ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΛΥΚΕΙΩΝ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ. ΑΡ.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
Τακτικοῦ καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ,
ΤΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ ΚΑΙ
ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ.

(ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Μ. ΔΕΛΗ
ΜΙΛΤΙΑΔΟΥ 1
1926

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΛΥΚΕΙΩΝ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ, ΑΡ. 1.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
Τακτικοῦ καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ,
ΤΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ ΚΑΙ
ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ.

10

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Μ. ΔΕΛΗ
1 - ΜΙΛΤΙΑΔΟΥ - 1
1926

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὸ ἐπίσημον πρόγραμμα τῶν Λυκείων μας δὲν περιλαμβάνεται ἀκόμη δυστυχῶς καὶ ἡ Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία. Καὶ ὅμως τὸ μάθημα τοῦτο εἶναι βεβαίως πολὺ χρησιμώτερον, καὶ θεωρητικῶς καὶ ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῶν ἐφαρμογῶν, ἀπὸ πολλὰ μέρη τῆς Γεωμετρίας, μὲ τὰ ὁποῖα, ὄχι ἀπαραιτήτως κατὰ τὴν γνώμην μου, ἔχει ἐπιβαρυνθῆ τὸ πρόγραμμα (π. χ. θεώρημα τοῦ Desargues. ν—κόρυφα καὶ ν—πλευρα. Ἁρμονικοὶ καὶ γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ κτλ). Ἡ γνῶσις τῶν κυριωτέρων τύπων τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας ἀποτελεῖ, πλὴν τῶν καθαρῶς γεωμετρικῶν ἐφαρμογῶν της, τὴν βάσιν τῆς σπουδῆς τῆς Κοσμογραφίας, ὅταν πρόκειται νὰ διδαχθῇ κάπως βαθύτερον παρὰ ὡς ἁπλῆ περιγραφὴ τῶν οὐρανίων φαινομένων.

Ἀλλὰ ὅ,τι δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ πρόγραμμα, δὲν ἐμποδίζεται βεβαίως ὁ καθηγητὴς τοῦ Λυκείου νὰ κάμη, ἂν θέλη: δηλαδὴ ἐν συνεχείᾳ τῆς διδασκαλίας τῆς Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας νὰ διδάξη (μετὰ τὴν Σφαιρομετρίαν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ) καὶ τοὺς κυριωτέρους τοὐλάχιστον τύπους τῆς Σφαιρικῆς (μὲ ὀλίγας ἐφαρμογὰς ἀπὸ τὴν Κοσμογραφίαν, ἂν ἔχη καιρόν).

Ἐπειδὴ τελευταῖον διδάσκω Σφαιρικὴν Τριγωνομετρίαν εἰς τοὺς πρωτοετεῖς φοιτητάς, ἐνόμισα χρήσιμον νὰ ἐκδώσω τὸ παρὸν σύντομον βιβλίον διὰ τὴν σπουδὴν τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας ἐν γένει. Ἔχει γραφῆ (πλὴν τοῦ τελευταίου κεφαλαίου) τόσον ἁπλῶς, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὸν καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Λυκείων.

Ἐκδίδω τὸ βιβλίον τοῦτο ὡς πρῶτον τόμον μιᾶς σειρᾶς μικρῶν βιβλίων διὰ τὰ Λύκεια· τὰ βιβλία αὐτὰ συμπληρώνοντα καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις τὴν μαθηματικὴν καὶ ἐγκυκλοπαιδικὴν ἐν γένει μόρφωσιν τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων μας, θὰ συντελέσουν, ὑποθέτω, ὥστε νὰ παραγάγουν ταῦτα τελειότερον καὶ ταχύτερον τοὺς καρπούς, χάριν τῶν ὁποίων ἰδιαιτέρως ἱδρύθησαν.

Ἀθῆναι, Ἰανουάριος 1926.

Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

"Οσοι τύποι ἔχουν ἀστερίσκους, καθὼς καὶ τὸ τελευταῖον κεφάλαιον, εἶναι μόνον διὰ τοὺς εἰδικώτερον ἀσχολουμένους μὲ τὰ μαθηματικά.

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

Ν. Χατζιδάκις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α') Σφαιρομετρία καὶ Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία.

1. ***Σφαιρομετρία***.—Καθὼς τὸ μέρος τῆς ***Γεωμετρίας*** τὸ ἐξετάζον τὰ ἐπίπεδα σχήματα λέγεται ***Ἐπιπεδομετρία***, οὕτω καὶ τὸ μέρος αὐτῆς τὸ ἐξετάζον τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας γραφόμενα σχήματα, δηλ. τὰ ***σφαιρικὰ*** σχήματα, λέγεται ***Σφαιρομετρία***. Ὅπως δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ ἁπλούστερον καὶ σπουδαιότερον σχῆμα (εἰς τὸ ὁποῖον ἀνάγονται ὅλα τ' ἄλλα) εἶναι τὸ ***εὐθύγραμμον τρίγωνον***, τὸ ἴδιον καὶ ἐπὶ τῆς σφαίρας: ἁπλούστερον καὶ σπουδαιότερον ἀπ'ὅλα τὰ σχήματα εἶναι τὸ ***σφαιρικὸν τρίγωνον***, δηλ. τὸ τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τρία τόξα ***μεγίστων*** κύκλων τῆς σφαίρας.

2. ***Σφαιρικὴ τριγωνομετρία***.—Ἐπειδὴ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν ἐπιπέδων τριγώνων ἀπὸ τὰ γνωστὰ στοιχεῖά των (τὴν ὁποίαν μᾶς διδάσκει ἡ γεωμετρία) ὑπόκειται εἰς σφάλματα, ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ἐζητήθη ἡ ***ἀναλυτικὴ*** ἐπίλυσις τῶν τριγώνων, δηλ. ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων στοιχείων των ἀπὸ τύπους συνδέοντας τὰ ἄγνωστα αὐτὰ στοιχεῖα μὲ τὰ γνωστά. Τοὺς τύπους τούτους μᾶς παρέχει ἡ ***εὐθύγραμμος (ἢ ἐπίπεδος) Τριγωνομετρία***. Ἀκριβῶς τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων : ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ αὐτῶν ἀπὸ τὰ γνωστά των στοιχεῖα (ἐκτὸς τῆς δυσκολίας τῆς χαράξεως τῶν γραμμῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας) ὑπόκειται εἰς σφάλματα ἀπὸ τὴν ἀτέλειαν τῶν γεωμετρικῶν μας ὀργάνων. Ἐζήτησαν λοιπὸν οἱ Μαθηματικοὶ νὰ εὕρουν τύπους συνδέοντας τὰ ἄγνωστα μὲ τὰ γνωστὰ στοιχεῖα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, διὰ νὰ εἰμποροῦν νὰ ἐπιλύουν ἀναλυτικῶς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα. Τὸ μάθημα τὸ διδάσκον τοὺς τύπους τούτους λέγεται ***Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία***.

3. ***Χρησιμότης τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας***.— Ἡ Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία ἔχει πολλὰς καὶ σπουδαιοτάτας ἐφαρμογάς. Ἐκτὸς τῆς εἰς καθαρῶς γεωμετρικὰ προβλήματα χρησι-

μοποιήσεώς της, ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς σπουδῆς τῆς ***Σφαιρικῆς Ἀστρονομίας***. Ἐπίσης χρησιμεύει πολὺ καὶ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ***Διαφορικῆς Γεωμετρίας***.

Β΄) Λήμματα ἀπὸ τὴν Σφαιρομετρίαν.

4. Τὰς ἑπομένας προτάσεις τὰς ἀναφέρομεν χωρὶς ἀπόδειξιν, ὡς λήμματα ἀπὸ τὰ ***Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας :***

1ον) Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος τρίεδρος στερεὰ γωνία· καὶ ἀντιστρόφως. Καὶ γενικῶς, εἰς κάθε σφαιρικὸν πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος πολύεδρος στερεὰ γωνία καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου μετροῦν εἰς μοίρας τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ γωνίαι του τὰς διέδρους γωνίας τῆς στερεᾶς.

2ον) Εἰς δύο συμμετρικὰ πολύγωνα (δηλ. τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι κορυφαὶ κεῖνται ἀνὰ δύο εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου) ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι στερεαὶ γωνίαι κατὰ κορυφήν. Καὶ ἐπειδὴ αὗται γενικῶς δὲν ἐφαρμόζουν, οὔτε τὰ συμμετρικὰ πολύγωνα γενικῶς ἐφαρμόζουν.

3ον) Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον κάθε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ἀλλὰ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν διαφοράν των.

4ον) Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας του.

5ον) Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ δύο ὀρθάς, ἀλλὰ μικρότερον ἀπὸ ἓξ ὀρθάς. Καὶ κάθε γωνία του, ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 2 ὀρθάς, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

6ον) Ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον εἰμπορεῖ νὰ ἔχῃ 1 ἢ 2 ἢ καὶ 3 ὀρθὰς γωνίας ***(μονορθογώνιον, δισορθογώνιον, τρισορθογώνιον)***.

7ον) ***Περιπτώσεις ἰσότητος δύο σφαιρικῶν τριγώνων :***

α΄) Ἂν ἔχουν δύο ζεύγη πλευρῶν ἴσα καὶ τὰς δύο περιεχομένας γωνίας ἴσας, ἔχουν ἴσα καὶ ὅλα τ᾿ ἄλλα στοιχεῖά των.

β΄) Ἂν ἔχουν ἓν ζεῦγος ἴσων πλευρῶν καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, ἔχουν ἴσα καὶ ὅλα τ᾿ ἄλλα στοιχεῖά των.

γ΄) Ἂν αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι μίαν μὲ μίαν, εἶναι ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι των (αἱ ἀντικρὺ τῶν ἴσων πλευρῶν).

δ΄) Ἂν αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι μία μὲ μίαν, εἶναι ἐπίσης καὶ αἱ πλευραί των (αἱ ἀντικρὺ τῶν ἴσων γωνιῶν).

8ον) Κάθε ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει τὰς **παρὰ τὴν** βάσιν **γωνίας του ἴσας. Καὶ ἀντιστρόφως.**

9ον) **Ἂν εἰς** ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον μία πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ μίαν ἄλλην β, θὰ εἶναι **καὶ** ἡ ἀντικρὺ τῆς α γωνία Α μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀντικρὺ τῆς β γωνίαν Β. Καὶ ἀντιστρόφως.

10ον) Ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγεται ἓν ἄλλο, τὸ Α′Β′Γ′, ***πολικόν***, ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ ΑΒΓ εἶναι ***πόλοι*** τῶν πλευρῶν τοῦ Α′Β′Γ′. **Ἂν** τὸ **Α′Β′Γ′** εἶναι πολικὸν τοῦ ΑΒΓ, θὰ εἶναι καὶ τὸ ΑΒΓ πολικὸν τοῦ Α′Β′Γ′.

11ον) Ἂν δύο **σφαιρικὰ** τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι **πολικὰ** τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ ἄλλου (ἐκφρασθείσης διὰ μοιρῶν), δηλ.

$A=\pi-\alpha'$, $B=\pi-\beta'$, $\Gamma=\pi-\gamma'$ καὶ $A'=\pi-\alpha$, $B'=\pi-\beta$, $\Gamma'=\pi-\gamma$.

12ον) Ὅταν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι πολικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, αἱ ἀντίστοιχοί των ἐπίκεντροι τρίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

13ον) **Κάθε μέρος** τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων **μεγίστων** κύκλων της, λέγεται ***σφαιρικὸς ὄνυξ***. τὸ δὲ ἀντίστοιχον **μέρος** τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, λέγεται ***σφαιρικὸς ἄτρακτος***. Καὶ ***σφαιρικὴ πυραμὶς*** λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἀποκόπτουν αἱ ἐπίπεδαι ἕδραι μιᾶς ἐπικέντρου **στερεᾶς** γωνίας.

14ον) Ὁ λόγος δύο ἀτράκτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γωνιῶν των. Καὶ **μέτρον** κάθε ἀτράκτου (ἢ σφαιρικοῦ ὄνυχος) εἶναι ἡ γωνία **του μέν**, ἂν ὡς **μονάδα** τῶν **ἐπιφανειῶν** (ἢ τῶν ὄγκων) **ἐκλέξωμεν** τὸν ***ὀρθογώνιον*** ἄτρακτον (ἢ τὸν **ὀρθογ.** σφαιρικὸν **ὄνυχα**)· τὸ **διπλάσιον** δὲ **τῆς** γωνίας **του, ἂν ἐκλέξωμεν** ὡς μονάδα τῶν ἐμβαδῶν (ἢ τῶν ὄγκων) τὸ ***τρισορθογώνιον*** σφαιρικὸν **τρίγωνον** (ἢ τὴν σφαιρικὴν **πυραμίδα** τὴν ἔχουσαν βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν **τρίγωνον**).

15ον) **Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα** εἶναι **ἰσοδύναμα. Καὶ** δύο τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες μὲ βάσεις **συμμετρικὰς** εἶναι ἰσοδύναμοι.

16ον) Ὅταν 3 μέγιστοι κύκλοι **κόπτωνται** ἐπὶ **τῆς σφαίρας** καὶ διαιροῦν τὴν ἐπιφάνειάν της εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο κατὰ κορυφὴν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄτρακτον τὸν ἔχοντα γωνίαν τὴν γωνίαν τῆς κοινῆς κορυφῆς.

17ον) Ἂν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν ἐκλέξωμεν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, τὸ ἐμβαδὸν κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς 2 ὀρθάς, δηλ. ἴσον μὲ $(A+B+\Gamma)-\pi$.

Καὶ τὸ ἐμβαδὸν κάθε σφαιρικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, εἶναι ἴσον μὲ $(A+B+\Gamma+\Delta+\ldots\ldots)-(\nu-2)\pi$, δηλ. ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὁμωνύμου ἐπιπέδου πολυγώνου.

18ον) Ὁ ὄγκος κάθε τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, ἂν ἐκλέξωμεν ὡς μονάδα τῶν ὄγκων τὴν τρισορθογώνιον σφαιρικὴν πυραμίδα (δηλ. τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας), εἶναι ἴσος μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεώς της ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΥΠΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Αἱ τρεῖς πρῶται ὁμάδες.

Α΄) Τύποι διὰ τὰ συνημίτονα τῶν πλευρῶν.

5. ***Βασικοὶ τύποι.***—Καθὼς εἰς τὴν ***Εὐθύγραμμον Τριγωνομετρίαν*** εἶναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθοῦν πρῶτα ἀπὸ τὸ σχῆμα, δηλ. ***γεωμετρικῶς*** μερικοὶ τύποι ***βασικοί***, κατόπιν δὲ ὅλοι οἱ ἄλλοι τύποι ἕπονται ***ὡς ἀναλυτικὴ συνέπεια*** τῶν βασικῶν τούτων τύπων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ***Σφαιρικὴν Τριγωνομετρίαν*** εἶναι ἀνάγκη ν' ἀποδείξωμεν πρῶτα ***γεωμετρικῶς*** ὀλίγους τύπους ***βασικούς***, καὶ ἔπειτα ὅλοι οἱ ἄλλοι συνάγονται ***ἀναλυτικῶς*** ἀπὸ αὐτούς.

6. ***Εὕρεσις τῶν βασικῶν τύπων.***—Τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὀνομάζομεν α(=ΒΓ), β(=ΓΑ), γ(=ΑΒ) τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ Α, Β, Γ τὰς κατὰ σειρὰν ἀντικρυνὰς γωνίας. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας του (ἀκτὶς=1) εἶναι τὸ Κ.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτα, ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι μικρότεραι ἀπὸ 90^0. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν κορυφὴν Α τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, δηλ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ΄ καὶ ΑΓ΄, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, θὰ συναντήσουν τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΓ εἰς δύο σημεῖα Β΄, Γ΄. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐσχηματίσθησαν δύο ζεύγη τριγώνων : α΄) τὰ ΚΑΒ΄, ΚΑΓ΄ μὲ ***κοινὴν*** πλευρὰν τὴν ΚΑ=1 καὶ β΄) τὰ ΑΒ΄Γ΄, ΚΒ΄Γ΄ μὲ ***κοινὴν*** πλευρὰν τὴν Β΄Γ΄.

Ἂς ἐκφράσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς κοινῆς αὐτῆς πλευρᾶς Β΄Γ΄ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τρίγωνον. Ἔχομεν (κατὰ τὴν Εὐθύγραμμον Τριγωνομετρίαν):

$$(B'\Gamma')^2=(AB')^2+(A\Gamma')^2-2(AB')(A\Gamma')\text{συν}(B'A\Gamma') \text{ καὶ}$$
$$(B'\Gamma')^2=(KB')^2+(K\Gamma')^2-2\,(KB')(K\Gamma')\text{συν}(B'K\Gamma')$$

καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ΄, ΚΑΓ΄ εὑρίσκομεν

$$(\text{ΑΒ}')=(\text{ΚΑ}).\text{εφγ}=\text{εφγ},\quad (\text{ΑΓ}')=(\text{ΚΑ}).\text{εφβ}=\text{εφβ},$$

$\text{ΚΒ}'=\frac{\text{ΚΑ}}{\text{συνγ}}=\frac{1}{\text{συνγ}}$, $\text{ΚΓ}'=\frac{\text{ΚΑ}}{\text{συνβ}}=\frac{1}{\text{συνβ}}$, ἂν ἐξισώσωμεν τὰς δύο ἴσας τιμὰς τοῦ $(\text{Β}'\text{Γ}')^2$, θὰ ἔχωμεν :

$$\text{εφ}^2\text{γ}+\text{εφ}^2\text{β}-2\text{εφγ}.\text{εφβ}.\text{συνΑ}=\frac{1}{\text{συν}^2\text{γ}}+\frac{1}{\text{συν}^2\text{β}}-2\frac{\text{συνα}}{\text{συνβσυνγ}},$$

ἤ, ἂν θέσωμεν ἀντὶ $\frac{1}{\text{συν}^2\text{γ}}$, $\frac{1}{\text{συν}^2\text{β}}$ τὰς ἴσας των ἐκφράσεις

$$1+\text{εφ}^2\text{γ},\quad 1+\text{εφ}^2\text{β},\quad -\text{εφγ}.\text{εφβ}.\text{συνΑ}=1-\frac{\text{συνα}}{\text{συνβσυνγ}}.$$

Ἡ σχέσις δὲ αὐτὴ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\text{συνα}=\text{συνβσυνγ}+\text{ημβημγσυνΑ}.$$

ἐπειδὴ δὲ εἰμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενα εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ἔχομεν τελικῶς τοὺς ἑξῆς τρεῖς ***βασικοὺς τύπους τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας*** :

$$(1)\quad\begin{cases}\text{συνα}=\text{συνβσυνγ}+\text{ημβημγσυνΑ},\\ \text{συνβ}=\text{συνγσυνα}+\text{ημγημασυνΒ},\\ \text{συνγ}=\text{συνασυνβ}+\text{ημαημβσυνΓ}.\end{cases}$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ ἀπεδείχθησαν μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι κάθε γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῶν 90°, ἰσχύουν ὅμως διὰ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον. Διότι, ἄς ὑποθέσωμεν :

1) Ὅτι μία πλευρά, π. χ. ἡ ΑΒ, εἶναι μικροτέρα τῶν 90°. Τότε τὴν προεκτείνω, ἕως ὅτου συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ· τὰ τόξα ΒΑΒ΄, ΓΑΓ΄ θὰ εἶναι τότε ἡμιπεριφέρειαι, ὥστε ἡ ΑΒ΄ μικροτέρα τῶν 90°. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΓΒ΄ θὰ ἔχωμεν : $\text{συν}(\pi-\text{α})=\text{συνβ}.\text{συν}(\pi-\text{γ})+\text{ημβημ}(\pi-\text{γ})\text{συν}(\pi-\text{Α})$, δηλ. πάλιν : $\text{συνα}=\text{συνβσυνγ}+\text{ημβημγσυνΑ}$.

2) Ὅτι καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας Α εἶναι μικρότεραι τῶν 90°. Τὰς προεκτείνομεν ἕως εἰς τὸ Α΄, τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον τοῦ Α. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον τότε Α΄ΒΓ εὑρίσκομεν :

$$\text{συνα}=\text{συν}(\pi-\text{β}).\text{συν}(\pi-\text{γ})+\text{ημ}(\pi-\text{β}).\text{ημ}(\pi-\text{γ})\text{συνΑ},$$

δηλ. πάλιν $\text{συνα}=\text{συνβσυνγ}+\text{ημβημγσυνΑ}$.

(Ἡ περίπτωσις τέλος, ὅπου ἡ ΑΒ ἢ αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ 90°, εὑρίσκεται ὡς ***ὁρική*** **περίπτωσις** τῶν προηγουμένων).

Μνημονικὸς κανών. Διὰ νὰ ἐνθυμούμεθα εὐχόλως τοὺς τύπους (1), παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ δεύτερα μέλη των, ἂν παραλειφθῇ ὁ παράγων συνA, καταντοῦν τὰ συνημίτονα τῶν διαφορῶν β—γ ἢ γ—α ἢ α—β.

7. ***Χρησιμότης τῶν τύπων.*** Κάθε τύπος ἀπὸ τοὺς (1) συνδέει τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ μίαν γωνίαν του. Χρησιμεύει ἑπομένως διὰ νὰ εὑρεθῇ μία πλευρὰ ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας καὶ τὴν γωνίαν τὴν ἀντικρυνὴν εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν ἢ μία γωνία ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς (ἂν λυθῇ πρὸς τὸ συνA ἢ συνB ἢ συνΓ).

B') Τύποι διὰ τὰ ἡμίτονα τῶν πλευρῶν.

8. ***Εὕρεσις τῶν τύπων.*** Ἀπὸ τὴν πρώτην τῶν (1) εὑρίσκομεν:

$$\text{συν}A=\frac{\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} \quad \text{ἑπομένως καὶ :}$$

$$\text{ημ}^2A=1-\text{συν}^2A=1-\frac{(\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma)^2}{\text{ημ}^2\beta\,.\,\text{ημ}^2\gamma}=$$

$$=\frac{\text{ημ}^2\beta\,\text{ημ}^2\gamma-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta\,.\,\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}^2\beta\,\text{ημ}^2\gamma}=$$

$$=\frac{(1-\text{συν}^2\beta)(1-\text{συν}^2\gamma)-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta\,\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}^2\beta\,.\,\text{ημ}^2\gamma}=$$

$$=\frac{1-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,.\,\text{συν}\beta\,.\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}^2\beta\,.\,\text{ημ}^2\gamma} \quad \text{ὥστε :}$$

$$\frac{\text{ημ}^2A}{\text{ημ}^2\alpha}=\frac{1-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,.\,\text{συν}\beta\,.\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}^2\alpha\,.\,\text{ημ}^2\beta\,.\,\text{ημ}^2\gamma}.$$

ἂν τώρα τρέψωμεν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τὰ γράμματα α, β, γ, καθὼς καὶ τὰ A, B, Γ, *κυκλικῶς* τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο, βλέπομεν, ὅτι τὸ μὲν β' μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος μένει τὸ ἴδιον (διότι εἶναι ***συμμετρικὴ*** παράστασις πρὸς τὰ γράμματα), τὸ δὲ α' γίνεται $\frac{\text{ημ}^2B}{\text{ημ}^2\beta}$. ἐπίσης δὲ ἄλλη μία κυκλικὴ τροπὴ τῶν γραμμάτων ἀφίνει πάλιν τὸ β' μέρος τὸ ἴδιον, τρέπει ὅμως τὸ α' εἰς τὸ $\frac{\text{ημ}^2\Gamma}{\text{ημ}^2\gamma}$. θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὰς ἰσότητας :

$$\frac{\text{ημ}^2A}{\text{ημ}^2\alpha}=\frac{\text{ημ}^2B}{\text{ημ}^2\beta}=\frac{\text{ημ}^2\Gamma}{\text{ημ}^2\gamma}$$

καὶ ἑπομένως καὶ τὰς ἑξῆς : $\frac{\text{ημ}A}{\text{ημ}\alpha}=\frac{\text{ημ}B}{\text{ημ}\beta}=\frac{\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}\gamma}$ (2).

(Τὸ σημεῖον ὅλων τῶν λόγων τούτων εἶναι +, διότι ἔχουν ἡμίτονα γωνιῶν καὶ τόξων μικροτέρων τῶν 180°).

Μνημονικὸς κανών. Οἱ τύποι (2) εὑρίσκονται ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους τύπους τῆς Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας :

$\frac{ημΑ}{α}=\frac{ημΒ}{β}=\frac{ημΓ}{γ}$, ἂν ἀντὶ α, β, γ, γράψωμεν ημα, ημβ, ημγ.

Γ') *Τύποι μὲ 5 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.*

9. ***Εὕρεσις τῶν τύπων.*** Ἂν εἰς τὸν α΄ ἀπὸ τοὺς τύπους (1) θέσωμεν ἀντὶ συνβ τὴν τιμήν του ἀπὸ τὸν β΄ τῶν (1), εὑρίσκομεν:

$$συνα=συνγ(συνγσυνα+ημγημασυνΒ)+ημβ.ημγ.συνΑ,$$

$$ἤ:\ συνα(1-συν^2γ)=ημα.ημγ.συνγ.συνΒ+ημβ.ημγ.συνΑ,$$

$$ἢ\ καὶ\ συνα.ημγ=ημα.συνγ.συνΒ+ημβ.συνΑ,$$

$$δηλ.\ ημβ.συνΑ=συναημγ-ημα.συνγ.συνΒ.$$

Ἂν τώρα θέσωμεν ἀντιστρόφως τὴν τιμὴν τοῦ συνα ἀπὸ τὸν α΄ τῶν τύπων (1) εἰς τὸν β΄ τῶν (1), θὰ εὕρωμεν τὸν ἑξῆς νέον τύπον: ημα.συνΒ=συνβ.ημγ−ημβ.συνγ.συνΑ· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἴδια εἰμποροῦμεν νὰ κάμωμεν καὶ διὰ τὸν β΄ καὶ τὸν γ΄ τῶν τύπων (1), ἢ καὶ διὰ τὸν γ΄ καὶ τὸν α΄, εὑρίσκομεν τὸ ὅλον τοὺς ἑξῆς 6 τύπους

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} ημβσυνΑ=συναημγ-ημασυνγσυνΒ,\\ ημασυνΒ=συνβημγ-ημβσυνγσυνΑ,\\ ημγσυνΒ=συνβημα-ημβσυνασυνΓ,\\ ημβσυνΓ=συνγημα-ημγσυνασυνΒ,\\ ημασυνΓ=συνγημβ-ημγσυνβσυνΑ,\\ ημγσυνΑ=συναημβ-ημασυνβσυνΓ. \end{array}\right.$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ συνδέουν 5 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Μνημονικὸς κανών. Τὰ β΄ μέλη τῶν τύπων (6), ἂν παραλειφθοῦν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, καταντοῦν ἡμίτονα διαφορᾶς· ἀρχίζει δὲ κάθε β΄ μέλος ἀπὸ τὸ συνημίτονον μιᾶς πλευρᾶς μὲ τὸ ἴδιον γράμμα τῆς γωνίας τοῦ α΄ μέλους.

10. ***Μετασχηματισμὸς τῶν τύπων*** (3). Ἐνῷ καθεὶς ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) περιέχει 4 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου (οἱ (1) 3 πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν, οἱ (2) δύο πλευρὰς καὶ 2 γωνίας), καθεὶς ἀπὸ τοὺς (3) περιέχει 5 στοιχεῖα. Εἰμποροῦμεν ὅμως νὰ τοὺς μετασχηματίσωμεν, ὥστε νὰ περιέχουν καὶ αὐτοὶ ἀπὸ 4 μόνον στοιχεῖα.

Αὐτὸ γίνεται ὡς ἑξῆς. Εἰς τὸν α΄ ἀπὸ τοὺς τύπους (3) θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ ημβ ἀπὸ τοὺς (2), δηλ. $ημβ=\frac{ημαημΒ}{ημΑ}$· τότε εὑρίσκομεν $\frac{ημαημΒσυνΑ}{ημΑ}=συναημγ-ημασυνγσυνΒ$, δηλ. ημΒ.σφΑ=σφα.ημγ−συνγσυνΒ· καὶ ὁ τύπος αὐτὸς περιέχει 4 μόνον στοιχεῖα· ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ 5 ἄλλους τύπους ἀπὸ τοὺς 5 ἄλλους τύπους (3), ὥστε ἔχομεν τὸ ὅλον τοὺς ἑξῆς 6 τύπους:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{ημ}B\,\text{σφ}A = \text{σφ}\alpha\,.\,\text{ημ}\gamma - \text{συν}\gamma\,\text{συν}B,\\
&\text{ημ}A\,\text{σφ}B = \text{σφ}\beta\,.\,\text{ημ}\gamma - \text{συν}\gamma\,\text{συν}A,\\
&\text{ημ}\Gamma\,\text{σφ}B = \text{σφ}\beta\,.\,\text{ημ}\alpha - \text{συν}\alpha\,\text{συν}\Gamma,\\
&\text{ημ}B\,\text{σφ}\Gamma = \text{σφ}\gamma\,.\,\text{ημ}\alpha - \text{συν}\alpha\,\text{συν}B,\\
&\text{ημ}A\,\text{σφ}\Gamma = \text{σφ}\gamma\,.\,\text{ημ}\beta - \text{συν}\beta\,\text{συν}A,\\
&\text{ημ}\Gamma\,\text{σφ}A = \text{σφ}\alpha\,.\,\text{ημ}\beta - \text{συν}\beta\,\text{συν}\Gamma.
\end{aligned}
\right.
$$

11. *Παρατηρήσεις.*

α′) ***Ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου εἰς κάθε τύπον.*** Εὑρήκαμεν ἕως τώρα 3 ὁμάδας τύπων. Τῆς α′ ὁμάδος κάθε τύπος περιέχει 4 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, δηλ. τὰς 3 πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν. Τῆς β′ ὁμάδος κάθε ἀναλογία περιέχει πάλιν 4 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, δηλ. δύο πλευρὰς καὶ δύο γωνίας. Τῆς γ′ ὅμως ὁμάδος κάθε τύπος περιέχει 5 στοιχεῖα, δηλ. τὰς τρεῖς πλευρᾶς καὶ δύο γωνίας· ὅταν ὅμως μετασχηματισθοῦν καὶ εἰσέλθουν αἱ συνεφαπτόμεναι (καθὼς εἴδομεν), τὰ στοιχεῖα γίνονται πάλιν μόνον 4.

β′) ***Προτιμότεροι τύποι.*** Εἶναι προτιμότεροι οἱ τύποι ὅσοι περιέχουν 4 μόνον στοιχεῖα, διότι, καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Σφαιρομετρίαν, ἀπὸ 3 μόνον στοιχεῖα τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἰμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν (γεωμετρικῶς) τὸ τρίγωνον καὶ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν καὶ τ' ἄλλα τρία στοιχεῖά του.

γ′) ***Ἀνεξαρτησία τῶν τύπων.*** Μεταξὺ τῶν 6 στοιχείων κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου ***τρεῖς μόνον σχέσεις εἰμποροῦν νὰ ὑπάρχουν*** ἀνεξάρτητοι ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην· διότι, ἂν ὑπῆρχον 4 (ἢ καὶ περισσότεραι), τότε αἱ 4 αὐταὶ ἐξισώσεις θὰ ὥριζον 4 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, δηλ. τὸ τρίγωνον θὰ ὡρίζετο ἀκριβῶς ἀπὸ τὰ ἄλλα δύο μόνον στοιχεῖά του, πρᾶγμα ἀδύνατον, καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Σφαιρομετρίαν. Πραγματικῶς δὲ, καθὼς εἴδομεν προηγουμένως, ἀρκεῖ οἱ 3 τύποι μιᾶς ὁμάδος μόνον νὰ εὑρεθοῦν γεωμετρικῶς, διὰ νὰ ἕπωνται ὡς ἀναγκαῖαι συνέπειαι καὶ οἱ τύποι τῶν ἄλλων ὁμάδων. Καὶ αἱ ἄλλαι ὅμως ὁμάδες, καθὼς καὶ ἄλλοι τύποι, τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα, χρησιμεύουν, διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Πόλωσις τῶν προηγουμένων τύπων.

12. ***Πολικοὶ τύποι τῆς α΄ ὁμάδος.*** Ἀπὸ τοὺς τύπους τῶν τριῶν προηγουμένων ὁμάδων εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν ἄλλας ὁμάδας τύπων, μὲ γωνίας, ὅπου αἱ πρῶται περιέχουν πλευράς, καὶ πλευράς, ὅπου γωνίας. Αὐτὸ γίνεται εὔκολα μὲ τὰς σχέσεις τῶν πολικῶν τριγώνων. Διότι, ἂν ἐφαρμόσωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς τύπους τῆς α΄ ὁμάδος εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ τοῦ δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{συν}\alpha' = \text{συν}\beta'\,\text{συν}\gamma' + \text{ημ}\beta'\,\text{ημ}\gamma'\,\text{συν}A', \text{ κλπ.}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι

$$\alpha' = \pi - A,\quad \beta' = \pi - B,\quad \gamma' = \pi - \Gamma,$$

$$A' = \pi - \alpha,\quad B' = \pi - \beta,\quad \Gamma' = \pi - \gamma,$$

οἱ τύποι γίνονται:

$$\text{συν}(\pi - A) = \text{συν}(\pi - B)\,\text{συν}(\pi - \Gamma) + \text{ημ}(\pi - B)\,\text{ημ}(\pi - \Gamma)\,\text{συν}(\pi - \alpha)$$

κλπ. δηλ. $-\text{συν}A = \text{συν}B\,\text{συν}\Gamma - \text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\alpha$ κλπ. ἢ καί:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{συν}A = -\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma + \text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\alpha \\ \text{συν}B = -\text{συν}\Gamma\,\text{συν}A + \text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}A\,\text{συν}\beta \\ \text{συν}\Gamma = -\text{συν}A\,\text{συν}B + \text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{συν}\gamma. \end{array}\right.$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ συνδέουν τώρα τὰς τρεῖς γωνίας Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου πρὸς μίαν πλευρὰν (ὁ καθείς), δηλ. διαφέρουν ἀπὸ τοὺς τύπους τῆς α΄ ὁμάδος κατὰ τὴν τροπὴν τῶν πλευρῶν εἰς γωνίας καὶ τῶν γωνιῶν εἰς πλευρὰς (καὶ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ α΄ ὅρου τοῦ β΄ μέλους)· ἐπειδὴ δὲ εὑρέθησαν ἀπὸ τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ δοθέντος, λέγονται ***πολικοὶ τύποι*** τῶν τύπων τῆς α΄ ὁμάδος.

13. ***Πολικοὶ τύποι τῆς β΄ ὁμάδος.*** Ἂν εἰς τοὺς τύπους τῆς β΄ ὁμάδος διὰ τὸ πολικὸν τρίγωνον:

$$\frac{\text{ημ}\alpha'}{\text{ημ}A'} = \frac{\text{ημ}\beta'}{\text{ημ}B'} = \frac{\text{ημ}\gamma'}{\text{ημ}\Gamma'}$$

θέσωμεν τὰς προηγουμένας τιμὰς τῶν α΄, β΄, γ΄, Α΄, Β΄, Γ΄ διὰ τῶν στοιχείων τοῦ δοθέντος τριγώνου εὑρίσκομεν:

$$\frac{\text{ημ}A}{\text{ημ}\alpha} = \frac{\text{ημ}B}{\text{ημ}\beta} = \frac{\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}\gamma},$$

δηλ. *πάλιν* τοὺς ἰδίους τύπους· ὥστε οἱ τύποι τῆς β′ ὁμάδος εἶναι ***πολικοὶ ἑαυτῶν***.

14. ***Πολικοὶ τύποι τῆς γ′ ὁμάδος***. Ἂν εἰς τὸν τύπον

$$\eta\mu\alpha'\sigma\upsilon\nu B' = \sigma\upsilon\nu\beta'\eta\mu\gamma' - \eta\mu\beta'\sigma\upsilon\nu\gamma'\sigma\upsilon\nu A'$$

θέσωμεν $\alpha' = \pi - A, B' = \pi - \beta$ κλπ. λαμβάνομεν:

$$\eta\mu(\pi - A)\sigma\upsilon\nu(\pi - \beta) =$$
$$= \sigma\upsilon\nu(\pi - B)\eta\mu(\pi - \Gamma) - \eta\mu(\pi - B)\sigma\upsilon\nu(\pi - \Gamma)\sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha),$$

δηλαδὴ ἔχομεν τοὺς 6 ***πολικοὺς τύπους*** τῆς γ′ ὁμάδος:

$$(6)\left\{\begin{array}{l}
\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma + \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha \\
\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu A + \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\beta \\
\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu A\eta\mu B + \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\gamma \\
\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B + \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\alpha \\
\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu A\eta\mu\Gamma + \eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\beta \\
\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu B\eta\mu A + \eta\mu B\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\gamma.
\end{array}\right.$$

Παρατήρησις. Εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους αὐτοὺς καὶ μὲ ἄλλον τρόπον· ὁ ἕκτος π. χ. εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν τύπον τῆς γ′ ὁμάδος:

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \,.\, \eta\mu\gamma - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

θέσωμεν ἀντὶ ημα, ημβ, ημγ τὰ ἀνάλογά των ποσὰ ημΑ, ημΒ, ημΓ. Ἐπίσης δὲ καὶ οἱ λοιποί.

15. ***Πολικοὶ τύποι τῆς ὁμάδος (4)***. Μὲ τὴν πολικὴν τροπὴν τῆς ὁμάδος (4) ἢ καὶ ἀπὸ τοὺς (6) μὲ τὴν ἀπαλοιφὴν εἰς τὰ α′ μέλη τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν ἀπὸ τοὺς τύπους τῆς (2) (δηλ. $\eta\mu A = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta}\eta\mu\alpha$ κλπ.) εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἑξῆς ὁμάδα τύπων:

$$(7)\left\{\begin{array}{l}
\eta\mu\alpha\sigma\varphi\beta = \sigma\varphi B\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha \\
\eta\mu\beta\sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi A\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\beta \\
\eta\mu\beta\sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\Gamma\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\beta \\
\eta\mu\gamma\sigma\varphi\beta = \sigma\varphi B\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\gamma \\
\eta\mu\gamma\sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi A\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\gamma \\
\eta\mu\alpha\sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\Gamma\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\alpha.
\end{array}\right.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Τύποι τῶν ὀρθογωνίων καὶ τῶν ὀρθοπλεύρων τριγώνων.

α΄) *Ὀρθογώνια τρίγωνα.*

16. Ἂν εἰς τὸν τύπον συνα=συνβσυνγ+ημβημγσυνΑ τῆς α΄ ὁμάδος ὑποθέσωμεν Α=90°, εὑρίσκομεν συνα=συνβσυνγ (8). δηλ. ***Τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν συνημιτόνων τῶν καθέτων πλευρῶν.***

17. Ἂν εἰς τὰς ἀναλογίας $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ θέσωμεν Α=90°, εὑρίσκομεν:

(9)ημβ=ημαημΒ, ημγ=ημαημΓ,δηλ.***Τὸ ἡμίτονον ἑκάστης καθέτου πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιτόνου τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικρυνῆς γωνίας.*** (Ἐντελῶς ὁμοίως, ὅπως καὶ εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅπου ὅμως ἀντὶ ἡμιτόνων τῶν πλευρῶν ἔχομεν τὰς ἰδίας τὰς πλευράς).

18. Ἂν εἰς τὸν τύπον συνΑ=—συνΒσυνΓ+ημΒημΓσυνα θέσωμεν Α=90°, εὑρίσκομεν : (10) συνα=σφΒ.σφΓ, δηλ. ***Τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν συνεφαπτομένων τῶν παρακειμένων γωνιῶν.***

19. Ἐν γένει ἀπὸ τοὺς διαφόρους τύπους διὰ τὰ τυχόντα σφαιρικὰ τρίγωνα εὑρίσκομεν ἁπλουστέρους διὰ τὰ ὀρθογώνια, ἂν ὑποθέσωμεν τὴν μίαν γωνίαν ὀρθήν. Τοιοῦτοι τύποι εἶναι οἱ ἑξῆς :

εφβ=εφασυνΒ, εφβ=ημγεφΒ,
εφγ=εφασυνΓ, εφγ=ημβεφΓ,
(11) συνΒ=συνβημΓ, συνΓ=συνγημΒ κτλ.

Παρατήρησις. Πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τῶν τύπων τούτων χρησιμεύουν οἱ ἑξῆς δύο ***μνημονικοὶ*** κανόνες τοῦ Neper.

Θεωροῦμεν διὰ τὸ στοιχεῖον α ὡς ***προσκείμενα*** μὲν στοιχεῖα τὰ Β, Γ, ὡς ***ἀντικείμενα*** δὲ τὰ $\frac{\pi}{2}$—β, $\frac{\pi}{2}$—γ (καὶ διὰ κυκλικῆς τροπῆς εὑρίσκομεν καὶ τ' ἀντίστοιχα εἰς τὰ β καὶ γ).

Τότε : ***Κανὼν α′ : Τὸ συνημίτονον τοῦ τυχόντος στοιχείου (πλὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας) εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀντικειμένων του στοιχείων.***

Κανὼν β′ : Τὸ συνημίτονον τοῦ τυχόντος στοιχείου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν συνεφαπτομένων τῶν προσκειμένων στοιχείων.

β′) Ὀρθόπλευρα τρίγωνα.

20. Ἂν εἰς ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχωμεν $\alpha = 90^0$, τὸ τρίγωνον λέγεται ***ὀρθόπλευρον*** καὶ οἱ γενικοὶ **τύποι** μᾶς δίδουν τότε τοὺς ἑξῆς :

$$
(12)\left\{\begin{array}{l}
\text{συν}A = -\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma,\ \text{ημ}B = \text{ημ}A\,\text{ημ}\beta,\ \text{ημ}\Gamma = \text{ημ}A\,\text{ημ}\gamma,\\
\text{εφ}B = -\text{εφ}A\,\text{συν}\beta,\ \text{εφ}\Gamma = -\text{εφ}A\,\text{συν}\gamma,\ \text{εφ}B = \text{ημ}\Gamma\,\text{εφ}\beta,\\
\text{εφ}\Gamma = \text{ημ}B\,\text{εφ}\gamma, \text{συν}A = -\text{σφ}\beta\,\text{σφ}\gamma,\ \text{συν}\beta = \text{συν}B\,\text{ημ}\gamma,\ \text{συν}\gamma = \\
\qquad\qquad \text{κ.τ.λ.} \qquad\qquad\qquad = \text{συν}\Gamma\,\text{ημ}\beta.
\end{array}\right.
$$

Οἱ τύποι δὲ αὐτοὶ εἶναι προφανῶς πολικοὶ τῶν τύπων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′.

Μετασχηματισμὸς τῶν τύπων εἰς ὑπολογιστοὺς διὰ τῶν λογαρίθμων.

Α′) Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τοῦ α′ μέλους εἰς τοὺς τύπους (1).

21. Τὸν τύπον: $\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma + \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}A$

τὸν γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta(\text{συν}\gamma + \text{εφ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}A),$$

ἔπειτα θέτομεν: $\text{εφ}\beta\,\text{συν}A = \text{εφ}\omega$, ὅπου ω εἶναι μία βοηθητικὴ γωνία, ὑπολογιζομένη λογαριθμικῶς ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτήν· τότε ὁ τύπος μας γίνεται:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta(\text{συν}\gamma + \text{ημ}\gamma\,\text{εφ}\omega) = \text{συν}\beta\left(\frac{\text{συν}\gamma\,\text{συν}\omega + \text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}\right),$$

ἢ καὶ $\text{συν}\alpha = \dfrac{\text{συν}\beta\,\text{συν}(\omega-\gamma)}{\text{συν}\omega},$

δηλ. ἔχομεν τρεῖς τύπους ***ὑπολογιστοὺς διὰ λογαρίθμων***:

$$(13)\quad \text{συν}\alpha=\frac{\text{συν}\beta\,\text{συν}(\omega_3-\gamma)}{\text{συν}\omega_3},\quad \text{συν}\beta=\frac{\text{συν}\gamma.\text{συν}(\omega_1-\alpha)}{\text{συν}\omega_1},$$

$$\text{συν}\gamma=\frac{\text{συν}\alpha.\text{συν}(\omega_2-\beta)}{\text{συν}\omega_2}$$

(ὅπου: $\text{εφ}\omega_3=\text{εφ}\beta\,\text{συν}A$, $\text{εφ}\omega_1=\text{εφ}\gamma\,\text{συν}B$, $\text{εφ}\omega_2=\text{εφ}\alpha\,\text{συν}\Gamma$).

Β') Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας τοῦ α' μέλους εἰς τοὺς τύπους (5).

22. Ὁ τύπος $\text{συν}A=-\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma+\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\alpha$ γράφεται $\text{συν}A=\text{συν}B(-\text{συν}\Gamma+\text{εφ}B\,\text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\alpha)$ καὶ ἂν θέσωμεν ὁμοίως: $\text{εφ}B\,\text{συν}\alpha=\text{εφ}\Omega_3$, εὑρίσκομεν:

$$\text{συν}A=\text{συν}B(-\text{συν}\Gamma+\text{εφ}\Omega_3\,\text{ημ}\Gamma)=$$

$$=\text{συν}B.\left(-\frac{\text{συν}\Gamma\,\text{συν}\Omega_3+\text{ημ}\Omega_3\,\text{ημ}\Gamma}{\text{συν}\Omega_3}\right),$$

δηλ. $\text{συν}A=-\dfrac{\text{συν}B.\text{συν}(\Omega_3+\Gamma)}{\text{συν}\Omega_3}$ · καὶ ὁμοίως:

$$\text{συν}B=-\frac{\text{συν}\Gamma\,\text{συν}(\Omega_1+A)}{\text{συν}\Omega_1},\qquad \text{συν}\Gamma=-\frac{\text{συν}A\,\text{συν}(\Omega_2+B)}{\text{συν}\Omega_2}.\quad (14)$$

Οἱ τρεῖς δὲ αὐτοὶ τύποι εἶναι προφανῶς καὶ οἱ πολικοὶ τῶν τριῶν προηγουμένων (13). (Τὰ ω_1, ω_2, ω_3 τρέπονται εἰς τὰ Ω_1, Ω_2, Ω_3).

Γ') Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν ἀπὸ τὰς πλευράς.

23. Ἔχομεν κατὰ πρῶτον λύοντες τὸν α' τύπον (1):

$$\text{συν}A=\frac{\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma},$$

διὰ νὰ κάμωμεν δὲ τὸν τύπον αὐτὸν (καὶ τοὺς δύο ἄλλους ὁμοίους του) λογιστὸν διὰ λογαρίθμων, προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν:

$$1-\text{συν}A=2\text{ημ}^2\frac{A}{2}=1-\frac{\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}=\frac{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma-\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma},$$

$$\text{δηλ. } 2\text{ημ}^2\frac{A}{2}=\frac{\text{συν}(\beta-\gamma)-\text{συν}\alpha}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}=\frac{2\text{ημ}\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\text{ημ}\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma},$$

$$\text{ἢ καὶ } \text{ημ}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\beta)\,\text{ημ}(\tau-\gamma)}{\text{ημ}\beta.\text{ημ}\gamma}}\quad\left(\text{ὅπου } t=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cdot$$

καὶ ὁμοίως (διὰ κυκλικῆς τροπῆς):

$$\text{ημ}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\gamma)\,\text{ημ}(\tau-\alpha)}{\text{ημ}\gamma.\text{ημ}\alpha}},\quad \text{ημ}\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\alpha)\,\text{ημ}(\tau-\beta)}{\text{ημ}\alpha.\text{ημ}\beta}}\quad (15)$$

(Αἱ ῥίζαι θὰ εἶναι θετικαί, διότι αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$, εἶναι ὀξεῖαι).

24. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τύπους διὰ τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ μὲ τὴν ἑξῆς σειρὰν πράξεων:

$$1+\sigma\upsilon\nu A\equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma+\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{2\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{2\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma},$$

ὥστε :
$$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha}},\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}}\end{array}\right\}\quad(16)$$

(ἔχουν δὲ καὶ πάλιν τὰ ῥιζικὰ τὸ θετικὸν σημεῖον). Καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὰς (15) καὶ (16) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\beta)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}},\quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\gamma)\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\beta)}},\\ \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}},\end{array}\right\}\quad(17)$$

Δ΄) Ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τὰς γωνίας.

25. Λύομεν τὸν α΄ τύπον τῆς πολικῆς ὁμάδος (5) πρὸς συνα: $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$, κ' ἔπειτα προχωροῦμεν ὅπως καὶ πρίν:

$$2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma-\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=$$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=-2\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma-A}{2}\right)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}.$$

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἐδῶ παρουσιάζεται τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{A+B+\Gamma}{2}$ τῶν γωνιῶν, καθὼς εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ τῶν πλευρῶν. Ὅπως δὲ ἐκεῖ ἐξεφράσαμεν τοὺς τύπους συντομώτερον μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἡμιπεριμέτρου $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, οὕτω κ' ἐδῶ θὰ εἰσαγάγωμεν πρὸς συντόμευσιν τῶν τύπων τὴν ***σφαιρικὴν ὑπερο-***

χὴν 2Ε, δηλ. θὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας, ὅτι $\frac{A+B+\Gamma}{2}=E+\frac{\pi}{2}$· τότε εἶναι καί :

$\frac{B+\Gamma-A}{2}=\frac{\pi}{2}-(A-E)$, $\frac{\Gamma+A-B}{2}=\frac{\pi}{2}-(B-E)$, $\frac{A+B-\Gamma}{2}=$

$=\frac{\pi}{2}-(\Gamma-E)$· ὁ προηγούμενος λοιπὸν τύπος γίνεται :

$$2\,\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}=-2\frac{\sigma\upsilon\nu\left(E+\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(A-E)\right)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(A-E)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}.$$

Ὥστε ἔχομεν $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(A-E)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}}$.

26. **Καθ' ὅμοιον τρόπον, κατασκευάζοντες δηλ τὸ ἄθροισμα** $1+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$, εὑρίσκομεν καὶ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$·

Ἔχομεν δηλ. οὕτω τοὺς ἑξῆς 9 τύπους (μὲ τὰ ριζικὰ ὅλα θετικά):

$$(18)\begin{cases}\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(A-E)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(B-E)\eta\mu(\Gamma-E)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}},\\ \qquad \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(A-E)}{\eta\mu(B-E)\eta\mu(\Gamma-E)}}.\\ \eta\mu\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(B-E)}{\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(\Gamma-E)\eta\mu(A-E)}{\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}},\\ \qquad \varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(B-E)}{\eta\mu(\Gamma-E)\eta\mu(A-E)}}.\\ \eta\mu\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(\Gamma-E)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu(A-E)\eta\mu(B-E)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}},\\ \qquad \varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\eta\mu E\,\eta\mu(\Gamma-E)}{\eta\mu(A-E)\eta\mu(B-E)}}.\end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΟΙ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΟΙ ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Τύποι ἀναλογιῶν.

Α΄) Ἀναλογίαι τῶν ἐφαπτομένων.

27. Ἀπὸ τὸν εὑρεθέντα τύπον: $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$ ἕπεται:

$$\frac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\eta\mu A-\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta}, \text{ ἢ καὶ } \frac{2\eta\mu\frac{1}{2}(A+B)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A-B)}{2\eta\mu\frac{1}{2}(A-B)\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\eta\mu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \text{ δηλ. } \frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν καὶ τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},\quad \dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B+\Gamma)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B-\Gamma)}=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}, \\ \dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\Gamma+A)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\Gamma-A)}=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}. \end{array}\right.$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι ὅμοιοι μὲ τοὺς ἀντιστοίχους τῆς ***Εὐθυγρ. Τριγωνομετρίας***, περιέχουν ὅμως ἐφαπτομένας καὶ εἰς τὰ δεύτερα μέλη των.

28. ***Παρατήρησις.*** Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς συνάγομεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν. ***Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντικρυνῶν των γωνιῶν ἢ εἶναι καὶ τὰ δύο συγχρόνως μεγαλύτερα ἀπὸ δύο ὀρθὰς ἢ καὶ τὰ δύο συγχρόνως μικρότερα ἀπὸ 2 ὀρθάς.***

Β') *Ἀναλογίαι τοῦ* Delambre *ἢ τοῦ* Gauss.

29. Ὁ γνωστὸς τύπος:

$$\eta\mu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2},$$

ἂν τεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τοῦ β' μέλους ἀπὸ τοὺς **τύπους (15) καὶ (16)**, γίνεται:

$$\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu^2(\tau-\beta)\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu^2\gamma\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}}+\sqrt{\frac{\eta\mu^2(\tau-\alpha)\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu^2\gamma\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}},$$

ἢ καί: $\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{\eta\mu\gamma}\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}}.(\eta\mu(\tau-\beta)+\eta\mu(\tau-\alpha))=$

$$=\frac{1}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}(\eta\mu(\tau-\alpha)+\eta\mu(\tau-\beta))=\frac{2\eta\mu\left(\frac{2\tau-\alpha-\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2},$$

δηλαδή: $\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\cdot$ ὥστε ἔχομεν

τὴν ἀναλογίαν: $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν τοὺς ἰδίους μετασχηματισμοὺς καὶ **εἰς** τὰ $\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)$ καὶ κάμωμεν καὶ τὴν κυκλικὴν **τροπὴν τῶν γραμμάτων**, εὑρίσκομεν τὸ ὅλον τοὺς ἑξῆς **τύπους**:

$$(20)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, &\quad &\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},\\
&\frac{\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, &\quad &\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},\\
&\frac{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, &\quad &\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\\
&\frac{\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, &\quad &\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)},
\end{aligned}\right.$$

$$(20)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \quad \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)},\\ \dfrac{\eta\mu\left(\frac{\Gamma-A}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \quad \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-A}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)}.\end{array}\right.$$

Οἱ 12 αὐτοὶ τύποι λέγονται ***ἀναλογίαι τοῦ*** Delambre ***ἢ τοῦ*** Gauss.

Μνημονικὸς κανών. Οἱ 4 πρῶτοι τύποι τοῦ Delambre εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς :

α΄) Ἂν εἰς τὸν α΄ τρέψωμεν τὸ Β εἰς —Β, τὸ β εἰς—β, τὸ α εἰς π—α καὶ τὸ γ εἰς π—γ, παράγεται ὁ β΄ ὁ κάτωθεν τοῦ α΄.

β΄) Ἂν εἰς τὸν α΄ τρέψωμεν τὸ Β εἰς —Β, τὸ Α εἰς π—Α, τὸ Γ εἰς π—Γ καὶ τὸ β εἰς —β, παράγεται ὁ γ΄ ὁ παραπλεύρως τοῦ α΄.

γ΄) Ἂν τέλος εἰς τὸν γ΄ τρέψωμεν τὸ Β εἰς —Β τὸ β εἰς —β, τὸ α εἰς π—α καὶ τὸ γ εἰς π—γ, παράγεται ὁ δ΄.

Πρὸς εὐκολωτέραν δὲ ἀπομνημόνευσιν χρησιμεύουν καὶ αἱ ἑξῆς δύο παρατηρήσεις : 1) οἱ λόγοι οἱ ἔχοντες ***γωνίας*** ἔχουν τριγωνομετρικὰς γραμμὰς ***ἑτερωνύμους,*** οἱ δὲ λόγοι μὲ ***πλευρὰς*** ἔχουν τριγ. γραμμὰς ***ὁμωνύμους*** καὶ 2) ὅπου τὸ ἔχον τὰς γωνίας μέλος ἔχει +, τὸ ἄλλο μέλος ἔχει ἀντιστοίχως ***συνημίτονα*** καὶ ὅπου ἔχει —, τὸ ἄλλο ἔχει ***ἡμίτονα.***

Γ΄) Ἀναλογίαι τοῦ Napier (Νέπερ).

30. Αὐταὶ εὑρίσκονται ἀμέσως ἀπὸ τὰς προηγουμένας (20), ἂν τὰς διαιρέσωμεν καταλλήλως ἀνὰ δύο κατὰ μέλη (ὁριζοντίως καὶ κατακορύφως):

$$(21)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \quad \dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)},\\ \dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \quad \dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)},\end{array}\right.$$

$$
(21)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}, &&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)},\\
&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}, &&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)},\\
&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}, &&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-A}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)},\\
&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-A}{2}\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}, &&\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\Gamma-A}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Τύποι τῆς περιμέτρου καὶ τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς.

Α΄) Σχέσεις μεταξὺ τ καὶ Ε.

31. Ἂν εἰς τὴν α΄ ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Delambre (20) θέσωμεν ἀντὶ $\frac{A+B}{2}$ τὸ ἴσον του $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)$, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$ ἢ καί:

$$-\frac{2\eta\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{2}-E+\frac{\Gamma}{2}\right)\eta\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{2}-E-\frac{\Gamma}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{2}-E+\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{2}-E-\frac{\Gamma}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{2\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{4}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{4}\right)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{δηλαδή :}\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\\ &\text{καὶ ἑπομένως καὶ}\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)\\ &\qquad\qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right) \end{aligned}\right\}(22)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸν β′ τύπον τοῦ Delambre εὑρίσκομεν :

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)-\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}-E\right)+\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

ἢ καὶ
$$\frac{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{E}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{E}{2}\right)}=\frac{-2\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\right)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{δηλαδή :}\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)\\ &\text{καὶ ἑπομένως καὶ :}\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\\ &\qquad\qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right) \end{aligned}\right\}(23)$$

32. Ἂν διαιρέσωμεν κάθε τύπον ἀπὸ τοὺς (22) μὲ τὸν ἀντίστοιχόν του εἰς τοὺς (23), εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)}},\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)}},\\ &\qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}}, \end{aligned}\right\}(24)$$

33. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς τυχόντος ἀπὸ τοὺς τύπους (22) ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχόν του εἰς τοὺς (23) δίδει :

$$(25)\qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)=\sqrt{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}.$$

Ὁ τύπος αὐτὸς ἐκφράζει τὴν σφαιρικὴν ὑπεροχὴν (ἑπομένως καὶ τὸ ἐμβαδὸν) τοῦ σφαιρ.τριγώνου (ἐπὶ τῆς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα) διὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν γνωστὸν τύπον τῆς Εὐθυγράμ. Τριγωνομετρίας τὸν δίδοντα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τῶν πλευρῶν :

$$\varepsilon = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

34. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τώρα τὰς 3 ἐξισώσεις (24) κατὰ μέλη καὶ τὸ γινόμενόν των διαιρέσωμεν διὰ τῆς 25), θὰ εὕρωμεν τὸν ἑξῆς τύπον :

$$(26)\qquad \sqrt{\sigma\varphi\left(\frac{E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)}=\sigma\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εἰμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ πολώσεως ἀπὸ τὸν (25) καὶ δίδει ἀντιστρόφως τὴν περίμετρον τ διὰ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου (ἐπὶ τῆς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα).

Β').* *Πολικὴ ἀναλλοίωτος τοῦ Lhuilier.

35. Ἂν τὴν (25) τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\sigma\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$, τὴν (26) ἐπὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)$ καὶ ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ γινομένου $\sigma\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{E}{2}\right)$, εὑρίσκομεν:

$$(27)\qquad \sigma\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)=$$

$$=\varepsilon\varphi\frac{E}{2}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)=L^2,$$

δηλ. τὴν λεγομένην ***παράστασιν τοῦ*** Lhuilier, ἔχουσαν οὕτω δύο μορφάς, τὴν μίαν μὲ τὰς πλευρὰς καὶ τὴν ἄλλην μὲ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου.

36. Τέλος, ἂν τοὺς τύπους (23) τοὺς διαιρέσωμεν κατὰ σειρὰν διὰ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ καὶ θέσωμεν ἔπειτα ἀντὶ $\frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}=\sigma\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$ τὴν τιμήν του ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (26), εὑρίσκομεν καὶ τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$(28)\quad \left|\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)=\dfrac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)},\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)=\dfrac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)}, \\ \qquad\qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)=\dfrac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)} \end{array}\right.$$

(τοῦ L ἔχοντος τὴν β' ἔκφρασιν (27)), οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ πολικοὶ τῶν (24), δυναμένων νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A-E}{2}\right)=\frac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)},\ \varepsilon\varphi\left(\frac{B-E}{2}\right)=\frac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)},\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-E}{2}\right)=\frac{L}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}$$

τοῦ L ἔχοντος τώρα τὴν α' ἔκφρασιν (27).

37. Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ δοθέντος, ἐπειδὴ εὑρίσκομεν ἀμέσως $\tau'=\pi-E$ καὶ $E'=\pi-\tau$, βλέπομεν, ὅτι ἡ α' μορφὴ τῆς παραστάσεως τοῦ Lhuilier (27) τρέπεται

εἰς τὴν $\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{E'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{A'-E'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B'-E'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma'-E'}{2}\right)$,

καὶ ἡ β' εἰς τὴν $\sigma\varphi\left(\frac{\tau'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau'-\alpha'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau'-\beta'}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\tau'-\gamma'}{2}\right)$,

συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ***καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη μορφὴ τῆς παραστάσεως L μένουν ἀναλλοίωτοι κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ ἑνὸς τριγώνου εἰς τὸ πολικόν του.***

Γ') Ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

38. Ἂν K εἶναι τὸ ***σφαιρικὸν κέντρον*** καὶ Δ, E, Z, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἔχομεν (καθὼς καὶ εἰς τὴν Εὐθ. Τριγων.): $AE=AZ=\tau-\alpha$, $B\Delta=BZ=\tau-\beta$, $\Gamma E=\Gamma\Delta=\tau-\gamma$. Καὶ ἂν ἡ ***σφαιρικὴ ἀκτὶς*** τοῦ κύκλου, δηλ. τὸ τόξον μεγίστου κύκλου KZ, παρασταθῇ διὰ τοῦ ϱ, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον : $\eta\mu\alpha\sigma\varphi\beta=\sigma\varphi B\eta\mu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\alpha$ (α' τύπος ὁμάδος (7)), ἂν τὸν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AKZ, ὅπου $\Gamma=Z=90^0$, $B=\frac{A}{2}$, $\alpha=\tau-\alpha$, $\beta=\varrho$:

$$\eta\mu(\tau-\alpha)\sigma\varphi\varrho=\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right),\quad \delta\eta\lambda.\ \varepsilon\varphi\varrho=\eta\mu(\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$$

καὶ ἂν τεθῇ ἡ τιμὴ τῆς $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ (τύπ. 17), εὑρίσκομεν τελικῶς :

$$(29)\qquad \varepsilon\varphi\varrho=\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\beta)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}},$$

δηλ. **τύπον ἀντίστοιχον** τοῦ τῆς **Εὐθυγρ.** Τριγωνομετρίας: $\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$ (καὶ τρεπόμενον εἰς ἐκεῖνον, ἂν παραλείψωμεν τὰ σύμβολα εφ καὶ ημ).

Γ') Ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

39. Ἂν ἀπὸ τὸ σφαιρικὸν κέντρον K τοῦ περιγ. κύκλου φέρωμεν τὰ τόξα μεγίστων κύκλων KB καὶ KΔ (εἰς τὸ μέσον Δ τῆς BΓ) καὶ θέσωμεν γων. $K B\Gamma=$ γων $K\Gamma B=\lambda$, γων$K\Gamma A=$γων $KA\Gamma=\mu$, γων$KAB=$γων$KBA=\nu$, θὰ εἶναι: $\mu+\nu=A$, $\nu+\lambda=B$, $\lambda+\mu=\Gamma$ καὶ ἑπομένως : $\lambda=\frac{B+\Gamma-A}{2}=\frac{\pi}{2}$ $-(A-E)$· ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὸν τύπον: $\eta\mu B\sigma\varphi A=\sigma\varphi\alpha\eta\mu\gamma-\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu B$

(α΄ τύπος τῆς ὁμάδος (4), ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΒ(ΚΒ = α = Ρ (ἀκτὶς τοῦ περιγ. κύκλου), ΒΔ = $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, Β=γων. ΚΒΔ=λ, Α = Δ=90°), εὑρίσκομεν : $\sigma\varphi P = \sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\lambda = \frac{\alpha}{2}\eta\mu(A-E)$, ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς $\sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (τύποι (13), εὑρίσκομεν τελικῶς :

$$(30)\quad \sigma\varphi P = \sqrt{\frac{\eta\mu(A-E)\eta\mu(B-E)\eta\mu(\Gamma-E)}{\eta\mu E}}.$$

40. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι, ὅτι ἡ ἔκφρασις αὐτὴ τῆς σφΡ εἶναι ἡ πολικὴ τῆς ἐκφράσεως (29) τῆς εφρ· ὥστε ἔχομεν μεταξὺ τῶν δύο τριγώνων τὰς σχέσεις :

$$\varepsilon\varphi P\,.\,\varepsilon\varphi\varrho' = 1,\quad \varepsilon\varphi P'\,.\,\varepsilon\varphi\varrho = 1,$$

$$\delta\eta\lambda.\quad \varrho' = \frac{\pi}{2} - P,\quad P' = \frac{\pi}{2} - \varrho.$$

(Αἱ σχέσεις αὗται εἱμποροῦν καὶ γεωμετρικῶς νὰ δειχθοῦν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κάθε γωνία σφαιρ. τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ Ε.

2) Νὰ δειχθοῦν μὲ τοὺς τύπους τῆς Σφαιρ. Τριγωνομετρίας τὰ ἑξῆς θεωρήματα τῆς Σφαιρομετρίας : α΄) Ἂν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἔχει τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας του ἴσας· καὶ ἀντιστρόφως. β΄) Κάθε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν 2 ἄλλων. γ΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ 180°.

3) Ἂν ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι συγχρόνως καὶ ὀρθογώνιον καὶ ὀρθόπλευρον (Α=90°, καὶ α=90°), τί γίνονται οἱ τύποι ; καὶ τί ἄλλο συμβαίνει εἰς τὸ τρίγ. αὐτό ;

4) Νὰ μετατραποῦν εἰς λογιστοὺς διὰ λογαρίθμων καὶ οἱ τύποι τῆς 3ης ὁμάδος (3).

5) Κάθε δισορθογώνιον σφαιρ. τρίγωνον εἶναι καὶ δισορθόπλευρον καὶ ἀντιστρόφως.

6) Ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου τῶν μικροτέρων ἀπὸ 90° εἶναι ἢ 3 ἢ 1 (ἀπὸ τὸν τύπον συνα=συνβσυνγ).

7) Εἰς πᾶν ὀρθογ. τρίγωνον καθεμία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ

Γ εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ἀπὸ 90⁰, καθόσον ἡ ἀπέναντι πλευρὰ εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ἀπὸ 90⁰.

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{s^2}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma},$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{s\,\eta\mu\tau}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma},$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{s}{\eta\mu^2\tau},$$

ὅπου : $s=\sqrt{\eta\mu\tau\,\eta\mu(\tau-\alpha)\,\eta\mu(\tau-\beta)\,\eta\mu(\tau-\gamma)}$.

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{S\,\eta\mu E}{\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma},$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{S^2}{\eta\mu E\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma},$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\eta\mu^2 E}{S},$$

ὅπου : $S=\sqrt{\eta\mu E\,\eta\mu(A-E)\,\eta\mu(B-E)\,\eta\mu(\Gamma-E)}$.

Αἱ δύο ἐκφράσεις s καὶ S λέγονται ***παραστάσεις τοῦ*** Staudt. Εἶναι δὲ οἱ τύποι τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς οἱ πολικοὶ τῶν τύπων τῆς 8ης ἀσκήσεως. Ἐπίσης εἶναι:

$$\eta\mu A=\frac{2s}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma},\quad \eta\mu B=\frac{2s}{\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha},\quad \eta\mu\Gamma=\frac{2s}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta},$$

$$\eta\mu\left(\frac{E}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{E}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)}}$$

10) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι :

$$\eta\mu(A-E)=\frac{s}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

$$\eta\mu(B-E)=\frac{s}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\eta\mu(\Gamma-E)=\frac{s}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

11) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι :

$$\sigma\upsilon\nu(A-E)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)-1}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

$$\sigma\upsilon\nu(B-E)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\sigma\upsilon\nu(\Gamma-E)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-1}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\beta}{2}\right)},$$

12) Νὰ δειχθῇ, ὅτι : $\eta\mu\alpha=\frac{2S}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$ (καὶ οἱ ὅμοιοι κυκλικῶς), καὶ $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=4\ S.\ s.$

13) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι : $\sigma\varphi^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ καὶ οἱ ὅμοιοι (κυκλ.), $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\eta\mu(\alpha+\gamma)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma}$, $\eta\mu^2\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\eta\mu(\alpha-\gamma)}{2\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu\alpha}$ καὶ οἱ ὅμοιοι (κυκλικῶς).

14) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι :

$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\eta\mu^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ καὶ οἱ ὅμ. (κυκλ.)

$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0$ καὶ οἱ ὅμ. (κυκ.)

$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)+\eta\mu(\beta+\gamma)\eta\mu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ καὶ οἱ ὅμ. (κυκ.)

ΜΕΡΟΣ Γ΄.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων καὶ τῶν ὀρθοπλεύρων τριγώνων.

Α΄) Ὀρθογώνια τρίγωνα.

41. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι *τρισορθογώνιον*, εἶναι καὶ ***τρισορθόπλευρον,*** ἑπομένως ὅλα τὰ στοιχεῖά του εἶναι γνωστά.

Ἂν δ' εἶναι ***δισορθογώνιον*** ($B=\Gamma=90^0$), εἶναι καὶ ***δισορθόπλευρον*** ($\beta=\gamma=90^0$) (**Ἄσκησις** 5η)· ἑπομένως ἀπὸ τὰ 6 στοιχεῖά του τὰ 4 εἶναι γνωστά, τὰ δὲ δύο ἄλλα Α καὶ α ἔχουν τὸ ἴδιον μέτρον (διότι συνα=συνA)· ἂν λοιπὸν τὸ ἓν δοθῇ, εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ ἄλλο.

Ὥστε ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν τὴν ἐπίλυσιν τῶν ***μονορθογωνίων*** τριγώνων.

Περίπτωσις α΄.

42. ***Δίδονται αἱ πλευραὶ β καὶ γ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α καὶ ζητοῦνται τὰ λοιπὰ στοιχεῖα (α, β, Γ).*** Θὰ ἔχωμεν (κατὰ τοὺς μνημονικοὺς κανόνας τοῦ Νέπερ).(σελ 16): συνα=συνβσυνγ, σφB=σφβημγ, σφΓ=σφγημβ. Οἱ δὲ τύποι αὐτοὶ ὁρίζουν προφανῶς ***μονοτίμως τὰ α, β, Γ.***

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ὁρισμὸς μιᾶς ἀγνώστου γωνίας γίνεται ***ἀκριβέστερα*** ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην της (ἢ τὴν συνεφαπτομένην), μετασχηματίζομεν τὸν α΄ τύπον, ὡς ἑξῆς :

$\text{εφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}=\frac{1-\text{συν}\beta\text{συν}\gamma}{1+\text{συν}\beta\text{συν}\gamma}=\frac{1-\text{εφ}\omega}{1+\text{εφ}\omega}$ (εφω = συνβσυνγ)· ὥστε $\text{εφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)$. Ὑπολογίζομεν λοιπὸν πρῶτα ***ἐφαπτομενικῶς*** τὴν ω ἀπὸ τὸν τύπον εφω=συνβσυνγ καὶ ἔπειτα τὴν α ἀπὸ τὸν τύπον $\text{εφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)$.

Περίπτωσις β΄.

43. ***Δίδονται αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β. Ζητοῦνται τ' ἄλλα στοιχεῖα (γ, Β, Γ).*** Θὰ ἔχωμεν τώρα τοὺς τύπους :

$$\text{ημ}B=\frac{\text{ημ}\beta}{\text{ημ}\alpha},\ \text{συν}\Gamma=\text{σφ}\alpha\text{εφ}\beta,\ \text{συν}\gamma=\frac{\text{συν}\alpha}{\text{συν}\beta},$$

ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ β΄ καὶ ὁ γ΄ ὁρίζουν ***μονοτίμως*** τὰ Γ καὶ γ· ἀλλ' ὁ α΄ δίδει διὰ τὴν γων. Β δύο τιμάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας ὅμως ἡ μία μόνον θὰ ἰσχύῃ, ἀναλόγως τῆς δοθείσης πλευρᾶς β, διότι β καὶ Β εἶναι ἢ συγχρόνως μεγαλύτερα ἢ συγχρόνως μικρότερα ἀπὸ 90^0. (**Ἄσκ.** 7).

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις, χρειάζεται προφανῶς ὁ περιορισμός : τὰ β΄ μέλη τῶν προηγουμένων τύπων νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερα ἢ ἴσα μὲ τὴν μονάδα.

Ἐφαπτομενικοὶ τύποι εἶναι τώρα οἱ ἑξῆς :

$$\alpha')\ \text{εφ}\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συν}(90^0-B)}{1+\text{συν}(90^0-B)}}=\sqrt{\frac{1-\text{ημ}B}{1+\text{ημ}B}}=\sqrt{\frac{\text{ημα}-\text{ημβ}}{\text{ημα}+\text{ημβ}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\text{ημ}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\text{ημ}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}=\sqrt{\frac{\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}}.$$

$$\beta')\ \text{εφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συν}\Gamma}{1+\text{συν}\Gamma}}=\sqrt{\frac{\text{εφα}-\text{εφβ}}{\text{εφα}+\text{εφβ}}}=\sqrt{\frac{\frac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{συνασυνβ}}}{\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συνασυνβ}}}}=\sqrt{\frac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}(\alpha+\beta)}}.$$

$$\gamma')\ \text{εφ}\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συνγ}}{1+\text{συνγ}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\text{συνα}}{\text{συνβ}}}{1+\frac{\text{συνα}}{\text{συνβ}}}}=\sqrt{\frac{\text{συνβ}-\text{συνα}}{\text{συνβ}+\text{συνα}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\text{ημ}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\text{ημ}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\text{συν}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\text{συν}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}=\sqrt{\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

Περίπτωσις γ'.

44. Δίδονται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ μία ἀπὸ τάς γωνίας, π.χ. ἡ Β. Ἀπὸ τοὺς κανόνας τοῦ Neper ἔχομεν τοὺς τύπους :

$$\text{ημβ}=\text{ημαημ}B,\quad \text{εφγ}=\text{εφασυν}B,\quad \text{σφ}\Gamma=\text{συναεφ}B.$$

(Ὁ α' τύπος δίδει πάλιν 2 τιμὰς διὰ τὴν β, ἀλλὰ θὰ ἐκλέξωμεν τὴν κατάλληλον, ὅπως καὶ πρίν). Ἀντὶ τοῦ α' τύπου εὑρίσκομεν τὸν ἐφαπτομενικόν :

$$\text{εφ}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{ημβ}}{1+\text{ημβ}}}=\sqrt{\frac{1-\text{ημαημ}B}{1+\text{ημαημ}B}}=\sqrt{\frac{1-\text{εφω}}{1+\text{εφω}}}=\sqrt{\text{εφ}(45^0-\omega)}$$

(ὅπου εφω $=$ημαημΒ).

Περίπτωσις δ'.

45. Δίδονται αἱ γωνίαι Β καὶ Γ. Οἱ κανόνες τοῦ Neper παρέχουν : $\text{συνα}=\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma$, $\text{συνβ}=\frac{\text{συν}B}{\text{ημ}\Gamma}$, $\text{συνγ}=\frac{\text{συν}\Gamma}{\text{ημ}B}$ καὶ οὕτως ὁρίζονται μονοτίμως τὰ ζητούμενα στοιχεῖα. Ἐφαπτομενικοὺς δὲ τύπους εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς :

$$\text{εφ}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συνα}}{1+\text{συνα}}}=\sqrt{\frac{1-\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma}{1+\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma}}=\sqrt{\frac{\text{συν}(B+\Gamma)}{\text{συν}(B-\Gamma)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu\Gamma-\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B}}=\sqrt{\frac{\eta\mu\Gamma-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\eta\mu\Gamma+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}}=$$

$$\sqrt{\frac{2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Περίπτωσις ε').

46. Δίδονται ἡ μία πλευρὰ β καὶ ἡ ἀντικρυνὴ γωνία Β. Ἔχομεν ἀπὸ τοὺς κανόνας τοῦ Neper τοὺς τύπους :

$\eta\mu\alpha=\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}$, $\eta\mu\gamma=\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi B}$, $\eta\mu\Gamma=\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\beta}$ (ἔχομεν λοιπὸν τώρα δύο τιμὰς διὰ τὰ β, γ, Γ).

Ἐφαπτομενικοὶ τύποι :

$$\alpha')\ \varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\eta\mu\alpha}{1+\eta\mu\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}}{1+\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}}}=\sqrt{\frac{\eta\mu B-\eta\mu\beta}{\eta\mu B+\eta\mu\beta}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\eta\mu\left(\frac{B-\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\beta}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{B+\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\beta}{2}\right)}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B-\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B+\beta)}},$$

$$\beta')\ \varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon\varphi B-\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\beta}}=\sqrt{\frac{\eta\mu(B-\beta)}{\eta\mu(B+\beta)}}.$$

$$\gamma')\ \varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B+\beta).\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B-\beta)}.$$

Περίπτωσις ς'.

47. Δίδονται μία κάθετος πλευρά, π.χ. ἡ β, καὶ ἡ προσκειμένη γων. Γ.

Ἔχομεν πάλιν ἀπὸ τοὺς κανόνας τοῦ Neper τοὺς τύπους :

$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma}$, $\varepsilon\varphi\gamma=\eta\mu\beta\varepsilon\varphi\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\Gamma$. Καὶ ἀντὶ τοῦ γ' τύπου εὑρίσκομεν τὸν ἐφαπτομενικόν :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu B}{1+\sigma\upsilon\nu B}}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\Gamma}{1+\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\Gamma}}=\sqrt{\frac{1-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}}=\sqrt{\varepsilon\varphi(45^0-\omega)}$$

(ὅπου εφω ≡ συνβημΓ).

48. Ὑπάρχουν καὶ μερικὰ ἰδιαίτερα σφαιρικὰ τρίγωνα, ὄχι ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίων, π. χ.

α΄) Ἂν $\alpha = \beta$ ἢ $A = B$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ἐπίλυσίς του γίνεται, ἀφοῦ ἀναλυθῇ εἰς δύο ὀρθογώνια (μὲ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, τοῦ ἑνώνοντος τὴν κορυφήν του μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως).

β΄) Ἂν $\alpha + \beta = 180^0$ ἢ $A + B = 180^0$, προεκβάλλομεν τὰς πλευρὰς α καὶ γ ἕως τὴν τομήν των εἰς τὸ Β΄ καὶ σχηματίζομεν οὕτω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ΄· ἐπιλύομεν τότε αὐτὸ (μὲ τὴν ἀνάλυσιν εἰς 2 ὀρθογώνια) καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔπειτα ὑπολογίζομεν καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ δοθέντος.

Β΄) Ἐπίλυσις τῶν ὀρθοπλεύρων τριγώνων.

49. Ἀρκεῖ καὶ πάλιν νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰ ***μονορθόπλευρα*** τρίγωνα· διότι τὰ δισορθόπλευρα εἶναι καὶ δισορθογώνια καὶ ἑπομένως, ὅταν μᾶς δοθῇ τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα μένοντα στοιχεῖα, τὸ ἄλλο μετρεῖται ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ὅταν δὲ τὸ τρίγωνον εἶναι τρισορθόπλευρον εἶναι καὶ τρισορθογώνιον· ἑπομένως ὅλα τὰ στοιχεῖά του εἶναι γνωστά.

50. Ἡ ἐπίλυσις ἑνὸς μονορθοπλεύρου τριγώνου εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ εἴτε ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τῶν μονορθοπλεύρων τριγώνων (τύποι 12) εἴτε, συντομώτερον, διὰ τῆς ἐπιλύσεως κάθε φορὰν τοῦ ἀντιστοίχου πολικοῦ τριγώνου (***τὸ ὁποῖον εἶναι τότε ὀρθογώνιον***), ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀρχικοῦ. Αἱ ἓξ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

	Ἀρχικὸν τρίγωνον.	Πολικὸν τρίγωνον.
	$(\alpha = 90^0)$	$(A' = 90^0)$
Περίπτ. α΄.	Δίδονται Β,Γ.	Γνωστὰ $\beta' = 180^0 - B$, $\gamma' = 180^0 - \Gamma$.
	Ζητοῦνται Α,β,γ.	Ζητοῦνται α΄, Β΄, Γ΄.

Λύσις : $A = 180^0 - \alpha'$, $\beta = 180^0 - B'$, $\gamma = 180^0 - \Gamma'$.

Περ. β΄.	Δίδον. Α,Β(ἢ Α,Γ).	Γνωστὰ $\alpha' = 180^0 - A$, $\beta' = 180^0 - B$.
	Ζητοῦνται Γ,β,γ.	Ζητοῦνται γ΄, Β΄, Γ΄.

Λύσις : $\Gamma = 180^0 - \gamma'$, $\beta = 180^0 - B'$, $\gamma = 180^0 - \Gamma'$.

Περ.γ'. Δίδον. Α,β (ἢ Α,γ). Γνωστά $α'=180^0-A, B'=180^0-β$.
Ζητοῦνται Β, Γ, γ. Ζητοῦνται β', γ', Γ',
Λύσις: $B=180^0-β'$, $Γ=180^0-γ'$, $γ=180^0-Γ'$.

Περίπτ. δ'. Δίδονται β,γ. Γνωστά $B'=180^0-β$, $Γ'=180^0-γ$.
Ζητοῦνται Α, Β, Γ. Ζητοῦνται α', β', γ'.
Λύσις: $A=180^0-α'$, $B=180^0-β'$, $Γ=180^0-γ'$.

Περ.ε'. Δίδον. Β,β (ἢ Γ,γ). Γνωστά $β'=180^0-B$, $B'=180^0-β$.
Ζητοῦνται Α, Γ, γ. Ζητοῦνται α', γ', Γ'.
Λύσις: $A=180^0-α'$, $Γ=180^0-γ'$, $γ=180^0-Γ'$.

Περ.ς'. Δίδον. Β,γ (ἢ Γ,β). Γνωστά $β'=180^0-B$, $Γ'=180^0-γ$.
Ζητοῦνται Α, Γ, β. Ζητοῦνται α', γ', Β'.
Λύσις: $A=180^0-α'$, $Γ=180^0-γ'$, $β=180^0-B'$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.
Ἐπίλυσις ὁποιωνδήποτε σφαιρικῶν τριγώνων.

Ἔχομεν πάλιν 6 διαφόρους περιπτώσεις.

Περίπτωσις α'.

51. Δίδονται α, β, γ. Ζητοῦνται Α, Β, Γ.

Ἔχομεν τοὺς τύπους:

$$εφ\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{ημ(τ-β)ημ(τ-γ)}{ημτημ(τ-α)}},\quad εφ\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{ημ(τ-γ)ημ(τ-α)}{ημτημ(τ-β)}},$$

$$εφ\left(\frac{Γ}{2}\right)=\sqrt{\frac{ημ(τ-α)ημ(τ-β)}{ημτημ(τ-γ)}}$$

Δίδουν δὲ οἱ τύποι αὐτοὶ πραγματικὰς τιμάς, διότι ὅλα τὰ ἡμίτονα τῶν ὑπορρίζων εἶναι θετικά, ἀφοῦ $α+β+γ<360^0$ καὶ κάθε πλευρὰ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Πραγματικῶς τότε εἶναι:

$τ=\frac{α+β+γ}{2}<180^0$, $τ-α=\frac{β+γ-α}{2}>0$, ἐπίσης καὶ $τ-β>0$, $τ-γ>0$.

Περίπτωσις β':

52. Δίδονται Α, Β, Γ. Ζητοῦνται α, β, γ.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu E\eta\mu(A-E)}{\eta\mu(B-E)\eta\mu(\Gamma-E)}},\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu E\eta\mu(B-E)}{\eta\mu(\Gamma-E)\eta\mu(A-E)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu E\eta\mu(\Gamma-E)}{\eta\mu(A-E)\eta\mu(B-E)}}$$ (αἱ παρεχόμεναι τιμαὶ εἶναι πάλιν πραγματικαί, ἀφοῦ $2^{\text{ὀρθ.}}<A+B+\Gamma<6^{\text{ὀρθ.}}$ καὶ κάθε γωνία αὐξηθεῖσα κατὰ $2^{\text{ὀρθ.}}$ ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο. Πραγματικῶς ἀπὸ τὰς ἰσότητας $2^{\text{ὀρθ.}}<A+B+\Gamma<6^{\text{ὀρθ.}}$, $A+2^{\text{ὀρθ.}}>B+\Gamma$ συμπεραίνομεν:

$$0<A+B+\Gamma-2^{\text{ὀρθ.}}<4^{\text{ὀρθ.}},\quad \text{ἢ}\quad 0<2E<4^{\text{ὀρθ.}},$$

$0<E<2^{\text{ὀρθ.}}$· εἶναι δέ, καθὼς γνωρίζομεν, (ἄσκησις 1) καὶ κάθε γωνία ἀπὸ τὰς A, B, Γ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ E: ὥστε ὅλα τὰ ἡμίτονα τῶν ὑπορρίζων εἶναι θετικά· ἐπομένως τὰ ριζικά πραγματικά.

Περίπτωσις γ´:

53. Δίδονται 2 πλευραὶ α καὶ β καὶ μία γων. A ἀντικειμένη. Ζητοῦνται γ, B, Γ.

Πρῶτα εὑρίσκομεν τὴν B ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν: $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta}$,

$$\eta\mu B=\frac{\eta\mu\beta\,\eta\mu A}{\eta\mu\alpha}.$$

Ἔπειτα τὰ γ καὶ Γ ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Neper:

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A-B)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)}\quad\text{καὶ}\quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}{\sigma\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\gamma=\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A-B)}$,

$$\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $\eta\mu B<1$, δηλ. $\eta\mu\beta\eta\mu A<1$. Ἀπὸ τὰς δύο δὲ τιμὰς τῆς B δεκτὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία δίδει $A+B$ καὶ $\alpha+\beta$ συγχρόνως μικρότερα ἢ συγχρόνως μεγαλύτερα ἀπὸ 180^0.

Περίπτωσις δ´:

54. Δίδονται δύο γωνίαι, A καὶ B, καὶ μία ἀντικειμένη πλευ-

ρὰ ἡ α. Ζητοῦνται Γ, β, γ. (Περίπτωσις πολικὴ τῆς γ'), Ἡ ἐπίλυσίς θὰ γίνῃ ἀπὸ τοὺς ἰδίους τύπους τῆς περιπτώσεως γ'.

Περίπτωσις ε'.

55. Δίδονται δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ περιεχομένη γων. Γ. Ζητοῦνται γ,Α,Β.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους τοῦ Neper :

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}{\sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},\quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}{\sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{\eta\mu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\eta\mu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τὰ Α+Β καὶ Α—Β καὶ ἑπομ. καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν Α καὶ Β, μία ἀπὸ τὰς ἄλλας ἀναλογίας τοῦ Neper τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν γ, μᾶς δίδει τὴν γ, π.χ. εὑρίσκομεν :

$$\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\gamma=\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Περίπτωσις ς')

56. Δίδονται δύο γωνίαι Α καὶ Β καὶ ἡ κοινή των πλευρὰ γ. Ζητοῦνται Γ,α,β.

(Περίπτωσις πολικὴ τῆς ε').

Αἱ ἀναλογίαι τοῦ Neper : $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\gamma}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A-B)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)}$,

$\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\gamma}=\dfrac{\eta\mu\frac{1}{2}(A-B)}{\eta\mu\frac{1}{2}(A+B)}$ μᾶς δίδουν τὰ α+β, α—β, ἑπομ. καὶ τὰς πλευρὰς α καὶ β. Ἔχοντες τώρα τὰς α καὶ β, εὑρίσκομεν τὴν γων. Γ ἀπὸ μίαν τῶν ἄλλων ἀναλογιῶν τοῦ Neper· π. χ.

$$\text{ἔχομεν : } \sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma=\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Παρατήρησις α'. Ἡ πλευρὰ γ εἰς τὴν ε' περίπτωσιν καὶ ἡ γων. Γ εἰς τὴν ς' εἰμποροῦν νὰ εὑρεθοῦν καὶ ἀπ' εὐθείας, ἡ πρώτη ἀπὸ τὸν τύπον : συνγ=συνασυνβ+ημαημβσυνΓ καὶ ἡ δευτέρα ἀπὸ τὸν πολ. τύπον: συνΓ=—συνΑσυνΒ+ημΑημΒσυνγ, ἀφοῦ πρῶτα καὶ οἱ δύο γίνουν λογιστοὶ διὰ λογαρίθμων, καθὼς ἐμάθομεν.

Παρατήρησις β'. 1) Ἀπὸ τὰς 6 περιπτώσεις ἐπιλύσεως τοῦ τυχόντος τριγώνου ἀνάγονται 3 εἰς 3 ἄλλας τοῦ πολικοῦ του τριγώνου. Εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὰς 3 καὶ ***ἐμμέσως***, ἐπιλύοντες πρῶτον τὸ ἀρχικὸν σφαιρικὸν τρίγωνον· δηλαδὴ αἱ περιπτώσεις μὲ δεδομένα: 1) Α, Β, Γ, 2) Α, Β, γ, 3) Α, Β, α ἀνάγονται εἰς τὰς 4) α, β, γ, 5) α, β, Γ, 6) α, β, Α.

2) Αἱ τέσσαρες περιπτώσεις μὲ δεδομένα: 1) α, β, Γ, 2) Α, Β, γ, 3) α, β, Α, 4) Α, Β, α εἰμποροῦν νὰ λυθοῦν καὶ μὲ τοὺς τύπους τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων διὰ καταλλήλου διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ εἰς δύο ὀρθογώνια.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) $\alpha=113^\circ 2' 56'',64$, $\beta=82^\circ 39' 28'',40$, $\gamma=74^\circ 54' 31'',06$.
[Ἀπ. $A=116^\circ 20' 2'',20$, $B=75^\circ 0' 51'',60$, $\Gamma=70^\circ 6' 59'',16$].

2) $\alpha=113^\circ 2' 56'',64$, $\beta=82^\circ 39' 28'',40$, $\Gamma=138^\circ 50' 19'',69$.
[Ἀπ. $\gamma=137^\circ 29' 4'',60$, $A=116^\circ 20' 2'',20$, $B=104^\circ 59' 8'',38$].

3) $\alpha=113^\circ 2' 56'',64$, $\beta=82^\circ 39' 28'',40$, $A=116^\circ 20' 2'',20$.
[Ἀπ. Λύσις α': $B=75^\circ 0' 51'',60$, $\Gamma=70^\circ 6' 59'',16$, $\gamma=74^\circ 54' 31'',06$· Λύσις β': $B=104^\circ 59' 8''40$, $\Gamma=138^\circ 50' 13''69$, $\gamma=137^\circ 29' 4''64$].

4) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει: $\beta=37^\circ 48' 12''$, $\gamma=59^\circ 44' 16''$.
[Ἀπ. $B=41^\circ 55' 45''$, $\Gamma=70^\circ 19',15$, $\alpha=66^\circ 32' 6''$]

5) Ὀρθογ. τρίγωνον ἔχει: $\alpha=83^\circ 24' 15'',3$, $\beta=34^\circ 11' 20'',1$.
[Ἀπ. $\gamma=82^\circ 1' 5''$, $\Gamma=85^\circ 29' 41''$, $B=34^\circ 26' 55''$].

6) Ὀρθογ. τρίγωνον ἔχει: $\alpha=37^\circ 40' 20''$, $\beta=37^\circ 40' 12''$.
[Ἀπ. $\gamma=0^\circ 26' 37''$, $B=89^\circ 25' 37''$, $\Gamma=0^\circ 43' 32''$].

7) Ὀρθογ. τρίγωνον ἔχει: $\beta=77^\circ 21' 50''$, $B=83^\circ 56' 40$.
[Ἀπ. Λύσις α': $\alpha=78^\circ 53' 20''$, $\gamma=28^\circ 14' 31''$, $\Gamma=28^\circ 49',57''$.
Λύσις β': $\alpha=101^\circ 6' 40''$, $\gamma=151^\circ 45' 29''$, $\Gamma=151^\circ 10' 3''$].

8) Ὀρθογών. τρίγωνον ἔχει: $\beta=77^\circ 21' 50''$, $B=40^\circ 40' 40''$.
[Ἀπ. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον].

9) Ὀρθογών. τρίγωνον ἔχει: $\beta=140^\circ 5'$, $\Gamma=62^\circ 18' 30''$.
[Ἀπ. $\gamma=50^\circ 42' 43''$, $B=132^\circ 47' 11'$].

10) Ὀρθογ. τρίγωνον ἔχει: $\alpha=98^\circ 14' 24''$, $B=55^\circ 32' 45''$.
[Ἀπ. $\Gamma=101^\circ 47' 56''$, $\gamma=104^\circ 21' 28''$].

11) Ὀρθογ. τρίγωνον ἔχει : $B=32^\circ 23' 19''$, $\Gamma=69^\circ 12' 25''$.

['Απ. $\alpha=53^\circ 13' 45''$, $\beta=25^\circ 24' 33''$, $\gamma=48^\circ 29' 31''$].

12) $\alpha=70^\circ 14' 20''$, $\beta=49^\circ 24' 10''$, $\gamma=38^\circ 46' 10''$.

['Απ. $A=110^\circ 51' 16''$, $B=48^\circ 56' 4''$, $\Gamma=38^\circ 26' 48''$].

13) $A=102^\circ 14' 12''$, $B=54^\circ 32' 24''$, $\Gamma=89^\circ 5' 46''$.

['Απ. $\alpha=104^\circ 25' 8''$, $\beta=53^\circ 49' 24''$, $\gamma=97^\circ 44' 18''$].

14) $\alpha=50^\circ 30' 20''$, $\beta=172^\circ 48'$, $A=45^\circ 28' 10''$.

['Απ. Λύσις α': $\gamma=153^\circ 23' 43''$, $\Gamma=155^\circ 33' 45''$, $B=58^\circ 23' 13''$.

Λύσις β': $\gamma=88^\circ 28' 56''$, $\Gamma=67^\circ 26' 17''$. $B=121^\circ 36' 46''$].

15) $\alpha=41^\circ 10'$, $\beta=29^\circ 50'$, $A=69^\circ 30'$.

['Απ. $B=45^\circ 3' 51''$, $\gamma=43^\circ 3' 20''$, $\Gamma=76^\circ 16' 56''$].

16) $\alpha=68^\circ 20' 25''$, $\beta=52^\circ 18' 15''$, $\Gamma=117^\circ 12' 20''$.

['Απ. $A=56^\circ 16' 15''$, $B=45^\circ 4' 41''$, $\gamma=96^\circ 20' 44''$].

ΜΕΡΟΣ Δ'.

Η ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΑΠΟ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΠΟΨΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Εὕρεσις τῶν θεμελιωδῶν τύπων διὰ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας.

57. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν z τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, τὴν ἑνώνουσαν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου· ὡς ἐπίπεδον δὲ τῶν xz λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ τῆς πλευρᾶς ΑΒ· ἄξονες τέλος τῶν x καὶ y εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ (ἄξ. τῶν x) καὶ ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον z0x κάθετος (ἄξ. τῶν y).

58. ***Εὕρεσις τῆς α'. ὁμάδος τύπων.*** Ἔχομεν ἀπὸ τὰς θέσεις τῶν Α, Β, Γ πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ἀπὸ τὰς σχέσεις μεταξὺ εὐθυγράμμων καὶ πολικῶν συντεταγμένων :

$$x_1=0,\ y_1=0,\ z_1=1\cdot\ x_2=\eta\mu\gamma,\ y_2=0,\ z_2=\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot$$
$$x_3=\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu A,\ y_3=\eta\mu\beta\eta\mu A,\ z_3=\sigma\upsilon\nu\beta.$$

Ὥστε: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(BO\Gamma)=x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=x_2x_3+z_2z_3= =\eta\mu\gamma\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta$.

59. ***Εὕρεσις*** *τῆς β' ὁμάδος τύπων.* Ἂς λάβωμεν τώρα ὡς

πολικὸν ἄξονα τὴν ΟΒ· τότε τὸ νέον y'_3 θὰ εἶναι προφανῶς τὸ ἴδιον μὲ τὸ παλαιὸν y_3· ἀλλά: y'_3=ημαημ(π—Β)=ημαημΒ, ὥστε: ημβημΑ=ημαημΒ καὶ ἑπομένως: $\frac{\text{ημΑ}}{\text{ημα}}=\frac{\text{ημΒ}}{\text{ημβ}}$.

60. ***Εὕρεσις τῆς γ' ὁμάδος τύπων.***

Ἐχ. χ_3=ημβσυνΑ=συν(χΟΓ)=
=x'_3συν(xOx')+y'_3συν(xOy')+z'_3συν(xOz')=
=x'_3συνγ+z'_3ημγ=—ημασυνΒσυνγ+συναημγ.
(διότι x'_3=ημασυν(π—Β)=—ημασυνΒ, z'_3=συνα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Ἡ Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία ὡς ὁρικὴ περίπτωσις τῆς Σφαιρικῆς.

61. Ὅσον ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας αὐξάνει, τόσον ***ὀλιγώτερον καμπύλη*** γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς καὶ πλησιάζει ἑπομένως ὁλονὲν περισσότερον νὰ γίνῃ ἐπίπεδος· ὅταν δὲ τὸ κέντρον Κ ἀφανισθῇ εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἡ ἀκτὶς ΑΚ γίνῃ ἄπειρος, τὸ γειτονικὸν τοῦ ἄκρου Α τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ μένον εἰς τὸ πεπερασμένον, καταντᾷ ἐπίπεδον. Αὐτὸ ἐννοοῦμεν, ὅταν λέγωμεν συντόμως, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι σφαῖρα μὲ ἀκτῖνα ἄπειρον.—Οἱ τύποι τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας ἀναφέρονται εἰς σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα· διότι τότε μόνον κάθε πλευρὰ τοῦ σφαιρ. τριγώνου μετρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, μὲ τὸν ὁποῖον καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία της. Ἂς λάβωμεν τώρα σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν ρ ὁμόκεντρον πρὸς τὴν ἀρχικὴν μὲ ἀκτῖνα 1. Τὰ ἐπίπεδα τῶν διέδρων γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς σφαίρας σχηματίζουν προφανῶς ἐπὶ τῆς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα τὸ ρ ἓν σφαιρ. τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸ ἄλλο, δηλ. μὲ ἴσας γωνίας, ἀλλὰ πλευρὰς ρ φορὰς μεγαλυτέρας. Ἂν λοιπὸν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τῆς Σφαιρ. Τριγωνομετρίας καὶ εἰς τὴν τυχ. σφαῖραν ἀκτῖνος ρ, πρέπει προφανῶς εἰς τοὺς τύπους αὐτοὺς τὰς μὲν γωνίας νὰ τὰς ἀφήσωμεν τὰς ἰδίας, ἀλλὰ ἀντὶ τῶν α, β, γ νὰ θέσωμεν τὰ μέτρα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν

τοῦ νέου τριγώνου, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς πλευράς του $α', β', γ'$, δηλ. νὰ γράψωμεν (ἀντὶ $α, β, γ$) $\frac{α}{ρ}, \frac{β}{ρ}, \frac{γ}{ρ}$ (διότι προφανῶς $α'=ρα$, ἢ $α=\frac{α'}{ρ}$ κλπ).

62. Ἡ πρώτη ὁμὰς τῶν τύπων γίνεται λοιπὸν τώρα:

$$συν\left(\frac{α}{ρ}\right)=συν\left(\frac{β}{ρ}\right)συν\left(\frac{γ}{ρ}\right)+ημ\left(\frac{β}{ρ}\right)ημ\left(\frac{γ}{ρ}\right)συνA,$$

$$συν\left(\frac{β}{ρ}\right)=\ldots, \quad συν\left(\frac{γ}{ρ}\right)=\ldots$$

Ἂν τώρα τὸ ρ αὐξάνῃ διαρκῶς καὶ καταντήσῃ ἄπειρον, οἱ τύποι αὐτοὶ πρέπει προφανῶς νὰ καταντήσουν τύποι τῆς Εὐθυγρ. Τριγωνομετρίας, δηλ. τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὅριον τοῦ σφαιρικοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν ὁρικὴν μορφὴν τῶν τύπων τούτων, πρέπει νὰ στηριχθῶμεν εἰς τὰ ἑξῆς ἀναπτύγματα τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ τόξου, τὰ ὁποῖα ἀποδεικνύονται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά:

$$ημχ=χ-\frac{χ^3}{1.2.3}+\frac{χ^5}{1.2.3.4.5}-\frac{χ^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

$$συνχ=1-\frac{χ^2}{1.2}+\frac{χ^4}{1.2.3.4}-\frac{χ^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots,$$

(Τὰ ἀναπτύγματα αὐτὰ ἀποτελοῦν σειράς, αἱ ὁποῖαι ***συγκλίνουν***, δηλ. ὅσους ὅρους των καὶ ἂν λάβωμεν (διότι εἶναι ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος) ποτὲ δὲν ὑπερβαίνομεν ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν).

Ἂν λοιπὸν εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους τῆς $α'$ ὁμάδος θέσωμεν ἀντὶ ημχ καὶ συνχ τὰ ἴσα των ἀπὸ τ' ἀναπτύγματα αὐτά, εὑρίσκομεν (ἀντὶ χ τὸ τόξον τώρα ὀνομάζεται $\frac{α}{ρ}$ ἢ $\frac{β}{ρ}$ ἢ $\frac{γ}{ρ}$):

$$1-\frac{α^2}{1.2ρ^2}+\frac{α^4}{1.2.3.4ρ^4}-\ldots=\left(1-\frac{β^2}{1.2.ρ^2}+\frac{β^4}{1.2.3.4.ρ^4}-\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{γ^2}{1.2.ρ^2}+\frac{γ^4}{1.2.3.4ρ^4}-\ldots\right)+\left(\frac{β}{ρ}-\frac{β^3}{1.2.3.ρ^3}+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(\frac{γ}{ρ}-\frac{γ^3}{1.2.3.ρ^3}+\ldots\right)συνA$$ ἤ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ τὰ 2 μέλη ἐπὶ $ρ^2$ (ἀφοῦ πρῶτα ἀφαιρέσωμεν τὴν 1, ἡ ὁποία εἶναι κοινὸς ὅρος καὶ εἰς τὰ 2 μέλη):

$$-\frac{α^2}{1.2}+\frac{1}{ρ^2}(\ldots\ldots)=-\frac{β^2}{1.2}-\frac{γ^2}{1.2}+βγσυνA+\frac{1}{ρ^2}(\ldots\ldots).$$

ἐγράψαμεν δηλ. κοινὸν παράγοντα εἰς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ α΄ μέλους (πλὴν τοῦ α΄ ὅρου) καὶ εἰς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ β΄ μέλους (πλὴν τῶν 3 πρώτων ὅρων) τὸ $\frac{1}{\varrho^2}$ (διότι ὅλοι αὐτοὶ τὸ ἔχουν).

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἰσχύει, ὅσον μεγάλος καὶ ἂν εἶναι ὁ ϱ· ἂν λοιπὸν θέσωμεν $\varrho = \infty$, γίνεται (διότι ὅλοι οἱ ὅροι, ποὺ ἔχουν παράγοντα τὸ $\frac{1}{\varrho^2}$, μηδενίζονται): $\frac{\alpha^2}{1.2} = \frac{-\beta^2}{1.2} + \frac{-\gamma^2}{1.2} + \beta\gamma\,\text{συν}A$, δηλ. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$, ὁ γνωστὸς τύπος τῆς Εὐθυγράμ. Τριγωνομ. ὁ δίδων τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τυχ. τριγώνου.

63. Ἐπίσης, ἂν γράψωμεν τοὺς τύπους τῆς β΄ ὁμάδος ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\text{ημ}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)}{\text{ημ}A} = \frac{\text{ημ}\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)}{\text{ημ}B} = \frac{\text{ημ}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)}{\text{ημ}\Gamma}$ καὶ θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων τ' ἀναπτύγματά των, εὑρίσκομεν : $\frac{\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\alpha^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots}{\text{ημ}A} =$

$$= \frac{\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\beta^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots}{\text{ημ}B} = \frac{\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\gamma^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots}{\text{ημ}\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha - \frac{1}{\varrho^2}(\dots)}{\text{ημ}A} =$$

$\frac{\beta - \frac{1}{\varrho^2}(\dots)}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma - \frac{1}{\varrho^2}(\dots)}{\text{ημ}\Gamma}$ καὶ εἰς τὸ ὅριον (διὰ $\varrho = \infty$) εὑρίσκομεν τὸν γνωστὸν τύπον τῆς Εὐθυγρ. Τριγωνομετρίας :

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}.$$

64. Ὁμοίως, ἂν εἰς τὴν τρίτην ὁμάδα τύπων: $\text{ημ}\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)\text{συν}A = \text{συν}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)\text{ημ}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right) - \text{ημ}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)\text{συν}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)\text{συν}B$, κλπ. θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $\text{συν}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)$, $\text{ημ}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)$κλπ., εὑρίσκομεν:

$$\left(\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\beta^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots\right)\text{συν}A =$$

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{1.2.\varrho^2} + \dots\right)\left(\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\gamma^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots\right) - \left(\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\alpha^3}{1.2.3\varrho^3} + \dots\right) \times$$

$\times \left(1 - \frac{\gamma^2}{1.2\,\varrho^2} + \dots\right)\text{συν}B.$, ἑπομένως, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτα ἐπὶ ϱ καὶ ἔπειτα θέσωμεν $\varrho = \infty$, ὁ τύπος καταντᾷ :

$\beta\sigma\upsilon\nu A = \gamma - \alpha\sigma\upsilon\nu B$, ἢ $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A$, τύπος γνωστὸς ἐκφράζων τὴν πλευρὰν ἑνὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὴν διαιρεῖ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλον τύπον τῆς Σφαιρ. Τριγωνομετρίας ὁ ἀντίστοιχός του εἰς τὴν Εὐθύγραμμον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Θεώρημα τοῦ Legendre.

65. Τὸ θεώρημα τοῦτο χρησιμεύει εἰς τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ὅταν αἱ πλευραί του εἶναι ***πολὺ μικραὶ*** σχετικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται, καὶ εἶναι τὸ ἑξῆς :

Θεώρημα : Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μὲ πολὺ μικρὰς πλευρὰς ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας του εἶναι περίπου ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς ἰσομήκεις πρὸς τὰς τοῦ σφαιρικοῦ. Κάθε μία δὲ ἀπὸ τὰς γωνίας A_1, B_1, Γ_1 τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχόν της τοῦ σφαιρικοῦ περίπου κατὰ $\frac{2E}{3}$ δηλ. κατὰ τὸ ἓν τρίτον τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τὸν τύπον τῶν ἡμιτόνων ὡς ἑξῆς:

$$\eta\mu A \eta\mu \frac{\beta}{\varrho} = \eta\mu B \eta\mu \frac{\alpha}{\varrho},$$

(ὅπου ϱ πολὺ μεγάλον ἐν σχέσει μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου), ἤ, ἂν ἀναπτύξωμεν τὰ ἡμίτονα τῶν πλευρῶν κατὰ τοὺς τύπους τῆς σελίδος 41:

$$\eta\mu A\left(\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\beta^3}{6\varrho^3} + \ldots\right) = \eta\mu B\left(\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\alpha^3}{6\varrho^3} + \ldots\right)\cdot$$

ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ϱ καὶ ἔπειτα παραλείψωμεν τοὺς ὅρους τοὺς ἔχοντας παρονομαστὰς δυνάμεις τοῦ ϱ μεγαλυτέρας ἀπὸ τὴν δευτέραν:

$$\beta\left(\eta\mu A - \frac{\beta^2}{6\varrho^2}\eta\mu A\right) = \alpha\left(\eta\mu B - \frac{\alpha^2}{6\varrho^2}\eta\mu B\right).$$

Εἶναι ὅμως προφανῶς: $2E\rho^2=\varepsilon$ (ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου), ὥστε:

$$\beta\left(\eta\mu A-\frac{\beta^2\eta\mu A.E}{3\varepsilon}\right)=\alpha\left(\eta\mu B-\frac{\alpha^2\eta\mu B.E}{3\varepsilon}\right) \qquad (\alpha)$$

ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σφαιρ.τρίγ. εἶναι σχεδὸν εὐθύγραμμον, τὸ ἐμβαδόν του ε διαφέρει ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου, δηλ. ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B$ κατὰ ἓν ποσὸν δ, πολὺ μικρὸν καὶ παραλείψιμον· ἔχομεν ἑπομένως:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A+\delta=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B+\delta$$

καὶ ἑπομένως οἱ ὅροι τῆς ἰσότητος (α)

$$\frac{\beta^2\eta\mu A.E}{3\varepsilon} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha^2\eta\mu B.E}{3\varepsilon}$$

εἰμποροῦν νὰ γραφοῦν:

$$\frac{\beta^2\eta\mu A.E}{\frac{3}{2}\beta\gamma\eta\mu A+\delta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha^2\eta\mu B.E}{\frac{3}{2}\gamma\alpha\eta\mu B+\delta}$$

καὶ ἑπομένως διαφέρουν ἀπὸ τοὺς

$$\frac{\beta^2\eta\mu A.E}{\frac{3}{2}\beta\gamma\eta\mu A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha^2\eta\mu B.E}{\frac{3}{2}\gamma\alpha\eta\mu B}$$

κατὰ ποσὰ πολὺ μικρὰ καὶ παραλείψιμα: ϑ_1, ϑ_2· ὥστε ἡ ἰσότης (α) γράφεται:

$$\beta\left(\eta\mu A-\frac{2E\beta}{3\gamma}-\vartheta_1\right)=\alpha\left(\eta\mu B-\frac{2E\alpha}{3\gamma}-\vartheta_2\right)$$

καὶ ἑπομένως, ἂν παραλείψωμεν τὰ ϑ_1, ϑ_2, ἔχομεν:

$$\beta\left(\eta\mu A-\frac{2E\beta}{3\gamma}\right)\alpha=\left(\eta\mu B-\frac{2E\alpha}{3\gamma}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ $\beta=\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$ (κατὰ παράλειψιν νέου πολὺ μικροῦ ποσοῦ) καὶ $\alpha=\gamma\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ (κατὰ παράλειψιν ἄλλου πολὺ μικροῦ ποσοῦ), ἔχομεν:

$$\beta\left[\eta\mu A-\frac{2E}{3}\left(\sigma\upsilon\nu A+\frac{\alpha}{\gamma}\sigma\upsilon\nu\Gamma\right)\right]=\alpha\left[\eta\mu B-\frac{2E}{3}\left(\sigma\upsilon\nu B+\frac{\beta}{\gamma}\sigma\upsilon\nu\Gamma\right)\right]$$

ἢ καί: $$\beta\left(\eta\mu A-\frac{2E}{3}\sigma\upsilon\nu A\right)=\gamma\left(\eta\mu B-\frac{2E}{3}\sigma\upsilon\nu B\right)$$

ἢ καί: $$\beta\eta\mu\left(A\;\frac{2E}{3}\right)=\gamma\eta\mu\left(B-\frac{2E}{3}\right)$$

(ἀρκεῖ μετὰ τὸ ἀνάπτυγμα τῶν ἡμιτόνων τῶν διαφορῶν νὰ θέσωμεν ἀντὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{2E}{3}$ τὴν 1 καὶ ἀντὶ $\eta\mu\frac{2E}{3}$ τὸ $\frac{2E}{3}$).

Διὰ τὸ *πολὺ μικρὸν* λοιπὸν σφαιρ. τρίγωνον ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ, ἰσχύει περίπου ὁ τύπος τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν καὶ ἑπομένως εἶναι περίπου εὐθύγραμμον μὲ πλευρὰς τὸς ἰδίας καὶ γωνίας τὰς:

$$A-\frac{2E}{3},\ B-\frac{2E}{3},\ \Gamma-\frac{2E}{3}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ἐφαρμογαὶ τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας.

66. Ἀπὸ τὰς ποικίλας ἐφαρμογὰς τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας εἰς τὴν Μαθηματικὴν Γεωγραφίαν, τὴν Σφαιρικὴν Ἀστρονομίαν κ.τ.λ. ἀναφέρομεν ἐδῶ, μόνον ὡς παραδείγματα, τὰς ἑξῆς τρεῖς:

67. 1) ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφαιρικὴ ἀπόστασις δύο τόπων M καὶ M_1 τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἀπὸ τὰ δοθέντα γεωγραφικὰ μήκη καὶ πλάτη τῶν τόπων αὐτῶν.***

Αἱ *γεωγρ. συντεταγμέναι* τοῦ M εἶναι $(AM)=\omega$, $(I\Pi M)=\mu$ καὶ τοῦ M_1 αἱ $(A_1M_1)=\omega_1$, $(I\Pi M_1)=\mu_1$. Εἰς τὸ σφαιρ. τρίγωνον ΠMM_1 (ΠM, ΠM_1 τόξα τῶν μεσημβρινῶν τῶν M, M_1 καὶ MM_1 $=$τόξ. μεγίστου κύκλου) ἔχομεν: $M\Pi=90^0-\omega$, $M_1\Pi=90^0-\omega_1$ καὶ γων. $M\Pi M_1=\pm(\mu_1-\mu)$.

Ὥστε ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν σφαιρικὸν τρίγωνον μὲ γνωστὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν καὶ ἑπομένως:

$$\text{συν}(MM_1)=\frac{\text{συνασυν}(\beta-\varphi)}{\text{συνφ}},\ (\text{εφφ}=\text{εφασυν}\Gamma).$$

68. 2) ***Νὰ εὑρεθῇ (εἰς τετρ. μέτρα) τὸ ἐμβαδὸν ε ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἀπὸ τὰς γεωγραφικὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του.***

Θὰ εὕρωμεν πρῶτα (κατὰ τὸ προηγούμενον) τὰς 3 πλευρὰς α, β, γ ἀπὸ τὰς γεωγρ. συντεταγμένας τῶν ἄκρων καὶ ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\text{εφ}\left(\frac{E}{2}\right)=\sqrt{\text{εφ}\left(\frac{\tau}{2}\right)\text{εφ}\left(\frac{\tau-\alpha}{2}\right)\text{εφ}\left(\frac{\tau-\beta}{2}\right)\text{εφ}\left(\frac{\tau-\gamma}{2}\right)}\ \text{καὶ}\ \varepsilon=2E.(6000000)^2.$$

69. 3) ***Ν' ἀναχθῇ εἰς τὸν ὁρίζοντα ἡ μετρηθεῖσα κεκλι-***

μένη πρὸς αὐτὸν γωνία ΑΟΒ· δηλ. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ τῆς ΑΟΒ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἡ A_1OB_1, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ τομαὶ OA_1, OB_1, τῶν κατακορύφων κύκλων ΖΟΑ, ΖΟΒ (Ζ τὸ ζενὶθ τοῦ τόπου) μὲ τὸν ὁρίζοντα. Εἶναι προφανῶς (εἰς μοίρας): γωνA_1OB_1=τόξ. A_1B_1=δίεδρ. γων. (ZOA_1, ZOB_1). Τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τριγώνου ΖΑΒ(ΖΑ,ΖΒ αἱ ***ζενιθιακαὶ*** ἀποστάσεις τῶν Α, Β· ΑΒ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διὰ τῶν Α, Β διερχομένου) γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς: τὴν ΑΒ(δοθ.γων.ΑΟΒ) καὶ τὰς ζενιθιακὰς ἀποστάσεις ΖΑ, ΖΒ (μετρουμένας διὰ τοῦ ***θεοδολίχου).*** Ἑπομένως θὰ εὕρωμεν τὴν ἄγνωστον γωνίαν Ζ ἀπὸ τὸν τύπον :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{Z}{2}\right)=\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}}\quad(\alpha=ZB,\ \beta=ZA,\ \gamma=AB).$$

ΤΕΛΟΣ

ΟΙ ΚΥΡΙΩΤΕΡΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

α΄) Τύποι γωνιομετρικοί.

$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1.$

$\eta\mu(90^0\mp\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha.$

$\sigma\upsilon\nu(90^0\mp\alpha)=\pm\eta\mu\alpha.$

$\eta\mu(180^0\mp\alpha)=\pm\eta\mu\alpha.$

$\sigma\upsilon\nu(180^0\mp\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha.$

$\eta\mu(360^0-\alpha)=-\eta\mu\alpha.$

$\sigma\upsilon\nu(360^0-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha.$

$\eta\mu(\alpha\pm\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha.$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$

$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$

$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha.$

$$\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}.$$

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.\qquad\sigma\varphi\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}.$$

$$\eta\mu\alpha=\frac{\pm\varepsilon\varphi\alpha}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\frac{\pm1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\pm1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\frac{\pm\sigma\varphi\alpha}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}}.$$

$$\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha=\frac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

$\varepsilon\varphi(90^0\mp\alpha)=\pm\sigma\varphi\alpha.$

$\sigma\varphi(90^0\mp\alpha)=\pm\varepsilon\varphi\alpha.$

$\varepsilon\varphi(180^0\mp\alpha)=\mp\varepsilon\varphi\alpha.$

$\sigma\varphi(180^0\mp\alpha)=\mp\sigma\varphi\alpha.$

$\varepsilon\varphi(360^0-\alpha)=-\varepsilon\varphi\alpha.$

$\text{σφ}(360^\circ-\alpha)=-\text{σφ}\alpha.$

$\text{εφ}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\text{εφ}\alpha\pm\text{εφ}\beta}{1\mp\text{εφ}\alpha\,.\,\text{εφ}\beta}.$

$\text{εφ}2\alpha=\dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}.$

$\text{εφ}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}}.$

$\text{ημ}\alpha\pm\text{ημ}\beta=2\text{ημ}\left(\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\text{συν}\left(\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}\right).$

$\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta=2\text{συν}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{συν}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta=-2\text{ημ}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{ημ}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\dfrac{\text{ημ}\alpha-\text{ημ}\beta}{\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta}=\dfrac{\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{εφ}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$

$\dfrac{\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta}=-\text{εφ}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).\text{εφ}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right).$

$\text{εφ}\alpha\pm\text{εφ}\beta=\dfrac{\text{ημ}(\alpha\pm\beta)}{\text{συν}\alpha\text{συν}\beta}.$

$\text{σφ}\alpha\pm\text{σφ}\beta=\dfrac{\text{ημ}(\beta\pm\alpha)}{\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta}.$

$\dfrac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}=\dfrac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}(\alpha+\beta)}.$

$\dfrac{\text{σφ}\alpha-\text{σφ}\beta}{\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta}=\dfrac{\text{ημ}(\beta-\alpha)}{\text{ημ}(\beta+\alpha)}.$

β') Ἀριθμητικαὶ τιμαί.

$\text{ημ}45^\circ=\text{συν}45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

$\text{ημ}30^\circ=\text{συν}60^\circ=\frac{1}{2}.$

$\text{συν}30^\circ=\text{ημ}60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

$\text{ημ}18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}.$

$\text{συν}18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

$\text{ημ}36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

$\text{συν}36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}.$

$\text{σον}(22^\circ30')=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

$\text{συν}(150^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

$\text{εφ}(30^\circ)=\text{σφ}60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

$\text{εφ}(45^\circ)=\text{σφ}(45^\circ)=1.$

$\text{εφ}(60^\circ)=\text{σφ}30^\circ=\sqrt{3}.$

γ') Τύποι τριγωνομετρικοί.

1) *Ὀρθογ. τρίγ.*

$\beta=\alpha\text{συν}\Gamma=\alpha\text{ημ}B.$

$\gamma=\alpha\text{ημ}\Gamma=\alpha\text{συν}B.$

$\beta=\gamma\text{σφ}\Gamma=\gamma\text{εφ}B.$

$\gamma=\beta\text{εφ}\Gamma=\beta\text{σφ}B$

2) ***Τυχ.*** *τρίγ.*

$\dfrac{\alpha}{\text{ημ}A}=\dfrac{\beta}{\text{ημ}B}=\dfrac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}=2\rho$ (ἀκτὶς περ. κύκλ).

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\text{συν}A.$

$\text{ημ}\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}.$

$\text{συν}\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}.$

$\text{εφ}\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}.$

$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\text{εφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{εφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}.$

(εμβ.) $\varepsilon=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=\dfrac{\alpha.\beta.\gamma}{4P}.$

(ἀκτὶς ἐγγεγρ. κύκλ.)

$\rho=\dfrac{\varepsilon}{\tau}=\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}.$

$P\,.\,\rho=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\tau}.$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ
ΑΠΟ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

('Αποστέλλονται ἐλεύθερα ταχυδρομικῶν τελῶν)

(Διεύθυνσις: Ξενοκράτους. 33, 'Αθῆναι ἢ Μαθηματ. Σπουδαστήριον τοῦ 'Εθνικοῦ Πανεπιστημίου, 'Αθῆναι)

---

1) Θεωρητικὴ Μηχανική, τεῦχος Α' Δραχ. 60

2) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν 'Αναλυτικὴν Θεωρίαν τῶν 'Επιφανειῶν » 60

3) Δελτίον τοῦ Μαθημ. Σπουδαστηρίου (λιθογρ.) » 20

4) Μαθήματα Κινητικῆς 'Απειροστικῆς Γεωμετρίας (λιθογρ.) » 30

Πωλεῖται Δραχ. 25.

Σημείωσις: 'Ως ἔχουσαι ἀστερίσκους (μὴ σημειωθέντας εἰς τὸ κείμενον) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν αἱ παράγραφοι 35—40 καὶ 57 65.