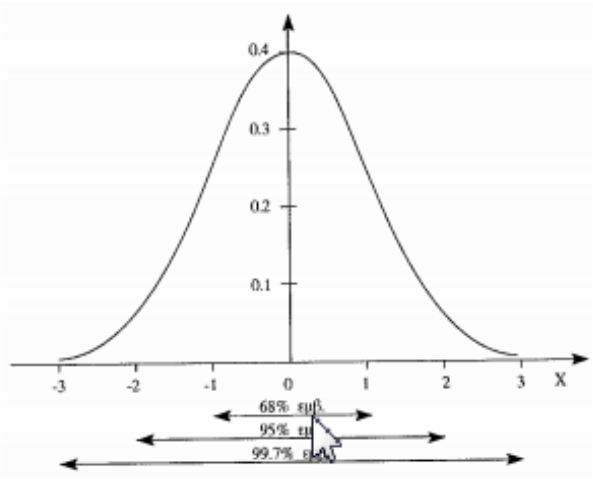
$$P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1,$$

και χρησιμοποιώντας πίνακες τυποποιημένης Κανονικής κατανομής βρίσκουμε

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 2(0.8413) - 1 = 0{,}6826 \cong 68\%\,,$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 2(0.9773) - 1 = 0{,}9546 \cong 95\%,$$

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = 2(0.9987) - 1 = 0{,}9974 \cong 99.7\%$$



Ο υπολογισμός πιθανοτήτων που έχουν σχέση με μια Κανονική τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μπορεί εύκολα να γίνει από τους πίνακες της τυποποιημένης Κανονικής κάνοντας χρήση της ακόλουθης πρότασης

Πρόταση Αν η X ακολουθεί την Κανονική κατανομή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε

(α) Η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυποποιημένη Κανονική $N(0,1)$.

(β) $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right),\ \alpha \leq \beta$

και ειδικότερα

$$P(X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right), \qquad P(X \geq \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \alpha}{\sigma}\right)$$

Πρόταση Η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ είναι ίσες με μ και σ^2 αντίστοιχα, δηλαδή

$$E(X) = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2, \qquad \sqrt{Var(X)} = \sigma$$

Παρατήρηση 1. Αν κάποιες παρατηρήσεις (δεδομένα) προέρχονται από την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ τότε το ποσοστό των παρατηρήσεων που απέχει από το μέσο μ λιγότερο από k τυπικές αποκλίσεις θα δίνεται από τον τύπο

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \leq k\right) = P(|Z| \leq k) = P(-k \leq Z \leq k)$$
$$= 2\Phi(k) - 1$$

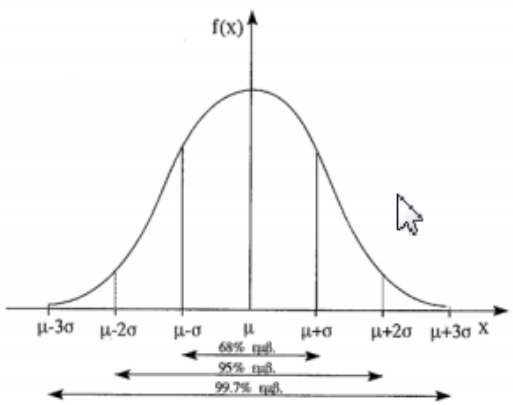
Με βάση λοιπόν τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) \cong 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) \cong 95\%\,,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) \cong 99.7\%\,.$$

Επομένως, περίπου το 68% των τιμών ενός κανονικού πληθυσμού βρίσκονται σε απόσταση το πολύ μιας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή μ, περίπου 95% σε απόσταση δύο τυπικών αποκλίσεων από το μ και περίπου 99.7% σε απόσταση τριών αποκλίσεων από το μ.



Τα αποτελέσματα αυτά είναι πάρα πολύ χρήσιμα για τη δημιουργία διαστημάτων εμπιστοσύνης και για τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων.

Παρατήρηση 2. Αν $Z \sim N(0,1)$ και δοθεντος ενας αριθμού $\alpha \in (0,1)$ μπορει να βρεθεί ένας άλλος αριθμός $z(= z_a)$ για τον οποίο να ισχύει

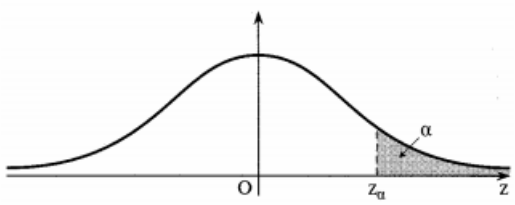
$$P(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ο αριθμός z_α μπορει να υπολογιστει με την βοηθεια πινάκων τυποποιημένης Κανονικής. Έτσι για παράδειγμα αφού

$$\Phi(1{,}64) = 0{,}95, \qquad \Phi(1{,}96) = 0{,}975, \qquad \Phi(2{,}33) = 0{,}99,$$

προκύπτει

$$z_{,05} = 1{,}64, \qquad z_{,025} = 1{,}96, \qquad z_{,01} = 2.33$$



Ο αριθμός z για τον οποίο ισχύει

$$P(Z > z) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1$$

λέγεται συνήθως άνω α ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής και συμβολίζεται με z_a.

Το «μυστικό» που εξηγεί το μεγάλο εύρος εφαρμογών της κανονικής κατανομής, βρίσκεται σε ένα εκπληκτικά ισχυρό θεωρητικό αποτέλεσμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά. Πρόκειται για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) τις βάσεις του οποίου έθεσαν δύο μεγάλοι Μαθηματικοί. Ο Abraham De Moivre το 1733 και, έναν αιώνα περίπου αργότερα, το 1812, ο Laplace

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, εξετάζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά αθροισμάτων "πολλών" ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών, της μορφής

$S = X_1 + \cdots + X_\nu$ για $\nu \to \infty$.

Πρόταση Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από την συνάρτηση κατανομής F. Υποθέτουμε ότι $E(X_\iota) = \mu \, και \, Var(X_\iota) = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty, \; i = 1,2,\ldots,\nu$. Τότε ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{S_{(\nu)} - E(S_{(\nu)})}{\sqrt{Var(S_{(\nu)})}} = \frac{S_{(\nu)} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}}$$

και μάλιστα

$$E\left[\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}\right] = 0, \qquad Var\left[\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}\right] = 1$$

όπου

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_\nu}{\nu} = \frac{S_{(\nu)}}{\nu}, S_{(\nu)} = X_1 + \cdots + X_\nu$$

Θεώρημα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Αν $X_1, \dots, X_\nu$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F (τυχαίο δείγμα) και $E(X_\iota) = \mu,\ Var(X_\iota) = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty,\ i = 1,2,\dots,\nu$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t,

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \le t\right) = \Phi(t)$$

όπου

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P(Z \le t)$$

η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής $Z \sim N(0,1)$.

Με άλλα λόγια, η συμπεριφορά των τυποποιημένων αθροισμάτων $\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ προσεγγίζει αυτήν της $Z \sim N(0,1)$, για μεγάλο ν.

Η σημαντική πληροφορία που μας παρέχει το Κ.Ο.Θ. είναι η εξής: Από όποια κατανομή F και αν λάβαμε τυχαίο δείγμα, η προσεγγιστική κατανομή του τυποποιημένου δειγματικού μέσου $\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ θα είναι (περίπου) $\Phi(t)$, όταν το μέγεθος ν του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο. Στην πράξη, $\nu \ge 30$ είναι αρκετό για να έχουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις.

2.8.3 Εκθετική κατανομή

Ορισμός Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, x \ge 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$$

όπου $0 < \theta < \infty$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται εκθετική με παράμετρο θ. (Συμβολίζουμε $X \sim E(\theta)$).

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x}, x \ge 0 \end{cases}$$

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $E(\theta)$. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}, \qquad \sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Η ιδιότητα του *αμνήμονος* είναι χαρακτηριστική της εκθετικής κατανομής. Η ιδιότητα αυτή φαίνεται στη επόμενη πρόταση.

Πρόταση Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $E(\theta)$. Τότε

$$P(X > x + y|X > x) = P(X > y), x \geq 0, y \geq 0$$

Επειδή

$$P(X > r+t \mid X > r) = \frac{P(X > r+t, X > r)}{P(X > r)} = \frac{P(X > r+t)}{P(X > r)} = \frac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

μπορούμε να σκεφτούμε την X ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρουσιάσει βλάβη ένα μηχάνημα. Η τυχαία μεταβλητή X μετριέται από τη στιγμή που αρχίζει το μηχάνημα να λειτουργεί. Οι τελευταίες ισότητες μας λένε ότι αν το μηχάνημα δεν είχε παρουσιάσει βλάβη μέχρι τη χρονική στιγμή r η πιθανότητα να μην παρουσιάσει βλάβη στις επόμενες t χρονικές μονάδες είναι ίση με τη μη-δεσμευμένη πιθανότητα το μηχάνημα να μην είχε υποστεί βλάβη στις πρώτες χρονικές μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι η γήρανση του μηχανήματος δεν αυξάνει ούτε μειώνει την πιθανότητα να υποστεί βλάβη το μηχάνημα εντός ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.

Δυο ακόμα χρήσιμες ιδιότητες της εκθετικής κατανομής είναι

- Το γινόμενο μιας σταθεράς c με τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή $E(\theta)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή $E(\frac{\theta}{c})$.
- Η ελάχιστη τιμή από ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξαρτητων εκθετικων μεταβλητων με παραμετρους $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ ακολουθει την εκθετικη κατανομη με παραμετρο $\sum_i \lambda_i$ και είναι ανεξάρτητο από την οποία X_i είναι μικρότερη.

2.9 Στοχαστικές Ανελίξεις

Ορισμός Στοχαστική ανέλιξη (ή στοχαστική διαδικασία) (stochastic process) είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$. Το σύνολο T καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο των τιμών I των τυχαίων μεταβλητών $X(t), t \in T$ καλείται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης. Η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ερμηνεύεται ως η κατάσταση της ανέλιξης κατά τη χρονική στιγμή t. Το σύνολο δεικτών T ανάλογα με τη μορφή του, ταξινομεί την ανέλιξη σε δύο κατηγορίες: (α) Αν το σύνολο T είναι της μορφής $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ή της μορφής $T = \{0,1,2,\dots\}$ τότε η ανέλιξη καλείται στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. (β) Αν

το σύνολο T είναι της μορφής $T=[0,\infty)$ ή της μορφής $T=(-\infty,\infty)$ τότε η ανέλιξη καλείται στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

2.9.1 Ανέλιξη Poisson

Θεωρούμε μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $X(t), t\geq 0,$ όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(0,t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο $I=\{0,1,2,...\}$. Υιοθετούμε τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) $X(0)=0$

(ii) Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα κατανεμημένοι. Δηλαδή έχουμε «ανεξάρτητες προσαυξήσεις».

(iii) Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t+h)-X(t),$ δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t,t+h)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t. Δηλαδή έχουμε «χρονική στασιμότητα».

(iv) Ισχύει ότι $P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h),$ καθώς $h\to 0,$ για κάποιο θετικό αριθμό λ. Με $o(h)$ αναπαριστούμε μία συνάρτηση του h τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$

(v) Ισχύει ότι $P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h),$ καθώς $h\to 0.$

Η ανέλιξη $X(t), t\geq 0,$ εφοδιασμένη με τα παραπάνω πέντε αξιώματα καλείται ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda>0$ (Poisson process with rate λ). Από τα αξιώματα (iv) και (v), έχουμε ότι: $P\{X(t+h)-X(t)\geq 0\}=1-\lambda h+o(h),$ καθώς $h\to 0.$ Έστω $p_n(t)=P\{X(t)=n\}, n\geq 0.$

Η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ μπορεί να δειχτεί ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt καθώς επίσης και ότι ο χρόνος αναμονής T μέχρι την πραγματοποίηση της πρώτης επιτυχίας σε μια ανέλιξη Poisson έχει εκθετική κατανομή. Γενικότερα δύναται να δειχθεί ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επιτυχιών σε μια ανέλιξη Poisson έχουν εκθετική κατανομή.

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη. Ισχύει ότι: $P\{T_1>t\}=P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t}.$ Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T_1 είναι $f_{T_1}(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t\geq 0.$

Δηλαδή, $T_1 \sim \mathrm{E}(\lambda)$. Για $n \geq 2$, έστω T_n ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της $n-1-$ οστής και της $n-$ οστής αφίξεως. Ισχύει ότι:

$$P\{T_{n+1} > t \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_n = t_n\} = P\{X(s+t) - X(s) = 0\} =$$
$$= P\{X(t) - X(0) = 0\} = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t},$$

όπου, $s = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Συνεπώς, ο χρόνος T_{n+1} είναι ανεξάρτητος των $T_1, \ldots, T_n$ και ακολουθεί την $\mathrm{E}(\lambda)$. Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία T_n, $n \geq 1$, είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο ίση με $\lambda > 0$.

Τυχαία μεταβλητή Γάμμα.

Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή Γάμμα (Gamma) με θετικές παραμέτρους a και λ αν η συνάρτηση πιθανότητας της f_X είναι $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda^a e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

όπου, $\Gamma(a)$ είναι η **συνάρτηση Γάμμα** (Gamma function) και ορίζεται ως εξής $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy, \quad a > 0$. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την **κατανομή Γάμμα** (Gamma distribution) **με παραμέτρους** a **και** λ και γράφουμε $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $N(t), t \geq 0$, η οποία μετρά τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ που αναπαριστούν τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της πραγματοποίησης του $(n-1)-$ οστού και του $n-$ οστού γεγονότος. Η κατανομή Γάμμα εκφράζει το συνολικό χρόνο μέχρι την $n-$ οστή πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Επομένως, $X = X_1 + \ldots + X_n$. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της X, έχουμε

$$F(t) = P(X \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(N(t) = i) = \sum_{i=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \; t \geq 0,$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ όπως έχουμε ήδη αναφέρει ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

Τέλος, μια χρήσιμη ιδιότητα της Γάμμα κατανομής είναι το γεγονός πως αν έχουμε T_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή $T_i \sim \mathrm{E}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$ τότε το άθροισμα τους $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gamma(n, \lambda)$, θα ακολουθεί την

Γάμμα κατανομή, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n είναι

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \ t \geq 0.$$

2.9.2 Η μη ομογενής ανέλιξη Poisson

Η μη ομογενής ανέλιξη Poisson αποτελεί γενίκευση της ομογενούς διαδικασίας. Στην περίπτωση που ο ρυθμός (ή ένταση) της διαδικασίας είναι σταθερός, δηλαδή $\lambda(t) = \lambda$, όπως είδαμε προηγουμένως, τότε η αντίστοιχη διαδικασία καλείται ομογενής διαδικασία Poisson. Με αλλά λόγια, σε κάθε απειροστό διάστημα μήκους h η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συμβάντος είναι σταθερή. Στην περίπτωση της μη-ομογενης ανέλιξης, σε κάθε απειροστό διάστημα $(t, t+h)$ πραγματοποιείται ένα συμβάν με πιθανότητα $\lambda(t)h$ (που εξαρτάται από το t), ανεξάρτητα από τι έχει συμβεί στο παρελθόν. Είναι γεγονός ότι κατά την μαθηματική μοντελοποίηση πολλών φυσικών φαινομένων, θεωρείται η ομογενής διαδικασία Poisson αντί της μη ομογενούς η οποία συνήθως περιγράφει ορθότερα το φαινόμενο. Αυτό συμβαίνει διότι η μη ομογενής δεν μπορεί εύκολα να μελετηθεί αναλυτικά. Για το λόγο αυτό είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη της μέσω προσομοίωσης.

Μη ομογενής Ανέλιξη Poisson

Θεωρούμε μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0,$ όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο $I = \{0, 1, 2, ...\}$. Υιοθετούμε τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) $X(0) = 0$

(ii) Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα κατανεμημένοι. Δηλαδή έχουμε «ανεξάρτητες προσαυξήσεις».

(iii) Ισχύει ότι $P\{X(t+h) - X(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h),$ καθώς $h \to 0,$ με $o(h)$ αναπαριστούμε μία συνάρτηση του h τέτοια ώστε $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$

(iv) Ισχύει ότι $P\{X(t+h) - X(t) \geq 2\} = o(h),$ καθώς $h \to 0.$

Η ανέλιξη $X(t), t \geq 0,$ εφοδιασμένη με τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα καλείται μη ομογενής ανέλιξη Poisson με ρυθμό (ή ένταση) $\lambda(t) > 0, t \geq 0$.

Επίσης, ορίζουμε την συνάρτηση του βαρυκέτρου μια στοχαστικής ανέλιξης $m(t)$ ως

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds, \qquad t \geq 0$$

Πρόταση Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t+h) - X(t)$, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ είναι Poisson με μέσο $m(t+s) - m(t)$.

2.10 Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας, δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας και δεσμευμένη μέση τιμή

Η διατεταγμένη τριάδα $(\Omega, \Im, P)$ καλείται **χώρος πιθανότητας ή πιθανοθεωρητικός χώρος** (probability space). Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ που ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \Im, P)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι τέτοιες ώστε $X_i : \Omega \to \Re$. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ σε συνδυασμό για να διερευνήσουμε τυχόν συσχετίσεις τους. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει το διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός Ένα διάνυσμα $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ που αποτελείται από n τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \Im, P)$ καλείται $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή ή διανυσματική τυχαία μεταβλητή (δ.τ.μ.) ($n-$dimensional random variable or random vector). Για το διάνυσμα $\tilde{X}$ ισχύει ότι

$$\tilde{X} : \omega \in \Omega \to \tilde{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \Re^n.$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι διακριτές τότε ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) (joint probability function) $p(x, y)$ της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y), όπου $x \in S_X$ και $y \in S_Y$, ως εξής: $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$. Απαραίτητη συνθήκη για να είναι η p μία από κοινού σ.π. για τη δ.τ.μ. (X, Y) είναι η εξής:

$$\sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} p(x, y) = 1.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας p_X της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της p ως εξής:

$$p_X(x) = P[X = x] = \sum_{y \in S_Y} P[X = x, Y = y] = \sum_{y \in S_Y} p(x, y), \quad x \in S_X.$$

Έστω X, Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο. Τότε η διδιάστατη διανυσματική τυχαία μεταβλητή (X, Y) είναι

συνεχής αν υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση δύο μεταβλητών $f:\Re\times\Re\to[0,\infty)$, $f(x,y)$, $x,y\in\Re$ τέτοια ώστε, για κάθε περιοχή $C\subseteq\Re\times\Re$, η οποία μπορεί να γραφεί μέσω ορθογωνίων με χρήση πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους πράξεων (τομή, ένωση, συμπλήρωμα), ισχύει ότι

$$P[(X,Y)\in C]=\iint\limits_{(x,y)\in C} f(x,y)dxdy.$$

Η συνάρτηση $f(x,y)$ καλείται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.) (joint probability density function) της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y). Απαραίτητη συνθήκη για να είναι η $f(x,y)$ μία από κοινού σ.π. για τη διδιάστατη δ.τ.μ. (X,Y) είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=1.$$

Αν η διδιάστατη δ.τ.μ. (X,Y) είναι συνεχής, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι συνεχείς (εναλλακτικά καλούνται από κοινού συνεχείς (joint continuous)) και οι συναρτήσεις πυκνότητας τους f_X και f_Y, αντίστοιχα, μπορούν να ληφθούν ως εξής:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \text{ και } f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Έστω (X,Y) μία διδιάστατη διακριτή διανυσματική τυχαία μεταβλητή και $p(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πιθανότητάς της. Για κάθε δυνατή τιμή y της Y τέτοια ώστε $p_Y(y)=P(Y=y)\neq 0$, η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας (δ.σ.π.) (conditional probability function) της X δοθέντος ότι $Y=y$, ορίζεται ως εξής:

$$p_{X|Y}(x\mid y):=P(X=x\mid Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

όπου $p_Y(y)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y.

Παρατηρούμε ότι, αν οι τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες, τότε η δ.σ.π. της X δοθέντος ότι $Y=y$ συμπίπτει με τη (μη δεσμευμένη) συνάρτηση πιθανότητας $p_X(x)$ της X, διότι

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)}=p_X(x).$$

Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Έστω (X,Y) μία διδιάστατη συνεχής διανυσματική τυχαία μεταβλητή και $f(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητάς της. Για μία συγκεκριμένη τιμή y τέτοια ώστε $f_Y(y) \neq 0,$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας (δ.σ.π.) (conditional density function) της X δοθέντος ότι $Y = y,$ ορίζεται ως εξής:

$$f_{X|Y}(x \mid y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

όπου $f_Y(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y.$

Παρατηρούμε ότι, αν οι τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες, τότε η δ.σ.π. της X δοθέντος ότι $Y = y$ συμπίπτει με τη (μη δεσμευμένη) συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ της $X,$ διότι

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x).$$

Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X και $Y.$

Αν X και Y είναι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε δυνατή τιμή y της $Y,$ τέτοια ώστε $p_Y(y) = P(Y = y) \neq 0,$ η δεσμευμένη μέση τιμή (conditional expectation) της $X,$ δοθέντος ότι $Y = y,$ ορίζεται ως εξής:

$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x \in S_X} xP[X = x \mid Y = y] = \sum_{x \in S_X} x p_{X|Y}(x \mid y),$$

όπου S_X είναι το σύνολο των δυνατών τιμών (φορέας) της X και $p_{X|Y}(x \mid y)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της $X,$ δοθέντος ότι $Y = y.$

Αν X και Y είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε δυνατή τιμή y της $Y,$ τέτοια ώστε $f_Y(y) \neq 0,$ η δεσμευμένη μέση τιμή της $X,$ δοθέντος ότι $Y = y,$ ορίζεται ως εξής:

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y) dx,$$

όπου $f_{X|Y}(x \mid y)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δοθέντος ότι $Y = y.$

Για την εύρεση της δεσμευμένης μέσης τιμής μιας συνάρτησης $g(X)$ της τυχαίας μεταβλητής $X,$ δοθέντος ότι $Y = y,$ ισχύουν οι εξής τύποι:

$$E[g(X)\,|\,Y=y]=\sum_x g(x)p_{X|Y}(x\,|\,y),$$

αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και

$$E[g(X)\,|\,Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)dx,$$

αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Αν θέσουμε $E[X]=\mu$ και θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-\mu)^2,\ \ x\in\Re$, τότε, από τους παραπάνω τύπους, η δεσμευμένη διακύμανση (conditional variance) της X δοθέντος ότι $Y=y,$ είναι

$$Var[X\,|\,Y=y]=E[h(X)\,|\,Y=y]$$

και δίνεται από τον τύπο

$$Var[X\,|\,Y=y]=E[X^2\,|\,Y=y]-(E[X\,|\,Y=y])^2.$$

Συμβολίζουμε με $E[X\,|\,Y]$ τη συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $Y,$ της οποίας η τιμή όταν $Y=y$ είναι $E[X\,|\,Y=y]$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $E[X\,|\,Y]$ είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή. Για τη συνάρτηση $Var(X\,|\,Y)$ ισχύει η σχέση

$$Var(X\,|\,Y)=E(X^2\,|\,Y)-(E(X\,|\,Y))^2.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι σημαντικότατη και έχει πολλές εφαρμογές.

Πρόταση Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X,Y. Ισχύει ότι $E[X]=E[E[X\,|\,Y]]$.

(α) Αν η Y είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$E[X]=\sum_y E[X\,|\,Y=y]P[Y=y].$$

(β) Αν η Y είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f_Y τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X\,|\,Y=y]\,f_Y(y)dy.$$

Επίσης, για τον υπολογισμό της διασπορά χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο

$$Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[X|Y])$$

3. Τυχαίοι Αριθμοί

Εισαγωγή

Η βάση για την μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου μέσω προσομοίωσης αποτελείται από μία διαδικασία η οποία παράγει «τυχαίους αριθμούς». Εφόσον το φαινόμενο που καλούμαστε να μελετήσουμε είναι στοχαστικό, θα επηρεάζεται από κάποιες μεταβλητές των οποίων η τιμή δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (δηλ. από τυχαίες μεταβλητές). Επομένως, το εικονικό πειραματικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε με τη βοήθεια ενός Η/Υ θα πρέπει και αυτό να επηρεάζεται από κάποιους τυχαίους αριθμούς. Άρα το πρώτο που θα πρέπει να εξετάσουμε είναι πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς οι οποίοι θα εκφράζουν την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου. Αρχικά, με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας (πεπερασμένης) ακολουθίας $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών η κάθε μια εκ των οποίων κατανέμεται ομοιόμορφα στο $(0,1)$. Δηλαδή,

$$F(x) = Pr(X \leq x) = x, \qquad x \in (0,1)$$

Φυσικά, η παραγωγή μιας μεγάλης ακολουθίας πραγματικά τυχαίων αριθμών είναι αρκετά δύσκολη. Στην καλύτερη περίπτωση υπάρχουν αρχεία π.χ. σε CD που περιέχουν αριθμούς που προέρχονται από στοχαστικά πειράματα (ενώ στην χειρότερη θα πρέπει να έχουμε την υπομονή να ρίξουμε ένα νόμισμα πάρα πολλές φορές...). Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε στην παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών από έναν Η/Υ. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί δεν είναι στην πραγματικότητα τυχαίοι (όπως διαφαίνεται και από το όνομά τους) αλλά παράγονται μέσα από κάποιες προσδιοριστικές (deterministic) επαναληπτικές διαδικασίες ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή (αυτή μερικές φορές μπορεί να θεωρηθεί «τυχαία»). Παρόλα αυτά, οι αριθμοί αυτοί τις περισσότερες φορές (ανάλογα και με την επαναληπτική μέθοδο που χρησιμοποιείται) καταφέρνουν να «ξεγελάσουν» αρκετούς γνωστούς ελέγχους τυχαιότητας. Στη συνέχεια, και για λόγους πληρότητας, θα παρουσιάσουμε περιληπτικά κάποιες τέτοιες επαναληπτικές μεθόδους για την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών, αλλά δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με την αξιολόγησή τους (δηλαδή με το κατά πόσον «τυχαίοι» μπορούν να θεωρηθούν οι αριθμοί που παράγουν). Περισσότερο μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε τέτοιους αριθμούς για την προσομοίωση διαφόρων μοντέλων και

για αυτό, για λόγους απλότητας στη συνέχεια θα θεωρούμε (ή θα προσποιούμαστε) ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι πράγματι τυχαίοι.

3.1 Παράγωγη ψευδοτυχαίων αριθμών

θα εισάγουμε την έννοια του τυχαίου αριθμού με ένα παράδειγμα, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X με κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{10000}, \qquad x = 0.0000, 0.0001, \ldots, 0.9999$$

Ένα τυχαίο πείραμα που συνδέεται με την τυχαία μεταβλητή X επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα, ένα μεγάλο αριθμό φορών. Το σύνολο των 4-ψήφιων αριθμών που παράγονται αποτελεί ένα σύνολο τυχαίων αριθμών. Γενικότερα, ας θεωρήσουμε ένα σύνολο αριθμών που είναι οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής που παρατηρήθηκαν μετά από έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος που συνδέεται με την τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή παίρνει κάθε μια από τις τιμές $0/10^k, 1/10^k, \ldots, (10^k - 1)/10^k$ με πιθανότητα 10^{-k}. Το σύνολο των αποτελεσμάτων του τυχαίου πειράματος που συνδέεται με αυτή τη τυχαία μεταβλητή αποτελεί ένα σύνολο k-ψηφίων τυχαίων αριθμών. Επιλέγοντας μια κατάλληλα μεγάλη τιμή του k, το σύνολο αυτό προσεγγίζει ανάλογα ένα σύνολο αριθμών τυχαία εκλεγμένων από το διάστημα [0,1).

Διάφοροι μέθοδοι στην ιστορία της στατιστικής έχουν προταθεί για την παραγωγή τυχαίων αριθμών. Σήμερα μέσω των υπολογιστών, δίνεται η δυνατότητα παραγωγής αριθμών με τα χαρακτηριστικά τυχαίων αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται ψευδοτυχαίοι αριθμοί. Οι ψευδοτυχαίοι οι αριθμοί συνιστούν μία ακολουθία τιμών, η οποία αν και παράγεται με μη στοχαστική μέθοδο έχει όλες τις προϋποθέσεις να συνιστά ακολουθία ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών.

Μία από τις συνηθέστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω Η/Υ είναι η εξής (πολλαπλασιαστική μέθοδος, multiplicative congruential method):

Ξεκινάμε με μια αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{N}$, (καλείται "σπόρος" – "seed", π.χ. δίνεται από εμάς ή λαμβάνεται από τα εκατοστά του δευτερολέπτου που δείχνει το ρολόι του υπολογιστή) και στη συνέχεια υπολογίζει αναδρομικά διαδοχικές τιμές x_n βάσει του τύπου

$$x_n = ax_{n-1} modulo\ m$$

όπου α και m είναι δοθέντες θετικοί ακέραιοι. Η γεννήτρια αυτή καλείται πολλαπλασιαστική γεννήτρια ισουπολοίπων. Η πιο πάνω έκφραση σημαίνει πως ως τιμή του x_n λαμβάνεται το υπόλοιπο της διαίρεσης ax_{n-1} με το m. (με $x \bmod m$ συμβολίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του x δια του m, δηλαδή, $x \bmod m = m(x/m - \lfloor x/m \rfloor)$. Επομένως, κάθε x_i ανήκει στο $\{0,1,\dots,m-1\}$ και ο αριθμός

$$\frac{x_n}{m} \in \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\} \subseteq [0,1)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ του 0 και του 1. Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 0. Θέτουμε $x_0 = seed$

ΒΗΜΑ i. Υπολογίζουμε το $x_i = ax_{i-1} modulo\, m$ και θέτουμε $U_i = \frac{x_i}{m}$, $i = 1,2,\dots,n$

Προφανώς οι αριθμοί $U_1, U_2, \dots$ που παράγονται από την παραπάνω διαδικασία δεν είναι καθόλου τυχαίοι και μάλιστα μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων ($\leq m$) θα εμφανιστεί ένας αριθμός x_k που έχει ήδη εμφανιστεί (π.χ. $x_k = x_r$ για $r < k$) και άρα από εκεί και ύστερα θα επαναληφθεί η αρχική ακολουθία, δηλ. $x_{k+1} = x_{r+1}, x_{k+2} = x_{r+2}$ κ.ο.κ. Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε τα a, m έτσι ώστε για κάθε αρχική τιμή x_0, το πλήθος των βημάτων μέχρι την επανάληψη της διαδικασίας να είναι αρκετά μεγάλο. Γενικά τα a, m θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε:

• Για κάθε αρχική τιμή x_0, η ακολουθία $\frac{x_1}{m}, \frac{x_1}{m}, \dots$ να μπορεί να θεωρηθεί ως μία πραγματοποίηση ακολουθίας ανεξάρτητων ομοιόμορφων στο (0,1) τυχαίων μεταβλητών.

• Για κάθε αρχική τιμή x_0, το πλήθος των βημάτων μέχρι την επανάληψη της διαδικασίας να είναι αρκετά μεγάλο.

• Οι αριθμοί x_n να παράγονται σχετικά εύκολα και γρήγορα από έναν υπολογιστή.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες συνήθως ικανοποιούνται όταν το m είναι ένας αρκετά μεγάλος πρώτος αριθμός που ταιριάζει με το μέγεθος των λέξεων που χειρίζεται ο επεξεργαστής ή το λειτουργικό σύστημα. Για παράδειγμα, για μηχανές των 32-bit μία καλή επιλογή είναι $m = 2^{32} - 1, a = 7^5 - 1$.

Άλλη μία συνήθης μέθοδος παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω Η/Υ είναι και η ακόλουθη (μεικτή μέθοδος, mixed congruential method):

ΒΗΜΑ 0. Θέτουμε $x_0 =$ seed.

ΒΗΜΑ i. Υπολογίζουμε το $x_i = (ax_{i-1} + c) mod\, m$ και θέτουμε $U_i = \frac{x_i}{m}$, $i = 1,2,\ldots,n$

Σε αυτή την περίπτωση και πάλι επιλέγουμε το m με τον ίδιο σκεπτικό. Η μέγιστη περίοδος που μπορούμε να επιτύχουμε με τις παραπάνω μεθόδους είναι προφανώς m (και σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι η μέθοδος έχει πλήρη περίοδο). Από τη θεωρία αριθμών, αποδεικνύεται ότι πλήρης περίοδος μπορεί να επιτευχθεί αν για τα a, m, c ισχύουν οι τρεις ακόλουθες συνθήκες: (i) Αν το 4 διαιρεί το m, τότε θα πρέπει να διαιρεί και το $a - 1$, (ii) Οι m, c είναι μεταξύ τους πρώτοι (ο μόνος φυσικός που διαιρεί και τους δύο να είναι ο 1), (iii) Αν ο q είναι ένας πρώτος αριθμός που διαιρεί τον m, τότε θα πρέπει να διαιρεί και τον $a - 1$. Στη συνέχεια δεν θα μας απασχολήσει περισσότερο η βέλτιστη επιλογή των a, m, c διότι κάθε γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. Pascal, VBasic, C, Fortran) αλλά και κάθε υπολογιστικό πρόγραμμα (Mathematica, Matlab, Maple κ.α.) ή πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων (Excel, SPSS, S-Plus, Statgraphics κ.α.) έχει ενσωματωμένη μία γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών και παρέχει αυτόματα τυχαίους αριθμούς συνήθως με την εντολή RANDOM ή RAND ή RND που ικανοποιεί τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Μάλιστα ορισμένα πακέτα (π.χ. SPSS, Mathematica κ.α.) μπορούν να παράγουν ψευδοτυχαίους αριθμούς και από άλλες κατανομές.

3.2 Υπολογισμός ολοκληρώματος μέσω προσομοίωσης.

Μία από τις πρώτες εφαρμογές της προσομοίωσης ήταν ο προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων. Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\mu = \int_0^1 g(x)dx$$

για κάποια (μετρήσιμη) συνάρτηση g. Είναι αρκετά γόνιμη η παρατήρηση ότι το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα μπορεί εναλλακτικά να γραφεί στη μορφή

$$E\big(g(U)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_U\,(x)dx = \int_{0}^{1} g(x)\cdot 1 dx = \mu$$

όπου U είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1), δηλαδή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_U(x) = 1$ για $x \in (0,1)$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα τυχαίο πείραμα παράγει μία τ.μ. $g(U)$ της οποίας επιθυμούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών (σύμφωνα με τον οποίο ο δειγματικός μέσος συγκλίνει στον πληθυσμιακό μέσο), αν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πολλές φορές, το μ θα είναι (οριακά) ίσο με τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων αυτών των πειραμάτων (υποθέτουμε ότι $E(|g(U)|) < \infty$). Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανεξάρτητες τ.μ. από την ομοιόμορφη στο (0,1) κατανομή. Οι νέες τ.μ. $g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_n)$ είναι προφανώς και αυτές ανεξάρτητες και ισόνομες και από τον (ισχυρό) νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει (με πιθανότητα 1) ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \to E\big(g(U)\big)\ \gamma\iota\alpha\ n \to \infty$$

Αυτή η τεχνική υπολογισμού ολοκληρωμάτων ονομάζεται τεχνική Monte Carlo. Επομένως, το $\mu = E(g(U))$ προσεγγίζεται από το $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ το οποίο είναι τυχαία μεταβλητή και με αυτή την έννοια, το $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ αποτελεί μία «εκτίμηση» του μ. Ο σχετικός αλγόριθμος είναι ο επόμενος:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \ldots, U_n \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Υπολογίζουμε την τιμή $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$

Η τιμή αυτή αποτελεί σύμφωνα με τα παραπάνω εκτίμηση του μ. Προφανώς, όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο καλύτερη θα είναι η εκτίμηση (η τ.μ. $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ θα έχει μικρότερη διασπορά).

Είναι φανερό ότι η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης δεν περιορίζεται μόνο κατά τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων επί του (0,1) αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ολοκληρώματα με οποιαδήποτε άκρα. Αυτό που χρειάζεται σε κάθε περίπτωση είναι

ο κατάλληλος μετασχηματισμός της μεταβλητής ολοκλήρωσης ώστε να καταλήξουμε και πάλι σε ολοκλήρωμα με άκρα 0 και 1. Για παράδειγμα,

$$\int_a^b g(x)dx = \int_0^1 (b-a)g(a+(b-a)y)dy = \int_0^1 h(y)dy \qquad \left(y = \frac{x-a}{b-a}\right)$$

και

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 y^{-2}g(y^{-1}-1)dy = \int_0^1 h(y)dy \qquad \left(y = \frac{1}{x+1}\right)$$

Η πραγματική ισχύς όμως της συγκεκριμένης μεθόδου αποκαλύπτεται κατά τον υπολογισμό πολλαπλών ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα

$$\mu = \int_{[0,1]^k} g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_k)dx_1 \dots dx_{k-1}dx_k$$

μπορεί να γραφεί εναλλακτικά στη μορφή

$$\mu = E\big(g(\boldsymbol{U})\big) = E(g(U_1, U_2, \dots, U_k))$$

όπου $U_1, U_2, \dots, U_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. από ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Παρόμοια με παραπάνω, θεωρούμε $\boldsymbol{U_i} = (U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{ik})),\ i = 1,2,\dots,n$ ανεξάρτητα μεταξύ τους τυχαία διανύσματα το καθένα οποία αποτελείται από k ανεξάρτητες τ.μ. από την ομοιόμορφη στο $(0,1)$ κατανομή. Οι τ.μ. $g(\boldsymbol{U_1}), g(\boldsymbol{U_2}), \dots, g(\boldsymbol{U_n})$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και επομένως από τον (ισχυρό) νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει και πάλι ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\boldsymbol{U_i}) \to E\big(g(\boldsymbol{U})\big)\ \gamma\iota\alpha\ n \to \infty$$

με πιθανότητα 1 (προφανώς θεωρούμε ότι η g είναι μετρήσιμη και $E(|g(U)|) < \infty$)

4. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών από Διακριτές Κατανομές

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών που προέρχονται από την ομοιόμορφη στο $(0,1)$ κατανομή. Σε αρκετά όμως προβλήματα που καλούμαστε να μελετήσουμε χρησιμοποιώντας προσομοίωση, χρειαζόμαστε την παραγωγή τυχαίων αριθμών και από άλλες κατανομές, π.χ. την κανονική, την Poisson, τη διωνυμική κ.α. Σε αυτό λοιπόν το κεφάλαιο θα εξετάσουμε πως από τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο (0,1) μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από οποιαδήποτε διακριτή κατανομή.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σχεδόν όλα τα στατιστικά πακέτα καθώς και το Mathematica, μπορούν να παράγουν αυτόματα (με μία εντολή) ψευδοτυχαίους αριθμούς από αρκετές γνωστές κατανομές (κάτι το οποίο όμως συνήθως δεν μπορούν να κάνουν οι διάφορες γλώσσες προγραμματισμού).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ορισμένες μεθόδους παραγωγής τυχαίων από διακριτές κατανομές. Ας υποθέσουμε λοιπόν γενικά ότι επιθυμούμε να παράγουμε αριθμούς από μία κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_i = P(X = x_i), \qquad i = 0,1,2,\dots, \sum_i p_i = 1$$

4.1. Η μέθοδος της αντιστροφής

Ένας τρόπος να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή με σ.π. $\{p_0, p_1, \dots\}$ χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή είναι ο ακόλουθος:

Έστω $U \sim U(0,1)$ (U τ.μ. από την ομοιόμορφη στο $(0,1)$ κατανομή). Η νέα τυχαία μεταβλητή

$$X = \begin{cases} x_0, & 0 \le U < p_0 \\ x_1, & p_0 \le U < p_1 + p_2 \\ & \vdots \\ x_k, & \sum_{i=0}^{k-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{k} p_i \\ & \vdots \end{cases}$$

θα έχει συνάρτηση πιθανότητας $\{p_0, p_1, \dots\}$. Πράγματι,

$$P(X = x_k) = P\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{k} p_i\right) = \sum_{i=0}^{k} p_i - \sum_{i=0}^{k-1} p_i = p_k, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

Λόγω του ότι η συνεχής τ.μ. U παίρνει τις τιμές $\{0, p_0, p_0 + p_1, \dots\}$ με πιθανότητα 0, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι:

$$X = x_0 \quad \alpha\nu \quad 0 < U \leq p_0$$

$$X = x_1 \quad \alpha\nu \quad p_0 < U \leq p_1 + p_2$$

$$\kappa.\, o.\, \kappa.$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής στα σημεία $\{x_0, x_1, \dots\}$ θα είναι

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = x_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i\,, \qquad k = 0,1,2, \dots$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η X παράγεται από την U ως εξής:

$$X = \{x_k\colon\ F(x_{k-1}) \leq U < F(x_k)\}$$

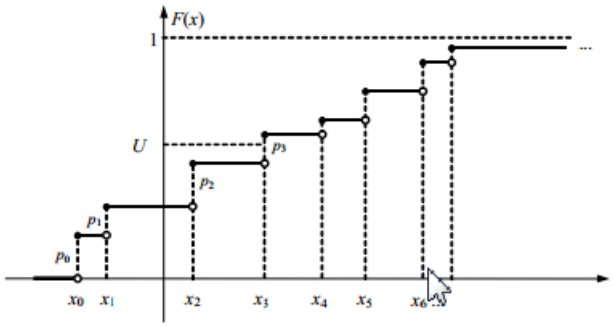
ή

$$X = \{x_k\colon\ F(x_{k-1}) < U \leq F(x_k)\}$$

όπου από σύμβαση, $F(x_{-1}) = 0$. Είναι γνωστό ότι η γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση μιας σ.κ. F είναι η

$$F^{-1}(y) = inf F^{-1}([y,1]) = inf\{x\colon F(x) \in [y,1]\}$$

η οποία συμπίπτει με την συνήθη αντίστροφη όταν η F αντιστρέφεται. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι $X = F^{-1}(U)$ εάν $X = \{x_k\colon\ F(x_{k-1}) < U \leq F(x_k)\}$ και για αυτό τον λόγο η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος της αντιστροφής. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα θα είναι $X = x_3$



Ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών με σ.π. $p_i = P(X = x_i\,),\ i = 0,1,2, \dots, \sum_i p_i = 1$ θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Αν $U < p_0$ τότε θέτουμε $X = x_0$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο ΒΗΜΑ 3

ΒΗΜΑ 3. Αν $U < p_0 + p_1$ τότε θέτουμε $X = x_1$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο ΒΗΜΑ 4

κ.ο.κ.

Ο χρόνος παραγωγής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο που περιγράφηκε είναι ανάλογος με τον αριθμό των διαστημάτων που πρέπει να εξετασθούν προκειμένου να βρεθεί το διάστημα στο οποίο ανήκει ο τυχαίος αριθμός U. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο μερικές φορές να θεωρήσουμε τις πιο πιθανές τιμές x_i της X δηλαδή να τις κατατάξουμε κατά φθίνουσα σειρά των p_i. Αυτό προκύπτει από το γεγονός πως αν N είναι το πλήθος των βημάτων αυτού του αλγορίθμου, τότε

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(N = i) = \sum_{i=i}^{\infty} ip_{i-1}$$

Επομένως, προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου, μπορούμε να θεωρήσουμε τις τιμές $x_0, x_1, \ldots$ έτσι ώστε $p_0 \geq p_1 \geq \cdots$

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν είναι απαραίτητο να εξεταστεί για να βρεθεί το κατάλληλο διάστημα στο οποίο ανήκει ο τυχαίος αριθμός U για να παραχθεί μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από συγκεκριμένες γνωστές κατανομές.

4.1.1. Ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ κατανομή ($U\{1, 2, \ldots, n\}$).

Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ κατανομή ($U\{1,2, \ldots, n\}$). Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη συγκεκριμένη κατανομή, δηλαδή,

$$p_i = P(X = i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής. Συγκεκριμένα, παράγουμε $U \sim U(0,1)$ και αν $U < 1/n$ τότε θέτουμε $X = 1$ και σταματάμε, αν $U < 2/n$ τότε θέτουμε $X = 2$ και σταματάμε κ.ο.κ. δηλαδή,

$$X = \left\{k:\ \frac{k-1}{n} \le U < \frac{k}{n}\right\}$$

Με τον τρόπο αυτό χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $(n+1)/2$ βήματα. Στη περίπτωση όμως της ομοιόμορφης μπορούμε πολύ απλά να πάρουμε

$$X = [nU] + 1$$

Προφανώς,

$$P(X = i) = P([nU] = i - 1) = P(i - 1 \le nU < i) = P\left(\frac{i-1}{n} \le U < \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n},$$
$$x = 1,2, \dots, n$$

Δηλαδή,

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = [nU] + 1$

4.1.2. Γεωμετρική κατανομή (Ge(p)).

Υπενθυμίζεται ότι η γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_i = P(X = i) = pq^{i-1}, \qquad i = 1,2, \dots \quad (q = 1 - p)$$

Η τ.μ. X μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το πλήθος των δοκιμών μέχρι και την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας σε μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών με πιθανότητα επιτυχίας p. Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη συγκεκριμένη κατανομή μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής. Συγκεκριμένα, επειδή

$$F(k) = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} = p\sum_{i=0}^{k-1} q^i = p\frac{1-p^k}{1-q} = 1 - p^k$$

δεδομένου ενός τυχαίου αριθμού $U \sim U(0,1)$ θα λαμβάνουμε

$$X = \{k \ge 1: 1 - p^{k-1} \le U < 1 - p^k\}$$

Η μέθοδος της αντιστροφής όμως απαιτεί κατά μέσο όρο

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \frac{1}{p}$$

βήματα (π.χ. αν $p = 0.1$ απαιτούνται κατά μέσο όρο 10 βήματα για την παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από την γεωμετρική). Ευτυχώς, ένας πολύ πιο άμεσος τρόπος παραγωγής τυχαίων αριθμών, όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα και όπως είδαμε και στην περίπτωση της διακριτής ομοιόμορφης στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ πραγματοποιείται λαμβάνοντας

$$X = \left[\frac{\ln U}{\ln q}\right] + 1$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο λογάριθμος είναι μια μονότονη συνάρτηση και έτσι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \ln \alpha < \ln \beta$

Πράγματι, η νέα τ.μ. X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p διότι

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\left[\frac{\ln U}{\ln q}\right] = k - 1\right) = P\left(k - 1 \le \frac{\ln U}{\ln q} < k\right) \\ &= P(k \ln q < \ln U \le (k-1) \ln q) = P(q^k < U \le q^{k-1}) \\ &= q^{k-1} - q^k = pq^{k-1} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = \left[\frac{\ln U}{\ln q}\right] + 1$

4.1.3. Η κατανομή Poisson (Po(λ)).

Υπενθυμίζεται ότι η κατανομή Poisson με μέση τιμή λ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_i = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0,1,2, \ldots$$

Η τ.μ. X μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το πλήθος των πραγματοποιήσεων από ένα μεγάλο αριθμό «σπάνιων» ενδεχομένων (ή ισοδύναμα, το πλήθος των επιτυχιών σε ένα μεγάλο αριθμό δοκιμών $n \to \infty$ με πιθανότητα επιτυχίας $p \to 0$ σε κάθε δοκιμή ώστε $np \to \lambda$). Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη συγκεκριμένη κατανομή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιστροφής έχουμε:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Αν $U < e^{-\lambda}$ τότε θέτουμε $X = 0$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο **ΒΗΜΑ 3**

ΒΗΜΑ 3. Αν $U < e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda/1!$ τότε θέτουμε $X = 1$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο **ΒΗΜΑ 4**

κ.ο.κ. ...

Επειδή όμως ο προσθετέος $e^{-\lambda}\lambda/1!$ είναι δυνατό να προκαλέσει πρόβλημα στην μηχανή αριθμητικών πράξεων του προγράμματος που χρησιμοποιούμε (π.χ. όταν τα λ, i είναι σχετικά μεγάλα), μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι

$$p_{i+1} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{\lambda}{i+1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!} = \frac{\lambda}{i+1}p_i$$

να χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο αλγόριθμο που παρακάμπτει τον επαναλαμβανόμενο υπολογισμό του $e^{-\lambda}\lambda/1!$

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $p = e^{-\lambda}$, $F = p$, $i = 0$.

ΒΗΜΑ 3. Αν $U < F$ τότε θέτουμε $X = i$ και σταματάμε.

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $p = p \cdot \frac{\lambda}{i+1}$, $F = F + p, i = i + 1$και επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 3**.

Ο παραπάνω αλγόριθμος απαιτεί $\lambda + 1$ βήματα κατά μέσο όρο για κάθε ένα τυχαίο αριθμό από την κατανομή Ρο(λ). Όταν το λ είναι σχετικά μικρό δεν υπάρχει πρόβλημα. Σε αντίθετη όμως περίπτωση είναι προτιμότερο να ξεκινάμε όχι από το $i = 0$ και να προχωράμε προς τα πάνω, αλλά από την πιθανότερη τιμή $i = [\lambda]$ και να προχωράμε είτε προς τα κάτω (εάν $U \leq F([\lambda])$) είτε προς τα πάνω (εάν $U > F([\lambda])$).

4.1.4. Η Διωνυμική κατανομή (B(n,p))

Υπενθυμίζεται ότι η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1}, \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

Η τ.μ. Χ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές σε κάθε μία από τις οποίες εμφανίζεται επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα 1−p. Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη συγκεκριμένη κατανομή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής. Και σε αυτή την περίπτωση, θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι

$$p_{i+1} = \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i-1)!}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1} = \frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}$$
$$= \frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p}p_i$$

και ο αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $pr = (1-p)^n,\ F = pr,\ i = 0.$

ΒΗΜΑ 3. Αν $U < F$ τότε θέτουμε $X = i$ και σταματάμε.

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $pr = \frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p}pr$, $F = F + pr,\ i = i+1$ και

επαναλαμβάνουμε το **ΒΗΜΑ 3.**

Παρατηρήσεις.

(α) Επειδή το μέσο πλήθος των απαιτούμενων βημάτων είναι $np+1$, εάν $p > 0.5$ είναι προτιμότερο να παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $X \sim Bi(n, 1-p)$ και στη συνέχεια να παίρνουμε τον $n - X$ ο οποίος ακολουθεί την επιθυμητή διωνυμική με παραμέτρους n και p. Με αυτό τον τρόπο, αν π.χ. $n = 20, p = 0.8$ θα χρειαστούμε κατά μέσο όρο $20(1-0.8) + 1 = 5$ βήματα αντί $20 \cdot 0.8 + 1 = 17$ βήματα.

(β) Στην περίπτωση που το np είναι αρκετά μεγάλο, μπορούμε, παρόμοια με την περίπτωση της κατανομής Poisson, να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο από το $[np]$ και να συνεχίσουμε είτε προς τα κάτω (εάν ισχύει $U \le F([np])$) είτε προς τα πάνω (εάν $U > F([np])$).

(γ) Ένας άλλος τρόπος να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από τη διωνυμική κατανομή, είναι μέσω n δίτιμων μεταβλητών Bernoulli. Συγκεκριμένα, μπορούμε από n (ανεξάρτητους) τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \dots, U_n \sim U(0,1)$ να παράγουμε n δίτιμες τ.μ. $I_1, I_2, \dots, I_n$ για τις οποίες ισχύει ότι $P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = p$ (π.χ. $I_i = 1$ αν $U < p$ και 0 διαφορετικά). Η τυχαία μεταβλητή $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ θα

ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p. Η μέθοδος αυτή απαιτεί n επαναλήψεις (χρειαζόμαστε n τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη) και άρα είναι πιο αργή από αυτήν που προτάθηκε παραπάνω.

4.2. Η Μέθοδος Απόρριψης.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε μία διαφορετική μέθοδο παραγωγής τυχαίων αριθμών. Η μέθοδος αυτή είναι πιο ευέλικτη από την μέθοδο αντιστροφής διότι χρησιμοποιεί ένα ενδιάμεσο βήμα το οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε κατάλληλα ώστε να είναι ευκολότερη η παραγωγή τυχαίων αριθμών από κατανομές με δύσχρηστη συνάρτηση πιθανότητας.

Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία κατανομή με σ.π. $p_j = P(X = j),\ j = 0,1, \ldots$. Έστω επίσης ότι μπορούμε εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία κατανομή με σ.π. $q_j = P(Y = j),\ j = 0,1, \ldots$ για την οποία το μόνο που απαιτούμε είναι το εξής: αν $q_j = 0$ τότε και $p_j = 0$ (δηλ. η κατανομή της X είναι απόλυτα συνεχής ως προς την κατανομή της $Y, F_X << F_Y$).

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, παράγουμε (με οποιοδήποτε τρόπο) έναν τυχαίο αριθμό Y από την $\{q_j, j = 1,2, \ldots\}$ και στη συνέχεια τον αποδεχόμαστε (θέτουμε $X = Y$) με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου p_Y/q_Y. Εάν δεν γίνει αποδεκτός, παράγουμε έναν άλλο τυχαίο αριθμό από την $\{q_j, j = 0,1,2, \ldots\}$ κ.ο.κ. Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχει μία σταθερά $c < \infty$ για την οποία ισχύει

$$\frac{p_j}{q_j} \leq c \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ j\colon p_j > 0$$

ο αλγόριθμος απόρριψης είναι ο εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από κατανομή με σ.π. $\{q_j, j = 1,2, \ldots\}$

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 3. Εάν $U < p_Y/cq_Y$, θέτουμε $X = Y$ και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

Ο τυχαίος αριθμός X που παράγεται από τον παραπάνω αλγόριθμο έχει συνάρτηση πιθανότητας $\{p_j, j = 0,1,2, \ldots\}$.

Παρατηρήσεις

(α) Για να αποφύγουμε πολλές επαναλήψεις θα πρέπει να πάρουμε όσο το δυνατό μικρότερο c. Προφανώς, το μικρότερο c που μπορούμε να πάρουμε είναι το

$$c = \sup\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 0,1, \dots\right\}$$

(β) Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε «βοηθητική» κατανομή $\{q_j, j = 0,1,2, \dots\}$. Συνήθως επιλέγουμε μία κατανομή από την οποία παράγονται εύκολα τυχαίοι αριθμοί, και η οποία δεν διαφέρει σημαντικά από την κατανομή $\{p_j, j = 0,1,2, \dots\}$ (ώστε το c να είναι μικρό).

4.3. Η μέθοδος της σύνθεσης

Η μέθοδος της σύνθεσης χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μίξεις κατανομών. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι επιθυμούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας της μορφής

$$p_i = P(X = i) = ap_i^{(1)} + (1 - a)p_i^{(2)}, \qquad i = 0,1, \dots$$

όπου $\{p_i^{(1)}, i = 0,1,2, \dots\}, \{p_i^{(2)}, i = 0,1,2, \dots\}$ είναι συναρτήσεις πιθανότητας δύο κατανομών F_1και F_2 αντίστοιχα, και $a \in (0,1)$. Σύμφωνα με τη μέθοδο της σύνθεσης μπορούμε να πάρουμε έναν τυχαίο αριθμό X από αυτή τη μίξη χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο απλό αλγόριθμο:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Εάν $U < a$ τότε παράγουμε $X \sim F_1$, ενώ αν $U \geq a$ τότε παράγουμε $X \sim F_2$.

Γενικότερα, έστω ότι επιθυμούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία μίξη της μορφής

$$p_i = P(X = i) = \sum_j a_j p_i^{(j)}, \qquad i = 0,1, \dots$$

όπου $\{p_i^{(j)}, i = 0,1,2, \dots\}, j = 0,1, \dots$ είναι συναρτήσεις πιθανότητας των κατανομών $F_j, j = 0,1, \dots$ αντίστοιχα, και $\sum_j a_j = 1, \ \ a_j \in (0,1)$. Για παράδειγμα, αν F_j είναι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι $Y = j$ και $P(Y = j) = a_j, j \in \{0,1, \dots\}$ τότε, η κατανομή της X γράφεται ως μίξη:

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = i|Y = j)P(Y = j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p_i^{(j)}, \qquad i = 0,1, \ldots$$

Η μέθοδος της σύνθεσης που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί να επεκταθεί ώστε να καλύπτει και την αυτή τη γενικότερη περίπτωση. Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή $\{a_0, a_1, \ldots\}$

ΒΗΜΑ 2. Εάν $Y = j$ τότε παράγουμε τον τυχαίο αριθμό X από την κατανομή F_j.

5. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών από Συνεχείς Κατανομές

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συνεχίσουμε την παρουσίαση μεθόδων παραγωγής τυχαίων αριθμών μελετώντας την περίπτωση συνεχών κατανομών. Όπως θα δούμε, για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από συνεχείς κατανομές θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στην διακριτή περίπτωση, κατάλληλα τροποποιημένες. Υποθέτουμε γενικά ότι επιθυμούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία συνεχή κατανομή με σ.κ. και σ.π.π.

$F_X(x) = P(X \leq x),\ x \in R,\ f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x),\ x \in R$ αντίστοιχα.

5.1 Η μέθοδος της Αντιστροφής

Θεωρούμε και πάλι ως δεδομένο ότι μπορούμε να παράγουμε εύκολα έναν (ψευδό) τυχαίο αριθμό U από την $U(0,1)$ και επιθυμούμε χρησιμοποιώντας τον αριθμό U να παράγουμε έναν (ψευδό) τυχαίο αριθμό από μια συνεχή κατανομή F. Η μέθοδος της αντιστροφής βασίζεται στην παρατήρηση ότι η τ.μ. $X = F^{-1}(U)$, όπου $U \sim U(0,1)$, ακολουθεί την επιθυμητή κατανομή F. Υπενθυμίζεται ότι στη διακριτή περίπτωση η μέθοδος της αντιστροφής υπέκρυπτε τον ίδιο μετασχηματισμό της U και για αυτό πρόκειται ουσιαστικά για την ίδια μέθοδο. Αρχικά, υπενθυμίζουμε τον ορισμός της (γενικευμένης) αντιστρόφου μιας σ.κ. F,

$$F^{-1}(u) = inf F^{-1}([u,1]) = inf\{x: F(x)\ \in [u,1]\}, \qquad u \in [0,1]$$

Ο συγκεκριμένος ορισμός καλύπτει και την περίπτωση όπου η F δεν είναι αντιστρέψιμη (π.χ. στη διακριτή περίπτωση, αλλά και στην συνεχή περίπτωση όταν η F δεν είναι γνήσια αύξουσα). Στην περίπτωση που η F είναι αντιστρέψιμη (π.χ. συνεχής και γνήσια αύξουσα) τότε ο παραπάνω ορισμός της γενικευμένης αντιστρόφου συμπίπτει προφανώς με την κλασσική αντίστροφη τιμή της συνάρτησης F στο u. Παρατηρούμε επίσης ότι η F ως συνάρτηση κατανομής είναι δεξιά συνεχής, και άρα το $infimum$ θα επιτυγχάνεται εντός του συνόλου $\{x: F(x)\ \in [u,1]\}$. Επομένως μπορούμε ισοδύναμα να γράφουμε ότι

$$F^{-1}(u) = min\{x: F(x) \in [u,1]\}.$$

Η μέθοδος λοιπόν της αντιστροφής για οποιεσδήποτε (π.χ. διακριτές ή συνεχείς) κατανομές βασίζεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση. Αν $U \sim U(0,1)$ και F είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X = F^{-1}(U)$$

έχει συνάρτηση κατανομής F.

Συνεπώς, η μέθοδος της αντιστροφής για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια κατανομή με σ.κ. F περιγράφεται από τον επόμενο γενικό αλγόριθμο:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = F^{-1}(U)$

Προφανώς, τις περισσότερες φορές δεν είναι εύκολο να βρούμε άμεσα την γενικευμένη αντίστροφη $F^{-1}(U)$ (π.χ. στη διακριτή περίπτωση ή σε συνεχείς κατανομές με σ.κ. πεπλεγμένης μορφής). Ας δούμε όμως πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από ορισμένες γνωστές συνεχείς κατανομές χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή.

5.1.1. Ομοιόμορφη κατανομή στο (α,β) ($U(a,b)$).

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η σ.π.π. και σ.κ. αντίστοιχα είναι

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad x \in (a,b)$$

και άρα αν $U \sim U(0,1)$, η τ.μ. $X = F^{-1}(U) = a + U(b-a)$ θα ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (a,b).

5.1.2. Εκθετική κατανομή ($Exp(\lambda)$).

Αν μία τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, τότε υπενθυμίζεται ότι θα έχει σ.π.π. και σ.κ. αντίστοιχα,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

Η F είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$ και ειδικότερα,

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

Επομένως, ένας αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

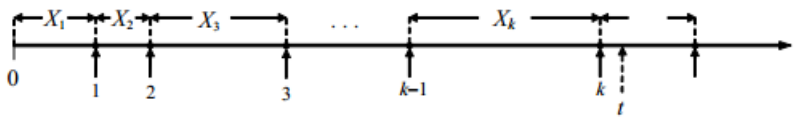
ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$

Επειδή και η $1-U \sim U(0,1)$ όταν $U \sim U(0,1)$, θα μπορούσαμε απλούστερα να θέσουμε $X = -\lambda^{-1}\ln U$

5.1.3. Τυχαίοι αριθμοί από την κατανομή Poisson μέσω της εκθετικής κατανομής.

Ένας εναλλακτικός τρόπος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κατανομή Poisson μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς από την εκθετική κατανομή. Συγκεκριμένα, θα βασιστούμε στο γεγονός ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ συμβάντων σε μία ανέλιξη Poisson με ένταση λ είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$. Αν N_t είναι το πλήθος των συμβάντων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$, και $X_1, X_2, \ldots$ είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ συμβάντων, τότε

$$N_t = max\left\{n: \sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right\}$$



Επομένως, αν $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$, η τ.μ. $N_t = max\{n: \sum_{i=1}^{n} X_i \le t\} \sim$ Poisson(λt)

Άρα τελικά, αν $U_1, U_2, \ldots \sim U(0,1)$, η τ.μ.

$$N_1 = max\left\{n \ge 0: -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\ln U \le 1\right\} = max\left\{n \ge 0: -\frac{1}{\lambda}\ln\prod_{i=1}^{n} U_i \le 1\right\}$$

$$= max\left\{n \ge 0: \prod_{i=1}^{n} U_i \ge e^{-\lambda}\right\}$$

ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ($\sum_{i=1}^{0} U_i \equiv 0, \prod_{i=1}^{0} U_i \equiv 1$). Ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $i = 0$ και $P = 1$.

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό U από την $U(0,1)$ και θέτουμε $P = P \cdot U$.

ΒΗΜΑ 3. Εάν $P < e^{-\lambda}$ τότε θέτουμε $N = i$ και σταματάμε. Διαφορετικά, θέτουμε $i = i + 1$ και γυρίζουμε στο **ΒΗΜΑ 2**.

5.1.4. Η κατανομή Γάμμα ($G(a,\lambda)$).

Αν μία τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $a, \lambda > 0$, τότε υπενθυμίζεται ότι θα έχει σ.π.π. και σ.κ. αντίστοιχα,

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

και

$$F(y) = \int_{o}^{y} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx\,, \qquad y > 0.$$

Είναι φανερό ότι, αν και η F αντιστρέφεται, η αντίστροφή της δεν μπορεί να παρασταθεί με έναν κλειστό τύπο και επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τη μέθοδο αντιστροφής. Αν όμως το a είναι φυσικός (δηλ. $a = n$), τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τυχαίους αριθμούς από την εκθετική κατανομή που όπως είδαμε παράγονται εύκολα. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι το άθροισμα $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, n το πλήθος ανεξάρτητων τ.μ. από την εκθετική με παράμετρο λ, ακολουθεί κατανομή γάμμα με παραμέτρους (n, λ). Επομένως, αν $U_i \sim U(0,1),\ i = 1,2,\dots,n$, είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε οι τ.μ. $X_i = -\lambda^{-1} \ln U_i \sim Exp(\lambda),\ i = 1,2,\dots,n$, και τελικά η τ.μ.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = -\sum_{i=1}^{n} \lambda^{-1} \ln U_i = -\lambda^{-1} \ln \prod_{i=1}^{n} U_i$$

θα ακολουθεί κατανομή $G(n, \lambda)$. Συνοψίζοντας, μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή $G(n, \lambda)$ ως εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \dots, U_n \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = -\lambda^{-1} \ln \prod_{i=1}^{n} U_i$.

5.2. Η μέθοδος απόρριψης.

Η μέθοδος απόρριψης που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από διακριτές κατανομές μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να εφαρμόζεται και για την συνεχή περίπτωση. Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία συνεχή κατανομή με σ.π.π. $f\,(x), x \in R$. Έστω επίσης ότι μπορούμε εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία άλλη συνεχή κατανομή με σ.π.π $g(x), x \in R$. Απαιτούμε και πάλι να ισχύει ότι αν $g(x) = 0$ τότε και $f(x) = 0$.

Όπως και στη διακριτή περίπτωση, παράγουμε (με οποιοδήποτε τρόπο) έναν τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή με σ.π.π. g και στη συνέχεια τον αποδεχόμαστε (θέτουμε $X = Y$) με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου $f(Y)/g(Y)$. Εάν δεν γίνει αποδεκτός, παράγουμε έναν άλλο τυχαίο αριθμό από την κατανομή με σ.π.π. g κ.ο.κ. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε και πάλι ότι υπάρχει μία σταθερά $c < \infty$ για την οποία ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c \text{ για κάθε } x\colon g(x) \neq 0.$$

Ο αλγόριθμος αποδοχής - απόρριψης είναι ο εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από κατανομή με σ.π.π. g.

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 3. Εάν $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$ τότε θέτουμε $X = Y$ και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

Ο τυχαίος αριθμός X που παράγεται από τον παραπάνω αλγόριθμο έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι ανάλογη με τη διακριτή περίπτωση.

Το πλήθος N των επαναλήψεων του αλγορίθμου (μέχρι την αποδοχή μιας τιμής) προφανώς ακολουθεί και πάλι τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $1/c$. Επομένως χρειάζονται κατά μέσο όρο $E(N) = c$ επαναλήψεις και άρα θα πρέπει να πάρουμε όσο το δυνατό μικρότερο c. Το μικρότερο c που μπορούμε να πάρουμε είναι

$$c = sup\left\{\frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x\colon g(x) \neq 0\right\}$$

Η μέθοδος απόρριψης είναι πολύ ισχυρή στην συνεχή περίπτωση διότι μας βοηθά να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από κατανομές των οποίων η F^{-1} δεν μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή (και άρα δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής).

5.2.1. Η Κατανομή Βήτα ($Be(a, b)$).

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a, b η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}, \qquad x \in (0,1), \qquad a,b>0$$

Η σ.π.π. λαμβάνει γνήσια θετικές τιμές μόνο στο $(0,1)$ οπότε μπορούμε ως βοηθητική κατανομή να χρησιμοποιήσουμε την $U(0,1)$, δηλαδή $g(x) = 1,\ x \in (0,1)$.

Η σταθερά c θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \le c, \qquad x \in (0,1)$$

και άρα αρκεί να βρούμε το μέγιστο της f στο $(0,1)$. Αν $a < 1$ ή $b < 1$ τότε η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $(0,1)$ (αν $a < 1$ τότε $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$ και αν $b < 1$ τότε $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \infty$) και άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο. Αν τώρα $a = 1,\ b > 1$ τότε η $f(x) = b(1-x)^{b-1}$ είναι φθίνουσα στο $(0,1)$ και άρα $c = f(0) = b$. Αντίστοιχα, αν $a > 1, b = 1$ τότε η $f(x) = ax^{\alpha-1}, x \in (0,1)$ είναι αύξουσα στο $(0,1)$ και άρα $c = f(1) = a$.

Τέλος, πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $a,b > 1$. Αρκεί να βρούμε σε ποιο σημείο λαμβάνει μέγιστη τιμή η $\ln f(x)$ για $x \in (0,1)$. Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} + (a-1)\ln x + (b-1)\ln(1-x)\right)\\ &= \frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x}\end{aligned}$$

και άρα τα πιθανά σημεία μεγίστου της $\ln f$ (και ισοδύναμα της f) θα ικανοποιούν την

$$\frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(a-1) - x(b-1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a-1}{a+b-2}$$

Το σημείο αυτό ανήκει στο $(0,1)$ (διότι $(a > 1, b > 1)$) ενώ

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x}\right) = -\frac{a-1}{x^2} - \frac{b-1}{(1-x)^2} < 0$$

και επομένως $f(x_0) \ge f(x), \forall x \in (0,1)$ ($\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = 0$).

Άρα, για $a > 1, b > 1$ θέτουμε

$$c = f(x_0) = \frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} \frac{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{(a+b-2)^{a+b-2}}$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής για $a > 1, b > 1$ θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2 \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Εάν $U_2 \leq \frac{f(U_1)}{c} = \frac{(a+b-2)^{a+b-2}}{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}} U_1^{a-1}(1-U_1)^{b-1}$ τότε θέτουμε $X = U_1$ και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1**.

Ο μέσος αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου θα είναι c

5.2.2. Η κατανομή Γάμμα (G(a,λ)).

Σε παράγραφο 5.1.4. είδαμε πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από τη συγκεκριμένη κατανομή όταν $a \in \{1,2,\dots\}$ χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς από την εκθετική κατανομή. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε εναλλακτικά να αξιοποιήσουμε τη μέθοδο απόρριψης για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από την $G(a,\lambda)$ για οποιοδήποτε $a > 1$. Η $G(a,\lambda)$ έχει σ.π.π.:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \qquad a > 0, \qquad \lambda > 0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $Z \sim G(a,1)$ τότε η $X = Z/\lambda \sim G(a,\lambda)$. Πράγματι, αν $Z \sim G(a,1)$, δηλαδή $f_Z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}$ τότε

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} P(X \leq x) = \frac{d}{dx} P(Z \leq \lambda x) = \frac{d}{dx} F_z(\lambda x) = \lambda f_z(\lambda x)$$
$$= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

και άρα η $X = Z/\lambda \sim G(a,\lambda)$. Επομένως, για να παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό από τη $G(a,\lambda)$ αρκεί να παραχθεί πρώτα ένα $Z \sim G(a,1)$ και στη συνέχεια να πάρουμε $X = Z/\lambda$.

Ας δούμε αρχικά λοιπόν πως μπορούμε να πάρουμε τυχαίους αριθμούς από τη $G(a,1)$. Η σ.π.π. της κατανομής γάμμα λαμβάνει γνήσια θετικές τιμές στο $(0,\infty)$ οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως βοηθητική κατανομή την $U(0,1)$. Παρατηρούμε ότι η σ.π.π. της εκθετικής κατανομής (από την οποία μπορούμε εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς) είναι θετική στο $(0,\infty)$. Θα εξετάσουμε λοιπόν αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εκθετική κατανομή $Exp(\theta)$. Αρκεί να υπάρχει σταθερά $c < \infty$ η οποία να ικανοποιεί την σχέση

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\theta e^{-\theta x}} = \frac{x^{\alpha-1} e^{(\theta-1)x}}{\Gamma(\alpha)\theta} \leq c, \qquad x > 0$$

Εάν $\theta > 1$ ή $a < 1$ η συνάρτηση h προφανώς δεν μπορεί να φραχθεί άνω. Για $\theta < 1, a > 1$ πιθανά σημεία μεγίστου της h ικανοποιούν την

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta}\frac{d}{dx}x^{\alpha-1}e^{(\theta-1)x}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta}\Big((a-1)x^{\alpha-2}e^{(\theta-1)x} + x^{\alpha-1}(\theta-1)e^{(\theta-1)x}\Big)$$
$$= \frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)\theta}\big(\alpha - 1 + x(\theta-1)\big)e^{(\theta-1)x} = 0$$

και άρα πιθανό μέγιστο λαμβάνεται όταν

$$\alpha - 1 + x(\theta-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha-1}{1-\theta} > 0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική για $x_0 = \frac{\alpha-1}{1-\theta}$ και τελικά η h μεγιστοποιείται στο x_0 ($h(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 0, h(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Άρα μπορούμε ως c να θεωρήσουμε το

$$c = h(x_0) = h\left(\frac{a-1}{\theta-1}\right) = \left(\frac{a-1}{\theta-1}\right)^{\alpha-1}\frac{e^{-(a-1)}}{\Gamma(\alpha)\theta}.$$

Ως βοηθητική κατανομή λοιπόν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta < 1$. Επειδή όμως ο μέσος αριθμός επαναλήψεων για την παραγωγή ενός αριθμού με τη μέθοδο αυτή είναι c, προφανώς είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το $\theta < 1$ που ελαχιστοποιεί το $c = c(\theta)$ ή ισοδύναμα ελαχιστοποιεί το $c'(\theta) = \theta^{-1}(1-\theta)^{1-\alpha}$. Επειδή,

$$\frac{d}{d\theta}c'(\theta) = \frac{-(1-\alpha)(1-\theta)^{1-\alpha-1}\theta - (1-\theta)^{1-\alpha}}{\theta^2} = \frac{\alpha\theta - 1}{\theta^2}(1-\theta)^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \theta$$
$$= \frac{1}{\alpha}$$

και $\frac{1}{\alpha} < 1$, $\frac{d^2}{d\theta^2}c'\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$, το c θα ελαχιστοποιείται για $\theta = \frac{1}{\alpha}$. Άρα, ως βοηθητική κατανομή θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική με παράμετρο $\theta = \frac{1}{\alpha}$ (δηλαδή την εκθετική που έχει ίδια μέση τιμή με την γάμμα $G(a,1)$ που θέλουμε να παράγουμε) και ως σταθερά c την

$$c = \left(\frac{a-1}{1-\frac{1}{a}}\right)^{a-1} \frac{e^{-(a-1)}}{\Gamma(\alpha)\frac{1}{a}} = \frac{a^a e^{-(a-1)}}{\Gamma(\alpha)}.$$

(η οποία είναι περίπου ίση με $e\sqrt{(a-1)/2\pi}$ για μεγάλο α).

Άρα τελικά, ο αντίστοιχος αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών X από την $G(a,\lambda)$ θα είναι ο εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $Y = -a \ln U_1$ (δηλ. $Y \sim Exp(1/a)$)

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U_2 \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 3. Εάν $U_2 \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} = \left(Ye^{1-Y/a}/a\right)^{a-1}$ τότε θέτουμε $Z = Y$ και πάμε στο **ΒΗΜΑ 4.**

Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $X = Z / \lambda$.

Ή πιο σύντομα, (παρατηρώντας και ότι $\frac{Ye^{1-\frac{Y}{a}}}{a} = -eU_1 \ln U_1$

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1, U_2 \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Εάν $U_2 \leq (-eU_1 \ln U_1)^{a-1}$ τότε θέτουμε $X = -\frac{a}{\lambda}\ln U_1$ και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

5.2.3. Η κανονική κατανομή.

Τυχαίοι αριθμοί από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ είναι πολύ χρήσιμοι γιατί εμφανίζονται σε αρκετές εφαρμογές. Θα δούμε πως μπορούμε να παράγουμε τέτοιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απόρριψης. Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να επιτύχουμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από την $N(0,1)$ διότι αν $Z \sim N(0,1)$ τότε $\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η $N(0,1)$ έχει σ.π.π.:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in R$$

Η συγκεκριμένη σ.π.π. είναι γνήσια θετική σε όλο τον άξονα των πραγματικών και συνεπώς δεν μπορούμε άμεσα να χρησιμοποιήσουμε ως βοηθητική την εκθετική κατανομή όπως π.χ. στην περίπτωση της κατανομής γάμμα. Για τον λόγο αυτό, θα

πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν έμμεσο τρόπο. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $Z \sim N(0,1)$ τότε η απόλυτη τιμή της $|Z|$ θα έχει σ.π.π. f :

$$f(x) = f_{|z|}(x) = \frac{d}{dx}P(|Z| \le x) = \frac{d}{dx}P(-x \le Z \le x) = \frac{d}{dx}\big(\Phi(x) - \Phi(-x)\big)$$
$$= \frac{d}{dx}(2\Phi(x) - 1) = 2\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad x \ge 0$$

η οποία είναι γνήσια θετική μόνο για $x \ge 0$. Συνεπώς, μπορούμε να διερευνήσουμε αν είναι δυνατή η παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη κατανομή της $|Z|$ (με σ.π.π. f) βασιζόμενοι στην εκθετική κατανομή $Exp(\theta)$. Αρκεί να υπάρχει σταθερά $c < \infty$ η οποία να ικανοποιεί την σχέση

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}{\theta e^{-\theta x}} = \frac{2e^{\theta x - x^2/2}}{\theta\sqrt{2\pi}} \le c, \qquad x > 0$$

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η h μεγιστοποιείται στο $x = \theta$ και συνεπώς θέτουμε

$$c = \max_{x>0} h(x) = h(\theta) = \frac{2e^{\theta^2/2}}{\theta\sqrt{2\pi}},$$

το οποίο με τη σειρά του ελαχιστοποιείται όταν $\theta = 1$ (έτσι ώστε να έχουμε ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου). Άρα είναι δυνατή η παραγωγή τυχαίων αριθμών με τη μέθοδο της απόρριψης από την κατανομή με σ.π.π. f . Τελικός μας όμως σκοπός είναι η παραγωγή αριθμών από την $N(0,1)$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν W είναι μία τ.μ. με σ.π.π. την f και I μία δίτιμη τ.μ. (ανεξ. από την W) με $P(I = 1) = 1 - P(I = -1) = 0.5$, τότε η τ.μ. $X = IW$ είναι τυπική κανονική. Πράγματι,

$$P(X \le x) = P(IW \le x) =$$
$$P(IW \le x|I = 1)P(I = 1) + P(IW \le x|I = -1)P(I = -1)$$
$$= \frac{1}{2}\big(P(W \le x) + 1 - P(W < -x)\big)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\big(1 + P(W \le x)\big), & x \ge 0 \\ \frac{1}{2}\big(1 - P(W < -x)\big), & x < 0 \end{cases}$$

και συνεπώς,

$$f_X(x)\frac{d}{dx}P(X \le x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_W(x), & x \ge 0 \\ \frac{1}{2}f_W(-x), & x < 0 \end{cases} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad x \in R$$

Συνοψίζοντας, ο αντίστοιχος αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών X από την $N(\mu, \sigma^2)$ θα είναι ο εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $Y = -\ln U_1$ (δηλ. $Y \sim Exp(1)$)

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U_2 \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 3. Εάν $U_2 \le \frac{f(Y)}{cg(Y)} = e^{-(Y-1)^2/2}$ τότε θέτουμε $W = Y$ και πάμε στο **ΒΗΜΑ 4**. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

ΒΗΜΑ 4. Παράγουμε $U_3 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $Z = W$ αν $U_3 \ge 0.5$ ή $Z = -W$ αν $U_3 < 0.5$.

ΒΗΜΑ 5. Θέτουμε $X = \mu + \sigma Z$ $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$

Ή πιο σύντομα, (παρατηρώντας και ότι $Z = \text{sgn}(U_3 - 0.5)W$):

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1, U_2, U_3 \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 2. Εάν $2\ln U_2 \le -(1 + \ln U_1)^2$ τότε θέτουμε $X = \mu + \sigma\ \text{sgn}(U_3 - 0.5)\ln U_1$ και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 1.**

Ο μέσος αριθμός επαναλήψεων για την παραγωγή ενός αριθμού είναι

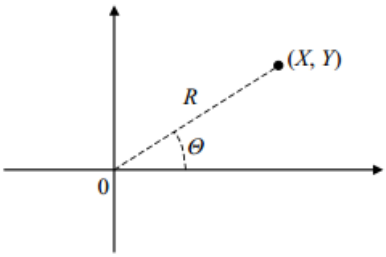
$$c = h(1) = \frac{2e^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 1.31549$$

5.3. Η πολική (ή Box-Muller) μέθοδος παραγωγής κανονικών τ.μ.

Μία άλλη μέθοδος παραγωγής κανονικών τ.μ. είναι η γνωστή ως πολική μέθοδος. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στον μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες μιας διδιάστατης κανονικής (μετασχηματισμός Box-Muller). Συγκεκριμένα, αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. από την $N(0,1)$ με σ.π.π

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(X)}(x)f_{(Y)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, x, y \in R$$

τότε οι πολικές συντεταγμένες (R^2, Θ) (R:ακτίνα, Θ:γωνία) του σημείου (X, Y) στο επίπεδο, αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $R^2 \sim Exp(1/2)$ και $\Theta \sim U(0,2\pi)$.



Είναι γνωστό ότι η θέση (X,Y) ενός σημείου στο επίπεδο μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα (εκτός από το σημείο $(0,0)$, το οποίο όμως έχει μηδενική πιθανότητα να εμφανιστεί) και από το ζεύγος (R^2,Θ) όπου R είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων και Θ η γωνία που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας με την ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και το σημείο. Συγκεκριμένα, αν (X,Y) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου, τότε οι πολικές του συντεταγμένες θα είναι

$$R^2 = X^2 + Y^2, \qquad \Theta = \arctan\left(\frac{X}{Y}\right)$$

και αντίστροφα,

$$X = R\cos\Theta, Y = R\sin\Theta.$$

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $X,Y \sim N(0,1)$, τότε και οι τ.μ. R^2, Θ είναι ανεξάρτητες και μάλιστα $R^2 \sim Exp(1/2)$ και $\Theta \sim U(0,2\pi)$. Πράγματι, θεωρώντας τον μετασχηματισμό

$$(r,\theta) = \big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big) = \left(x^2+y^2, \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$(\boldsymbol{g}: R^2\backslash\{(0,0)\} \rightarrow (0,\infty)\times[0,2\pi))$$

με αντίστροφο μετασχηματισμό τον

$$(x,y) = \big(h_1(r,\theta), h_2(r,\theta)\big) = \big(\sqrt{r}\cos\theta\,, \sqrt{r}\sin\theta\big)$$

προκύπτει ότι η σ.π.π. του ζεύγους (R^2,Θ) θα είναι

$$f_{(R^2,\Theta)}(r,\theta) = f_{(X,Y)}\big(h_1(r,\theta), h_2(r,\theta)\big)\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= f_{(X,Y)}\big(\sqrt{r}\cos\theta\,, \sqrt{r}\sin\theta\big)\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r}\cos\theta & \frac{\partial}{\partial \theta}\sqrt{r}\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r}\sin\theta & \frac{\partial}{\partial \theta}\sqrt{r}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\cos\theta & -r^{\frac{1}{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\sin\theta & r^{\frac{1}{2}}\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\cos\theta \cdot r^{\frac{1}{2}}\cos\theta + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\sin\theta \cdot r^{\frac{1}{2}}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$= f_{(R^2)}(r) f_{(\Theta)}(\theta), \qquad r > 0, \theta \in [0,2\pi).$$

Άρα, $R^2 \sim Exp(1/2), \Theta \sim U(0,2\pi)$ και R^2, Θ ανεξάρτητες. Συνεπώς, αν πάρουμε τυχαία ένα σημείο στο επίπεδο με πολικές συντεταγμένες (R,Θ) ώστε $R^2 \sim Exp(1/2)$, $\Theta \sim U(0,2\pi)$ ανεξάρτητες τ.μ., τότε το σημείο αυτό έχει καρτεσιανές συντεταγμένες $(X,Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ οι οποίες κατανέμονται στο επίπεδο σύμφωνα με τη διδιάστατη τυπική κανονική. Η συγκεκριμένη παρατήρηση μας υποδεικνύει έναν εναλλακτικό τρόπο παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κανονική κατανομή χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς από την εκθετική και την ομοιόμορφη. Ο σχετικός αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την $N(\mu, \sigma^2)$, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $R^2 = -2\ln U_1$ (δηλ. $Y \sim Exp(1/2)$)

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U_2 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $\Theta = 2\pi U_2$ (δηλ. $\Theta \sim U(0,2\pi)$)

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $X = R\cos\Theta$ και $Y = R\sin\Theta$. $(X, Y \sim N(0,1))$

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $X_1 = \mu + \sigma X$, $X_2 = \mu + \sigma Y$.

Η πιο συνοπτικά:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1, U_2 \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X_1 = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$, και

$X_2 = \mu + \sigma\sqrt{-2\pi \ln U_1}\sin(2\pi U_2)$

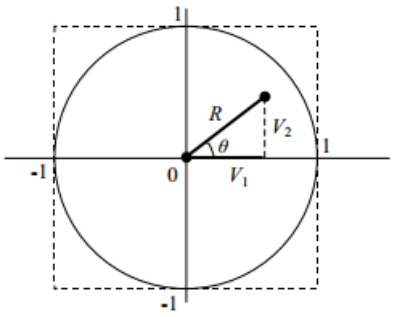
Είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει δύο τυχαίους αριθμούς από την $N(\mu,\sigma^2)$ και χρειάζεται μόνο δύο τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη. Συγκρινόμενος με τον αλγόριθμο που προκύπτει από τη μέθοδο αντιστροφής, ο συγκεκριμένος απαιτεί λιγότερα βήματα αλλά προϋποθέτει τον υπολογισμό ενός ημίτονου και ενός συνημίτονου (που θεωρείται χρονοβόρος). Για το λόγο αυτό έχει προταθεί μία τροποποίηση του παραπάνω αλγορίθμου ώστε να παρακάμπτονται οι συγκεκριμένοι υπολογισμοί. Συγκεκριμένα, αν παράγουμε ζεύγη V_1, V_2 ανεξάρτητων τ.μ. ώστε $V_1, V_2 \sim U(-1,1)$ μέχρι να βρεθεί ότι $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ (δηλαδή μέχρι το (V_1, V_2) να ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο), τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι το σημείο (V_1, V_2) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον μοναδιαίο κύκλο. Συνεπώς, αν (R', Θ') οι πολικές του συντεταγμένες, θα ισχύει ότι

$$f_{(R'^2,\Theta')}(r,\theta) = f_{(V_1,V_2)}\big(h_1(r,\theta), h_2(r,\theta)\big)\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= f_{(V_1,V_2)}\big(\sqrt{r}\cos\theta\,, \sqrt{r}\sin\theta\big)\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}, \qquad r \in (0,1), \qquad \theta \in (0,2\pi).$$

και άρα οι R', Θ' είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $R'^2 \sim U(0,1), \Theta' \sim U(0,2\pi)$. Στον παραπάνω αλγόριθμο είδαμε ότι χρειαζόμαστε το ημίτονο και το συνημίτονο μιας ομοιόμορφα κατανεμημένης στο (0,2π) γωνίας. Η Θ' είναι μία τέτοια γωνία, και μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο και συνημίτονό της εύκολα επειδή γνωρίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (V_1, V_2) του σημείου που προέρχεται. Συγκεκριμένα, θα είναι

$$\sin\Theta' = \frac{V_2}{R'} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \qquad \cos\Theta' = \frac{V_1}{R'} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$



Άρα συνοψίζοντας, αν παράγουμε V_1, V_2 ομοιόμορφα κατανεμημένους στο $(-1,1)$ τυχαίους αριθμούς έως ότου το (V_1, V_2) βρεθεί εντός του μοναδιαίου κύκλου, και στη συνέχεια θέσουμε

$$R'^2 = V_1^2 + V_2^2, \qquad \sin\Theta' = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \qquad \cos\Theta' = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

είναι ανεξάρτητες με $R'^2 \sim U(0,1)$, και $\Theta' \sim U(0,2\pi)$, δηλαδή μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε παραπάνω στη θέση των U_1 και Θ αντίστοιχα. Ο νέος αλγόριθμος τώρα θα έχει τη μορφή

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $V_1 = 2U_1 - 1, V_2 = 2U_2 - 1$.

ΒΗΜΑ 2. Αν $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ τότε προχωράμε στο **ΒΗΜΑ 3**. Διαφορετικά, πάμε πάλι στο **ΒΗΜΑ 1.**

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $R^2 = V_1^2 + V_2^2$

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $X_1 = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln R^2}\frac{V_1}{R}$, και $X_2 = \mu + \sigma\sqrt{-2\pi\ln R^2}\frac{V_2}{R}$.

Η παραπάνω μέθοδος καλείται πολική μέθοδος. Ο νέος αυτός αλγόριθμος είναι τώρα φανερά καλύτερος από τον αντίστοιχο της μεθόδου απόρριψης. Χρειάζεται κατά μέσο όρο $4/\pi \approx 1.273$ επαναλήψεις ($P(V_1^2 + V_2^2 \leq 1) = \pi/4$) και για κάθε δύο τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη, παράγει δύο τυχαίους αριθμούς από την κανονική. Η μέθοδος της απόρριψης χρειαζόταν κατά μέσο όρο 1.31549 επαναλήψεις και για κάθε τρεις τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη, παρήγαγε έναν τυχαίο αριθμό από την κανονική.

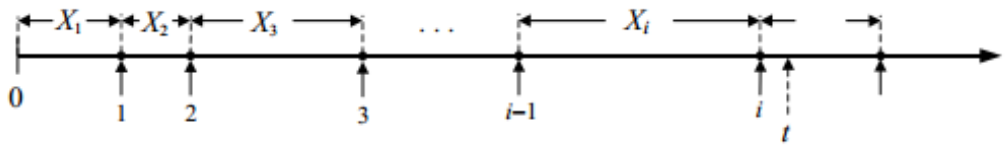
5.4. Προσομοίωση ανέλιξης Poisson.

Στην περίπτωση που η ένταση της διαδικασίας είναι σταθερή, δηλαδή $\lambda(t) = \lambda$, τότε η αντίστοιχη διαδικασία καλείται ομογενής διαδικασία Poisson. Σε κάθε απειροστό διάστημα μήκους h η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συμβάντος είναι σταθερή. Επίσης ισχύει ότι

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

δηλαδή οι προσαυξήσεις της διαδικασίας σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους s ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λs. Επιπλέον, όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, οι ενδιάμεσοι χρόνοι (ή διαστήματα) μεταξύ διαδοχικών

συμβάντων είναι ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Με βάση αυτή την τελευταία παρατήρηση, θα επιχειρήσουμε να προσομοιώσουμε μία διαδικασία Poisson σε ένα διάστημα $[0, t_0]$. Έστω λοιπόν $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τ.μ. από την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Η τ.μ. X_i μπορεί να θεωρηθεί ως ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ του $i-1$ και του i διαδοχικού συμβάντος.



Η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ καθορίζεται από τους διαδοχικούς χρόνους πραγματοποίησης συμβάντων, δηλαδή τους χρόνους

$$X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3$$

Επομένως μπορούμε να προσομοιώσουμε ένα τμήμα μίας ομογενούς διαδικασίας Poisson $\{N(t),\ t \in [0, t_0]\}$ αν παράγουμε τυχαίους αριθμούς $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ και καταγράψουμε τους διαδοχικούς χρόνους συμβάντων $S_1, S_2, \ldots, S_{N(t_0)}$ στο διάστημα $[0, t_0]$:

$$\left\{ S_j = \sum_{i=1}^{j} X_j\,, \qquad j \geq 1 : S_j \leq t_0 \right\}$$

Ο σχετικός αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $t = 0;\ N = 0;$

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U \sim U(0,1)$ και θέτουμε $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$.

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $t = t + X$ και εάν $t > t_0$ σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο **ΒΗΜΑ 4**.

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $N = N + 1$ και $S(N) = t$

ΒΗΜΑ 5. Επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 2.**

Στον παραπάνω αλγόριθμο, η μεταβλητή t εκφράζει το χρόνο και η N εκφράζει το πλήθος των συμβάντων έως το χρόνο $t(N(t))$. Η τελευταία τιμή της N είναι ίση με το

$N(t_0)$ και οι τιμές $S(1), S(2), \ldots, S(N(t_0))$ που καταγράφονται είναι οι διαδοχικοί χρόνοι των συμβάντων.

Μία εναλλακτική μέθοδος προσομοίωσης μιας ομογενούς διαδικασίας Poisson βασίζεται στο εξής γνωστό αποτέλεσμα: δεδομένου ότι $N(t_0) = n$, οι (μη-διατεταγμένοι) χρόνοι των n συμβάντων στο $[0, t_0]$ είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν την ομοιόμορφη στο $(0, t_0)$ κατανομή. Επομένως, μπορούμε να παράγουμε μία ομογενή διαδικασία Poisson ως εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $N \sim Po(\lambda t_0)$.

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \ldots, U_N \sim U(0,1)$ και τους διατάσσουμε: $U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(N)}$.

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $S(i) = t_0 U_{(i)},\ i = 1,2, \ldots, N$

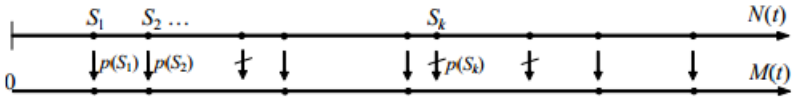
Στον παραπάνω αλγόριθμο, η τιμή της N είναι το $N(t_0)$ και οι τιμές $S(1), S(2), \ldots, S(N(t_0))$ είναι οι διαδοχικοί χρόνοι των συμβάντων. Ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι απλούστερος από τον προηγούμενο, διότι απαιτεί την παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Poisson (πράγμα όχι τόσο απλό) και επίσης απαιτεί τη διάταξη των U_i.

5.5. Μη ομογενής διαδικασία Poisson.

Η μη ομογενής διαδικασία Poisson αποτελεί γενίκευση της ομογενούς διαδικασίας. Στην περίπτωση αυτή, σε κάθε απειροστό διάστημα $(t, t + h)$ πραγματοποιείται ένα συμβάν με πιθανότητα $\lambda(t)h$ (που εξαρτάται από το t), ανεξάρτητα από τι έχει συμβεί στο παρελθόν. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε 3 μεθόδους προσομοίωσης.

5.5.1. Μέθοδος εκλέπτυνσης της ομογενούς διαδικασίας Poisson.

Η μέθοδος εκλέπτυνσης για την προσομοίωση μιας μη ομογενούς διαδικασίας Poisson βασίζεται στην παρατήρηση: Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση λ, και $\{M(t), t \geq 0\}$ μία διαδικασία η οποία καταμετρά το $i - συμβάν$ της $\{N(t), t \geq 0\}$ (το οποίο όπως είδαμε συμβαίνει στο χρόνο S_i) με πιθανότητα $p(S_i)$ (όπου $p(t), t > 0$, είναι μια δεδομένη συνάρτηση με τιμές στο $[0,1]$). Επίσης κάθε ένα συμβάν της ομογενούς καταμετράται ή όχι στην $\{M(t), t \geq 0\}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.



Αποδεικνύεται ότι η νέα διαδικασία $\{M(t), t \geq 0\}$ είναι μία μη ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda \cdot p(t)$. Επομένως μπορούμε να προσομοιώσουμε μία μη ομογενή διαδικασία Poisson βασιζόμενοι σε μία ομογενή διαδικασία Poisson. Συγκεκριμένα, αν παράγουμε $S(1), S(2), \ldots, S(N(t_0))$ διαδοχικούς χρόνους πραγματοποίησης συμβάντων μίας ομογενούς διαδικασίας Poisson με ένταση $\lambda \geq \lambda(t), t \geq 0$, και κρατήσουμε τον καθένα από αυτούς (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητες

$$\frac{\lambda(S(1))}{\lambda}, \frac{\lambda(S(2))}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda(S(N(t_0)))}{\lambda}, \qquad (\text{δηλαδή } p(t) = \lambda(t)/\lambda)$$

αντίστοιχα, τότε οι χρόνοι που θα γίνουν αποδεκτοί μπορούν να θεωρηθούν ως οι χρόνοι πραγματοποίησης συμβάντων μιας διαδικασίας Poisson με ένταση $\lambda(t)$. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος για ένα διάστημα $[0, t_0]$ και ένταση $\lambda(t)$ είναι ο ακόλουθος:

Θέτουμε $\lambda = \sup\{\lambda(t): t \in [0, t_0]\}$.

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $t = 0$; $N = 0$;

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$ και θέτουμε $X = -\frac{1}{\lambda} \ln U_1$.

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $t = t + X$ και εάν $t > t_0$ σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο **ΒΗΜΑ 4**.

ΒΗΜΑ 4. Παράγουμε $U_2 \sim U(0,1)$ και αν $U_2 < \lambda(t)/\lambda$ θέτουμε $N = N + 1$ και $S(N) = t$

ΒΗΜΑ 5. Επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 2**.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι όταν το $\lambda(t)$ είναι αρκετά μικρότερο του λ, ο αλγόριθμος απορρίπτει πολλούς από τους τυχαίους χρόνους που παράγονται από την βοηθητική ομογενή διαδικασία. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου $\lambda(t) = t$, στο διάστημα [0, 0.5] απορρίπτεται πάνω από το 95% των αριθμών που παράγονται. Για να αποφύγουμε μια τόσο μεγάλη σπατάλη χρόνου, μια λύση είναι να χωρίσουμε το διάστημα $[0, t_0]$ σε μικρότερα διαστήματα και να προσομοιώσουμε την μη ομογενή διαδικασία Poisson ξεχωριστά στο καθένα από αυτά. Λόγω του ότι η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις (και άρα το τι συμβαίνει σε ένα διάστημα

είναι ανεξάρτητο από το τι συμβαίνει στα υπόλοιπα διαστήματα), μπορούμε στο τέλος να ενώσουμε όλα τα σύνολα με τους χρόνους από τα ξεχωριστά διαστήματα σε ένα σύνολο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει τους χρόνους συμβάντων μιας διαδικασίας Poisson στο $[0, t_0]$. Με αυτό τον τρόπο το πλήθος των απορριφθέντων αριθμών γίνεται μικρότερο γιατί σε κάθε υποδιάστημα $A \subseteq [0, t_0]$ η αντίστοιχη πιθανότητα αποδοχής μιας τιμής

$$\lambda(t)/\lambda_A = \lambda(t)/\max\{\lambda(t), t \in A\}$$

είναι προφανώς μεγαλύτερη από την πιθανότητα

$$\lambda(t)/\lambda = \lambda(t)/\max\{\lambda(t), t \in [0, t_0]\}$$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση που θεωρήσουμε ολόκληρο το διάστημα $[0, t_0]$. Έτσι θα πρέπει να χωρίσουμε το $[0, t_0]$ σε κατάλληλα υποδιαστήματα ώστε σε καθένα από αυτά η ένταση $\lambda(t)$ να είναι περίπου σταθερή. Από την μία λοιπόν η θεώρηση του αλγορίθμου σε μικρότερα διαστήματα αυξάνει την πιθανότητα αποδοχής $\lambda(t)/\lambda_A$ αλλά από την άλλη όμως, αν πάρουμε πολλά διαστήματα θα χάσουμε χρόνο ξεκινώντας έναν αλγόριθμο παραγωγής τυχαίων χρόνων σε καθένα από αυτά (χρειαζόμαστε τουλάχιστον μία εκθετική τ.μ. ακόμη και αν τελικά δεν παραχθεί κανένα συμβάν στο υποδιάστημα). Συνεπώς, χρειάζεται προσοχή στην εκλογή της βέλτιστης διαμέρισης του $[0, t_0]$ η οποία προφανώς εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης έντασης $\lambda(t)$. Κάτι επιπλέον που μπορούμε να κάνουμε για να μην χάνουμε άσκοπα τυχαίους αριθμούς είναι οι εκθετικές τ.μ. που υπερβαίνουν το όριο του υποδιαστήματος να μετασχηματίζονται κατάλληλα (χρησιμοποιώντας την αμνήμονη ιδιότητα της κατανομής αυτής) και να χρησιμοποιούνται στο επόμενο υποδιάστημα.

5.5.2. Η μέθοδος παραγωγής των ενδιάμεσων χρόνων.

Μία άλλη μέθοδος προσομοίωσης μιας μη ομογενούς διαδικασίας Poisson βασίζεται, όμοια με την ομογενή περίπτωση, στην παραγωγή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ συμβάντων. Στην μη ομογενή περίπτωση οι ενδιάμεσοι χρόνοι $X_1, X_2, \ldots$ προφανώς δεν είναι ανεξάρτητοι εκθετικοί αλλά παρόλα αυτά μπορούμε γνωρίζοντας τους i πρώτους να παράγουμε τον $i + 1$. Συγκεκριμένα, αν

$$S(i) = X_1 + X_2 + \ldots + X_i$$

ισχύει ότι

$F_s(x) = P(X_i \leq x | S(i) = s) = P(N(x+s) - N(s) \geq 1 | S(i) = s) = P(N(x+s) - N(s) \geq 1)$ (λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων) $= 1 - P(N(x+s) - N(s) = 0) = 1 - e^{-\int_s^{s+x} \lambda(t)dt} \frac{\left(\int_s^{s+x} \lambda(t)dt\right)^0}{0!} = 1 - e^{-\int_s^{s+x} \lambda(t)dt}$

Επομένως μπορούμε να παράγουμε πρώτα τον χρόνο $X_1 \sim F_0$, δεδομένου αυτού να παράγουμε το $X_2 \sim F_{S(1)}$, δεδομένου αυτού να παράγουμε το $X_3 \sim F_{S(2)}$ κ.ο.κ. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $t = 0$; $N = 0$;

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $X \sim F_{S(N)}$.

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $t = t + X$ και εάν $t > t_0$ σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο **ΒΗΜΑ 4.**

ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $N = N + 1$ και $S(N) = t$

ΒΗΜΑ 5. Επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 2**.

Μία ενδεχόμενη δυσκολία αυτού του αλγορίθμου βρίσκεται στην παραγωγή του X. Ανάλογα με την περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει π.χ. με την μέθοδο της αντιστροφής ή την μέθοδο της απόρριψης.

5.5.3. Η μέθοδος μετασχηματισμού της ομογενούς διαδικασίας Poisson.

Η τελευταία αυτή μέθοδος βασίζεται στην εξής πρόταση:

Πρόταση. Αν $\{N(t), t \in A\}$ είναι μία διαδικασία Poisson στο διάστημα A με ένταση $\lambda(t)$ και σημεία συμβάντων $S(1), S(2), \ldots$, και $g: A \to R$ είναι μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση με $g(0) = 0$, για την οποία υπάρχει η παράγωγος της g^{-1}, η διαδικασία $\{M(t), t \in B\}$ που έχει ως σημεία συμβάντων τα $g(S(1)), g(S(2)), \ldots$, είναι και αυτή μία διαδικασία Poisson στο $g(A)$ με ένταση

$$\lambda'(t) = \lambda\left(g^{-1}(t)\right) \frac{dg^{-1}(t)}{dt}$$

Εάν λοιπόν επιθυμούμε να προσομοιώσουμε μία μη ομογενή διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(t)$, τότε αρκεί να προσομοιώσουμε μία ομογενή με ένταση λ και να μετασχηματίζουμε τους χρόνους συμβάντων σύμφωνα με μία συνάρτηση g για την οποία θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lambda(t) = \lambda \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{dg^{-1}(t)}{dt} = \frac{\lambda(t)}{\lambda} \Leftrightarrow g^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\lambda(t)}{\lambda} dx = \frac{\Lambda(t)}{\lambda}$$

Αν η ομογενής διαδικασία είναι στο $[0, a]$, η παραγόμενη μη ομογενής θα είναι στο $[0, g(a)]$. Οπότε, αν επιθυμούμε η μη ομογενής να είναι στο $[0, t_0]$ θα πρέπει να θεωρήσουμε την βοηθητική ομογενή στο $[0, g^{-1}(t_0)]$. Συνεπώς, για την ομογενή θα παραχθούν κατά μέσο όρο

$$\lambda \cdot g^{-1}(t_0) = \lambda \cdot \int_0^{t_0} \frac{\lambda(t)}{\lambda} dx = \int_0^{t_0} \lambda(t) dx = \Lambda(t_0)$$

τυχαίοι αριθμοί (χρόνοι συμβάντων), όσοι δηλαδή αντιστοιχούν και στη μη ομογενή. Συνοψίζοντας, ο αντίστοιχος αλγόριθμος προσομοίωσης μιας μη ομογενούς διαδικασίας Poisson με ένταση $\lambda(t)$ στο διάστημα $[0, t_0]$ θα είναι (λαμβάνουμε $\lambda = 1$):

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε $S(1), S(2), \dots S(N(\Lambda(t_0)))$ τους χρόνους συμβάντων μιας ομογενούς διαδικασίας Poisson με ένταση 1 στο διάστημα $[0, \Lambda(t_0)]$.

ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $S'(i) = \Lambda^{-1}\big(S(i)\big), \qquad i = 1, 2, \dots, N(\Lambda(t_0))$.

Οι χρόνοι συμβάντων $S'(i)$ μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από την ζητούμενη μη ομογενή διαδικασία.

6. Προσομοίωση Στοχαστικών Μοντέλων σε Διακριτό Χρόνο

Η μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου που εξελίσσεται στο χρόνο μπορεί εναλλακτικά να πραγματοποιηθεί «πειραματικά», παρακολουθώντας έναν μεγάλο αριθμό πραγματοποιήσεών του με τη χρήση κατάλληλης εικονικής αναπαράστασης του μέσα σε έναν Η/Υ. Μία δυσκολία που εμφανίζεται άμεσα εδώ είναι η δυσκολία αναπαράστασης του «συνεχούς» του χρόνου μέσα στον οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο. Μία πρώτη προσεγγιστική λύση θα ήταν να επιλέξουμε όσο το δυνατόν περισσότερα χρονικά σημεία που απέχουν απειροελάχιστα μεταξύ τους και να θεωρήσουμε ότι το εικονικό φαινόμενο αλλάζει καταστάσεις μόνο πάνω σε αυτά («διακριτοποίηση» του χρόνου). Προφανώς, όσο περισσότερα σημεία επιλέξουμε, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του πραγματικού από το εικονικό φαινόμενο. Από την άλλη όμως, η αύξηση του αριθμού των χρονικών σημείων, αυξάνει και τον χρόνο προσομοίωσης, κάτι που δεν είναι επιθυμητό διότι στον ίδιο διαθέσιμο χρόνο θα πρέπει να επαναλάβουμε το εικονικό πείραμα λιγότερες φορές (και άρα να εξάγουμε λιγότερο «ασφαλή» συμπεράσματα).

Μία εναλλακτική αντιμετώπιση του προβλήματος μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα που αλλάζουν κατάσταση σε διακριτές χρονικές στιγμές (ενώ ενδιάμεσα από αυτές μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκονται σε σταθερή κατάσταση) ή σε μοντέλα που μας αρκεί να γνωρίζουμε την κατάστασή τους σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία. Σύμφωνα με αυτή την αντιμετώπιση (discrete event simulation approach), θα πρέπει, κατά την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου, να παρακολουθούμε κάποιες **μεταβλητές** οι οποίες γενικά μπορεί να είναι:

1. Ο **χρόνος t** από την έναρξη της εξέλιξης του φαινομένου.

2. **Μεταβλητές κατάστασης (SS)**, οι οποίες επαρκούν για την περιγραφή της κατάστασης του φαινομένου την χρονική στιγμή t.

3. **Μεταβλητές απαρίθμησης συμβάντων**, οι οποίες δείχνουν το πλήθος των πραγματοποιήσεων (π.χ. έως το χρόνο t) διαφόρων ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν για την μελέτη του φαινομένου.

Οι τιμές των μεταβλητών αυτών αλλάζουν τιμή μόνο σε διακριτά χρονικά σημεία. Όπως είναι προφανές, δεν μπορεί να δοθεί ένας γενικός αλγόριθμος προσομοίωσης τέτοιων συστημάτων αλλά θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να προχωρούμε σε μία adhoc σχεδίαση αλγορίθμου ανάλογα με το φαινόμενο. Στη συνέχεια, για να γίνουν

περισσότερο κατανοητές οι βασικές αρχές της συγκεκριμένης προσέγγισης, θα εξετάσουμε την προσομοίωση διαφορετικών στοχαστικών μοντέλων που εξελίσσονται στο χρόνο όπως ενός συστήματος εξυπηρέτησης, ενός συστήματος ελέγχου αποθεμάτων, ενός συστήματος αξιοπιστίας και μιας χρηματιστηριακής αγοράς.

6.1. Συστήματα Εξυπηρέτησης

Μία πολύ μεγάλη κατηγορία μοντέλων που συναντώνται αρκετά συχνά σε εφαρμογές και που γενικά είναι δύσκολο να μελετηθούν με αναλυτικές μεθόδους είναι τα συστήματα εξυπηρέτησης (π.χ. πελάτες σε μία τράπεζα, αιτήσεις προγραμμάτων σε έναν διακομιστή (server), κατασκευή προϊόντων σε μία σειριακή παραγωγική διαδικασία, εισαγωγή αυτοκινήτων σε συνεργείο, εισαγωγή ασθενών σε νοσοκομείο κ.ο.κ). Μία γενική περιγραφή τέτοιων συστημάτων είναι η ακόλουθη:

Θεωρούμε ότι «πελάτες» (π.χ. πελάτες τράπεζας, αιτήσεις προγραμμάτων, προϊόντα κ.ο.κ) εισέρχονται σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και απαιτούν ένα είδος εξυπηρέτησης. Το σύστημα αποτελείται από έναν ή περισσότερους υπηρέτες (σημεία εξυπηρέτησης) και τις περισσότερες φορές υπάρχει και ένας χώρος αναμονής. Ο κάθε πελάτης εισέρχεται στο σύστημα σύμφωνα με κάποια στοχαστική διαδικασία (που στην συνέχεια θα θεωρούμε πως οι χρόνοι αφίξεων αποτελούν μία μη-ομογενη διαδικασία Poisson με σ.π.π $\lambda(t), t > 0$), και αν υπάρχει διαθέσιμος υπηρέτης τότε αρχίζει η εξυπηρέτησή του (η διάρκεια της οποίας θεωρείται τυχαία μεταβλητή). Όταν αυτή ολοκληρωθεί αποχωρεί από το σύστημα. Αν δεν υπάρχει διαθέσιμος υπηρέτης (π.χ. διότι οι υπηρέτες εξυπηρετούν προηγούμενους πελάτες) τότε ο πελάτης περιμένει στο χώρο αναμονής (στην «ουρά») μέχρι να ελευθερωθεί κάποιος υπηρέτης. Ένα χαρακτηριστικό της ουράς που σχηματίζεται είναι η προτεραιότητα εξυπηρέτησης (πειθαρχεία ουράς). Η συνηθέστερη πειθαρχεία ουράς είναι η FCFS (First-Come-First-Served) σύμφωνα με την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά που έφθασαν στο σύστημα. Άλλες πειθαρχίες ουράς είναι π.χ. η LCFS (Last-Come-First-Served), η SIRO (Service-In-Random-Order) και η SSTF (Shortest-Service-Time-First).

Στην συνέχεια, στην προσομοίωση των συστημάτων εξυπηρέτησης, τη διαδικασία αφίξεων (ή την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών $T_1, T_2, \ldots$) θα την συμβολίζουμε με T_s και θα αποτελούν μία μη-ομογενη διαδικασία Poisson με σ.π.π $\lambda(t), t > 0$. Έτσι θα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω υπό-αλγόριθμος για την παράγωγη της τιμής της T_s, οπού s αντιπροσωπεύει το χρόνο της πρώτης άφιξης μετά από το χρόνο s.

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $t = s$.

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $U \sim U(0,1)$ και θέτουμε $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U_1$.

ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $t = t - \frac{1}{\lambda}\ln U$

ΒΗΜΑ 4. Παράγουμε $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 5. Αν $U \leq \lambda(t)/\lambda$, θέτουμε $T_s = t$ και σταματάμε.

ΒΗΜΑ 6. Επιστρέφουμε στο **ΒΗΜΑ 2**.

6.1.1. Σύστημα Αναμονής με Έναν Εξυπηρετητή.

Θεωρούμε ότι οι πελάτες εισέρχεται στο σύστημα σύμφωνα με την μη-ομογενη διαδικασία Poisson (δηλ. οι χρόνοι αφίξεων αποτελούν μία μη-ομογενη διαδικασία Poisson με σ.π.π $\lambda(t), t > 0$), και ότι υπάρχει μόνο ένας διαθέσιμος υπηρέτης. Αν ο υπηρέτης δεν είναι διαθέσιμος τότε ο πελάτης περιμένει στο χώρο αναμονής (στην «ουρά») μέχρι να ελευθερωθεί. Στην ουρά που σχηματίζεται η προτεραιότητα εξυπηρέτησης είναι η FCFS (First-Come-First-Served) σύμφωνα με την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά που έφθασαν στο σύστημα. Ο χρόνος που χρειάζεται ο υπηρέτης για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη είναι τ.μ. με σ.κ. G, ανεξάρτητη από άλλους διαδοχικούς χρόνους εξυπηρέτησης καθώς και από την διαδικασία αφίξεων. Επίσης, έχει ορισθεί και ένας χρόνος T μετά τον οποίον δεν επιτρέπεται άλλη άφιξη πελάτη στο σύστημα (κλείσιμο της ουράς). Ωστόσο, ο υπηρέτης συνεχίζει να εξυπηρετεί και μετά από τον χρόνο T, οσους πελατες είναι ηδη στην ουρα.

Οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σε τέτοια συστήματα συνήθως να προσομοιώσουμε είναι (α) ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης χρειάζεται για να εξυπηρετηθεί και (β) ο μέσος χρόνος μετά τον χρόνο T που θα εξυπηρετηθεί και ο τελευταίος πελάτης, δηλ. ο μέσος χρόνος μετά από την στιγμή που θα 'κλείσει' η ουρά και ο υπηρέτης θα πάει 'σπίτι' του.

Για την προσομοίωση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες μεταβλητές.

Τον **χρόνος t** άφιξης του n πελάτη (το σύστημα εξετάζεται βηματικά μόνο σε στιγμές αφίξεων πελατών)

Μεταβλητές κατάστασης (SS), n: ο αριθμός των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα (την χρονική στιγμή t)

Μεταβλητές απαρίθμησης συμβάντων, N_A: ο αριθμος των αφιξεων (μεχρι την χρονικη στιγμή t) , N_D: αριθμός των αναχωρήσεων (μέχρι την χρονική στιγμή t)

Οι παραπάνω ποσότητες μεταβάλλονται όταν έχουμε μια άφιξη ή μια αναχώρηση, δηλαδή ένα γεγονός. Η λίστα των γεγονότων (**EL event list**) περιέχει τον χρόνο της επόμενης άφιξης ή τον χρόνο της επόμενης αναχώρησης κατά την διάρκεια της εξυπηρέτησης. Έτσι μια λίστα από γεγονότα είναι

$$\boldsymbol{EL} = t_A, t_D$$

όπου t_A είναι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του n−1 και n πελάτη (όπου ακολουθεί την μη-ομογενη διαδικασία Poisson) δηλαδή ο χρόνος της επόμενης άφιξης (από την χρονική στιγμή t) και t_D η διάρκεια εξυπηρέτησης (από τον υπηρέτη) του n-πελάτη. Όταν από το σύστημα δεν εξυπηρετείται κανένας πελάτης τότε θέτουμε το $t_D = \infty$.

Το αποτέλεσμα των μεταβλητών που παίρνουμε κάθε φορά είναι

$A(i)$, ο χρόνος άφιξης του ο i – πελάτης

$D(i)$, ο χρόνος που θα αναχωρήσει ο i – πελάτης

T_p ο χρονο που χρειαζεται για να εξυπηρετηθει και ο τελευταιος πελατης της ουρας μετα τον χρονο Τα που το συστημα δεν δεχεται αλλους πελατες.

Για να ξεκινήσουμε την προσομοίωση αρχικοποιούμε το σύστημα ως εξής:

Αρχικοποίηση

Θέτουμε $t = N_A = N_D = 0$

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = 0$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_0 σύμφωνα με τον υπό-αλγοριθμο που είδαμε προηγουμένως και θέτουμε $t_A = T_0$ και $t_D = \infty$

Για να ενημερώσουμε το σύστημα κινούμαστε βηματικά (σε διακριτό χρόνο) μέχρι να συναντήσουμε το επόμενο γεγονός, (άφιξη ή αναχώρηση). Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με το ποιο είναι το μικρότερο μέλος της λίστας των γεγονότων. Επίσης, θεωρούμε Y την τ.μ. με σ.κ. G που αντιπροσωπεύει την διάρκεια εξυπηρέτησης.

$$t = o\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma, \qquad \boldsymbol{SS} = n, \qquad \boldsymbol{EL} = t_A, t_D$$

Περίπτωση 1: $t_A \leq t_D, t_A \leq T$

Θέτουμε $t = t_A$

Θέτουμε $N_A = N_A + 1$

Θέτουμε $n = n + 1$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_t και θετουμε $t_A = T_t$

Αν $n = 1$, παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y και θέτουμε $t_D = t + Y$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $A(N_A) = t$

Περίπτωση 2: $t_A < t_D, t_D \leq T$

Θέτουμε $t = t_D$

Θέτουμε $n = n - 1$

Θέτουμε $N_D = N_D + 1$

Αν $n = 0$, θέτουμε $t_D = \infty$, διαφορετικά παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y και θέτουμε $t_D = t + Y$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $D(N_D) = t$

Περίπτωση 3: $\min(t_A t_D) > T,\ n > 0$

Θέτουμε $t = t_D$

Θέτουμε $n = n - 1$

Θέτουμε $N_D = N_D + 1$

Αν $n > 0$, παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y και θέτουμε $t_D = t + Y$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $D(N_D) = t$

Περίπτωση 4: $\min(t_A t_D) > T,\ n = 0$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $T_p = max(t - T, 0)$ και σταματησε.

6.1.2. Σύστημα Αναμονής με Δυο Εξυπηρετητές σε Σειρά.

Έστω ένα σύστημα δύο εξυπηρετητών στο οποίο οι πελάτες φθάνουν με αφίξεις μη-ομογενη Poisson ρυθμού λ στον πρώτο εξυπηρετητή. Μετά την εξυπηρέτησή τους από τον πρώτο εξυπηρετητή, πηγαίνουν στη δεύτερη ουρά του δεύτερου εξυπηρετητή. Θεωρούμε άπειρο χώρο αναμονής και στους δύο εξυπηρετητές. Ο

χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε εξυπηρετητής i ακολουθεί την κατανομή $G_i, i = 1,2.$ Ένα σύστημα αναμονής όπως αυτό ονομάζεται tandem ή sequential system

Δεδομένου ότι η έξοδος από τον πρώτο εξυπηρετητή αποτελεί μη ομογενής διαδικασία Poisson, συνεπάγεται ότι ο δεύτερος εξυπηρετητής αποτελεί ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή όπως είδαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Επίσης ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στον εξυπηρετητή 1 είναι ανεξάρτητος του χρόνου αναμονής στον εξυπηρετητή 2.

Στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε την κατανομή της διάρκειας εξυπηρέτησης κάθε πελάτης από τους υπηρέτες 1 και 2 με την βοήθεια της προσομοίωσης εισάγουμε τις ακόλουθες μεταβλητές.

Τον **χρόνος t** άφιξης του n πελάτη

Μεταβλητές κατάστασης (SS) (n_1, n_2) οπου n_1 είναι οι πελατες που εξυπηρετουνται ή βρισκονται στην ουρα του υπηρετη 1 και n_2 που εξυπηρετουνται ή βρισκονται στην ουρα του υπηρετη 2.

Μεταβλητές απαρίθμησης συμβάντων

N_A: ο αριθμος των αφιξεων (μεχρι την χρονικη στιγμη t) , N_D: αριθμός των αναχωρήσεων (μέχρι την χρονική στιγμή t)

Μεταβλητές καταγραφής

$A_1(n)$ ο χρόνος άφιξης του n-οστού πελάτη $n \geq 1$

$A_2(n)$ ο χρόνος άφιξης του n-οστού πελάτη στον υπηρέτη 2, $n \geq 1$

$D(n)$ ο χρόνος αναχώρησης του n-οστού πελάτη $n \geq 1$

Λίστα Γεγονότων

t_A ο χρόνος της επόμενης άφιξης, t_i η διάρκεια ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης από τον i υπηρέτη του τρέχοντος πελάτη, $i = 1,2,$ Όταν και οι δυο υπηρέτες του συστήματος δεν εξυπηρετούν κανένας πελάτης τότε θέτουμε το $t_i = \infty$. Κατά συνέπεια η λίστα των γεγονότων αποτελείται πάντα από τρεις μεταβλητές t_A, t_1, t_2.

Για να ξεκινήσουμε την προσομοίωση αρχικοποιούμε το σύστημα μας ως εξής:

Αρχικοποίηση

Θέτουμε $t = N_A = N_D = 0$

Θετού $\boldsymbol{SS} = (0,0)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_0 συμφωνα με τον υπο-αλγοριθμο και θετουμε $t_A = T_0$ και $t_1 = t_2 = \infty$

Κινούμενοι στον χρόνο, ενημερώνουμε το σύστημα όταν συναντήσουμε το επόμενο γεγονός (άφιξη ή αναχώρηση). Έτσι, θεωρούμε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με το ποιο είναι το μικρότερο μέλος της λίστας των γεγονότων. Επίσης, θεωρούμε Y_i τις τ.μ. με σ.κ. G_i που αντιπροσωπευει την διαρκεια εξυπηρέτησης σε κάθε υπηρέτη $i, i = 1,2$.

$$t = o\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma, \qquad \boldsymbol{SS} = (n_1, n_2), \qquad \boldsymbol{EL} = t_A, t_1, t_2$$

Περίπτωση 1: $t_A = min(t_A, t_1, t_2)$

Θέτουμε $t = t_A$

Θέτουμε $N_A = N_A + 1$

Θέτουμε $n_1 = n_1 + 1$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_t και θέτουμε $t_A = T_t$

Αν $n = 1$, παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_1 και θέτουμε $t_1 = t + Y_1$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $A_1(N_A) = t$

Περίπτωση 2: $t_1 < t_A, t_1 \leq t_2$

Θέτουμε $t = t_1$

Θέτουμε $n_1 = n_1 - 1, n_2 = n_2 + 1$

Αν $n_1 = 0$, θέτουμε $t_1 = \infty$, διαφορετικά παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_1 και θέτουμε $t_1 = t + Y_1$

Αν $n_2 = 1$, παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_2 και θέτουμε $t_2 = t + Y_2$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $A_2(N_A - n_1) = t$

Περίπτωση 3: $t_2 < t_A, t_2 < t_1$

Θέτουμε $t = t_2$

Θέτουμε $N_D = N_D + 1$

Θέτουμε $n_2 = n_2 - 1$

Αν $n_2 = 0$, θέτουμε $t_2 = \infty$

Αν $n_2 > 0$, παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_2 και θέτουμε $t_2 = t + Y_2$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $D(N_D) = t$.

6.1.3. Σύστημα Αναμονής με Δυο Παράλληλους Εξυπηρετητές.

Έστω ένα σύστημα δύο εξυπηρετητών, στο οποίο ένας πελάτης φθάνοντας μπαίνει στην ουρά αναμονής μόνο αν και οι δυο υπηρέτες είναι απασχολημένοι. Διαφορετικά εξυπηρετείται από τον διαθέσιμο υπηρέτη είτε αυτός είναι ο 1, είτε αυτός είναι ο 2. Μετά από την εξυπηρέτησή του ο πελάτης από τον i υπηρέτη αναχωρεί και ο επόμενος στην ουρά (αν υπάρχει) εξυπηρετείται από τον υπηρέτη που μόλις έγινε διαθέσιμος. Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε εξυπηρετητής i ακολουθει την κατανομη $G_i, i = 1,2$.

Στην προσομοίωση τέτοιων συστημάτων μας ενδιαφέρουν κυρίως ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών από το σύστημα και ο αριθμός των πελατών που έχει εξυπηρετήσει ο κάθε υπηρέτης. Είναι προφανές ότι, λόγω των πολλαπλών υπηρετών σε χρήση, οι πελάτες δεν αναχωρούν πάντα με την σειρά με την οποία αφίχθησαν στο σύστημα. Ως εκ τούτου, για να γνωρίζουμε ποιος πελάτης αναχωρεί από το σύστημα αφού θα έχει εξυπηρετηθεί, πρέπει να ξέρουμε ποιοι πελάτες είναι στο σύστημα κάθε φορά. Έτσι, έστω ο πελάτης νούμερο 1 είναι ο πελάτης που αφίχθηκε στο σύστημα πρώτος, ο πελάτης νούμερο 2 είναι ο πελάτης που αφίχθηκε στο σύστημα δεύτερος κ.ο.κ. Επειδή οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με την σειρά που αφίχθησαν στο σύστημα, συνεπάγεται ότι, γνωρίζοντας ποιοι πελάτες εξυπηρετούνται και πόσοι είναι στην ουρά, γνωρίζουμε και τους πελάτες σε αναμονή. Για παράδειγμα, έστω ότι εξυπηρετούνται ο i-οστος και ο j-οστος πελάτης όπου $i < j$ και υπαρχουν $n - 2 > 0$ ακόμα που περιμένουν στην ουρά. Επειδή οι πελάτες με αριθμό μικρότερο του j θα έχουν εξυπηρετηθεί πριν τον j-οστό πελάτη, έχει σαν αποτέλεσμα ότι κανένας πελάτης με αριθμό μεγαλύτερο από τον j θα έχει εξυπηρετηθεί. Άρα οι πελάτες που βρίσκονται στην ουρά και περιμένουν να εξυπηρετηθούν είναι οι $j + 1, \dots j + n - 2$.

Στην προσομοίωση του ανωτέρου συστήματος χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μεταβλητές.

Τον **χρόνος t** άφιξης του n πελάτη

Μεταβλητές κατάστασης (SS) (n, i_1, i_2) αν υπαρχουν n πελάτες στο σύστημα, i_1 είναι ο πελατης που εξυπηρετείται από τον υπηρέτη 1, i_2 είναι ο πελάτης που εξυπηρετείται από τον υπηρέτη 2. Σημειώνουμε πως $\boldsymbol{SS} = 0$ όταν το σύστημα είναι άδειο, $\boldsymbol{SS} = (1, j, 0)$ ή $(1,0, j)$ όταν ο μόνος πελάτης είναι ο j και εξυπηρετείται είτε από τον υπηρέτη 1, είτε από τον υπηρέτη 2 αντίστοιχα.

Μεταβλητές απαρίθμησης συμβάντων

N_A: ο αριθμός των αφίξεων (μέχρι την χρονική στιγμή t) ,

C_j: ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετήθηκαν από τον j υπηρέτη $j = 1,2$ (μέχρι την χρονική στιγμή t)

Μεταβλητές καταγραφής

$A(n)$ ο χρόνος άφιξης του n-οστού πελάτη $n \geq 1$

$D(n)$ ο χρόνος αναχώρησης του n-οστού πελάτη $n \geq 1$

Λίστα Γεγονότων t_A, t_1, t_2

t_A ο χρόνος της επόμενης άφιξης, t_i η διάρκεια ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης από τον i υπηρέτη του τρέχοντος πελάτη, $i = 1,2$, Όταν ο i υπηρέτης δεν εξυπηρετεί κανένας πελάτης τότε θέτουμε το $t_i = \infty, i = 1,2$. Κατά συνέπεια η λίστα των γεγονότων αποτελείται πάντα από τρεις μεταβλητές t_A, t_1, t_2.

Για να ξεκινήσουμε την προσομοίωση αρχικοποιούμε το σύστημα ως εξής:

Αρχικοποίηση

Θέτουμε $t = N_A = C_1 = C_2 = 0$

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (0,0)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_0 σύμφωνα με τον υπό-αλγόριθμο και θέτουμε $t_A = T_0$ και $t_1 = t_2 = \infty$

Κινούμενοι στον χρόνο ενημερώνουμε το σύστημα όταν συναντήσουμε το επόμενο γεγονός (άφιξη ή αναχώρηση). Επίσης, θεωρούμε Y_i τις τ.μ. με σ.κ. G_i που αντιπροσωπεύουν την διάρκεια εξυπηρέτησης σε κάθε i υπηρέτη, $i = 1,2$.

Περίπτωση 1: $\boldsymbol{SS} = (n, i_1, i_2), \quad t_A = min(t_A, t_1, t_2)$

Θέτουμε $t = t_A$

Θέτουμε $N_A = N_A + 1$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό T_t και θέτουμε $t_A = T_t$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $A(N_A) = t$

Αν $\boldsymbol{SS} = 0$:

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (1, N_A, 0)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_1 και θέτουμε $t_1 = t + Y_1$

Αν $\boldsymbol{SS} = (1, j, 0)$:

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (2, j, N_A)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_2 και θέτουμε $t_2 = t + Y_2$

Αν $\boldsymbol{SS} = (1,0, j)$:

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (2, N_A, j)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_1 και θέτουμε $t_1 = t + Y_1$

Αν $n > 1$

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (n + 1, i_1, i_2)$

Περίπτωση 2: $\boldsymbol{SS} = (n, i_1, i_2), \quad t_1 < t_A, t_1 \leq t_2$

Θέτουμε $t = t_1$

Θέτουμε $C_1 = C_1 + 1$

Συλλέγουμε τα δεδομένα $D(i_1) = t$

Αν $n = 1$

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (0)$

Θέτουμε $t_1 = \infty$

Αν $n = 2$

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (1,0, i_2)$

Θέτουμε $t_1 = \infty$

Αν $n > 2$, έστω $m = \max(i_1, i_2)$ και

Θέτουμε $\boldsymbol{SS} = (n - 1, m + 1, i_2)$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y_1 και θέτουμε $t_1 = t + Y_1$

Περίπτωση 3: $\boldsymbol{SS} = (n, i_1, i_2), \quad t_2 < t_A, t_2 < t_1$

και ενημερώνουμε το σύστημα ανάλογα.

6.2. Συστήματα ελέγχου αποθεμάτων

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε πως μπορούμε να προσομοιώσουμε ένα σχετικά απλό σύστημα ελέγχου αποθεμάτων. Θεωρούμε ότι ένα κατάστημα πωλεί ένα συγκεκριμένο προϊόν με τιμή r ανά μονάδα. Θεωρούμε επίσης ότι στο κατάστημα εισέρχονται πελάτες που ζητούν το προϊόν αυτό σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson έντασης λ, ενώ ο κάθε πελάτης ζητάει ποσότητα D του προϊόντος όπου D είναι τ.μ. με σ.κ. G. Για να είναι σε θέση να καλύψει τη ζήτηση, το κατάστημα διαθέτει μία ποσότητα του προϊόντος x (Inventory) και όποτε η ποσότητα αυτή πέσει κάτω από ένα όριο, παραγγέλνει νέα ποσότητα του προϊόντος (π.χ. από το εργοστάσιο παραγωγής του). Θεωρούμε ότι το κατάστημα εφαρμόζει μία πολιτική (s, S), δηλαδή όταν η διαθέσιμη ποσότητα στο κατάστημα πέσει κάτω από s, τότε γίνεται παραγγελία ποσότητας $S - x$ ώστε να ανέλθει η ποσότητα στο επίπεδο S $(s < S)$. Η παραγγελία ποσότητας y από το κατάστημα έχει κόστος $c(y)$ και φθάνει στο κατάστημα μετά από χρόνο L. Επίσης, η αποθήκευση του προϊόντος στο κατάστημα έχει κόστος h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Θεωρούμε τέλος ότι όταν ένας πελάτης ζητήσει ποσότητα μεγαλύτερη από την διαθέσιμη στο κατάστημα, τότε αγοράζει μόνο την διαθέσιμη ποσότητα και η υπόλοιπη χάνεται για το κατάστημα (δεν υπολογίζουμε το κόστος της απώλειας «καλής πίστης» λόγω της μη ικανοποίησης της ζήτησης). Σε ένα τέτοιο μοντέλο συνήθως είναι γνωστές οι ποσότητες:

λ: ο ρυθμός άφιξης πελατών,

G: η κατανομή της ποσότητας του προϊόντος που ζητά ένας πελάτης,

r: η τιμή πώλησης μιας μονάδας προϊόντος

L: ο χρόνος παράδοσης στο κατάστημα μιας παραγγελίας (π.χ. από το εργοστάσιο),

$c(y)$: η συνάρτηση κόστους που αντιστοιχεί σε παραγγελία ποσότητας y,

h: το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα προϊόντος, ενώ προφανώς είναι ζητούμενες οι ποσότητες:

s: το όριο s του διαθέσιμου προϊόντος κάτω από το οποίο γίνεται παραγγελία νέας ποσότητας

S: η μέγιστη ποσότητα του προϊόντος που αποθηκεύεται στο κατάστημα

Οι ποσότητες s, S χαρακτηρίζουν την πολιτική αποθεμάτων του καταστήματος και θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος του καταστήματος. Ας δούμε πως μπορούμε να προσομοιώσουμε ένα τέτοιο σύστημα με στόχο να βρούμε την βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής μεταβλητές.

Μεταβλητή χρόνου

t: ο χρόνος άφιξης του i πελάτη (το σύστημα εξετάζεται βηματικά μόνο σε στιγμές αφίξεων πελατών)

Μεταβλητές κατάστασης (στο χρόνο t) (x, y)**:**

όπου x η διαθέσιμη ποσότητα του προϊόντος στο κατάστημα και y η ποσότητα του προϊόντος που έχει παραγγείλει το κατάστημα (κατά την τελευταία παραγγελία) από το εργοστάσιο.

Μεταβλητές απαρίθμησης ή καταγραφής συμβάντων,

C το συνολικο κοστος των παραγγελιων εως το χρονο t

H το συνολικο κοστος του προϊόντος που αποθηκεύεται στο κατάστημα έως το χρόνο t

R, το καθαρό κέρδος του καταστήματος έως το χρόνο t

Λίστα γεγονότων

t_0 ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη

t_1 χρόνος παράδοσης της τελευταίας παραγγελίας

Αν δεν υπάρχει κάποια παραγγελία σε εξέλιξη τότε θέτουμε $t_1 = \infty$

Η ενημέρωση του συστήματος γίνεται σύμφωνα με το ποιος από τους χρόνους των γεγονότων είναι μικρότερος. Τέλος, αν βρισκόμαστε στην παρούσα χρονική στιγμή t και έχουμε τις τιμές των μεταβλητών που περιγράψαμε προηγουμένως, προχωρούμε στην επομένη χρονική στιγμή σύμφωνα με

Περίπτωση 1: $t_0 < t_1$

Θέτουμε $H = H + (t_0 - t)xh$

Θέτουμε $t = t_0$

Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό D, μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή G. D είναι η απαιτούμενη ποσότητα που θέλει ο πελάτης που φτάνει την χρονική στιγμή t_0.

Έστω $w = \min(D, x)$ η ποσότητα της παραγγελίας που μπορεί να εξυπηρετήσει το κατάστημα. Το απόθεμα που θα μείνει αφού εξυπηρετηθεί η παραγγελία θα είναι $x - w$

Θέτουμε $R = R + wr$

Θέτουμε $x = x - w$

Αν $x < s$ και $y = 0$ τότε θέτουμε $y = S - x, t_1 = t + L$.

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμός $U \sim U(0,1)$ και θέτουμε $t_0 = t - \frac{1}{\lambda} \ln U$

Περίπτωση 2: $t_1 \leq t_0$

Θέτουμε $H = H + (t_1 - t)xh$

Θέτουμε $t = t_1$

Θέτουμε $C = C + c(y)$

Θέτουμε $x = x + y$

Θέτουμε $y = 0,\ t_1 = \infty$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο μπορούμε να προσομοιώσουμε το σύστημα μας ώστε να το αναλύσουμε. Έτσι μπορούμε να τρέξουμε μια προσομοίωση μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός για κάποιον προκαθορισμένο χρόνο T και στην συνέχεια να υπολογίσουμε την ποσότητα $\frac{R-C-H}{T}$ για να εκτιμήσουμε το μέσο κέρδος του καταστήματος στην μονάδα του χρόνου. Κάνοντας αυτό για διάφορες τιμές των s και S μπορούμε καθορίσουμε μια αρκετά καλή πολιτική για τα αποθέματα του καταστήματος.

6.3. Προσομοίωση ανάλυσης ασφαλιστικού ρίσκου

Υποθέτουμε ότι κάποιοι ασφαλιζόμενοι μιας ασφαλιστικής εταιρίας έχουν απαιτήσεις έναντι της εταιρίας σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και το ποσό κάθε απαίτησης ακολουθεί μια τ.μ. με σ.κ. F. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι ασφαλιστική

εταιρία αποκτά νέους πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ν και πως οι ήδη ασφαλισμένοι στην εταιρία πελάτες παραμένουν στην εταιρία για χρονικό διάστημα που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ. Τέλος, υποθέτουμε ότι κάθε ασφαλισμένος πληρώνει στην ασφαλιστική εταιρία ένα σταθερό και καθορισμένο ποσό c ανά χρονική στιγμή (π.χ. μήνες). Ξεκινώντας η εταιρία με n_0 πελάτες και αρχικό κεφάλαιο $\alpha_0 \geq 0$, μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε με την βοήθεια της προσομοίωσης, την πιθανότητα το εταιρικό κεφάλαιο να είναι συνέχεια μη-αρνητικο για κάθε χρονική στιγμή μέχρι ένα χρόνο T.

Ορίζουμε τις ακόλουθες μεταβλητές και γεγονότα.

Μεταβλητή χρόνου t

Μεταβλητές κατάστασης (SS) (n, a)

όπου n είναι ο αριθμός των ασφαλισμένων και α το τρέχον εταιρικό κεφάλαιο.

Γεγονότα

Υπάρχουν τριών ειδών γεγονότα. Η εταιρία να αποκτήσει έναν νέο ασφαλισμένο, η εταιρία να χάσει έναν υπάρχον ασφαλισμένο της και κάποιος ασφαλισμένος να ζητήσει ένα ποσό σαν αποζημίωση.

Λίστα Γεγονότων EL t_E

Αν (n, a) είναι μια κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t τότε, επειδή το ελάχιστο των ανεξάρτητων τ.μ. που ακολουθούν την εκθετική κατανομή είναι επίσης τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ο χρόνος που θα συμβεί το επόμενο γεγονός είναι ίσος με $t + X$, όπου X είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό $\nu + n\mu + n\lambda$. Επίσης, ανεξάρτητα από το πότε συμβαίνει αυτό το γεγονός, έχουμε

Ένας νέος ασφαλισμένος, με πιθανότητα $\frac{\nu}{\nu+n\mu+n\lambda}$

Η αποχώρηση ενός ασφαλισμένου, με πιθανότητα $\frac{n\mu}{\nu+n\mu+n\lambda}$

Μια απαίτηση, με πιθανότητα $\frac{n\lambda}{\nu+n\mu+n\lambda}$

Από την στιγμή που έχουμε ορίσει πότε θα συμβεί το επόμενο γεγονός, παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό για να καθορίσουμε ποιες από τις τρεις πιθανότητες προκαλούνται

από το γεγονός, και στην συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτή την πληροφορία για να καθορίσουμε την νέα τιμή της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος.

Στην συνέχεια, για κάθε μεταβλητές κατάστασης (n, a), X θα είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό $\nu + n\mu + n\lambda$, J θα είναι μια τ.μ. με τιμή ίση με 1 με πιθανότητα $\frac{\nu}{\nu+n\mu+n\lambda}$, 2 με πιθανότητα $\frac{n\mu}{\nu+n\mu+n\lambda}$ ή 3 με πιθανότητα $\frac{n\lambda}{\nu+n\mu+n\lambda}$, Y μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή F του ποσού κάθε απαίτησης που έχει ένας ασφαλισμένος από την ασφαλιστική εταιρία. Τέλος, ορίζουμε την **μεταβλητή εξόδου *I*,**

$$I = \begin{cases} 1, & αν\ η\ εταιρία\ έχει\ μη - αρνητικό\ κεφάλαιο\ στο\ χρονικό\ διάστημα\ [0,t] \\ 0, & διαφοτερικά \end{cases}$$

Για να προσομοιώσουμε το σύστημα αρχικοποιούμε τις μεταβλητές ως εξής

Αρχικοποίηση

$$t = 0, \qquad a = a_0, \qquad n = n_0$$

παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό X και θέτουμε $t_E = X$

Ενημερώνουμε το σύστημα κάθε φορά που έχουμε ένα καινούργιο γεγονός, ελέγχοντας πρώτα αν έχουμε ξεπεράσει την χρονική στιγμή T.

Περίπτωση 1: $t_E > T$

Θέτουμε $I = 1$ και σταματάμε.

Περίπτωση 2: $t_E \leq T$

Θέτουμε $\alpha = \alpha + nc(t_E - t)$

Θέτουμε $t = t_E$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό J

Αν $J = 1$ θέτουμε $n = n + 1$

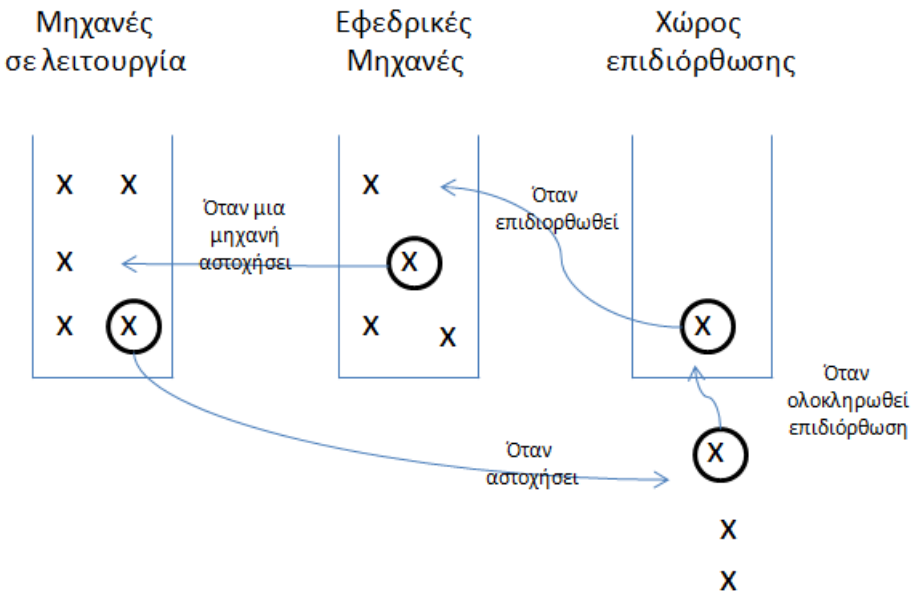
Αν $J = 2$ θέτουμε $n = n - 1$

Αν $J = 3$ Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό Y. Αν $Y > a$, θέτουμε $I = 0$ και σταματάμε, διαφορετικά θέτουμε $\alpha = \alpha - Y$

Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό X και θέτουμε $t_E = t + X$.

6.4. Προσομοίωση συστήματος αξιοπιστίας

Με τον όρο σύστημα αξιοπιστίας εννοούμε ένα πεπερασμένο σύνολο μηχανών εφοδιασμένο με μία συγκεκριμένη δομή. Κάθε μία από τις μηχανές του συστήματος είναι δυνατό να βρίσκεται σε μία από τις δυο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία (αστοχία). Όμοια, το σύστημα δύναται και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία (αστοχία). Το σύστημα χρειάζεται n μηχανές σε λειτουργία για να είναι και αυτό λειτουργικό. Για την αποφυγή της κατάρρευσης του συστήματος, αυτό είναι εφοδιασμένο με επιπλέον εφεδρικές μηχανές. Όταν κάποια στιγμή μια μηχανή σταματήσει να λειτούργει λόγω κάποιας αστοχίας, αυτομάτως αυτή αντικαθίσταται από μια εφεδρική μηχανή και πηγαίνει για επιδιόρθωση. Για την επιδιόρθωση των προβληματικών μηχανών υπάρχει μόνο ένας επιδιορθωτής, ο οποίος μπορεί να επιδιορθώσει μόνο μια μηχανή κάθε φορά. Όταν επιδιορθωθεί μια μηχανή τότε αυτή γίνεται εφεδρική ώστε να χρησιμοποιηθεί και πάλι όταν υπάρξει ανάγκη. Οι χρόνοι επιδιόρθωσης μιας μηχανής είναι ανεξάρτητες τ.μ. που έχουν κοινή σ.κ. G. Ο χρόνος που μια μηχανή είναι σε λειτουργιά μέχρι να αστοχήσει είναι μια τ.μ., ανεξάρτητη του παρελθόντος, που ακολουθεί μια κατανομή με σ.κ. F.



Το σύστημα καταρρέει όταν σταματήσει να λειτούργει μια μηχανή και δεν υπάρχει διαθέσιμη εφεδρική για να την αντικαταστήσει. Θεωρώντας ότι αρχικά υπάρχουν $n+s$ λειτουργικές μηχανές από τις οποίες οι n είναι σε λειτουργία και οι s είναι εφεδρικές, μας ενδιαφέρει να προσομοιώσουμε το σύστημα ώστε να εκτιμήσουμε τον

μέσο χρόνο λειτουργιάς του συστήματος, δηλαδή να εκτιμήσουμε την ποσότητα $E[T]$, όπου T είναι ο χρόνος που το σύστημα καταρρέει.

Για να προσομοιώσουμε το παραπάνω σύστημα χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες μεταβλητές.

Μεταβλητή χρόνου t

Μεταβλητές κατάστασης (SS) r

όπου r είναι ο αριθμός των μηχανών που βρίσκονται σε κατάσταση μη λειτουργιάς την χρονική στιγμή t.

Η κατάσταση του συστήματος αποτελείται από δυο γεγονότα, όταν μια μηχανή που βρίσκεται σε λειτουργία σταματήσει να λειτούργει ή όταν ολοκληρωθεί η επιδιόρθωση μιας μηχανής που είχε αστοχήσει. Για να γνωρίζουμε πότε θα συμβεί το επόμενο γεγονός, χρειάζεται να παρακολουθούμε τους χρόνους όπου οι εν λειτουργία μηχανές θα σταματήσουν να λειτουργούν, έναν για κάθε μια από τις n μηχανές, και τον χρόνο που χρειάζεται μια μηχανή κάθε φορά για να επιδιορθωθεί. Καθώς πρέπει πάντα να γνωρίζουμε ποια από τις εν λειτουργία μηχανές θα αστοχήσει πρώτη, τους χρόνους που μια εν λειτουργία μηχανή θα σταματήσει να λειτούργει τους κρατάμε σε μια διατεταγμένη λίστα. Έτσι έχουμε την παρακάτω λίστα γεγονότων

$$EL\colon t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n, t^*$$

όπου $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οι χρόνοι (διατεταγμένοι) που οι n μηχανές που βρίσκονται σε λειτουργία θα σταματήσουν να λειτουργούν, και t^* είναι ο χρόνος που χρειάζεται η μηχανή που μόλις σταμάτησε να λειτουργούν για να επιδιορθωθεί. Εάν δεν υπάρχει μηχανή να επιδιορθώνεται τότε $t^* = \infty$. Για να ξεκινήσουμε την προσομοίωση αρχικοποιούμε τις μεταβλητές ως εξής:

Αρχικοποίηση

Θέτουμε $t = r = 0,\ t^* = \infty$.

Παράγουμε $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. που η κάθε μια έχει σ.κ. F. Διατάσουμε αυτές τις τιμές και έστω t_i είναι η μικρότερη τιμή, $i = 1, \dots, n$

Θέτουμε $EL\colon t_1, t_2, \dots, t_n, t^*$

Ενημερώνουμε το σύστημα ακολουθώντας μια από τις δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $t_1 < t^*$

Θέτουμε $t = t_n$

Θέτουμε $r = r + 1$

Εάν $r = s + 1$ σταματάμε το τρέξιμο και εκτυπώνουμε τα δεδομένα $T = t$

Εάν $r < s + 1$, παράγουμε την τ.μ. X που έχει σ.κ. F. Η τ.μ. αυτή αντιπροσωπεύει τον χρόνο λειτουργιάς (μέχρι να αστοχήσει) της εφεδρικής μηχανής η οποία θα χρησιμοποιηθεί για να αντικαταστήσει αυτή που αστόχησε. Ξαναδιατάσουμε τις τιμές $t_2, t_3, \dots, t_n, t + X$ και έστω t_i είναι η μικρότερη τιμή, $i = 1, \dots, n$

Εάν $r = 1$ παράγουμε την τ.μ. Y που έχει σ.κ. G και θέτουμε $t^* = t + X$.

Περίπτωση 2: $t^* \leq t_1$

Θέτουμε $t = t^*$

Θέτουμε $r = r - 1$

Εάν $r > 0$ παράγουμε την τ.μ. Y που έχει σ.κ. G και θέτουμε $t^* = t + X$.

Εάν $r = 0$ θέτουμε $t^* = \infty$.

Το αποτέλεσμα του τρεξίματος είναι ο χρόνος T όπου το σύστημα καταρρέει. Τρέχοντας τον παραπάνω αλγόριθμο, έστω k φορές, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα k χρόνους $T_1, \dots, T_k$ κατάρρευσης. Επειδή αυτές οι k τ.μ. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την μέση τιμή $\sum_{i=1}^{k} T_i/k$ μπορούμε να εκτιμήσουμε τον μέσο χρόνο $E[T]$ κατάρρευσης του συστήματος.

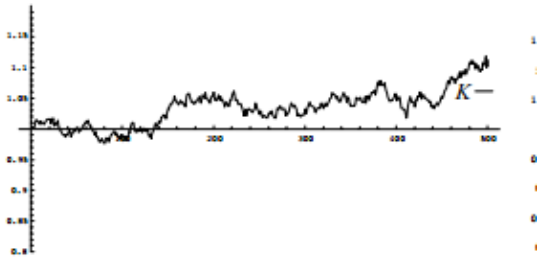
6.5. Προσομοίωση Χρηματιστηριακών Προϊόντων

Έστω $S_n, n \geq 0$ η τιμή μιας χρηματιστηριακής μετοχής στο τέλος της $n-$οστης μερας. Για την τιμή της μετοχής υποθέτουμε ότι ισχύει το μοντέλο του λογαριθμικού τυχαίου περίπατου, δηλαδή

$$S_n = S_0 \exp\{X_1 + \cdots + X_n\}, \qquad n \geq 0$$

όπου $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. από την κανονική κατανομή, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 η κάθε μια. Έστω $\alpha = \mu + \sigma^2/2$. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης (option) να πουλήσουμε (αν το επιθυμούμε) μια μονάδα από αυτή την μετοχή σε μια σταθερή προκαθορισμένη τιμή K (τιμή εξάσκησης ή strike price), στο τέλος κάθε μιας από τις N επόμενες μέρες (χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος). Αν ασκήσουμε αυτό το δικαίωμα προαίρεσης όταν η τιμή της μετοχής

είναι S, επειδή για την τιμή του δικαιώματος έχουμε πληρώσει το ποσό K, τότε θα έχουμε ένα κέρδος $S - K$.



η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K στο χρόνο εξάσκησης: το δικαίωμα αγοράς εξασκείται

Το αναμενόμενο κέρδος της κατοχής ενός δικαιώματος προαίρεσης εξαρτάται από την στρατηγική αγοραπωλησιών αυτού που το διαχειρίζεται (εννοείται πως όταν η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης Κ στο χρόνο εξάσκησης το δικαίωμα δεν εξασκείται). Έτσι μπορεί να δειχτεί ότι αν $\alpha \geq 0$ η βέλτιστη στρατηγική είναι να περιμένει κάποιος μέχρι την τελευταία δυνατή στιγμή ώστε να ασκήσει το δικαίωμα αν η τιμή της μετοχής γίνει μεγαλύτερη της τιμής K διαφορετικά να μην ασκήσει το δικαίωμα. Επειδή $X_1, \dots, X_N$ είναι κανονικές τ.μ. με μέση τιμή $N\mu$ και διασπορά $N\sigma^2$, είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσουμε ακριβώς το αποτέλεσμα αυτής της στρατηγικής. Ωστόσο, δεν είναι καθόλου εύκολο να καθοριστεί μια βέλτιστη στρατηγική για το δικαίωμα προαίρεσης όταν $\alpha < 0$ καθώς επίσης για κάθε 'καλή' στρατηγική είναι πιθανόν να μην μπορεί να εκτιμηθεί ακριβώς το αναμενόμενο κέρδος. Στην συνέχεια θα δοθεί μια στρατηγική που μπορεί να εφαρμοστεί όταν $\alpha < 0$. Παρότι η στρατηγική αυτή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως βέλτιστη, αποτελεί μια αρκετά καλή στρατηγική. Σύμφωνα με την στρατηγική αυτή, το δικαίωμα προαίρεσης εξασκείται οποιαδήποτε στιγμή i από τις m ήμερες μέχρι την ημερομηνία λήξης, $i = 1, \dots, m$. Αυτό το δικαίωμα προαίρεσης ονομάζεται Αμερικανικού τύπου (American option) σε αντίθεση με του Ευρωπαϊκού τύπου (European option) που το δικαίωμα προαίρεσης εξασκείται μόνο κατά την ημερομηνία λήξης.

Έστω $P_m = S_{N-m}$ είναι η τιμή της μετοχής όταν θέλουμε ακόμα m ήμερες μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Υποθέτουμε την εξής στρατηγική.

Στρατηγική: Εάν έχουν απομείνει m μέρες μέχρι την ημερομηνία λήξης, τότε εξασκούμε το δικαίωμα οποιαδήποτε στιγμή αν

$$P_m > K$$

και, αν για κάθε $i = 1, \dots, m$

$$P_m > K + P_m e^{i\alpha} \Phi\left(\sigma\sqrt{i} + b_i\right) - K\Phi(b_i)$$

όπου

$$b_i = \frac{i\mu - \ln(K/P_m)}{\sigma\sqrt{i}}$$

και Φ(x) είναι η σ.κ. της τυπικής κανονικής κατανομής, η οποία προσεγγιστικά δίνεται από τον τύπο: Για $x \geq 0$

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3)e^{-x^2/2}$$

Για $x < 0$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

με

$$y = \frac{1}{1 + 0.33267x}$$

$$a_1 = 0.4361836$$

$$a_2 = -0.1201676$$

$$a_3 = 0.9372980$$

Έστω SP η τιμή της μετοχής όταν το δικαίωμα εξασκηθεί, αν εξασκηθεί, και έστω SP να είναι K αν το δικαίωμα δεν εξασκηθεί ποτέ. Έτσι, είναι απαραίτητο να καταφύγουμε στην προσομοίωση για να ορισθεί η αναμενομένη αξία της παραπάνω στρατηγικής, δηλαδή η τιμή $E[SP] - K$. Για δοσμένες παραμέτρους μ, σ, N, K, S_0 είναι σχετικά εύκολο να προσομοιώσουμε την τιμή της μετοχής σε ξεχωριστές μέρες, παράγοντας την τ.μ. Χ που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, και χρησιμοποιώντας την σχεση

$$P_{m-1} = P_m e^X$$

Έτσι, εάν P_m είναι η τιμή με m ημέρες μέχρι την ημερομηνία λήξης και σύμφωνα με την παραπάνω στρατηγική δεν εξασκηθεί το δικαίωμα αυτή την χρονική στιγμή, παράγουμε την τ.μ. Χ, βρίσκουμε την νέα τιμή P_{m-1} και εξετάζουμε αν πρέπει να εξασκήσουμε το δικαίωμα στην νέα χρονική στιγμή. Εάν ναι, τότε θέτουμε $SP = P_{m-1}$, διαφορετικά βρίσκουμε την τιμή της μετοχής στο τέλος της επομένης ημέρας κ.ο.κ. Ο μέσος όρος, από ένα μεγάλο αριθμό τρεξιμάτων, της ποσότητας $SP - K$ θα είναι η εκτίμηση του αναμενόμενου κέρδους από την εξάσκηση του δικαιώματος.

6.6. Επαλήθευση της ορθότητας της προσομοίωσης

Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα μοντέλα που επιθυμούμε να προσομοιώσουμε μπορεί να είναι αρκετά σύνθετα. Επομένως και τα αντίστοιχα προγράμματα προσομοίωσης καταλήγουν να είναι και αυτά σύνθετα με συνέπεια να είναι πολύ πιθανό να περιέχουν λογικά λάθη. Για το λόγο αυτό, είναι χρήσιμο κάθε φορά να επαληθεύουμε ότι το πρόγραμμα που κατασκευάσαμε λειτουργεί σωστά. Ένας απλός τρόπος είναι να τρέξουμε το πρόγραμμα και να πάρουμε (π.χ. με Print) σε διάφορα κρίσιμα σημεία του προγράμματος τις τιμές ορισμένων μεταβλητών. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να παρακολουθήσουμε αναλυτικά την λειτουργία του προγράμματος και να δούμε αν ανταποκρίνεται στις υποθέσεις του μοντέλου. Για παράδειγμα, σε ένα πρόγραμμα προσομοίωσης ενός συστήματος εξυπηρέτησης μπορούμε να πάρουμε τους χρόνους αφίξεων και εξυπηρέτησης (π.χ. των 20 πρώτων πελατών) και να επαληθεύσουμε (εργαζόμενοι με ανεξάρτητο τρόπο, π.χ. με χαρτί και μολύβι) ότι τα αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα για την εξέλιξη του μεγέθους της ουράς είναι αυτά που προβλέπονται από την φύση του συστήματος. Εάν κάτι δεν συμφωνεί τότε ψάχνουμε να βρούμε το λάθος συνήθως ελέγχοντας ένα - ένα τα τμήματα του προγράμματος που μπορεί να ευθύνονται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ross S.M.(1997). *Simulation*

Ross S.M. and J. G. Shanthikumar (2000) *Pricing Exotic Options,Monotonicity in Volatility and Efficient Simulation*

Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman(1986) *Introduction to Operations Research*

Kronmal,R. A. and A. V. Peterson Jr (1979) *On the Alias Method for Generating Random Variables from a Discrete Distribution*