ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΡΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

ΙΩΑΝΝΙΔΗ ΦΙΛΙΑ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση

των απαραιτήτων προϋποθέσεων

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα

Ιανουάριος 2010

Εγκρίνουμε τη διατριβή της Φιλίας Φ. Ιωαννίδη

Υπεύθυνος Καθηγητής

Αρβανίτης Στυλιανός **_____**

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών **ΥΠΟΓΡΑΦΗ**

Εξεταστής Καθηγητής **_____**

Κόρδας Γρηγόρης **ΥΠΟΓΡΑΦΗ**

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξεταστής Καθηγητής **_____**

Βρόντος Ιωάννης **ΥΠΟΓΡΑΦΗ**

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28 / 01 / 2010

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω σ'αυτό το σημείο τις θερμές μου ευχαριστίες στους ανθρώπους που με βοήθησαν να ολοκληρώσω τη συγγραφή αυτής της διπλωματικής που σηματοδοτεί και το τέλος της φοίτησης μου στο συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα ειδίκευσης. Ευχαριστώ θερμά τον Υπεύθυνο Καθηγητή κ. Αρβανίτη Στυλιανό για την επίβλεψη της διπλωματικής, την καθοδήγηση, τις παρατηρήσεις και επισημάνσεις του, και την άμεση ανταπόκριση σε ο,τιδήποτε παρουσιάστηκε ανάγκη. Ευχαριστώ, επίσης, τους Εξεταστές Καθηγητές κ. Κόρδα Γρηγόρη και κ. Βρόντο Ιωάννη, και ομοίως όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού αυτού προγράμματος καθώς συνέβαλαν ουσιαστικά στην περαιτέρω εκπαίδευση μου και μου έδωσαν τα εφόδια για μία καλύτερη μελλοντικά επαγγελματική κατάρτιση που θα συμβάλει στην επίτευξη των στόχων μου. Ευχαριστώ, τέλος, θερμά την οικογένεια μου για την εμπιστοσύνη και την πίστη που έδειξε σε εμένα και στην κάθε μου προσπάθεια όλα τα χρόνια μέχρι τώρα, και για την υλική και ψυχολογική υποστήριξη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΑ	**ΣΕΛΙΔΕΣ**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : **ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ**	**1**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : **ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΩΣ ΜΕΤΡΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**	**4**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : **VALUE –AT –RISK (VAR)**	**13**
3.1 Ιστορική Αναδρομή του VaR	13
3.2 Ορισμός VaR και Χαρακτηριστικά του	14
3.3 Μέθοδοι Εκτίμησης VaR και Χαρακτηριστικά τους	18
3.3.1 Σύγκριση Μεθόδων	26
3.4 Υπολογισμός του VaR	27
3.4.1 Υπολογισμός του VaR για μία μετοχή	27
3.4.2 Υπολογισμός του VaR για ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών	28
3.5 Χαρακτηριστικά VaR	30
3.5.1 Πλεονεκτήματα	30
3.5.2 Μειονεκτήματα	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : VAR ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΠΙΤΗΡΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΑΣ	**36**
4.1 Η Επιτροπή της Βασιλείας	36
4.2 Η Συμφωνία της Βασιλείας I	36
4.3 Βασιλεία II	38
4.4 VaR και Βασιλεία II	39
4.5 Stressed Value-at-Risk και Βασιλεία II	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΣΥΝΕΠΗ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ **42**

5.1 Ορισμός και Ιδιότητες Συνέπειας 43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : CONDITIONAL OR TAIL VALUE-AT-RISK (CVaR or TVaR) **46**

6.1 Ορισμός 48

6.2 Χαρακτηριστικά CVaR 48

6.2.1 Πλεονεκτήματα 48

6.2.2 Μειονεκτήματα 49

6.3 Αξιολόγηση VaR και CVaR 49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ **51**

7.1 Non normality - Fat tails (Παχιές ουρές κατανομών) 51

7.2 Leverage Effect 52

7.3 Volatility Clustering Phenomenon 52

7.4 Non trading days και άλλα χαρακτηριστικά 53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ **55**

8.1 Μοντέλα Δεσμευμένης Ετρεοσκεδαστικότητας 55

8.1.1 Μοντέλο ARCH 56

8.1.2 Μοντέλο GARCH 57

8.1.3 Περαιτέρω Υποδείγματα 58

8.2 Πολυμεταβλητά Μοντέλα GARCH 60

8.3 Η Έννοια της Στασιμότητας 63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 : ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ **64**

9.1 Η Έννοια Συσχέτισης Κινδύνου-Απόδοσης 64

9.2 Στρατηγικές Κατανομής των Περιουσιακών Στοιχείων σε ένα Χαρτοφυλάκιο 66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 : ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ **68**

10.1 1η Εφαρμογή 70

10.2 2η Εφαρμογή 73

10.2.1 1η Παραλλαγή 75

10.2.2 2η Παραλλαγή 76

10.2.3 3η Παραλλαγή 77

10.2.4 4η Παραλλαγή 77

10.3 3η Εφαρμογή 78

10.3.1 1η Παραλλαγή 79

10.3.2 2η Παραλλαγή 79

10.3.3 3η Παραλλαγή 80

10.3.4 4η Παραλλαγή 80

10.4 Σφάλμα Εξειδίκευσης 81

10.4.1 Σφάλμα Εξειδίκευσης της Κατανομής 81

10.4.2 Σφάλμα Ανεξαρτησίας 82

10.5 Εφαρμογή σε Πραγματικά Δεδομένα 83

ΕΠΙΛΟΓΟΣ **86**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ **87**

Α΄ΜΕΡΟΣ 88

Β΄ΜΕΡΟΣ 103

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ **131**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο κίνδυνος αγοράς ενός χαρτοφυλακίου αναφέρεται στην πιθανότητα χρηματοοικονομικών απωλειών εξαιτίας μιας συντονισμένης κίνησης οικονομικών μεταβλητών. Κύριο και καίριο ζήτημα είναι η ποσοτικοποίηση του κινδύνου αυτού, καθώς απασχολεί τους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς και τις ρυθμιστικές αρχές, ώστε να εξασφαλίζεται η επάρκεια των χρηματοοικονομικών ροών και η ασφάλεια των κεφαλαίων.

Η ποσοτικοποίηση και η αποτίμηση κινδύνου μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Πέραν της διακύμανσης (της τυπικής απόκλισης ουσιαστικά που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της μεταβλητότητας) της οποίας αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά, οι ιδιότητες και τα μειονεκτήματα χρησιμοποίησης της ως μέτρο αποτίμησης κινδύνου , ένα καθιερωμένο μέτρο αποτίμησης είναι το Value-at-Risk (Αξία σε Κίνδυνο), που καθορίζεται ως η μέγιστη αλλαγή στην αξία ενός χαρτοφυλακίου χρηματοοικονομικών προϊόντων με δεδομένη πιθανότητα και για δεδομένο χρονικό ορίζοντα. Το Value-at-Risk (VaR) έχει γίνει ευρύτατα γνωστό και πολλαπλώς χρησιμοποιούμενο μέτρο αποτίμησης κινδύνου τα τελευταία χρόνια από ολοένα και περισσότερους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς και όχι μόνο.

Ένα από τα αποδεικτικά στοιχεία της αποτελεσματικότητας και της καταλληλότητας εφαρμογής του είναι η αναγνώριση και η προτροπή χρησιμοποίησης του από την Επιτροπή της Βασιλείας, οι στόχοι της οποίας, η οργάνωση και οι βασικές λειτουργίες της αναλύονται στοιχειωδώς, και περιγράφεται η σχέση και η σύνδεση του μέτρου αυτού με τους αντικειμενικούς στόχους και προσδοκίες της Επιτροπής.

Στη βιβλιογραφία έχουν καταχωρηθεί πολλές παραλλαγές και επεκτάσεις του Value-at-Risk, μία εκ των οποίων είναι η Conditional ή Tail Value-at-Risk (CVaR ή TVaR) ή αλλιώς Expected Shortfall (ES), που υπολογίζει την αναμενόμενη απόδοση στην περίπτωση που η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι χαμηλότερη από την πρόβλεψη του μέτρου Value-at-Risk. Για τον λόγο αυτό, εξετάζονται τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες αυτών των δύο μέτρων αποτίμησης κινδύνου, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τους που προκύπτουν από την μεταξύ τους σύγκριση.

Για την κατασκευή χαρτοφυλακίου και τη συνακόλουθη μέτρηση κινδύνου του γίνεται στοιχειώδης ανάλυση σε μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας τύπου-

ARCH και τύπου-GARCH (μονομεταβλητά και πολυμεταβλητά), καθώς η φύση και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών δεδομένων επιβάλουν τη μοντελοποίηση της διακύμανσης που μεταβάλλεται στο χρόνο, και περιγράφεται η έννοια της στασιμότητας.

Περιγράφονται, επίσης, χαρακτηριστικές και ενδεικτικές στρατηγικές κατασκευής κατανομής περιουσιακών στοιχείων σε ένα χαρτοφυλάκιο από έναν επενδυτή στο πλαίσιο ανάλυσης της έννοιας συχέτισης κινδύνου και απόδοσης.

Τέλος, παρατίθεται η εμπειρική ανάλυση για την πρόβλεψη της δεσμευμένης διακύμανσης και την κατασκευή βέλτιστων χαρτοφυλακίων βάσει τεχνητών στοιχείων αλλά και πραγματικών δεδομένων, και τη συνακόλουθη σύγκριση των μέτρων κινδύνου VaR, TVaR και Standard Deviation, με τη χρησιμοποίηση συνάρτησης kernel τη συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής και του υπολογιστικού προγράμματος E-Views. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν από τις διαδικασίες συνεχούς βελτιστοποίησης για καθένα από αυτά τα τρία μέτρα αποτίμησης κινδύνου, έχουν ως σκοπό τη σύγκριση της Τυπικής Απόκλισης, του VaR και του TVaR σχετικά με το ποιο από αυτά τα μέτρα αποδίδει χαρτοφυλάκια που ανταποκρίνονται περισσότερο στη βασική υπόθεση που έχουμε κάνει στην παρούσα μελέτη, την υπόθεση της αποστροφής του επενδυτή στον κίνδυνο. Η μελέτη και η συνακόλουθη σύγκριση στηρίζεται, εκτός από τις προτιμήσεις του επενδυτή, στις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά υπολογισμού καθενός από τα μέτρα αυτά και τις ιδιότητες της συνάρτησης kernel. Τις εφαρμογές που παρουσιάζονται, ακολουθούν ορισμένες παραλλαγές που αφορούν στο μέγεθος δείγματος (σχετικά μεγάλο και αρκετά μεγάλο δείγμα) και στο πλήθος των παρατηρούμενων τιμών των δεδομένων βάσει των οποίων γίνεται η πρόβλεψη και η εκτίμηση της μεταβλητότητας (σχετικά μικρό και σχετικά μεγάλο μέγεθος) . Οι παραλλαγές αυτές έχουν σκοπό να μελετήσουν το πώς μεταβάλλονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αρχική κάθε φορά εφαρμογή και αν επηρεάζουν οι παραλλαγές αυτές την εκτίμηση μας για το ποιο από αυτά τα μέτρα θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε για την αποτίμηση του κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ

Αλληλένδετες έννοιες στη θεωρία των οικονομικών και των χρηματοοικονομικών είναι η αβεβαιότητα και ο κίνδυνος. Η έννοια του κινδύνου μπορεί γενικά να θεωρηθεί ως η αβεβαιότητα σε κάποιο βαθμό σχετικά με τις μελλοντικές καθαρές αποδόσεις και θα μπορούσε να γίνει αντιληπτός σε τρία διαφορετικά επίπεδα: κίνδυνοι που αφορούν τους μεμονωμένους επενδυτές, κίνδυνοι που αφορούν μία επιχείρηση (συμπεριλαμβανομένου των μετόχων της και των επενδυτών) και κίνδυνοι που αφορούν τις αγορές ως σύνολο. Έχει πραγματικό νόημα να αναφερόμαστε σε οποιονδήποτε τύπο κινδύνου μόνο αν αποφέρει άμεση ή έμμεση χρηματοοικονομική απώλεια. Παρουσιάζονται ακολούθως τέσσερις βασικές κατηγορίες κινδύνου σύμφωνα με τον P. Best.

I. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (Market Risk)

Ο κίνδυνος της αγοράς είναι ο κίνδυνος απώλειας που προκύπτει από τις αλλαγές στην αξία εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων. Για παράδειγμα, αν μία τράπεζα έχει θέση € 1 εκατομμυρίου σε χρυσό τότε είναι εκτεθειμένη στον κίνδυνο της πτώσης της αξίας του χρυσού. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων (επιτόκια, νομίσματα, χρεόγραφα, εμπορεύματα-commodities κ.α.) και μία πληθώρα χρηματοοικονομικών προϊόντων που εκτίθενται σ'αυτόν τον κίνδυνο λόγω των πιθανών αλλαγών που επικρατούν στις συνθήκες αγοράς.

II. ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ (Credit Risk)

Ο πιστωτικός κίνδυνος αναφέρεται στην πιθανή χρηματοοικονομική απώλεια εξαιτίας της μη ικανότητας εκπλήρωσης των υποχρεώσεων ενός ή περισσοτέρων συμβαλλομένων. Έχει τρία βασικά χαρακτηριστικά: την έκθεση σε πίστωση, την πιθανότητα αθέτησης και την απώλεια στην περίπτωση αθέτησης. Διακρίνεται σε αυτήν την κατηγορία, σύμφωνα με τον P. Jorion, ο πιστωτικός κίνδυνος που συνδέεται με την αθέτηση λόγω διάφορων συνθηκών επικράτειας (sovereign risk), όπως για παράδειγμα όταν οι χώρες θέτουν περιορισμούς στις διάφορες συναλλαγές μεταξύ των μελών τους είναι δύσκολο για τους συμβαλλομένους να τηρήσουν τις υποχρεώσεις τους. Επιπροσθέτως του sovereign risk διακρίνεται ο κίνδυνος

διακανονισμού (settlement risk), που αφορά στην περίπτωση όπου δύο πληρωμές εκτελούνται την ίδια μέρα και την πιθανή αθέτηση που μπορεί να προκύψει κυρίως στις συναλλαγές που αφορούν πληρωμές σε διαφορετικά νομίσματα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, όπως για παράδειγμα μεταξύ συναλλαγής σε πρωινή ώρα Ευρώπης και παράδοση στις Ηνωμένες Πολιτείες αργότερα. Επιπλέον, ο P. Jorion συνδέει στενά την έννοια του πιστωτικού κινδύνου με εκείνη του κινδύνου που απορρέει από νομικής πλευράς (legal risk).[1]

III. ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ (Operational Risk)

Ο επιχειρησιακός κίνδυνος σχετίζεται με τα λάθη, ανθρώπινα ή τεχνικά, ή με μη προβλεπόμενα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν στον διακανονισμό και στη διεκπεραίωση των συναλλαγών, όπως η *απώλεια ελέγχου* αυτών ή η *απάτη* όπου οι συναλλασσόμενοι παραποιούν πληροφορίες. Η κατηγορία του επιχειρησιακού κινδύνου περιλαμβάνει μεταξύ άλλων *τον κίνδυνο υποδειγμάτων (model risk)* ο οποίος αφορά τον κίνδυνο απώλειας χρημάτων λόγω ανεπαρκούς ή λανθασμένης αξιολόγησης των χρηματοοικονομικών προϊόντων και υποδειγμάτων, *τον κίνδυνο συστημάτων (systems risk)* που αφορά την εφαρμογή μη επιτυχημένων σχεδίων ή τη μη έγκαιρη εφαρμογή σχεδίων που στοιχίζουν σ'έναν οργανισμό αρκετά χρήματα, όπως και συστήματα που αποτυγχάνουν να λειτουργήσουν ορθά, και τέλος *τον κίνδυνο ρευστότητας (liquidity risk)* που προκαλείται από μία μεγάλη, μη αναμενόμενη και επιδείνωσα αρνητική ροή σε σύντομη χρονική περίοδο. Αν μία επιχείρηση έχει σε αρκετά μεγάλο βαθμό μη ρευστοποιήσιμα περιουσιακά στοιχεία και χρειαστεί ξαφνικά ρευστότητα χρημάτων μπορεί να εξαναγκαστεί να πουλήσει κάποια περιουσιακά στοιχεία της σε μειωμένη και απαξιωμένη τιμή.[2]

[1] Legal risk προκύπτει όταν η συναλλαγή αποδεικνύεται μη εφαρμόσιμη σύμφωνα με το νομικό πλαίσιο. Σχετίζεται με τον πιστωτικό κίνδυνο υπό την έννοια ότι εφόσον οι συμβαλλόμενοι αντιμετωπίσουν απώλεια χρημάτων από την συναλλαγή τους ενδέχεται να καταφύγουν στο νομικό πλαίσιο για την ακύρωση της.

[2] Ο κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk), σύμφωνα με τον P.Jorion (Value at Risk-The new benchmark for managing financial risk), διακρίνεται σε *κίνδυνο ρευστότητας περιουσιακών στοιχείων* (asset liquidity risk ή market /product liquidity risk) που προκύπτει όταν μία συναλλαγή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στις επικρατούσες αγοραίες τιμές εξαιτίας του μεγέθους της θέσης σε σχέση με τα κανονικά συναλλασσόμενα μεγέθη, και σε *κίνδυνο χρηματοδότησης ρευστότητας* (funding liquidity risk ή cash-flow risk) που αναφέρεται στην πρόωρη ρευστοποίηση για την ικανοποίηση υποχρεώσεων .

IV. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΥΠΟΛΗΨΗΣ (Reputation Risk)

Ο κίνδυνος υπόληψης είναι ο κίνδυνος χρηματοοικονομικών απωλειών που προκύπτουν από την απώλεια κύκλου εργασιών λόγω μείωσης της υπόληψης του οργανισμού. Αν και η απώλεια της υπόληψης ενός οργανισμού μπορεί να συντελεστεί με αργό ρυθμό, προκύπτει συνήθως λόγω ενός λάθους στην εκτίμηση ή στην εκτέλεση ενός σημαντικού μέρους εταιρικών εργασιών.

Εξέχουσας σημασίας στις συναλλαγές έχει ο κίνδυνος αγοράς (market risk) αφού αντιπροσωπεύει την οικονομική απώλεια στην αγοραία αξία ενός χαρτοφυλακίου. Κίνδυνος θεωρείται απλά η πιθανότητα απόκλισης από τα αναμενόμενα αποτελέσματα, και ειδικά η πιθανότητα αρνητικής απόκλισης. Για κάθε μελλοντική ροή χρημάτων που ενέχει κίνδυνο, και οδηγεί σε κάποια έσοδα, ή για κάθε αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου υπάρχει μία κατανομή πιθανοτήτων για τα δυνατά αποτελέσματα. Το σχετικό μέγεθος κινδύνου μπορεί να οριστεί ως ένα μέτρο διασποράς αυτής της κατανομής όπως η τυπική απόκλιση ή η διακύμανση. Η διακύμανση όμως δεν είναι ένα επαρκές μέτρο για τη σύλληψη και μέτρηση κινδύνου καθώς θα ήταν δυνατόν δύο κατανομές με τελείως διαφορετική μορφή και διαφορετικό ποσό κινδύνου να έχουν την ίδια διακύμανση. Μέτρα όπως η ασυμμετρία ή η κυρτότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ποσοτικοποιήσουν τον κίνδυνο που δεν μπορεί να προσδιοριστεί με επάρκεια μόνο από το μέτρο της διακύμανσης. Μία άλλη προσέγγιση είναι να μελετήσουμε τα ποσοστημόρια (percentiles) της κατανομής και να παρέχουμε απαντήσεις όπως “99% των περιπτώσεων η αξία του χαρτοφυλακίου θα μεταβληθεί σε ποσοστό λιγότερο από Χ% σε μία μέρα και 1% των περιπτώσεων θα μεταβληθεί περισσότερο από Χ%” Η πρόταση αυτή συνοψίζει την ιδέα του μέτρου κινδύνου Value-at-Risk (VaR) και αποτελεί ένα καθιερωμένο μέτρο των οικονομικών αναλυτών για να ποσοτικοποιήσουν αυτόν τον κίνδυνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΩΣ ΜΕΤΡΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Θεωρία χαρτοφυλακίου: Η θεωρία χαρτοφυλακίου οφείλεται στον Harry Markowitz και αφορά στο πρόβλημα της άριστης επιλογής χρηματοοικονομικών τοποθετήσεων, όταν αυτές χαρακτηρίζονται από ποικιλία προσδοκώμενων αποδόσεων και βαθμών κινδύνου.

Προσδοκώμενη απόδοση: $\bar{r} = \mathrm{E}\,(\,\tilde{r}\,)$

Τυπική απόκλιση απόδοσης: $\sigma = (\,\mathrm{r}\,)^{1/2}$

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή διατυπώνεται ως εξής:

$$U = U\,(\,EW,\ Var(W)\,)$$

όπου:

W = η αβέβαιη έκβαση του πλούτου από κάποια επενδυτική επιλογή

EW = το προσδοκώμενο επίπεδο του πλούτου από την επενδυτική επιλογή

Var (W) = η διακύμανση του πλούτου από την επενδυτική επιλογή

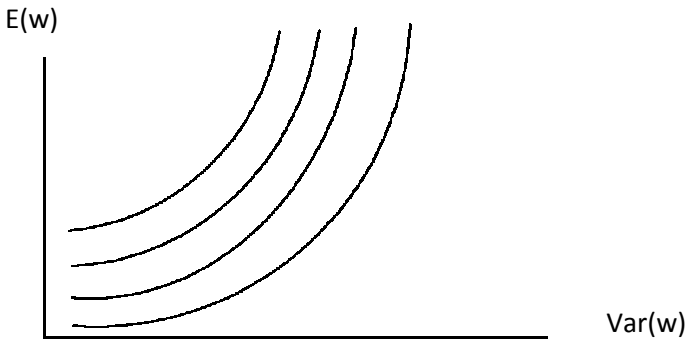
Συμπεριφορά απέναντι στον κίνδυνο :

$$\frac{\partial U}{\partial (EW)} > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\,(Var(W))} \gtreqless 0$$

Η μεγαλύτερη προσδοκία πλούτου αυξάνει την χρησιμότητα ceteris paribus.

Συνέπεια αυτών των ιδιοτήτων είναι η διατύπωση καμπυλών αδιαφορίας:



Γράφημα 1

Διαπιστώνεται πως αυξάνεται η απόδοση όταν αυξάνεται η ανάληψη πρόσθετου κινδύνου.

Κύριο στοιχείο του επενδυτικού ορθολογισμού είναι ότι ο επενδυτής επιδιώκει την πλησιέστερη δυνατή πληροφόρηση του για τους τίτλους που τελικά επιλέγει.

Σχηματισμός χαρτοφυλακίου χρηματοοικονομικών προϊόντων (δύο αξιόγραφων στην περίπτωση αυτή): Χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου είναι η προσδοκώμενη απόδοση του και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων:

$\tilde{r}_p = w\ \tilde{r}_1 + (1\text{-}w)\ \tilde{r}_2$

$\bar{r}_p = w\ \bar{r}_1 + (1\text{-}w)\ \bar{r}_2$

$\sigma_p^2 = w^2\ \sigma_1^2 + (1\text{-}w)^2\ \sigma_2^2 + 2\ w\ (1\text{-}w)\ \sigma_{12}$,

όπου:

w = ο συντελεστής στάθμισης της επένδυσης

$\sigma_{12} = \text{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, η συνδιακύμανση των αποδόσεων των επενδύσεων 1 και 2.

Εναλλακτικά η συνδιακύμανση ορίζεται ως: $\sigma_{12} = \text{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = \rho_{12}\ \sigma_1\ \sigma_2$, όπου ρ_{12} είναι ο συντελεστής συσχετισμού των αποδόσεων των επενδύσεων 1 και 2 .

Για τις τιμές του συντελεστή συσχετισμού ρ ισχύει : $-1 \leq \rho \leq +1$. Όταν ρ = 1, οι αλλαγές των τιμών συσχετίζονται απόλυτα και τα δύο περιουσιακά στοιχεία συμπεριφέρονται σα να ήταν ένα. Όταν ρ = 0, δεν υπάρχει καμία σχέση μεταξύ των αλλαγών των τιμών και τα περιουσιακά στοιχεία είναι απολύτως ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Όταν ρ = -1, οι αλλαγές των τιμών του ενός στοιχείου είναι πάντα αντίθετες από του άλλου. Και η σχέση των τιμών αυτών με την διακύμανση του χαρτοφυλακίου αναλύεται παρακάτω:

Επομένως, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως:

$$\sigma_p^2 = w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2\, w\, (1-w)\, \sigma_1\, \sigma_2\, \rho_{12}$$

Από την παραπάνω σχέση αυτή προκύπτει[3] :

$$\sigma_p^2 = (w\, \sigma_1 + (1-w)\, \sigma_2)^2 - 2w\, (1-w)\, \sigma_1\, \sigma_2\, (1-\rho_{12})$$

Και σύμφωνα μ'αυτή τη σχέση διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις Α και Β :

A) $\rho_{12} = +1 \Rightarrow \sigma_p^2 = (w\, \sigma_1 + (1-w)\, \sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma_p = w\, \sigma_1 + (1-w)\, \sigma_2$

Στην περίπτωση αυτή η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ισούται με τον σταθμικό μέσο των τυπικών αποκλίσεων των δύο αξιόγραφων

B)) $\rho_{12} < +1 \Rightarrow \sigma_p^2 < (w\, \sigma_1 + (1-w)\, \sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma_p < w\, \sigma_1 + (1-w)\, \sigma_2$

Αυτά ισχύουν διότι ισχύει:

$-2w\, (1-w)\, \sigma_1\, \sigma_2\, (1-\rho_{12}) < 0$ ⇒ Αποτέλεσμα Διαφοροποίησης

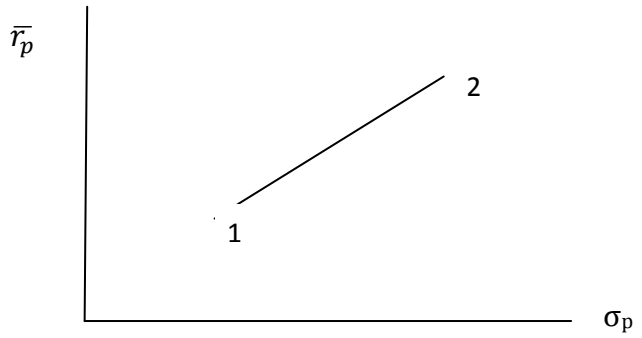
Σε όλες τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο συντελεστής συσχετισμού ρ_{12} είναι μικρότερος της μονάδας, η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από τον σταθμικό μέσο των σ_1 και σ_2. Όταν ο συντελεστής συσχετισμού είναι ίσος με τη μονάδα, η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου ισούται με το σταθμικό μέσο των σ_1

[3] Προσθαφαιρώντας το μέγεθος [$2w\, (1-w)\, \sigma_1\, \sigma_2$].

και σ_2 . Όσο η τιμή του ρ_{12} μειώνεται, τόσο η σ_p μειώνεται επίσης κάτω του σταθμικού μέσου των σ_1 και σ_2 .

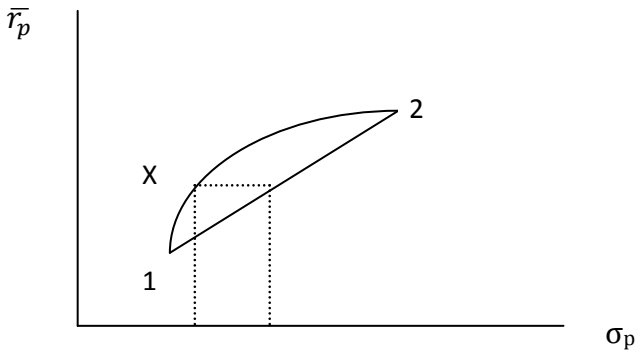
Σύμφωνα με τα παραπάνω :

- Όταν $\rho_{12} = 1$ όλα τα ζεύγη τοποθετούνται στην παρακάτω ευθεία 1,2:



Γράφημα 2

- Όταν $\rho_{12} < 1$, όλα τα ζεύγη τοποθετούνται στην καμπύλα 1,2. Η κυρτότητα της 1,2 απεικονίζει το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης. Το τυχόν χαρτοφυλάκιο Χ παρουσιάζει τυπική απόκλιση σ″, ενώ ο σταθμικός μέσος των αποκλίσεων είναι σ′. Η διαφορά (σ″ - σ′) είναι το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης:



Γράφημα 3

Επέκταση σε χαρτοφυλάκια πολλών χρηματοοικονομικών προϊόντων

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα παρακάτω :

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \overline{r_i}$$

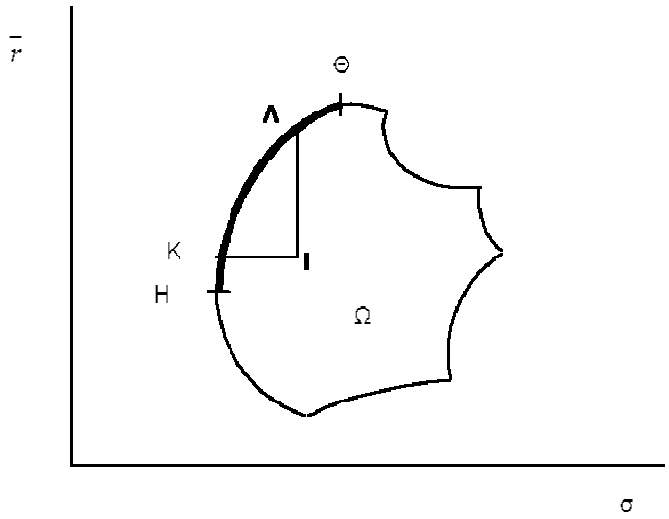
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i \, w_j \, \sigma_i \, \sigma_j \, \rho_{ij}$$

όπου:

Ν = ο αριθμός των χρηματοοικονομικών προϊόντων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο και όπου οι σταθμίσεις w υπόκεινται στον περιορισμό:

$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ και $\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$.

Διαγραμματικά, όλα τα δυνατά χαρτοφυλάκια που μπορούν να συγκροτηθούν από Ν χρηματοοικονομικά προϊόντα θα τοποθετούνται σε μια περιοχή Ω. Τα όρια της περιοχής Ω θα ορίζονται από κυρτές καμπύλες, η κυρτότητα των οποίων προκύπτει από την προηγούμενη διερεύνηση του αποτελέσματος διαφοροποίησης.



Γράφημα 4

Η καμπύλη ΗΘ περιλαμβάνει όλα τα χαρτοφυλάκια που προσφέρουν μέγιστη απόδοση σε κάθε επίπεδο κινδύνου ή ελάχιστο κίνδυνο σε κάθε επίπεδο προσδοκώμενης απόδοσης, και ορίζεται ως το σύνορο βέλτιστων επιλογών (efficient frontier). Με δοσμένο αυτό το σύνορο, όλοι οι ορθολογικοί επενδυτές επιλέγουν κάποιο χαρτοφυλάκιο επ'αυτού, ανάλογα με το επίπεδο κινδύνου που είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν και της προσδοκώμενης απόδοσης. Οι επιλογές που περιλαμβάνονται στο σύνορο βέλτιστων επιλογών έχουν μία αυξητική τάση σχέσης κινδύνου και προσδοκώμενης απόδοσης.

Τυπική Απόκλιση ως μέτρο κινδύνου

Η Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation) ή Μεταβλητότητα (Volatility), για την ακρίβεια η δεσμευμένη τυπική απόκλιση ή δεσμευμένη διακύμανση, που χαρακτηρίζεται ως ένα από τα πιο διαδεδομένα μέτρα κινδύνου, δεν αντιπροσωπεύει ακριβώς ένα μέτρο κινδύνου, αλλά, θα λέγαμε, ένα μέτρο αβεβαιότητας.

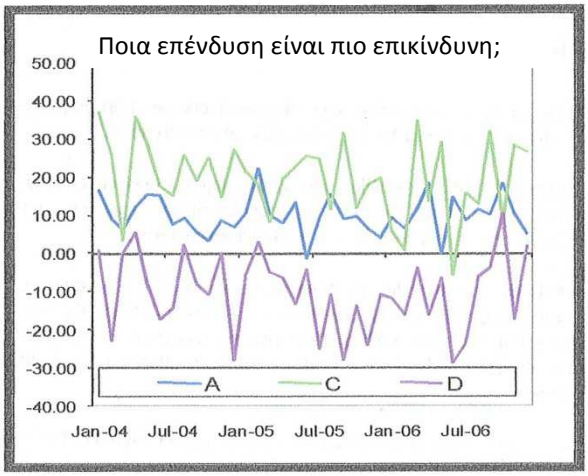
Θεωρώντας:

- $\mathbf{w_t}$, το διάνυσμα που περιλαμβάνει τις σταθμίσεις των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων από τους τίτλους που έχουμε στη διάθεση μας ως εξής: $w_t = \begin{pmatrix} w_t^{(1)} \\ w_t^{(2)} \\ \vdots \\ w_t^{(n)} \end{pmatrix}$
- $\mathbf{w_t' r_{t,t+h}}$, τις αποδόσεις των χαρτοφυλακίων για το δεδομένο χρονικό διάστημα
- $\mathbf{Var\ (r_{t,t+h}/I_t) = H_{t,t+h}}$, τη μήτρα δεσεμευμένης διακύμανσης των αποδόσεων

η δεσμευμένη διακύμανση ή δεσμευμένη τυπική απόκλιση παρουσιάζεται ως μέτρο κινδύνου με την ελαχιστοποίηση της έκφρασης $\mathbf{w_t'H_{t,t+h}w_t}$ ή αντίστοιχα της $\mathbf{(w_t'H_{t,t+h}w_t)^{1/2}}$.

Είναι ένα ιδιαίτερα φτωχό μέτρο για ν'αποτελέσει ένα ιδανικό μέτρο κινδύνου για τους παρακάτω λόγους :

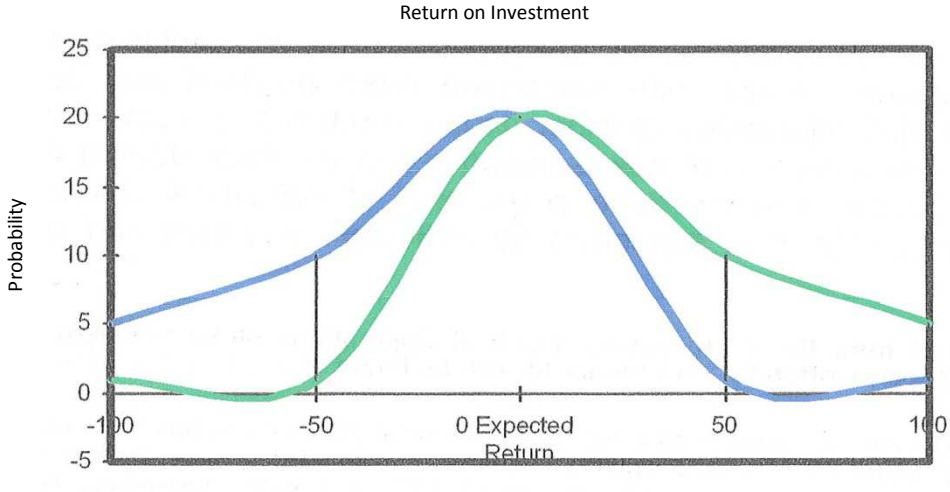
Αν θεωρήσουμε τις ακόλουθες επενδύσεις A, C και D, από τις οποίες οι επενδύσεις C και D έχουν την ίδια τυπική απόκλιση της τάξης του 10% κατ'απόλυτη τιμή, ενώ η επένδυση A έχει τυπική απόκλιση της τάξης του 5%. Χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση ως μοναδικό μέτρο κινδύνου η σύγκριση μεταξύ της επένδυσης C και D δεν θα είχε καμία διαφορά. Αλλά κάτι τέτοιο είναι προφανώς λάθος καθώς η επένδυση D έχει μία μέση αναμενόμενη απόδοση της τάξης του -10%, ενώ αντιθέτως η C έχει μέση αναμενόμενη απόδοση +10%. Πολλοί αντιτίθενται στην τυπική απόκλιση ως μέτρο κινδύνου καθώς δίνει ίσες σταθμίσεις σε αποκλίσεις πάνω από τη μέση τιμή και σε αποκλίσεις κάτω από τη μέση τιμή, ενώ οι επενδυτές ενδιαφέρονται περισσότερο για την «προς τα κάτω» απόκλιση (downside deviation) παρά για την «προς τα πάνω» απόκλιση (upside deviation).



Γράφημα 5

Το παραπάνω πρόβλημα γίνεται αντιληπτό και από το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνονται δύο κατανομές αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου, οι οποίες η μία παρουσιάζει θετική κυρτότητα και η άλλη αρνητική. Οι δύο αυτές επενδύσεις θα αντιμετωπίζονταν το ίδιο από έναν επενδυτή χρησιμοποιώντας ως μέτρο κινδύνου

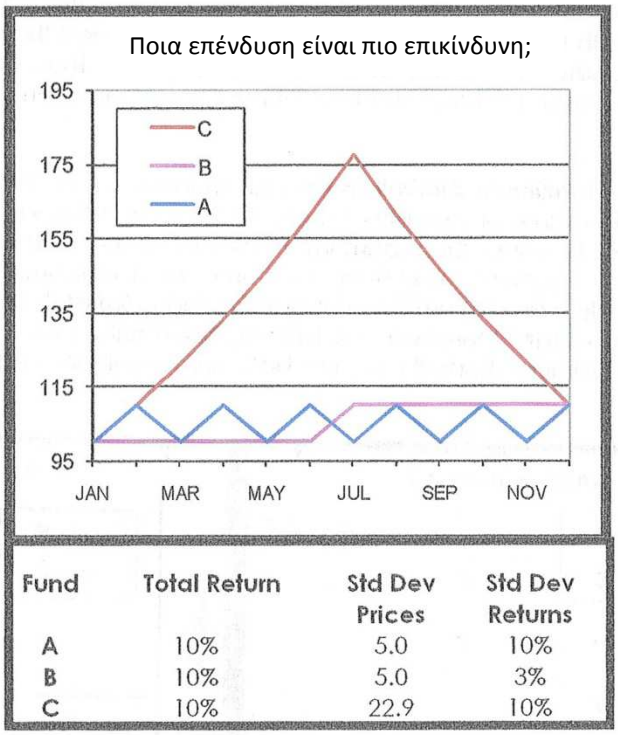
την τυπική απόκλιση γιατί έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση και την ίδια διακύμανση, και άρα ίδια τυπική απόκλιση. Αυτό θα συνέβαινε γιατί το μέτρο αυτό κινδύνου υποθέτει συμμετρική κατανομή αποδόσεων (bell-shaped curve), φαινόμενο που δεν χαρακτηρίζει, στην πλειονότητα, την κατανομή των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων.



Γράφημα 6

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης ως μέτρο κινδύνου είναι ότι δεν είναι ευαίσθητο στη διάταξη. Στα παρακάτω παραδείγματα οι επενδύσεις Α και C έχουν την ίδια τυπική απόκλιση και την ίδια μέση τιμή. Εντούτοις, η επένδυση C ενέχει μεγαλύτερο κίνδυνο από την Α, αφού αντιμετωπίζει τον κίνδυνο να χάσει 38% από την αξία της στην κορυφή ως το χαμηλότερο σημείο της κατά τη διάρκεια της προκείμενης υποθετικής περιόδου. Οι αγορές που φαίνονται ν'αντιμετωπίζουν μεταβλητότητα, συμπεριφέρονται κατ'αυτόν τον τρόπο εξαιτίας μιας διακριτής διάταξης των τιμών των αποδόσεων : μία διάταξη που περιλαμβάνει κινήσεις με συχνές αντίθετες αλλαγές. Αυτού του είδους η «εξαρτημένη μεταβλητότητα διάταξης» δεν συλλαμβάνεται από τον τεχνικό ορισμό της τυπικής απόκλισης, αφού δεν είναι ευαίσθητη στη διάταξη. Αυτό το σημείο έχει

άμεση εφαρμογή στην επένδυση των hedge funds, καθώς πολλοί διαχειριστές των hedge funds υιοθετούν στρατηγικές επενδύσεων των οποίων η επιτυχία ή αποτυχία θα σχετίζεται όχι με τη μεταβλητότητα των αγορών, αλλά με τη «διαδρομή» (πορεία) που αυτές ακολουθούν.



Fund	Total Return	Std Dev Prices	Std Dev Returns
A	10%	5.0	10%
B	10%	5.0	3%
C	10%	22.9	10%

Γράφημα 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: VALUE-AT-RISK

3.1 Ιστορική Αναδρομή του VaR

Το πρόβλημα της διαχείρισης κινδύνου είναι ένα πρόβλημα που έχει παρατηρηθεί, χρονολογικά, από πολύ παλιά στους τομείς της στατιστικής, της οικονομικής και της χρηματοοικονομικής. Η διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου υπήρξε ένα θέμα μείζονος ενδιαφέροντος για τους ρυθμιστές και τους οικονομικούς διευθύνοντες επίσης αρκετά χρόνια πριν. Η έννοια όμως του Value-at-Risk δεν χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα πριν τα μέσα της δεκαετίας του '90.

Η χρήση του VaR ως μία ξεχωριστή έννοια πρωτοεμφανίστηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1980 μετά την κρίση του 1987 όταν πολλοί ακαδημαϊκοί και οικονομικοί αναλυτές άρχισαν ν'ανησυχούν για την επιβίωση του οικονομικού συστήματος παγκοσμίως.[4] Η περαιτέρω ώθηση για τη χρήση του VaR προκλήθηκε από τις κρίσεις που ταλάνιζαν τις επιχειρήσεις χρηματοοικονομικών υπηρεσιών την περίοδο εκείνη και τις προκαλούμενες ρυθμιστικές ενέργειες για την αντιμετώπιση αυτών των κρίσεων. Στις αρχές του 1990 υπήρξε μία πληθώρα αποτυχιών που σχετίζονται με την ακατάλληλη χρήση παραγώγων (derivatives) και την έλλειψη επάρκειας εσωτερικού ελέγχου. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι αυτή των Orange County (1994, με απώλειες US$1.8 δις.), Metallgesellschaft (1994, US$1.3 δις.), Barings (1995, US$1.3 δις.) και Daiwa (1995, US$1.1 δις.). Αυτά τα περιστατικά έκαναν εμφανείς τους κινδύνους που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις και γενικά το χρηματοοικονομικό σύστημα και έτσι οι απώλειες δεν μπορούσαν πλέον να αποδοθούν μόνο στις κακές κυβερνητικές πολιτικές και στην έλλειψη αυστηρής παρακολούθησης των συστημάτων. Ήταν εμφανέστατη η επιτακτική ανάγκη για ένα βελτιωμένο και ενισχυμένο μοντέλο διαχείρισης κινδύνου. Γι'αυτό το σκοπό αναπτύχθηκε μία νέα μέθοδος μέτρησης κινδύνου εστιάζοντας στις απώλειες μιας επιχείρησης με κάποια λογική πιθανότητα, το Value-at-Risk. Αναπτύχθηκε το 1993 και έγινε ευρέως εφαρμόσιμο από το 1994 μέσω του J.P. Morgan's RiskMetrics, και αφού έγιναν συμπληρωματικές εφαρμογές από το CreditMetrics το 1997 και από το CorporateMetrics και PensionMetrics το 1999, έγινε ιδιαίτερα δημοφιλές στους διάφορους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς και ρυθμιστές, όπως η Τράπεζα

[4] Σύμφωνα με τον Holton (2002) το VaR έχει τις ρίζες του στο 1922 την περίοδο που ο NYSE (New York Stock Exchange) επέβαλε κεφαλαιακές απαιτήσεις από τις επιχειρήσεις-μέλη και σαν έννοια εξελίχθηκε το 1952 όταν οι Markowitz και Roy στην προσπάθεια τους να αναπτύξουν ένα μέσο επιλογής χαρτοφυλακίων που να βελτιστοποιεί την απόδοση τους με δεδομένο κίνδυνο, εξέδωσαν σχεδόν ταυτόχρονα παρόμοιες μεθόδους υπολογισμού του VaR .

Διεθνών Διακανονισμών (Bank for International Settlements) και η Αμερικανική Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς.

Αρχικά, σκοπός του VaR ήταν η εφαρμογή του στην αγορά παραγώγων και η μέτρηση του κινδύνου που σχετίζεται μ'αυτή την αγορά αλλά γρήγορα η εφαρμογή του επεκτάθηκε και στη μέτρηση κάθε είδους χρηματοοικονομικών κινδύνων, και κυρίως του κινδύνου της αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου. Το Value-at-Risk εξελίχθηκε από ένα εργαλείο για τη μέτρηση κινδύνου στην ενεργή διαχείριση (active management) σε μία μέθοδο ευρείας επιχειρηματικής εμβέλειας αντιμετωπίζοντας και ενώνοντας όλους τους κινδύνους που μπορεί να προκύψουν σε ένα μοναδικό πλαίσιο. Αν και αρχικά χρησιμοποιήθηκε από χρηματοοικονομικούς οργανισμούς τώρα πλέον βρίσκει εφαρμογή και στη μέτρηση κινδύνου σε επιχειρήσεις μη χρηματοοικονομικών υπηρεσιών. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται κυρίως λόγω του ότι το VaR γίνεται εύκολα αντιληπτό από μη ειδικούς σε αντίθεση με άλλες μεθόδους μέτρησης του κινδύνου. Αυτή όμως η απλοϊκότητα στην ερμηνεία της έννοιας του Value-at-Risk και η συνακόλουθη ευρεία χρήση του και η απόλυτη εμπιστοσύνη στα προκύπτοντα αποτελέσματα μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες και μη ορθή χρήση του, γεγονός που καθιστά αναγκαία τη γνώση και την εξοικείωση με τα προβλήματα και τους περιορισμούς του Value-at-Risk.

3.2 Ορισμός του VaR και χαρακτηριστικά του

Value-at-Risk (VaR) είναι το μέγιστο ποσό χρημάτων που μπορεί ν'απολεσθεί από ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης περιόδου, δεδομένου ενός επιπέδου εμπιστοσύνης.

Το VaR λοιπόν υπολογίζει τη μεγαλύτερη δυνατή απώλεια υπό κανονικές συνθήκες αγοράς μέσα σ'ένα προκαθορισμένο χρονικό ορίζοντα με κάποια ορισμένη πιθανότητα και πιο τυπικά ορίζεται ως το ποσοστημόριο (quantile) της παραγόμενης κατανομής κερδών-απωλειών για μία δεδομένη χρονική περίοδο. Αν α είναι το επιλεγόμενο επίπεδο εμπιστοσύνης τότε το VaR αντιστοιχεί στο (1 - α) του χαμηλότερου μέρους της ουράς της κατανομής.

Σύμφωνα μ'αυτό προκύπτει ο παρακάτω ορισμός :

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : με δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης α Є (0,1) το VaR ενός χαρτοφυλακίου στο επίπεδο εμπιστοσύνης α δίνεται από το μικρότερο αριθμό l τέτοιο ώστε η πιθανότητα η απώλεια L να υπερέχει του αριθμού l να μην είναι μεγαλύτερη από (1 – α) σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα :

$$\mathbf{VaR_\alpha = inf \{l \in R:\ P (L > l) \leq 1 - \alpha\}}$$

Για τη διατύπωση ενός πληρέστερου ορισμού είναι απαραίτητη η διατύπωση του ορισμού της συνάρτησης τεταρτημορίων της (έστω) X τυχαίας μεταβλητής (ή ισοδύναμα της κατανομής της), quantile function, $q_x(\alpha)$, ως εξής :

$$q_x(\alpha) = \{ \min_{x \in \mathbb{R}} : P(X \leq x) = \alpha \}, \alpha \in [0,1]$$

Αυτός ο ορισμός σε συνδυασμό με την υπόθεση (που γίνεται χωρίς απώλεια γενικότητας) για την συνάρτηση κατανομής (έστω) F_x ότι είναι 1-1 σε όλο το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X, οδηγεί στον ορισμό του VaR, καθώς ισχύει :

$$q_x(\alpha) = F_x^{-1}(\alpha)$$

όπου F_x^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Το VaR σε επίπεδο σημαντικότητας α ορίζεται ως :

$$\mathbf{VaR_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h}) = w_t' \mu_{t,t+h} - q\ w_t' r_{t,t+h}\ (\alpha)}$$

όπου $\mu_{t,t+h}$, είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της κατανομής των αποδόσεων με δεδομένο το σύνολο πληροφορίας I_t , $E(r_{t,t+h} / I_t)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$P (w'_t r_{t,t+h} \leq q\ w_t' r_{t,t+h} (\alpha)) = \alpha \iff P(\frac{w_t' r_{t,t+h} - w_t' \mu_{t,t+h}}{(w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}} \leq \frac{q\ w_t' r_{t,t+h} (\alpha) - w_t' \mu_{t,t+h}}{(w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}}) = \alpha \iff$

$\iff \frac{q\ w_t' r_{t,t+h} (\alpha) - w_t' \mu_{t,t+h}}{(w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}} = F^{-1}_{zt,t+h} (\alpha)$

$\iff q\ w_t' r_{t,t+h} (\alpha) = w_t' \mu_{t,t+h} + F^{-1}_{zt,t+h} (\alpha)\ (w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}$

όπου η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $z_{t,t+h} = \frac{w_t' r_{t,t+h} - w_t' \mu_{t,t+h}}{(w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}}$ και $F_{zt,t+h}$ η συνάρτηση κατανομής της.

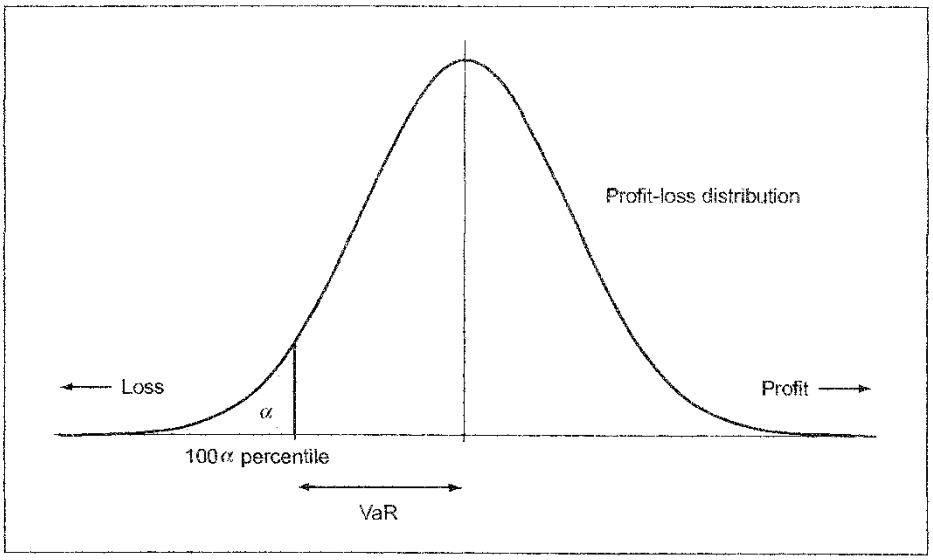
Σημειώνεται ότι η παραπάνω κατανομή δεν θα εξαρτάται από το w_t στην περίπτωση εκείνη που προσδιορίζεται μοναδικά από τον μέσο και την διακύμανση της, τα οποία σε κάθε περίπτωση είναι 0 και 1 αντίστοιχα, στην περίπτωση δηλαδή που πρόκειται για τυπική κανονική κατανομή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι ισχύει :

$VaR_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h}) = - F^{-1}_{zt,t+h}(\alpha) \ (w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}$

και ερμηνεύεται ως η μεγαλύτερη δυνατή απώλεια στην απόδοση του συγκεκριμένου χρηματοοικονομικού τίτλου στην περίπτωση που δεν συμβούν τα γεγονότα τα οποία απεικονίζονται στο διάστημα $(- \infty , \ - VaR_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h}))$.

Μία ερώτηση λοιπόν που θα μπορούσε ν'απαντήσει το VaR θα ήταν "Τι ποσό σε ευρώ μπορώ – με πιθανότητα 95% ή 99% - να αναμένω να χάσω μέσα στον επόμενο μήνα;" ή " Ποιο είναι το μέγιστο ποσοστό που μπορώ – με πιθανότητα 95% ή 99% - να αναμένω να χάσω μέσα στον επόμενο χρόνο;" Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα γραφικά του VaR.



Γράφημα 8

Αν και σχεδόν πάντα το VaR αντιπροσωπεύει μία απώλεια, θεωρητικά καταγράφεται ως ένας θετικός αριθμός. Η εκτίμηση ενός αρνητικού αριθμού του VaR θα σήμαινε ότι το χαρτοφυλάκιο έχει μεγάλη πιθανότητα να παρουσιάσει κέρδη. Για παράδειγμα, VaR 1-ημέρας με 5% €1 εκατομ.σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο έχει 95% πιθανότητα να κάνει κέρδη της τάξης του €1 εκατομ.ή και παραπάνω μέσα στην επόμενη μέρα.

Διαπιστώνουμε ότι το VaR έχει τρεις βασικές παραμέτρους:

i. την περίοδο διακράτησης (holding period)
ii. το διάστημα εμπιστοσύνης (confidence level)
iii. το ποσοστό απώλειας (loss percentage)

Από αυτά ιδιαίτερης σημασίας είναι η περίοδος διακράτησης και το διάστημα εμπιστοσύνης.

◦ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΔΙΑΚΡΑΤΗΣΗΣ (Holding period)

Περίοδος διακράτησης θεωρείται η χρονική περίοδος κατά την οποία υπολογίζεται το VaR. Συνήθως η περίοδος αυτή ορίζεται ως μία μέρα αλλά υπάρχουν και διαφορετικές απόψεις, σύμφωνα με τον P. Best, που υποστηρίζουν ότι η περίοδος διακράτησης θα πρέπει να είναι ίση με τη μέγιστη δυνατή περίοδο ρευστότητας του

περιουσιακού στοιχείου του χαρτοφυλακίου ή ίση με την περίοδο ρευστοποίησης όλων των περιουσιακών στοιχείων του οργανισμού ή ίση με την περίοδο που το χαρτοφυλάκιο παραμένει σταθερό. Γενικά, η επιρροή της περιόδου διακράτησης στο VaR εξαρτάται από το άθροισμα της προσδοκώμενης απόδοσης. Αν η αναμενόμενη απόδοση δεν λαμβάνεται υπόψη, το VaR, γενικά, θα αυξηθεί καθώς αυξάνεται η περίοδος διακράτησης γιατί η αβεβαιότητα στην κατανομή Κερδών-Απωλειών (Profit&Loss) θα αυξηθεί με την περίοδο διακράτησης. Ενώ αν οι αναμενόμενες αποδόσεις λαμβάνονται υπόψη (όπως συνήθως), κάθε μεμονωμένη απόδοση πρέπει να εξετάζεται ξεχωριστά.

◦ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ (Confidence level)

Όταν η απόκλιση από την αναμενόμενη αξία παρατηρείται και στις δύο κατευθύνσεις, δηλαδή κάτω και πάνω από την αναμενόμενη αξία), αναφερόμαστε σε δίπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης. Για έναν επενδυτή, όμως, δεν αποτελεί ρίσκο η πιθανότητα ενός μεγάλου κέρδους, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι μόνο οι αρνητικές αποκλίσεις αποτελούν ρίσκο για έναν επενδυτή και επομένως μόνο τα μονόπλευρα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι σχετικά σ'αυτήν την περίπτωση.

Το επίπεδο βεβαιότητας που χαρακτηρίζει κάθε επενδυτής αντανακλάται στο διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο επιλέγει. Όσο περισσότερη βεβαιότητα απαιτεί ένας επενδυτής, τόσο μεγαλύτερο διάστημα εμπιστοσύνης επιλέγει.

3.3 Μέθοδοι Εκτίμησης VaR και Χαρακτηριστικά τους

Υπάρχουν 3 βασικότεροι μέθοδοι εκτίμησης του VaR και υπολογίζονται κάνοντας κάποιες υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων για τους κινδύνους αγοράς, και με χρησιμοποιώντας τις διακυμάνσεις αυτών των κινδύνων και τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ τους. Αυτές, λοιπόν , είναι οι παρακάτω τρεις :

1. Μέθοδος Συνδιακύμανσης (Variance – Covariance Method)
2. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation)
3. Μέθοδος Monte Carlo (Monte Carlo Simulation)

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

I. Μέθοδος Συνδιακύμανσης

Βασική ιδέα

Η βασική ιδέα της μεθόδου αυτής γίνεται κατανοητή αν σκεφτούμε ότι μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το Value-at-Risk αν παράγουμε μία κατανομή πιθανοτήτων για τις δυνατές τιμές αφού το VaR μετράει την πιθανότητα η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου να μειωθεί κάτω από μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η μέθοδος αυτή αν και απλή στη σκέψη, βασίζεται σε μία περιοριστική υπόθεση, αυτή της κανονικότητας των αποδόσεων ,δηλαδή για την εκτίμηση χρειαζόμαστε μόνο δύο παράγοντες, την αναμενόμενη ή μέση απόδοση (expected or average return) και την τυπική απόκλιση (standard deviation). Χρησιμοποιώντας αυτήν την υπόθεση είναι δυνατόν να καθορίσουμε την κατανομή των mark-to-market κερδών-απωλειών του χαρτοφυλακίου, που είναι επίσης κανονική (normal). Αφού έχει προσδιοριστεί η κατανομή αυτή, χρησιμοποιούνται οι μαθηματικές ιδιότητες της κανονικής κατανομής για καθορίσουμε την απώλεια που θα είναι ίση ή θα υπερέχει κατά X% του χρόνου, δηλαδή για να καθορίσουμε το VaR.

Περιγραφή μεθόδου

Εκτιμώντας το VaR ενός περιουσιακού στοιχείου, για παράδειγμα, όπου οι δυνατές τιμές κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή Є 120 εκατομ. και με ετήσια τυπική απόκλιση Є10 εκατομ., με 99% διάστημα εμπιστοσύνης μπορούμε να πούμε ότι η αξία του δεν θα πέσει κάτω από Є96.7 εκατομ. (2.33 τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή) ή δεν θ'ανέβει πάνω από Є143.3 εκατομ. (2.33 τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή) μέσα στο επόμενο έτος.[5] Όσον αφορά όμως την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε χαρτοφυλάκια, αν και η λογική που ακολουθείται είναι η ίδια, η διαδικασία διαφέρει εξαιτίας της πολυπλοκότητας στην εκτίμηση των παραμέτρων δεδομένου ότι τα περιουσιακά στοιχεία συχνά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Για παράδειγμα, σ'ένα χαρτοφυλάκιο με 100 περιουσιακά στοιχεία θα υπάρχουν 49.500 συνδιακυμάνσεις που θα πρέπει να εκτιμηθούν εκτός από τις 100 μεμονωμένες διακυμάνσεις, κάτι που

[5] Έχουμε χρησιμοποιήσει 99% διάστημα εμπιστοσύνης που μεταφράζεται σε 2.33 τυπικές αποκλίσεις από κάθε πλευρά του μέσου(θετική και αρνητική). 95% διάστημα εμπιστοσύνης μεταφράζεται σε 1.65 τυπικές αποκλίσεις και 90% διάστημα εμπιστοστοσύνης ως 1.96 τυπικές αποκλίσεις.

όπως γίνεται αντιληπτό δεν είναι καθόλου εύχρηστος τρόπος υπολογισμού μεγάλων χαρτοφυλακίων με μεταβαλλόμενες θέσεις των περιουσιακών στοιχείων.

Στην προσπάθεια μας για απλούστευση της μεθόδου κατασκευάζουμε το ρίσκο των μεμονωμένων επενδύσεων σ'ένα χαρτοφυλάκιο σε πιο γενικού τύπου ρίσκο αγοράς (risk mapping) για να υπολογίσουμε το VaR και μετά εκτιμάμε το μέτρο βάσει της έκθεσης σ'αυτούς τους κινδύνους. Η διαδικασία περιλαμβάνει τέσσερα βήματα :

- Πρώτα παίρνουμε καθένα από τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου και το κατασκευάζουμε σε πιο απλό κανονικοποιημένο εργαλείο. Σκοπός είναι να κατασκευάσουμε κάθε περιουσιακό στοιχείο σε ένα σύνολο από παράγοντες που αντιπροσωπεύουν το ρίσκο της αγοράς που στο οποίο υπόκειται καθένα και αντί να εκτιμήσουμε τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις πάρα πολλών περιουσιακών στοιχείων, εκτιμάμε τους κοινούς παράγοντες ρίσκου στους οποίους αυτά εκτίθενται. Το πλεονέκτημα είναι πως τώρα οι παράγοντες αυτοί που έχουμε να εκτιμήσουμε είναι πολύ λιγότεροι από ότι τα περιουσιακά στοιχεία.

- Έπειτα κάθε περιουσιακό στοιχείο καταγράφεται ως ένα σύνολο θέσεων σε καθένα παράγοντα ρίσκου της αγοράς.

- Αφού έχουν προσδιοριστεί οι παράγοντες που επηρεάζουν τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου, ακολουθεί η εκτίμηση των διακυμάνσεων αυτών των παραγόντων και των συνδιακυμάνσεων τους. (Πρακτικά αυτό γίνεται από ιστορικά στοιχεία).

- Τέλος, το VaR του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις σταθμίσεις (weights) των παραγόντων κινδύνου από το βήμα 2 και τη μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων από το βήμα 3.

Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα Μεθόδου

Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι είναι πολύ γρήγορη και απλή στην εφαρμογή της, αφού έχουμε κάνει υποθέσεις για την κατανομή των

αποδόσεων, και έχουμε υπολογίσει τη μέση τιμή, τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων.

Παρόλα αυτά όμως υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί και αδυναμίες :

- Υποθέτει ότι η κατανομή κερδών - απωλειών σε κάθε χρονική στιγμή είναι κανονική. Αυτό δεν αποτελεί κανένα πρόβλημα αν οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων ή οι παράγοντες κινδύνου κατανέμονται κανονικά. Όμως αυτό συνήθως δεν συμβαίνει. Οπότε μπορεί να έχουμε το πρόβλημα της λανθασμένης υπόθεσης της κατανομής, και αν υπάρχουν περισσότερο ακραίες πραγματικές αποδόσεις απ'ότι υποθέτει η κανονική κατανομή, το πραγματικό VaR θα είναι πολύ υψηλότερο απ'ότι αυτό που έχουμε υπολογίσει.

- Έχει περιορισμένη εφαρμογή γιατί είναι κατάλληλη μέθοδος μόνο για γραμμικού τύπου χαρτοφυλάκια ή για χαρτοφυλάκια που είναι γραμμικά βάσει των παραγόντων κινδύνου. Δηλαδή, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν παράγωγα (options) ή αξιόγραφα τύπου παραγώγων όπως τα μετατρέψιμα ομόλογα (convertible bonds) αφού οι αποδόσεις δεν είναι γραμμικές.[6]

- Πιθανά λάθη στον προσδιορισμό των διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων. Ακόμα και στην περίπτωση που η υπόθεση της κανονικότητας ισχύει, το VaR μπορεί να είναι λάθος αν οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις που έχουν υπολογιστεί είναι λανθασμένες με την έννοια ότι εφόσον έχουν χρησιμοποιηθεί ιστορικά στοιχεία για την εκτίμηση τους μπορεί η εκτίμηση αυτή να υπόκειται σε μεγάλα τυπικά σφάλματα.

- Παρόμοιο πρόβλημα παρουσιάζεται στην περίπτωση που οι διακυμάνσεις των περιουσιακών στοιχείων και οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ τους μεταβάλλονται στο χρόνο.[7]

[6] Για το σκοπό αυτό έχουν προταθεί και έχουν μελετηθεί μέτρα όπως το Quadratic Value-at-Risk για τον υπολογισμό πιο σύνθετων χαρτοφυλακίων.

[7] Ο Engle πρότεινε ότι μπορούμε να πάρουμε καλύτερες εκτιμήσεις με τη χρησιμοποίηση μοντέλων που επιτρέπει στην τυπική απόκλιση να μεταβάλλεται στο χρόνο. Ιδιαίτερα τα μοντέλα ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) και GARCH (Generalized Autoregressive Conditional

II. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation)

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης είναι η ευκολότερη μέθοδος υπολογισμού του VaR για πολλών ειδών χαρτοφυλάκια (χαρτοφυλάκια που περιέχουν και παράγωγα και άλλου είδους περίπλοκες θέσεις για διάφορους παράγοντες κινδύνου). Δεν γίνεται καμία υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων, ούτε για τον τύπο των από κοινού μεταβολών των περιουσιακών στοιχείων ή των παραγόντων κινδύνου.

Περιγραφή Μεθόδου

Συλλέγονται ιστορικά στοιχεία των υποκείμενων τίτλων και παραγόντων κινδύνου για το χαρτοφυλάκιο συνήθως σε καθημερινή βάση καλύπτοντας ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, ίσως κάποιων χρόνων. Η κατανομή των κερδών και απωλειών (P&L distribution) παράγεται παίρνοντας το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο και υποβάλλοντας το σε πραγματικές μεταβολές των παραγόντων αγοράς που έχουν συντελεστεί κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος που έχουμε συλλέξει τα ιστορικά στοιχεία. Οι αλλαγές που παρατηρούνται στις τιμές θεωρούνται μία καλή εκτίμηση για τις μελλοντικές αλλαγές τιμών. Αφού λοιπόν έχουμε αποκτήσει τις αποδόσεις για κάθε περιουσιακό στοιχείο του χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου και έχουμε υπολογίσει τις καθημερινές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, κατατάσσουμε τις αποδόσεις αυτές από τη χαμηλότερη στην υψηλότερη και βρίσκουμε την τιμή εκείνη που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο ποσοστημόριο του επιπέδου εμπιστοσύνης που έχουμε επιλέξει, και που αποτελεί και το VaR.

Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα Μεθόδου

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης εκτός από το ότι έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα λόγω της απουσίας της υπόθεσης για κάποια συγκεκριμένη κατανομή για τις αποδόσεις και ως εκ τούτου της ευκολίας που παρέχει για τον υπολογισμό και

Heteroskedasticity) μπορούν να παρέχουν προβλέψεις για τη διακύμανση και κατ'επέκταση και για τον υπολογισμό του VaR.

σύνθετων χαρτοφυλακίων πέραν του γραμμικού, λαμβάνει υπόψη της τις "παχιές ουρές" (fat tails) και επειδή δεν στηρίζεται σε μοντέλα εκτίμησης δεν υπόκειται στη μοντελοποίηση του ρίσκου.

Παρόλο όμως την ευκολία της μεθόδου αυτής, υπάρχουν και μειονεκτήματα :

1. Η μέθοδος γίνεται πολύ περίπλοκη υπολογιστικά όταν το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό περιουσιακών στοιχείων.

2. Υπάρχει ιδιαίτερο πρόβλημα όταν στο χαρτοφυλάκιο προστίθενται καινούρια περιουσιακά στοιχεία και κίνδυνοι και ως εκ τούτου δεν διαθέτουμε ιστορικές τιμές γι'αυτά. Είναι ένα σημαντικό μειονέκτημα καθώς δεν μπορεί να υπολογιστεί η μεταβλητότητα και η συνδιακύμανση αυτού του καινούριου στοιχείου με τα υπόλοιπα.[8]

3. Όλα τα δεδομένα έχουν την ίδια βαρύτητα στον υπολογισμό μας για το VaR κάτι το οποίο δεν είναι ορθό. Η μέθοδος αυτή θεωρεί πως οι αλλαγές τιμών που συντελέστηκαν στο μακρινό παρελθόν επηρεάζουν ακριβώς το ίδιο το VaR με τις αλλαγές τιμών που συντελέστηκαν στο πρόσφατο παρελθόν. Συνεπώς αν υπάρχει τάση για αυξανόμενη μεταβλητότητα ακόμα και στην ίδια χρονική περίοδο, θα υποτιμήσουμε την τιμή του VaR. Λύση στο πρόβλημα αυτό έχει προταθεί σταθμίζοντας τις πιο πρόσφατες αλλαγές περισσότερο απ'ότι τις πιο παρελθοντικές με το σκεπτικό ότι οι αλλαγές τιμών που συντελέστηκαν πιο πρόσφατα δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις του άμεσου μέλλοντος. [9]

4. Αν και χρειαζόμαστε ένα επαρκές χρονικό διάστημα απ'το οποίο προέρχονται τα δεδομένα μας, εν τούτοις είναι ένα σημαντικό πρόβλημα η κατάλληλη επιλογή αυτού του διαστήματος. Είναι πιθανό αν επιλέξουμε δεδομένα λιγότερων ημερών απ'ότι οι παράγοντες κινδύνου να οδηγηθούμε σε λανθασμένο υπολογισμό του VaR. Σύμφωνα με τον Jorion, ένας σωστός και πιο ακριβής υπολογισμός του VaR απαιτεί την ύπαρξη πολλών διαθέσιμων δεδομένων σε

[8] Η πρακτική του να χρησιμοποιηθεί μία σειρά τιμών ενός υπάρχοντος περιουσιακού στοιχείου με παρόμοια χαρακτηριστικά με το καινούριο μέχρι να υπάρξει επαρκές ιστορικό τιμών δεν είναι πάντα εφικτή και έγκυρη γι'αυτό είναι εφαρμόσιμη μόνο σε μεγάλα διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια.

[9] Οι Boudoukh, Richardson και Whitelaw παρουσίασαν τέτοιες ιστορικές προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας έναν προεξοφλητικό παράγοντα ως μηχανισμό στάθμισης των αλλαγών των τιμών.

υψηλότερα επίπεδα εμπιστοσύνης.[10] Οι Goorbergh και Vlaar θεωρούν ότι ο υπολογισμός του VaR μ'αυτή τη μέθοδο δεν μπορεί να γίνεται με χρονικό ορίζοντα μικρότερο από το αντίστροφο του επιλεχθέντος επιπέδου εμπιστοσύνης.[11]

III. Monte Carlo Προσομοίωση (Monte Carlo Simulation)

Για να παράγουμε μία εμπειρική κατανομή κερδών – απωλειών (Profit&Loss distribution) αντί να χρησιμοποιήσουμε ιστορικές παρατηρήσεις όπως στη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης, να προσομοιώσουμε κινήσεις των υποκείμενων τίτλων και παραγόντων κινδύνου σ'ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Με τη μέθοδο αυτή λαμβάνοντας υπόψη τις τρέχουσες τιμές ως τιμές εκκίνησης μπορούμε να παράγουμε τεχνητά χιλιάδες πιθανές τιμές, συσχετισμένες μεταξύ τους αλλαγές τιμών, των υποκείμενων τίτλων και παραγόντων κινδύνου. Δημιουργώντας λοιπόν ένα πολύ μεγάλο σύνολο σεναρίων από τυχαίους αριθμούς παίρνουμε ένα ιστόγραμμα των διαφορών μεταξύ αυτών των αποτελεσμάτων και της αξίας του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Το VaR είναι το χαμηλότερο ποσοστημόριο αυτής της κατανομής.

Περιγραφή Μεθόδου

Σύμφωνα με τον P. Best η μέθοδος Monte Carlo περιγράφεται από πέντε βήματα:

1. Καθορισμός της μεταβλητότητας και της συσχέτισης μεταξύ των τίτλων και των παραγόντων κινδύνου.
2. Παραγωγή κανονικής[12] σειράς τιμών με τη σωστή μεταβλητότητα.
3. Υπολογισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων για την κατασκευή της μήτρας συσχέτισης (correlation matrix).[13]

[10] Η επιλογή ενός πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος όμως μπορεί να αποτελέσει πρόβλημα καθώς μπορεί να μην υπάρχουν δεδομένα για όλα τα σχετικά στοιχεία και παράγοντες κινδύνου ή μπορεί να περιλαμβάνονται ακραία γεγονότα της αγοράς από το πολύ μακρινό παρελθόν που να μην είναι σχετικά με τις τρέχουσες «κανονικές» συνθήκες.

[11] Για ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης χρειάζεται ένας χρονικός ορίζοντας 1/(1-0.999) =1000 παρατηρήσεις.

[12] Σύμφωνα με άλλους μελετητές χρειάζεται παραμετρικότητα αλλά όχι αναγκαστικά κανονικότητα.

4. Παραγωγή συσχετισμένων σειρών τιμών.
5. Παραγωγή αλλαγών αξίας χαρτοφυλακίου και κατάλληλη κατάταξη τους για την κατασκευή του ιστογράμματος.

Έτσι λοιπόν, για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε μία σειρά 10,000 προσομοιώσεων και παράγουμε τις αντίστοιχες τιμές για το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, κατατάσσουμε τις τιμές αυτές από την υψηλότερη στη χαμηλότερη και το 95% ποσοστημόριο VaR θα αντιστοιχεί στην 500η μικρότερη τιμή και το 99% ποσοστημόριο στην 100η χαμηλότερη τιμή.[14]

Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα Μεθόδου

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Monte Carlo είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του VaR οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου και είναι μία αρκετά ευέλικτη μέθοδος ώστε να ανταποκρίνεται και στα παράγωγα και σε παρόμοιου τύπου τίτλους περιλαμβάνοντας τη μεταβολή της διακύμανσης στο χρόνο, τις “παχιές ουρές” (fat tails), και τα ακραία σενάρια. Επίσης αν και ξεκινάμε με ιστορικά δεδομένα μπορούμε να συμπεριλάβουμε και υποκειμενικές κρίσεις και άλλες πληροφορίες για να βελτιώσουμε την πρόβλεψη μας για την κατανομή πιθανοτήτων.

Χαρακτηριστικό μειονέκτημα της μεθόδου Monte Carlo είναι ότι είναι περίπλοκη υπολογιστικά. Για παράδειγμα, για να ολοκληρωθεί μία καμπύλη αποδόσεων (yield curve)[15] που παράγεται με 15 κύριους δείκτες (key rates) και 4 πιθανές τιμές για τον καθένα θα απαιτούνται 1,073,741,824 προσομοιώσεις (4^{15}).[16] Επίσης, σημαντικό είναι ότι επειδή η μέθοδος στηρίζεται σε συγκεκριμένες στοχαστικές διαδικασίες για τους υποκείμενους παράγοντες κινδύνου αλλά και για τα

[13] Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές περιγράφουν το πώς μεταβάλλονται οι αλλαγές τιμών μιας ομάδας παραγόντων κινδύνου μεταξύ τους.

[14] Η ισοδύναμα, κατατάσσουμε τις τιμές του χαρτοφυλακίου από τη χαμηλότερη στην υψηλότερη και παίρνουμε το 5% ποσοστημόριο και το 1% ποσοστημόριο αντίστοιχα.

[15] Η yield curve χρησιμοποιείται τυπικά για να δείξει την απόδοση για διαφορετικού χρόνου ωρίμανσης ομολόγων και χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η καλύτερη τιμή για τα ομόλογα και ως οικονομικός δείκτης. Καμπύλη με θετική κλίση υποδεικνύει μία αναπτυσσόμενη οικονομία ενώ με επίπεδη ή αρνητική κλίση υποδεικνύει μία αργή ή συρρικνωμένη οικονομία.

[16] Ο J.Frye πρότεινε, για την αποφυγή αυτής της υπολογιστικής δυσκολίας του Monte Carlo, να γίνεται η ανάλυση σ’ έναν αριθμό διακριτών σεναρίων, τα οποία μπορούν αν δημιουργηθούν με την εφαρμογή ενός μικρού συνόλου προ-αποφασισμένων διαταραχών (shocks) στο σύστημα.

μοντέλα τιμολόγησης τίτλων όπως τα παράγωγα, ενδέχεται τα μοντέλα αυτά να είναι λανθασμένα και έτσι να μην έχουμε ακριβή και σωστά αποτελέσματα. Τέλος, θα λέγαμε πως η μέθοδος Monte Carlo είναι συγκριτικά με άλλες πιο ακριβή όσον αφορά την υποδομή συστημάτων και ανάπτυξης.

3.3.1 Σύγκριση Μεθόδων

Ποια από τις παραπάνω μεθόδους δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα?

Η απάντηση σ'αυτήν την ερώτηση θα λέγαμε ότι εξαρτάται από το τι θέλουμε να μελετήσουμε. Δηλαδή αν θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR για χαρτοφυλάκια, που δεν περιέχουν παράγωγα, για πολύ σύντομες χρονικές περιόδους (μιας ημέρας ή μιας εβδομάδας) η μέθοδος της διακύμανσης – συνδιακύμανσης θα έχει καλά αποτελέσματα, παρόλο την περιοριστική υπόθεση της κανονικότητας της κατανομής των αποδόσεων. Αν υπολογίζεται το VaR για μία πηγή κινδύνου που είναι σταθερή και υπάρχουν επαρκείς ιστορικές παρατηρήσεις (όπως τιμές των commodities) η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης είναι καλή. Ενώ η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo είναι πιο κατάλληλη για την πιο γενική περίπτωση του υπολογισμού του VaR για μη γραμμικά χαρτοφυλάκια, που περιλαμβάνουν παράγωγα, για μεγαλύτερες χρονικές περιόδους, όπου τα ιστορικά δεδομένα μεταβάλλονται και δεν είναι στάσιμα (non stationary)[17] και η υπόθεση της κανονικότητας αμφισβητείται.

[17] Η έννοια της στασιμότητας εξηγείται στο κεφάλαιο 8.3.

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ VAR

3.4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ VaR ΓΙΑ ΜΙΑ ΜΕΤΟΧΗ

Για να υπολογίσουμε το Value at Risk μίας μετοχής, ορίζουμε πρώτα το N-ημερών VaR ενός περιουσιακού στοιχείου σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης, $VaR_{[N],\alpha}$, για το οποίο ισχύει :

$$P (\Delta S_{[N]} \geq - VaR_{[N],\alpha}) = \alpha$$

όπου : S : η αξία ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου

$\Delta S_{[N]}$: η μεταβολή αυτής της αξίας σε N ημέρες

Η ερμηνεία του ορισμού αυτού είναι :

«Είμαστε σίγουροι κατά α% ότι η αξία του τίτλου δεν θα πέσει περισσότερο από $VaR_{[N],\alpha}$ ευρώ τις επόμενες N μέρες».

Για να υπολογίσουμε το $VaR_{[N],\alpha}$ πρέπει να εκτιμήσουμε την κατανομή του $\Delta S_{[N]}$ και γι'αυτό γίνεται η υπόθεση πρακτικά ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με N-ημέρων μέση τιμή, $\mu_{[N]}$, και N-ημερών διακύμανση $\sigma^2_{[N]}$:

$$\Delta S_{[N]} \sim N (\mu_{[N]} , \sigma^2_{[N]})$$

Υιοθετώντας την υπόθεση αυτή, το N-ημερών VaR se 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι[18] : $VaR_{[N],\alpha} = z_\alpha \sigma_{[N]} - \mu_{[N]}$

όπου z_α είναι ο αριθμός για τον οποίο η πιθανότητα η τυπική κατανομή να είναι μικρότερη από αυτόν τον αριθμό είναι ίση με α.

Χαρακτηριστικό είναι ότι για τον υπολογισμό οποιουδήποτε $VaR_{[M],\alpha}$, μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί η μετατροπή του $\mu_{[N]}$ και του $\sigma_{[N]}$ σε :

$\mu_{[M]} = \frac{M}{N} \mu_{[N]}$ και $\sigma_{[M]} = \sqrt{\frac{M}{N}} \sigma_{[N]}$, αντίστοιχα

[18] Στον υπολογισμό του VaR για πολύ μικρό χρονικό ορίζοντα, όπως μία ημέρα ή μία εβδομάδα, είναι σύνηθες να θεωρείται $\mu_{[N]} \approx 0$.

οπότε και προκύπτει ο υπολογισμός του $VaR_{[M],\alpha}$ ως :

$$VaR_{[M],\alpha} = z_\alpha \sqrt{\frac{M}{N}}\, \sigma_{[N]} - \frac{M}{N}\, \mu_{[N]}$$

Χαρακτηριστικό είναι ότι το VaR μπορεί να υπολογιστεί όχι μόνο με τις μεταβολές της τιμής (ΔS) αλλά και με τις αποδόσεις ($R_{(N)} = \Delta S_{(N)} / S$) και να έχουμε κατ'αντιστοιχία τη σχέση :

$$P\,(R_{(N)} \geq - VaR_{[N],\alpha} / S\,) = \alpha\ .$$

Σημειώνεται πως, σύμφωνα με τα παραπάνω, κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας για τον υπολογισμό του VaR χρειάζονται μόνο οι εκτιμήσεις του $\mu_{[N]}$ και του $\sigma_{[N]}$, ώστε να εκτιμηθεί η κατανομή των αποδόσεων.

3.4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ VaR ΕΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕΤΟΧΩΝ

Για να υπολογίσουμε το VaR ενός χαρτοφυλακίου θα πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή της απόδοσης του και ως εκ τούτου την κατανομή των αποδόσεων των στοιχείων που το απαρτίζουν. Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου έχει ιδιαίτερη σημασία για τον υπολογισμό του κινδύνου καθώς η διαδικασία είναι περισσότερο περίπλοκη και απαιτητική (μία τέτοια περίπτωση θα ήταν το χαρτοφυλάκιο να αποτελείται και από παράγωγα).

Στην περίπτωση, λοιπόν, που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μετοχές, έστω K, η μεταβολή της αξίας του σε N ημέρες θα είναι :

$$\Delta P_{[N]} = \mathbf{w'}\, \mathbf{\Delta S_{[N]}} = \sum_{i=1}^{K} w_i\, \Delta S^{i}_{[N]}$$

όπου :

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_k)$: το διάνυσμα των αριθμών των μετοχών κάθε περιουσιακού στοιχείου
- $\mathbf{\Delta S}_{[N]} = (\Delta S^{1}_{[N]}, \Delta S^{2}_{[N]}, ..., \Delta S^{K}_{[N]})$: το τυχαίο διάνυσμα της μεταβολής της αξίας των N ημερών και των K περιουσιακών στοιχείων.
- P η αξία του χαρτοφυλακίου και ΔP η μεταβολή αυτής της αξίας.

Ο υπολογισμός του VaR του χαρτοφυλακίου στηρίζεται στην υπόθεση ότι $\mathbf{\Delta S}_{[N]}$ έχει την εξής από κοινού κατανομή : $\mathbf{\Delta S}_{[N]} \sim MVN_k (\mathbf{\mu}_{[N]}, \mathbf{\Sigma}_{[N]})$,
όπου :

- $\mathbf{\mu}_{[N]} = (\mu^1_{[N]}, \mu^2_{[N]}, \ldots., \mu^K_{[N]})$, το διάνυσμα του μέσου της μεταβολής των N ημερών.
- $\mathbf{\Sigma}_{[N]}$, η μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων των αλλαγών των τιμών :

$$\mathbf{\Sigma}_{[N]} = \begin{bmatrix} (\sigma^1_{[N]})^2 & \sigma^{12}_{[N]} & \cdots & \sigma^{1K}_{[N]} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma^{K1}_{[N]} & & \cdots & \left(\sigma^K_{[N]}\right)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\sigma^1_{[N]})^2 & \rho^{1/2}\sigma^1_{[N]}\sigma^2_{[N]} & \cdots & \rho^{1K}_{[N]}\,\sigma^1_{[N]}\sigma^K_{[N]} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho^{K1}_{[N]}\,\sigma^K_{[N]}\sigma^1_{[N]} & \rho^{K2}_{[N]}\,\sigma^K_{[N]}\sigma^2_{[N]} & \cdots & (\sigma^K_{[N]})^2 \end{bmatrix}$$

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου θα είναι τυχαία μεταβλητή εφόσον είναι γραμμικός συνδυασμός τυχαίων μεταβλητών :

$$\Delta P_{[N]} \sim N (\mu^p_{[N]}, (\sigma^p_{[N]})^2)$$

όπου :

- $\mu^p_{[N]} = \mathbf{w'}\,\mathbf{\mu}_{[N]} = \sum_{i=1}^{K} w_i \mu^i_{[N]}$,
- $(\sigma^p_{[N]})^2 = \mathbf{w'}\,\mathbf{\Sigma}_{[N]}\,\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} w_i\, \rho^{ij}_{[N]}\sigma^i_{[N]}\sigma^j_{[N]}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, λοιπόν, το N-ημερών VaR του χαρτοφυλακίου σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι : $VaR^p_{[N],\alpha} = z_\alpha\, \sigma^p_{[N]} - \mu^p_{[N]}$.

3.5 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ VAR

3.5.1 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Σημαντικό πλεονέκτημα του VaR έναντι άλλων παραδοσιακών μέτρων κινδύνου (όπως «greeks» και «sensitivities»[19]) είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα χρηματοοικονομικά εργαλεία (financial instruments), ακόμη δηλαδή και στα μη γραμμικά με μη κανονικές κατανομές κερδών-απωλειών, και εκφράζεται στην ίδια μονάδα του μέτρου, δηλαδή ως «χαμένα χρήματα».

Περιλαμβάνει μία εκτίμηση των μελλοντικών γεγονότων και επιτρέπει την μετατροπή του κινδύνου του χαρτοφυλακίου σ'έναν μόνο αριθμό. Γι'αυτό το λόγο γίνεται πολύ εύκολα αντιληπτό από μη ειδικούς της αγοράς και έτσι μπορεί να λειτουργήσει πολύ καλά ως μέτρο κινδύνου όχι μόνο μέσα στις διάφορες διαβαθμίσεις μιας εταιρείας αλλά και μεταξύ της εταιρείας και των επενδυτών, των ρυθμιστών και άλλων μετόχων.

Υπολογίζει τον προς τα κάτω κίνδυνο (downside risk) στις κατανομές κερδών-απωλειών των χρηματοοικονομικών προϊόντων σε αντίθεση με το μέτρο της Τυπικής Απόκλισης που επηρεάζεται από υψηλές αποδόσεις.

Είναι ένα αποτελεσματικό σύστημα διαχείρισης κινδύνου γιατί μπορεί να διαχειριστεί πολλά προβλήματα που προκύπτουν λόγω κινδύνου. Για παράδειγμα, μπορεί να θέσει όρια κινδύνου για μεμονωμένους επενδυτές, για τα διάφορα τμήματα μιας εταιρείας αλλά και για όλη την εταιρεία.

Το VaR μπορεί να διευκολύνει αποφάσεις στην κατανομή κεφαλαίων, να δώσει μία ένδειξη του συνολικού απαιτούμενου κεφαλαίου και να βοηθήσει στην απόφαση για το ποιοι κίνδυνοι πρέπει να μειωθούν.

Σημαντικό πλεονέκτημα του VaR είναι ότι συνοδεύεται με μία πιθανότητα, λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα (σε περιόδους όπου η μεταβλητότητα των αγορών αυξάνει, αυξάνεται παράλληλα και ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου), τα διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία σε ένα χαρτοφυλάκιο και το πώς αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους, επιτρέποντας στη διαφοροποίηση να μειώσει τον μετρούμενο κίνδυνο.

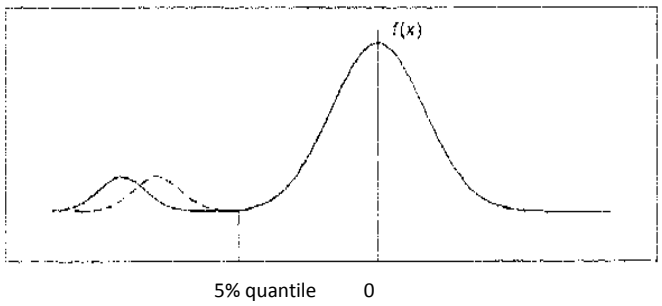
[19]Οι δείκτες ευαισθησίας μετρούν την ευαισθησία μιας μεταβλητής ως προς κάποιο παράγοντα κινδύνου (π.χ. διάρκεια για ομόλογα, beta για μετοχές, delta για παράγωγα).

3.5.2 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

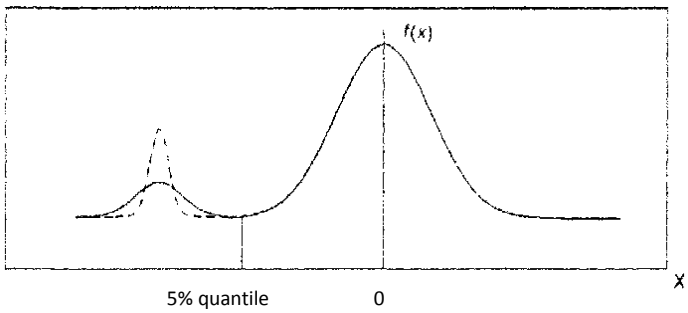
Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα του VaR είναι πως για τον υπολογισμό του βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αγορές συμπεριφέρονται «κανονικά», υπόθεση που συχνά παραβιάζεται καθώς κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στην πράξη αλλά αντίθετα οι αγορές παρουσιάζουν απροσδόκητες αλλαγές στις τιμές των χρηματοοικονομικών προϊόντων με αποτέλεσμα σε τέτοιες περιπτώσεις να μειώνεται η αξία VaR ως μέτρο εκτίμησης και πρόληψης έναντι του κινδύνου.

Δεν μας παρέχει καμία πληροφορία για την κατανομή των αποδόσεων χαρτοφυλακίου πέραν του επιλεγμένου κάθε φορά διαστήματος εμπιστοσύνης. Επομένως δεν είναι δυνατόν ένας επενδυτής να είναι αδιάφορος μεταξύ δύο χαρτοφυλακίων που ενώ έχουν την ίδια αναμενόμενη τιμή και το ίδιο VaR η κατανομή τους διαφέρει ως προς το ότι η μία έχει κοντύτερη ουρά από την άλλη, δηλαδή η μία κατανομή έχει μικρότερες πιθανότητες από την άλλη για μεγαλύτερες απώλειες. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα χαρτοφυλάκιο, έστω Α, με θέση long σε παράγωγα (options), αξίας €1000 με μέγιστο ποσό απώλειας €100 και υποθέτουμε ότι το 5% των χειρότερων περιπτώσεων σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα είναι αυτή η πιθανή απώλεια και ως εκ τούτου το VaR 5% σ'αυτό το χρονικό ορίζοντα θα είναι €100. Και έχουμε και ένα άλλο χαρτοφυλάκιο, Β , αξίας πάλι €1000 αλλά με θέση short σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) που επιτρέπουν ενδεχόμενη απεριόριστη απώλεια. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το χαρτοφυλάκιο Β ώστε το VaR να εξακολουθεί να είναι €100 σ'αυτόν τον χρονικό ορίζοντα που έχουμε ορίσει. Στο χαρτοφυλάκιο Α, με πιθανότητα 5% οι μεγαλύτερες απώλειες είναι €100 ενώ στο χαρτοφυλάκιο Β κυμαίνονται από €100 σε μία αυθαίρετα υψηλή τιμή. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ενώ το χαρτοφυλάκιο Β αντιμετωπίζει μεγαλύτερο κίνδυνο, το VaR 5% μας υποδεικνύει τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια ως δύο χαρτοφυλάκια ίδιου κινδύνου.

Στα παρακάτω δύο γραφήματα παρουσιάζονται καταστάσεις όπου το Value-at-Risk δεν μπορεί να συλλάβει τις διάφορες μορφές της αριστερής ουράς. Το Γράφημα 9 παρουσιάζει μία κατάσταση όπου οι δεσμευμένες μέσες τιμές των αριστερών ουρών (μεγάλες απώλειες) είναι διαφορετικές ενώ οι τιμές των 5% VaR είναι ίδιες. Το Γράφημα 10 παρουσιάζει μία κατάσταση όπου οι δεσμευμένες διακυμάνσεις των αριστερών ουρών (μεγάλες απώλειες) είναι διαφορετικές αλλά οι τιμές των 5% VaR είναι ίδιες:



Γράφημα 9



Γράφημα 10

Επίσης καθώς οι απώλειες υπολογίζονται υποθέτοντας ότι τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να πωληθούν στις τρέχουσες τιμές, αν η επιχείρηση έχει στην κατοχή της μεγάλο αριθμό μη ρευστοποιήσιμων στοιχείων ο υπολογισμός κινδύνου με το VaR μπορεί να υποεκτιμά τις πραγματικές απώλειες αφού τα περιουσιακά αυτά στοιχεία μπορεί να πωληθούν με έκπτωση. Δηλαδή το VaR δεν λαμβάνει υπόψη του κινδύνους όπως ο κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk), ο πολιτικός κίνδυνος (political risk) και ο κίνδυνος που απορρέει από τις ρυθμιστικές αρχές (regulatory risk).

Ένα άλλο μειονέκτημα του VaR που συνδέεται με το γεγονός ότι δεν λαμβάνει υπόψη του το πιθανό μέγεθος απώλειας πέραν του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ότι μπορεί εύκολα κανείς να χειραγωγήσει το VaR αφού στηρίζεται στον υπολογισμό

ενός μόνο ποσοστημορίου. Θα μπορούσε δηλαδή να αυξηθεί σημαντικά ο κίνδυνος στην ουρά της κατανομής με απλώς μόνο με αγοραπωλησίες παραγώγων. (Ακολουθεί σχετικό παράδειγμα στο τέλος του κεφαλαίου).

Το VaR είναι δύσκολο στον έλεγχο και στη βελτιστοποίηση για μη κανονικές κατανομές, γεγονός που μας δυσκολεύει στον υπολογισμό του βέλτιστου χαρτοφυλακίου όταν ελαχιστοποιούμε τον κίνδυνο για δεδομένη απαιτούμενη απόδοση, καθώς το VaR έχει πολλά ακρότατα.

Η εξάρτηση του υπολογισμού του VaR βάσει των ιστορικών στοιχείων[20] αποτελεί πρόβλημα καθώς η «ιστορία» μπορεί να μην είναι ένα καλό εργαλείο για να προβλέψουμε τον κίνδυνο. Για παράδειγμα, αν η εξεταζόμενη χρονική περίοδος είναι σχετικά σταθερή, το VaR που θα υπολογίσουμε θα υποεκτιμά τον ενδεχόμενο κίνδυνο. Ή αντίθετα αν η εξεταζόμενη περίοδος έχει αρκετές διακυμάνσεις, το VaR θα είναι αρκετά υψηλό.

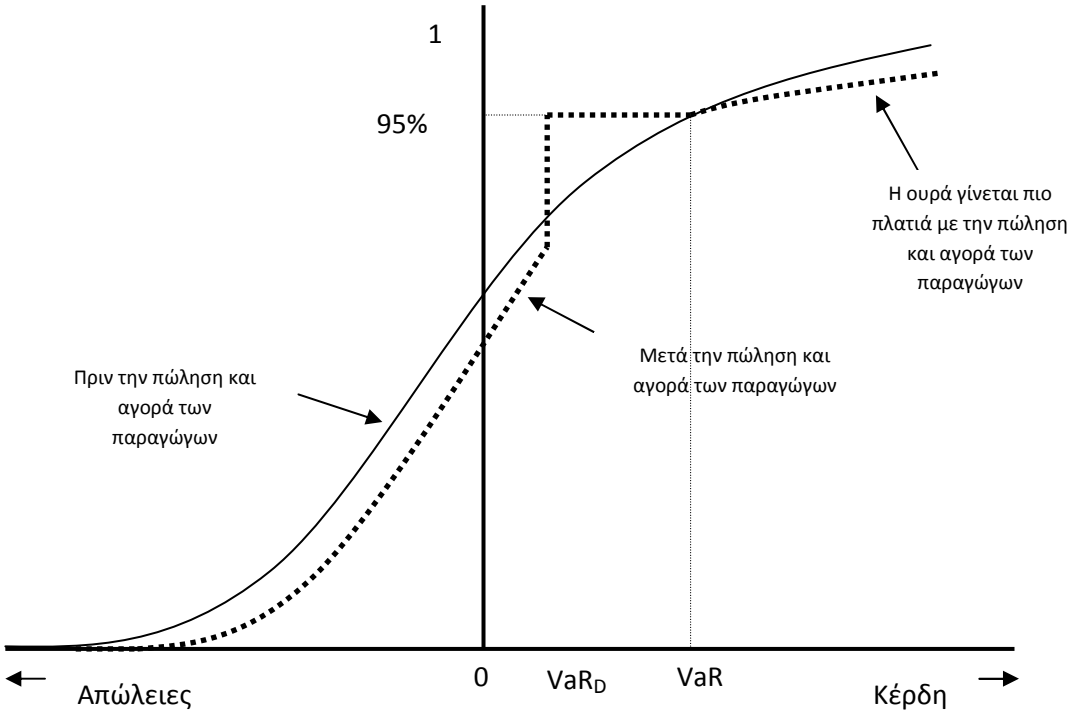
Συμπληρωματική και αναγκαία είναι η μέθοδος stress – testing για την ταυτοποίηση και ποσοτικοποίηση της επίδρασης των ακραίων αλλαγών των τιμών των περιουσιακών στοιχείων, καθώς με το VaR μπορούμε να εκτιμήσουμε μεν την ανώτατη απώλεια χρημάτων αλλά τα αποτελέσματα που θα προκύψουν στην περίπτωση που υπάρξουν ακραίες αλλαγές θα είναι μη ακριβή και αναξιόπιστα.

Τέλος, σημαντικό πρόβλημα του VaR είναι ότι δεν αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου (coherent measure of risk) [21] γιατί παραβιάζει μία από τις υποθέσεις της συνέπειας, αυτή της υποπροσθετικότητας (Subadditivity). Η παραβίαση της συνέπειας αυτής συνεπάγεται ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου μπορεί να αυξήσει τον κίνδυνο.

[20] Τα ιστορικά στοιχεία εκτός από τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης, χρησιμοποιούνται και στον υπολογισμό της μήτρας διακύμανσης- συνδιακύμανσης στην αντίστοιχη μέθοδο, και στη μέθοδο Monte Carlo που αν και δεν είναι απαραίτητο είναι το πιο σύνηθες.
[21] Η έννοια της συνέπειας αναλύεται στο κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα χειραγώγησης του Value-at-Risk[22]

Το παράδειγμα αυτό αποδεικνύει πόσο εύκολη είναι η χειραγώγηση του VaR από τη στιγμή που υπολογίζει μόνο ένα ποσοστημόριο και γίνεται αντιληπτή στο παρακάτω σχήμα με αγοραπωλησίες παραγώγων:



Γράφημα 11

Η σταθερή γραμμή αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση κατανομής Κερδών –Απωλειών (P&L) ενός συγκεκριμένου τίτλου. Το VaR του τίτλου αυτού είναι το VaR_0 καθώς αυτό

[22] Danielsson, J (2001): The emperor has no clothes: limits to risk modeling", Working Paper, Financial Markets Group, London School of Economics.

αντιστοιχεί στο χαμηλότερο ποσοστημόριο της κατανομής αυτής. Είναι δυνατόν να μειώσει κανείς αυτό το VaR σ'ένα αυθαίρετο επίπεδο πουλώντας και αγοράζοντας παράγωγα αυτού του τίτλου. Υποθέτοντας ότι το επιθυμητό επίπεδο είναι VaR_D: Ένας τρόπος για να το πετύχει κανείς είναι να πουλήσει ένα δικαίωμα με τιμή εξάσκησης ακριβώς κάτω από το VaR_0 και ν'αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης ακριβώς πάνω από το VaR_D. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής P&L μετά την αγοραπωλησία των παραγώγων. Το VaR μειώνεται από VaR_0 σε VaR_D, και η πιθανότητα για μεγάλες απώλειες αυξάνεται όπως φαίνεται από τη δεξιά πλευρά του σχήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: VAR ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΠΙΤΗΡΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΑΣ

4.1 Η Επιτροπή της Βασιλείας (Basel Committee)

Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία ιδρύθηκε το 1974 με τη συμμετοχή 13 χωρών (Βέλγιο, Καναδάς, Γαλλία, Γερμανία, Ιταλία, Ιαπωνία, Λουξεμβούργο, Ολλανδία, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία, Ηνωμένο Βασίλειο και ΗΠΑ) και λειτουργεί υπό την αιγίδα της Τράπεζας Διεθνών Διακανονισμών. Κίνητρο για την ίδρυση της επιτροπής αυτής ήταν η άμεση ανάγκη διεθνούς συνεργασίας στον τομέα της τραπεζικής εποπτείας, ανάγκη που έγινε εμφανέστατα έντονη από το 1973 με την κατάργηση του διεθνούς νομισματικού συστήματος σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών του Bretton Woods και τη συνακόλουθη σηματοδότηση μιας περιόδου έντονων διακυμάνσεων και μεταβλητότητας των ισοτιμιών και των επιτοκίων που εξέθεσε τα πιστωτικά ιδρύματα στον άγνωστο μέχρι τότε κίνδυνο των συναλλαγματικών και επιτοκιακών μεταβολών. Η Επιτροπή διατυπώνει εποπτικά πρότυπα και κατευθύνσεις και προτείνει βέλτιστες πρακτικές, με την προσδοκία ότι οι επιμέρους εποπτικές αρχές θα λάβουν μέτρα για την εφαρμογή τους μέσω θεσμικών ή άλλων προσαρμογών, οι οποίες ενδείκνυνται για τα εθνικά τους συστήματα. Η Επιτροπή δεν έχει τη μορφή υπερεθνικής εποπτικής αρχής και τα συμπεράσματα της δεν έχουν δεσμευτική νομική ισχύ. Σκοπός της Επιτροπής, δηλαδή , είναι να διασφαλίσει την οικονομική ορθότητα χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, να διατηρήσει την εμπιστοσύνη των πελατών για την ικανότητα εκπλήρωσης των υποχρεώσεων αυτών των ιδρυμάτων, να εξασφαλίσει την σταθερότητα του χρηματοοικονομικού συστήματος γενικά, και να προστατέψει τους καταθέτες από χρηματοοικονομικές απώλειες, με την προτροπή για χρησιμοποίηση εκσυγχρονισμένων τεχνικών διαχείρισης κινδύνου και εξασφάλισης για την αντιστοιχία των προκείμενων κινδύνων των εργασιών τους με την ικανότητα για αποτελεσματική διαχείριση τους.

4.2 Η Συμφωνία της Βασιλείας I

Τα πιστωτικά ιδρύματα με την παροχή των υπηρεσιών τους στην πελατειακή τους βάση αναλαμβάνουν κινδύνους και χρησιμοποιούν για την προστασία τους τα ίδια κεφάλαια τους. Η μεταβλητότητα των αγορών δημιούργησε την ανάγκη

καθορισμού ενός δείκτη που θα συσχέτιζε τους αναλαμβανόμενους κινδύνους με τα ελάχιστα απαιτούμενα κεφάλαια.

Το πρόβλημα της ελάχιστης κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζών αντιμετωπίστηκε από την Επιτροπή το 1988 με την παρουσίαση ενός συστήματος κεφαλαιακής μέτρησης, το οποίο έγινε γνωστό ως *Συμφωνία της Βασιλείας (Basel Capital Accord) ή Βασιλεία I*. Το σύστημα αυτό εισήγαγε την εφαρμογή ενός πλαισίου μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου[23] των εντός και εκτός ισολογισμού στοιχείων του ενεργητικού (σταθμισμένο ενεργητικό), θέτοντας ταυτόχρονα ένα ελάχιστο όριο απαιτούμενων εποπτικών κεφαλαίων[24] ίσο με 8% του σταθμισμένου ενεργητικού. Δηλαδή, για κάθε 100 ευρώ σταθμισμένο για κινδύνους ενεργητικό απαιτούνταν ελάχιστα κεφάλαια 8 ευρώ. Η εκτίμηση του σταθμισμένου ενεργητικού γίνεται με τη χρήση συντελεστών στάθμισης ανάλογα με την έκθεση του πιστωτικού οργανισμού στον πιστωτικό κίνδυνο ανά κατηγορία οφειλέτη[25].

Γενικά, λοιπόν, έχουμε το ελάχιστο εποπτικό κεφάλαιο (Regulatory Capital) που σχετίζεται με δάνεια ή άλλα εγχρήματα περιουσιακά στοιχεία, εξασφαλίσεις, ή συμβόλαια παραγώγων υπολογίζεται ως :

Εποπτικό Κεφάλαιο=(Συντελεστής Στάθμισης Κινδύνου)x(Έκθεση στον κίνδυνο) x8%.

Τα αποτελέσματα από την επιβολή των κανόνων της Βασιλείας I ήταν σημαντικά και δεν άργησαν να φανούν στο τραπεζικό σύστημα με την αύξηση των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων, καθώς επίσης και με τη δημιουργία εποπτικών συνθηκών ισότιμου ανταγωνισμού.

[23] Το αρχικό πλαίσιο περιλάμβανε τον πιστωτικό κίνδυνο και αργότερα (1996) συμπληρώθηκε και με τους κινδύνους αγοράς, δηλαδή, τον συναλλαγματικό, τον επιτοκιακό και τον κίνδυνο από τους μετοχικούς τίτλους.

[24] Εποπτικά κεφάλαια είναι τα κεφάλαια τα οποία η εποπτική αρχή απαιτεί να τηρούνται ώστε να καλύπτεται η Τράπεζα απέναντι στους διάφορους κινδύνους που αναλαμβάνει. Εκφράζουν κατά κάποιο τρόπο την άποψη της εποπτικής αρχής για το οικονομικό κεφάλαιο της Τράπεζας και ενσωματώνουν τους «φόβους» της εποπτικής αρχής για την ασφάλεια του χρηματοπιστωτικού οργανισμού.

[25] Μικρότερου πιστωτικού κινδύνου είναι οι Κεντρικές Κυβερνήσεις και Κεντρικές Τράπεζες (οι οποίες υπόκεινται στο διαχωρισμό των κρατών ανάλογα με τα στοιχεία του ΟΟΣΑ) ,και στη συνέχεια ακολουθούν τα Πιστωτικά Ιδρύματα και Επιχειρήσεις.

4.3 Βασιλεία ΙΙ

Αν και η επιτυχία της συνθήκης της Βασιλείας Ι για τη δημιουργία μίας ενιαίας μεθοδολογίας αξιολόγησης της κεφαλαιακής επάρκειας ήταν αδιαμφισβήτητη, με την πάροδο του χρόνου διαπιστώθηκε η ανάγκη βελτίωσης των μεθοδολογιών μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, αναγνώρισης και μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου και συστηματικότερης εποπτείας. Ύστερα από διαβουλεύσεις αρκετών ετών η επιτροπή της Βασιλείας δημοσίευσε τον Ιούνιο του 2004 το νέο σύμφωνο κεφαλαιακής επάρκειας, τη λεγόμενη *Βασιλεία ΙΙ*. Οι νέες προτάσεις της Επιτροπής της Βασιλείας βασίζονται σε τρεις πυλώνες:

- Πυλώνας Ι: επιβολή ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων για την κάλυψη των αναλαμβανόμενων κινδύνων και εισαγωγή μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου.
- Πυλώνας ΙΙ: εποπτικές διαδικασίες ανασκόπησης και αξιολόγησης της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων.
- Πυλώνας ΙΙΙ: πειθαρχία της αγοράς μέσω της δημοσιοποίησης στοιχείων σχετικά με τη διάρθρωση των αναλαμβανόμενων κινδύνων και της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Η Βασιλεία ΙΙ πρότεινε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό του ελάχιστα απαιτούμενου κεφαλαίου :

- *Standard Approach (SA)*, η προσέγγιση της οποίας είναι παρόμοια με την πρόταση της Συνθήκης της Βασιλείας, αλλά οι συντελεστές στάθμισης δίνονται ανάλογα με την φερεγγυότητα του πιστωτικού ιδρύματος.
- *Internal Rating Based Approach (IRB),* η οποία διακρίνεται σε Foundation Internal Rating (F-IRB) και Advanced Internal Ratings Based Approach (A-IRB). Με τη μέθοδο αυτή επιτρέπεται στους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς (μόνο σε εκείνους που έχουν τις απαραίτητες ικανότητες για την εφαρμογή την IRB μέθοδο) να εκτιμούν εσωτερικά την ποσότητα κεφαλαίου που χρειάζεται για την κάλυψη των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται. Για την εφαρμογή των εσωτερικών αυτών μοντέλων οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιουδήποτε είδους μοντέλο Value-at- Risk.

4.4 VaR και Βασιλεία II

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη Βασιλεία II οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί πρέπει να υπολογίζουν σε καθημερινή βάση τον κίνδυνο αγοράς που αντιμετωπίζουν χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο Value at Risk. Απαιτείται για τον υπολογισμό του ένα 99% μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης. Επίσης, η ελάχιστη περίοδος διακράτησης πρέπει να είναι 10 ημέρες συναλλαγής. Η επιλογή της περιόδου παρατήρησης των ιστορικών στοιχείων που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του VaR πρέπει να περιοριστεί σε μία ελάχιστη διάρκεια ενός έτους.

Πραγματοποιείται παραβίαση όταν αρνητικές αποδόσεις ξεπερνούν την προβλεπόμενη τιμή του VaR τη χρονική στιγμή t, τέτοια ώστε οι πραγματικές απώλειες ενός χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερες απ'ότι είχε προβλεφθεί. Στο πλαίσιο της Βασιλείας II, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζουν οι πιστωτικοί οργανισμοί, λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των παραβιάσεων και τις ακριβείς προβλέψεις του VaR ως μεταβλητές απόφασης είναι διατυπώνεται ως εξής :

Minimize $DCC_t = \sup\{-(3+k)\overline{VaR_{60}}\ ,\ -VaR_{t-1}\}$[26]

όπου :

- DCC (Daily Capital Charges): καθημερινή «κεφαλαιακή απαίτηση».
- VaR_t: Value-at-Risk για την ημέρα t.
- $VaR_t = \hat{y}_t - z_t\,\hat{\sigma}_t$
- $\hat{y}_t$: εκτιμημένη απόδοση στο χρόνο t
- z_t: 1% (αρνητική) κριτική τιμή της κατανομής των αποδόσεων στο χρόνο t.
- $\hat{\sigma}_t$: εκτίμηση μεταβλητότητας στο χρόνο t.
- $\overline{VaR_{60}}$: η μέση τιμή του VaR για τις προηγούμενες 60 εργάσιμες ημέρες.
- $0 \le k \le 1$:η «τιμωρία» παραβίασης σύμφωνα με τη Βασιλεία II.(πίνακας 1)

Οι επενδυτές μπορούν να επιλέξουν περιουσιακά στοιχεία στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου, αλλά δεν μπορούν να ελέγξουν την καθημερινή απόδοση του χαρτοφυλακίου. Εντούτοις, μπορούν να ελέγξουν την καθημερινή «κεφαλαιακή απαίτηση» με μία βάσιμη εκτίμηση της μεταβλητότητας (σ) που θα επηρεάσει το VaR και το k.

[26] Αναφερόμαστε στο *supremum,* ως το ελάχιστα ανώτερο σύνορο του συνόλου.

Πίνακας 1

Ζώνες «Τιμωρίας» ανάλογα με τις παραβιάσεις

σύμφωνα με τη Βασιλεία II

Ζώνη	Αριθμός Παραβιάσεων*	k
Πράσινη (Green)	0 έως 4	0.00
Κίτρινη (Yellow)	5	0.40
	6	0.50
	7	0.65
	8	0.75
	9	0.85
Κόκκινη (Red)	10+	1.00

* Ο αριθμός των παραβιάσεων αντιστοιχεί στις 250 εργάσιμες ημέρες

Οι τιμές του συντελεστή k που αντιστοιχούν στα κωδικοποιημένα χρώματα είναι σημαντικές γιατί υψηλότερη (χαμηλότερη) απόλυτη τιμή εκτίμησης του VaR θα τείνει να αυξήσει (μειώσει) την καθημερινή απαιτούμενη κεφαλαιακή απαίτηση, με μία χαμηλότερη (υψηλότερη) τιμή του k.

4.5 Stressed Value-at-Risk και Βασιλεία II

Η παγκόσμια οικονομική κρίση που ξεκίνησε από τα μέσα του 2007 προέβαλε ως επιτακτική ανάγκη την τροποποίηση και συμπλήρωση ορισμένων κανόνων της Βασιλείας II (9 Ιουλίου 2009). Μία από τις τροποποιήσεις αφορούσε την εισαγωγή του λεγόμενου *stressed Value-at Risk* (sVaR) καθώς οι υπολογισμοί με το VaR υποεκτιμούσαν σε μεγάλο βαθμό τον πραγματικό κίνδυνο της αγοράς (η οποία τροποποίηση πρέπει να εφαρμοστεί μέχρι τις 31 Δεκεμβρίου 2010). Γι'αυτό, λοιπόν, απαιτείται από τους πιστωτικούς οργανισμούς να υπολογίζουν επιπλέον από το VaR και το sVaR λαμβάνοντας υπόψη περίοδο παρατήρησης ιστορικών στοιχείων που σχετίζονται με σημαντικές απώλειες 1 έτους, βασισμένο σε υπολογισμό του 10 ημερών-VaR του παρόντος χαρτοφυλακίου με μονόπλευρο 99% διάστημα εμπιστοσύνης. Αυτή η προσθήκη του sVaR βοηθάει επίσης στη μείωση της

προκυκλικότητας του ελάχιστα απαιτούμενου κεφαλαίου για την αντιμετώπιση του κινδύνου αγοράς.

Έτσι η «κεφαλαιακή απαίτηση» για τους πιστωτικούς οργανισμούς σε καθημερινή βάση διαμορφώνεται ως εξής :

$$\mathrm{c} = \max\{ VaR_{t-1}, (3+k)\,\overline{sVaR_{60}} \} + \max\{ sVaR_{t-1}, (3+k)\,\overline{sVaR_{60}} \}$$

όπου τώρα το $sVaR_t$ αντιστοιχεί στο stressed VaR της ημέρας t και το $\overline{sVaR_{60}}$ στη μέση τιμή του stressed VaR των προηγούμενων 60 εργάσιμων ημερών.

Σε έρευνα που διεξήχθη από την Επιτροπή της Βασιλείας τον Ιανουάριο του 2009 σε 43 τράπεζες από σύνολο 10 χωρών[27] αποδείχθηκε ότι η εισαγωγή του stressed VaR οδήγησε σε μία γενική αύξηση των κεφαλαιακών απαιτήσεων της τάξης του 4.6%, που μεταφράζεται σε αύξηση των κεφαλαιακών απαιτήσεων λόγω κινδύνου αγοράς της τάξης του 110.8%. Κατά μέσο όρο το stressed VaR αποδείχθηκε 2.6 φορές το VaR.

[27] Αποτελέσματα για τη μέτρηση του stressed VaR κατατέθηκαν από τις 38 από τις 43 τράπεζες. Περαιτέρω ανάλυση βλ.Basel Committee on Banking Supervision – Analysis of trading book quantitative impact study (October 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΝΕΠΗ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (Coherent Measures of Risk)

Για τον ορισμό ενός μέτρου κινδύνου γενικά, προσδιορίζουμε ένα σύνολο αποδοχής, acceptance set (A), δηλαδή το σύνολο των μελλοντικών καθαρών αξιών που είναι αποδεκτές σε έναν ελεγκτή[28] και ορίζουμε ως μέτρο κινδύνου την «απόσταση» μιας συγκεκριμένης θέσης (position) από αυτό το σύνολο. Αυτή η απόσταση είναι το ποσό των χρημάτων που αντιστοιχεί στο ελάχιστο απαιτούμενο κεφάλαιο από τον ρυθμιστή για την αποδοχή της θέσης.

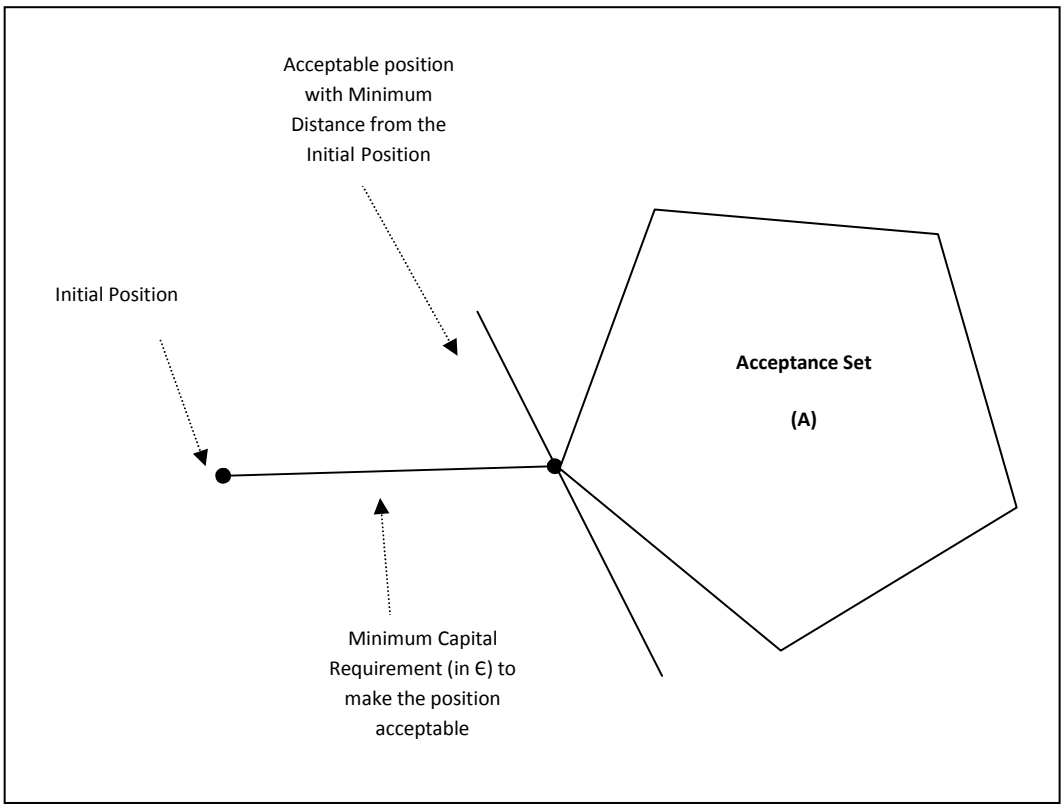
Το σύνολο αποδοχής (A) έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

- Μια θέση με καθαρή τελική αξία που είναι πάντα θετική δεν απαιτεί επιπλέον κεφάλαιο, οπότε και ανήκει στο σύνολο αποδοχής.

- Μία θέση με καθαρή τελική αξία που είναι πάντα αυστηρά αρνητική απαιτεί πάντα επιπλέον κεφάλαιο, οπότε και δεν ανήκει στο σύνολο αποδοχής.

- Το σύνολο αποδοχής είναι κυρτό, δηλαδή αν οι θέσεις α και b ανήκουν στο A τότε ανήκει στο A και ο κυρτός συνδυασμός τους, λα + (1 – λ)b, λ Є (0, 1).

[28] Ο ελεγκτής θα μπορούσε να είναι ένας ρυθμιστής ή μία εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών ή ένας επενδυτικός διαχειριστής.



Γράφημα 12

5.1 Ορισμός και Ιδιότητες Συνέπειας

Έστω ένα σύνολο $\mathbb{X}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Μια συνάρτηση $\rho: F \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται συνεπές μέτρο κινδύνου αν ικανοποιεί το παρακάτω σύνολο ιδιοτήτων (όπου X, Y τυχαίες μεταβλητές αποδόσεων αντίστοιχων χαρτοφυλακίων με συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα T και ρ(.) είναι το μέτρο κινδύνου του υποκείμενου χαρτοφυλακίου) :

1. *Μονοτονικότητα* (Monotonicity): Αν $X,Y \;\; X \leq Y$ τότε $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Σύμφωνα μ'αυτήν την ιδιότητα ένα χαρτοφυλάκιο που παράγει χειρότερο αποτέλεσμα απ'ότι ένα άλλο, το μέτρο κινδύνου του πρέπει να είναι μεγαλύτερο.

2. *Θετική ομογένεια* (Positive Homogeneity): Αν $X \in F$, $\lambda \geq 0$, $\lambda X \in F$ τότε $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$. Σύμφωνα μ'αυτήν την ιδιότητα, αλλάζοντας το μέγεθος του χαρτοφυλακίου κατά λ πρέπει αυτό να έχει ως αποτέλεσμα το μέτρο κινδύνου να πολλαπλασιάζεται κατά λ κι εκείνο. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος διακράτησης 100 μεριδίων μιας συγκεκριμένης μετοχής θα πρέπει να είναι ακριβώς 100 φορές επί τον κίνδυνο διακράτησης ενός μεριδίου αυτής της μετοχής.

3. *Αναλλοίωτο ως προς μεταθέσεις* (translation invariant) : Αν $X \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$. Σύμφωνα μ'αυτήν την ιδιότητα, αν προσθέσουμε μία ποσότητα μετρητών α στο χαρτοφυλάκιο, το μέτρο κινδύνου του πρέπει να μειωθεί κατά την ποσότητα α.

4. *Υποπροσθετικότητα* (subadditivity) : Αν $X, Y, X + Y \in F$, τότε $\rho(X+ Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Δηλαδή, τα μέτρα κινδύνου για δύο χαρτοφυλάκια που έχουν συγχωνευτεί, δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερα από το άθροισμα των κινδύνων τους πριν να συγχωνευτούν. Πρέπει, με άλλα λόγια να λαμβάνεται υπόψη η διαφοροποίηση κινδύνου.
   Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική και η παραβίαση της δημιουργεί πολλά προβλήματα. Για παράδειγμα, αν ένα μέτρο κινδύνου συναλλαγής δεν ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα, μπορεί ένας επενδυτής που επιθυμεί να αναλάβει το σύνολο κινδύνου (X + Y) να δημιουργήσει δύο λογαριασμούς, έναν που υπόκειται στον κίνδυνο X και έναν στον κίνδυνο Y, με αποτέλεσμα να δημιουργήσει την απαίτηση για μικρότερη κεφαλαιακή εξασφάλιση του συνόλου $\{ \rho(X) + \rho(Y) \}$, γεγονός που αποτελεί ένα σημαντικό ζήτημα για την συναλλαγή. Όπως επίσης, ένα άλλο παράδειγμα θα ήταν η περίπτωση όπου μία επιχείρηση που θα έπρεπε να ικανοποιήσει ένα απαιτούμενο επιπλέον κεφάλαιο και δεν θα πληρούσε την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας, θα είχε το κίνητρο να διασπαστεί δημιουργώντας δύο ξεχωριστά συνδεδεμένα μέλη της εταιρείας, γεγονός που αποτελεί ένα ζήτημα για τον ρυθμιστή.

Τα μέτρα κινδύνου θεωρούνται ότι πρέπει να είναι συνεπή ώστε να μην λαμβάνονται υπόψη μόνο τα ποσοστημόρια της κατανομής απωλειών στο

συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, έστω *α*, αλλά και πληροφορίες σχετικά με την αναμενόμενη απώλεια που θα μπορούσε να συμβεί με πιθανότητα μικρότερη του *α*.

Το VaR δεν θεωρείται συνεπές μέτρο κινδύνου καθώς παραβιάζει την τελευταία προαπαιτούμενη υπόθεση της θεωρία της συνέπειας (coherency) των μέτρων κινδύνου, την υποπροσθετικότητα (subadditivity). Δηλαδή, ενώ για μέτρα κινδύνου που ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή η διαφοροποίηση οδηγεί σε μείωση κινδύνου, στην περίπτωση του VaR η διαφοροποίηση μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του ακόμα και όταν ο κίνδυνος των επιμέρους στοιχείων του χαρτοφυλακίου προκαλούνται από αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα.

Η ιδιότητα, λοιπόν, της υποπροσθετικότητας είναι απαραίτητη σε πολλές περιπτώσεις, όπως για επάρκεια κεφαλαιακών απαιτήσεων στην τραπεζικό έλεγχο, και στα προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση αυτή, η έννοια της υποπροσθετικότητας συνδέεται με την κυρτότητα της επιφάνειας κινδύνου που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί στο περιβάλλον των χαρτοφυλακίων. Μόνο στην περίπτωση της κυρτότητας θα υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο σημείο και η διαδικασία ελαχιστοποίησης κινδύνου θα έχει ως αποτέλεσμα μία μοναδική καλώς διαφοροποιημένη άριστη λύση.

Απαραίτητο, λοιπόν, για τον ορισμό ενός μέτρου κινδύνου είναι η συνέπεια (coherency),[29] κάτι το οποίο δεν ικανοποιείται από το VaR καθώς πληροί μόνο τις τρεις από τις τέσσερις ιδιότητες. Εναλλακτικό μέτρο κινδύνου του VaR που ικανοποιεί το σύνολο των παραπάνω ιδιοτήτων της συνέπειας, είναι το Conditional Value-at - Risk (CVaR).[30]

[29] Ο ορισμός της συνέπειας έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς αλλά ο πρώτος που έδωσε την ονομασία αυτή «*coherence*» ήταν ο Artzner. Κριτική στη σημαντικότητα και την εφαρμογή των coherent measures of risk άσκησε ο Holton, υποστηρίζοντας ότι η έρευνα του Artzner προσέφερε μόνο μία «εντυπωσιακή» ονομασία και ήταν αποκλειστικά περιορισμένη σε μέτρα κινδύνου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ορισμένου μόνο τύπου υπολογισμούς κεφαλαίου.

[30] Το CVaR υποστηρίζεται ότι είναι το «καλύτερο» μέτρο κινδύνου αφού εκτός από coherent, αν έχει τα εξής δύο χαρακτηριστικά α.law inavariant (τυχαίες μεταβλητές X,Y που έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής έχουν και τον ίδιο κίνδυνο) και β.comonotonically additive, (η υποπροσθετικότητα γίνεται προσθετικότητα όταν X,Y είναι comotone)είναι και regular (βλ.Gib Basset, Roger Koenker, Gregory Kordas:Pessimistic Portfolio Allocation and Choquet Expected Utility).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: CONDITIONAL OR TAIL VALUE-AT-RISK (CVaR or TVaR)

6.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Το Conditional Value-at-Risk (CVaR) προτάθηκε από τους Rockaffaler και Uryasev ως το πιο δημοφιλές εργαλείο διαχείρισης κινδύνου και ορίζεται ως η αναμενόμενη απώλεια στην απόδοση χρηματοοικονομικού τίτλου δεδομένου ότι αυτή η απώλεια είναι μεγαλύτερη του επιπέδου του VaR (για τυχαίες μεταβλητές με συνεχή συνάρτηση κατανομής).

Έστω *X* τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση $F_x(z) = P\{ X \leq z\}$. Η μεταβλητή *X* θεωρητικά μπορεί να έχει έννοια κέρδους ή απώλειας. Εδώ την θεωρούμε με την έννοια της απώλειας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 :

Το CVaR, λοιπόν, της μεταβλητής *X* σε επίπεδο εμπιστοσύνης α Є [0,1] της γενικευμένης α-ουράς κατανομής (generalized α-tail distribution) είναι:

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_x^a(z),$$

όπου $$F_x^a(z) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{όταν } z < VARa(X) \\ \frac{Fx(z) - a}{1-a} & , \quad \text{όταν } z \geq VARa(X) \end{cases}$$

Ένας πληρέστερος ορισμός σύμφωνα και με την αντίστοιχη ανάλυση που έγινε για το VaR, είναι ο παρακάτω :

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 :

$\mathrm{CVaR}_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h}) = w_t' \mu_{t,t+h} - 1/\alpha \; E(w_t' r_{t,t+h} \, 1 \, w_t' r_{t,t+h} \leq q_{w' rt,t+h}(\alpha))$

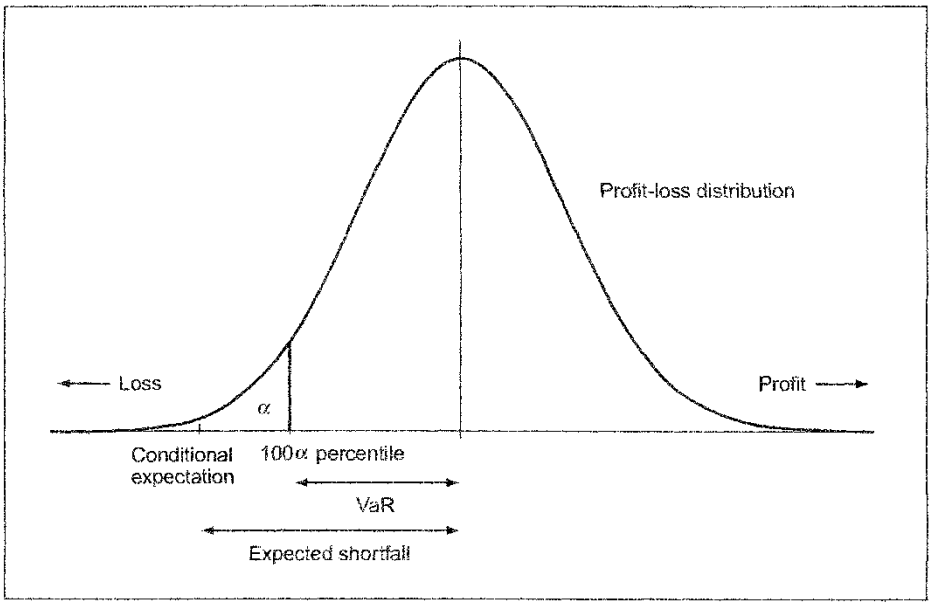
όπου το διάνυσμα 1 αντιστοιχεί στο εξής n-διάσταυο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό το CVaR ορίζεται ως η αναμενόμενη απώλεια στην απόδοση του συγκεκριμένου χρηματοοικονομικού τίτλου στην περίπτωση που συμβούν τα γεγονότα τα οποία απεικονίζονται στο διάστημα (-∞ , - $VaR_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h})$).

Σημειώνεται πως τυποποιώντας ο παραπάνω ορισμός διαμορφώνεται ως εξής :

$CVaR_{t+h,\alpha}(w_t' r_{t,t+h}) = -1/\alpha\ E(z_{t,t+h} 1\ z_{t,t+h} \leq F^{-1}_{zt,t+h}(\alpha))\ (w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}$

όπου η τυχαία τυποποιημένη μεταβλητή $z_{t,t+h} = \frac{w_t' r_{t,t+h} - w_t' \mu_{t,t+h}}{(w_t' H_{t,t+h} w_t)^{1/2}}$ και $F_{zt,t+h}$ η συνάρτηση κατανομής της.



Γράφημα 13

Για κατανομές με πιθανές ασυνέχειες, ο ορισμός είναι πιο περίπλοκος και μπορεί να διαφέρει από τις αυτές ποσότητες που ονομάζονται $CVaR^+$ (upper CVaR ή αλλιώς mean shortfall) και $CVaR^-$ (lower CVaR ή αλλιώς tail VaR) . Γενικά ισχύει, $CVaR^- \leq CVaR \leq CVaR^+$, με την ισότητα να ισχύει όταν η συνάρτηση κατανομής δεν

παρουσιάζει ασυνέχεια στο επίπεδο του VaR. Το CVaR μπορεί να θεωρηθεί ως σταθμικός μέσος του VaR και του $CVaR^{+}$, με τις σταθμίσεις (weights) να εξαρτώνται από το υποκείμενο κάθε φορά χαρτοφυλάκιο. Σημειώνεται ότι ενώ το CVaR είναι συνεπές, το $CVaR^{-}$ και το $CVaR^{+}$ δεν είναι.

6.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ CVaR

6.2.1 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Το Conditional Value-at-Risk ή Expected Shortfall (CVaR or ES) υπολογίζει τα αποτελέσματα που μπορούν να προκαλέσουν τις χειρότερες απώλειες. Για παράδειγμα αν L είναι η απώλεια τότε ο περιορισμός CVaR(L) ≤ $\bar{L}$ εξασφαλίζει ότι η μέση τιμή των (1-α) % μεγαλύτερων απωλειών δεν θα υπερέχει το επίπεδο του $\bar{L}$.

Ορίζοντας το CVaRα(X) για όλα τα επίπεδα εμπιστοσύνης α που ανήκουν στο διάστημα (0,1), προσδιορίζεται ακριβώς η κατανομή του X. Επίσης το CVaRα έχει το χαρακτηριστικό της μονοτονικότητας ως προς το α, όσο μικρότερο είναι αυτό το επίπεδο α, τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος.

Εφαρμόζεται και σε μη κανονικές κατανομές (μη συμμετρικές) κερδών-απωλειών των χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του μέτρου κινδύνου είναι ότι χαρακτηρίζεται από ελκυστικές μαθηματικές ιδιότητες και ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτιστοποίηση πολύ μεγάλων προβλημάτων με γρήγορους και σταθερούς αλγόριθμους.

Είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, καθώς ικανοποιεί την υπόθεση της υποπροσθετικότητας με αποτέλεσμα την καλύτερη εν γένει διαχείριση του κινδύνου.

Το CVaR είναι συνεχές όσον αφορά το επίπεδο εμπιστοσύνης α. Δηλαδή, ανεξάρτητα από την κατανομή του υποκείμενου τίτλου, μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι ο κίνδυνος που έχουμε υπολογίσει με το CVaRα δεν θ'αλλάξει

δραματικά όταν υπάρξει μια μικρή αλλαγή στο επίπεδο εμπιστοσύνης κάποιων έστω λίγων βαθμών.

Το CVaR ενός κυρτού συνδυασμού τυχαίων μεταβλητών CVaRα($w_1X_1 + \ldots + w_nX_n$) είναι κυρτή συνάρτηση των σταθμίσεων ($w_1, \ldots, w_n$) που στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου αντιπροσωπεύουν τις θέσεις (positions) του χαρτοφυλακίου.

Η βελτιστοποίηση με το CVaR αντιστοιχεί στη βελτιστοποίηση με το VaR και παράγει τα ίδια αποτελέσματα για κανονικές ή ελλειπτικές κατανομές.

6.2.2 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του CVaR είναι η ευαισθησία του σε λάθη εκτίμησης. Εάν δεν υπάρχει ένα καλό μοντέλο για την εκτίμηση της ουράς της κατανομής μπορεί να μας οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα. Για τη σωστή εκτίμηση του μοντέλου χρειάζονται και επαρκή ιστορικά δεδομένα και όταν αυτά δεν είναι διαθέσιμα, ειδικά όσον αφορά την ουρά της κατανομής, δεν πρέπει να στηριζόμαστε στο μέτρο αυτό.

Ακόμα, το CVaR μπορεί να μην έχει καλή εφαρμογή όταν η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου γίνεται με περιορισμένο σύνολο σεναρίων. Τα ιστορικά δεδομένα δεν θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα, εν αντιθέσει θα οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα, αν τα περιουσιακά στοιχεία παρουσιάζουν χαρακτηριστικό «της επιστροφής στη μέση τιμή» (reversion to the mean).[31]

6.3 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ VaR και CVaR

Το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται τελικά για την εκτίμηση του κινδύνου και τις συνακόλουθες αποφάσεις που αφορά η εκτίμηση αυτή, εξαρτάται σε κύριο λόγο από τους αντικειμενικούς στόχους που θέτουμε.

Για παράδειγμα, ένας διαχειριστής κεφαλαίου μπορεί να προτιμάει το VaR από το CVaR, γιατί μπορεί να επιθυμεί υψηλό μη ελεγχόμενο κίνδυνο, καθώς το VaR

[31] Mean reversion είναι η τάση για μία στοχαστική διαδικασία να παραμείνει κοντά, ή να επιστρέψει μακροπρόθεσμα στη μέση τιμή.

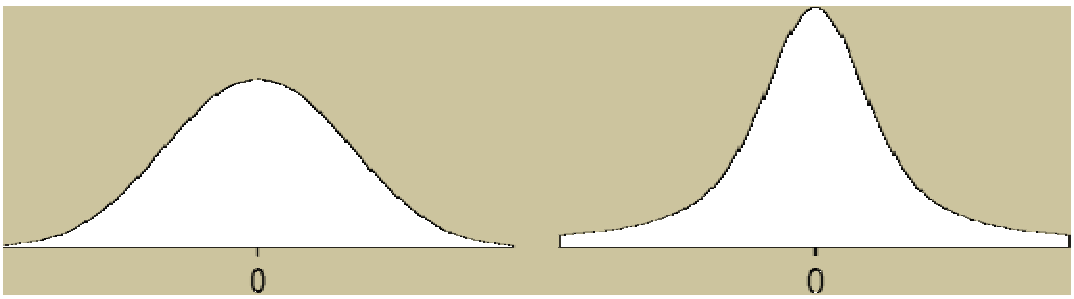
δεν είναι τόσο περιοριστικό όσο το CVaR στο ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης. Το σκεπτικό αυτό υποκινείται από το γεγονός πως γενικά ο διαχειριστής σε περίπτωση μιας μεγάλης αποτυχίας δεν πρόκειται να χάσει δικά του χρήματα αλλά χρήματα της εταιρείας, και έτσι, λοιπόν, η πιθανή ζημία που μπορεί να υποστεί θα είναι μία ενδεχόμενη απόλυση του. Από την άλλη, μία εταιρεία πιθανότατα να προτιμά το CVaR, καθώς θέλει ν'αποφύγει ακραίες μεγάλες απώλειες και γι'αυτό πρέπει να τις ελέγξει. Χαρακτηριστική, ακόμα, είναι και η περίπτωση ενός διευθυντικού συμβουλίου μιας εταιρείας που μπορεί να προτιμά να χρησιμοποιεί το VaR για την παρουσίαση του κινδύνου στους μετόχους και τους ρυθμιστές καθώς αντιπροσωπεύει ένα μικρότερο νούμερο από το CVaR στο ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης. Από την άλλη, μπορεί να χρησιμοποιείται το CVaR για την εκτίμηση κινδύνου εσωτερικά στην εταιρεία, οπότε και δημιουργείται ασύμμετρη πληροφόρηση μεταξύ των διάφορων εμπλεκομένων με ό,τι αυτό συνεπάγεται.

Όταν, λοιπόν, αποφασίζουμε για το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιούμε, πέραν από την πασιφανή λογική του ότι σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του ενδεχόμενου κινδύνου που διατρέχει ένα χαρτοφυλάκιο, σημαντικό είναι να προσδιορίσουμε και το σκοπό και τους στόχους που έχουμε γενικά όταν αποφασίζουμε να προσδιορίσουμε τον εν λόγω κίνδυνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

7.1 ΠΑΧΙΕΣ ΟΥΡΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ (Non normality - Fat tails)

Οι κατανομές των αποδόσεων των περιουσιακών των χρηματοοικονομικών στοιχείων παρουσιάζουν απόκλιση από τη μορφή της κανονικής κατανομής. Δηλαδή, η κατανομή των αλλαγών των τιμών δεν είναι συμμετρική γύρω από τη μέσο της και ούτε οι αλλάγες αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η μη κανονικότητα της κατανομής περιγράφεται κυρίως από την κυρτότητα και την ασυμμετρία[32]. Απ'τα δύο αυτά χαρακτηριστικά, η κυρτότητα (kurtosis) η οποία χαρακτηρίζεται από τη μορφή της κατανομής που είναι υψηλότερη και έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή, είναι το πιο σύνηθες φαινόμενο στις τιμές των χρηματοοικονομικών στοιχείων (συγκεκριμένα βαθμού κύρτωσης μεγαλύτερου του 3). Δηλαδή οι αποδόσεις των στοιχείων αντιπροσωπεύονται καλύτερα από κατανομές όπως η t-student ή η Generalized Error distribution, οι οποίες είναι λεπτόκυρτες, υποδηλώνοντας πως υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης ακραίων τιμών σ'αυτές απ'ότι στην κανονική κατανομή. Οι παχιές ουρές έχουν αντίκτυπο στη μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων και συνακολούθως στον υπολογισμό του VaR.



Γράφημα 14

[32] Το φαινόμενο της ασυμμετρίας (Skewness) το οποίο περιγράφει το φαινόμενο που η κατανομή δεν είναι συμμετρική γύρω από το μέσο δεν μας απασχολεί σ' αυτό το σημείο γιατί μπορεί να οφείλεται σε παρατεταμένη κίνηση της τιμής των χρηματοοικονομικών στοιχείων προς τη μια κατεύθυνση, αποτελεί προσωρινό φαινόμενο και όχι κύριο χαρακτηριστικό των στοιχείων και λαμβάνεται υπόψη από το VaR, ή μπορεί να οφείλεται σε προσωρινά κυμαινόμενη αγορά, που σ' αυτήν την περίπτωση διορθώνεται αφαιρώντας την από την κατανομή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού στοιχείου καταλήγοντας σε κατανομή με μέσο μηδέν.

7.2 Το Φαινόμενο της Χρηματοοικονομικής Μόχλευσης (Leverage Effect)

Το φαινόμενο του leverage effect αφορά την αρνητική συσχέτιση μεταξύ της απόδοσης της τρέχουσας περιόδου και της μελλοντικής διακύμανσης. Πρώτος ο Black (1976)[33] έδωσε την ονομασία του φαινομένου αυτού με το σκεπτικό ότι εφόσον παρατηρείται μεγάλη πτώση της αξίας μιας μετοχής, η μόχλευση της επιχείρησης θα αυξηθεί αυξάνοντας την αναλογία χρέους/ίδια κεφάλαια (debt-to-equity ratio) , αυξάνοντας έτσι την αβεβαιότητα και τον κίνδυνο. Ουσιαστικά, λοιπόν, μια πτώση της απόδοσης της μετοχής οδηγεί στη δημιουργία αρνητικών προσδοκιών για την μετέπειτα πορεία της απόδοσης της μετοχής με αποτέλεσμα την μελλοντική αύξηση της μεταβλητότητας της απόδοσης του τίτλου. Σε αντίθεση, μία αύξηση της απόδοσης του τίτλου δημιουργεί θετικό κλίμα για την πορεία του και επομένως αυτό οδηγεί σε μικρότερη μελλοντική διακύμανση. Έχουν αναζητηθεί πολλοί οικονομετρικοί τρόποι για την περιγραφή αυτής της ασυμμετρίας λόγω του ότι το χαρακτηριστικό αυτό δεν το συλλαμβάνουν όλα τα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας. Ένα από αυτά είναι το μοντέλο EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) που συλλαμβάνει ακριβώς αυτήν την αντίστροφη σχέση.

7.3 Φαινόμενο Συσπείρωσης της Μεταβλητότητας (Volatility Clustering Phenomenon)

Συχνά παρατηρείται η συμπεριφορά της απόδοσης ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου να μην είναι σταθερή στο χρόνο. Εν αντιθέσει παρατηρείται ότι η διακύμανση μεταβάλλεται στο χρόνο και έτσι μπορεί να υπάρξουν περίοδοι όπου η μεταβλητότητα των αποδόσεων είναι μεγαλύτερη σε σχέση με άλλες περιόδους. Το φαινόμενο αυτό της ομαδοποίησης της διακύμανσης διαφαίνεται στην περίπτωση που μεγάλη/μικρή μεταβολή της διακύμανσης διαδέχεται μια ανάλογα μεγάλη/μικρή μεταβολή, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της μεταβολής, και έτσι δημιουργούνται «ομάδες» αλλαγών της διακύμανσης στο χρόνο. Πιθανή εξήγηση γι'αυτό είναι ότι τα νέα έχουν άμεση επίδραση στην απόδοση της ημέρας της ανακοίνωσης, η οποία βαίνει μειούμενη τις επόμενες ημέρες. Τα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας

[33] Black F., Studies of stock market volatility changes, (1976).

συλλαμβάνουν το φαινόμενο αυτό και μοντελοποιώντας την υπό συνθήκη διακύμανση και μπορούν να προβλέψουν τη μελλοντική υπό συνθήκη διακύμανση.

7.4 Μέρες μη διαπραγμάτευσης (non trading days) και άλλα χαρακτηριστικά

° Υπάρχουν μέρες κατά τη διάρκεια του χρόνου που δεν πραγματοποιούνται διαπραγματεύσεις τίτλων καθώς οι χρηματιστηριακές αγορές παραμένουν κλειστές, όπως αργίες, σαββατοκύριακα, ημέρες διακοπών (*non trading days*). Το φαινόμενο που διακρίνεται είναι ότι μετά από αυτές τις ημέρες παρατηρείται έντονη διακύμανση συγκριτικά με τις υπόλοιπες ημέρες. Η αιτία γι'αυτό το γεγονός είναι ότι κατά τη διάρκεια αυτών των μη διαπραγματεύσιμων ημερών συσσωρεύονται πληροφορίες οι οποίες διαχέονται πολύ πιο γρήγορα όταν τελικά ανοίγουν οι χρηματιστηριακές αγορές και έρχονται στην επιφάνεια.

° Άλλο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό είναι η σύνδεση της διακύμανσης με την «άφιξη» πληροφοριών (*information arrivals*) ή τα λεγόμενα προβλέψιμα γεγονότα (*forecastable events*) . Οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων τυπικά υπολογίζονται και μοντελοποιούνται με δειγματικές παρατηρήσεις με σταθερή συχνότητα, όπως ημερήσιες, εβδομαδιαίες ή μηνιαίες παρατηρήσεις. Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί[34] άμεση σύνδεση της απόδοσης των στοιχείων και της ροής της πληροφορίας η οποία μάλιστα δεν παρουσιάζεται σε ενιαίο και προκαθορισμένο χρόνο και πολύ συχνά δε γίνεται άμεσα αντιληπτή. Χαρακτηριστικά παρατηρείται άμεση σύνδεση μεταξύ της διακύμανσης και της ροής πληροφοριών, όπως της διαπραγματεύσιμης ποσότητας των χρηματοοικονομικών στοιχείων, της διαμόρφωσης των τιμών, και των μελλοντικών προβλεπόμενων γεγονότων όπως η ανακοίνωση διανομής μερισμάτων.[35]

° Η διακύμανση της αγοράς (*market volatility*) έχει επίδραση σε καθεμία από τις επιμέρους χρηματοοικονομικές αγορές που την αποτελούν. Όσο περισσότερο

[34] Mandelbrot and Taylor (1967), Clark (1973)
[35] Easley and O' Hara (1992)

ευμετάβλητη είναι η τιμή διαπραγμάτευσης ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου, τόσο περισσότερο επηρεάζεται η διακύμανση από τη μεταβλητότητα της αγοράς.

° Συμμεταβολή της διακύμανσης (*volatility comovements*). Παρατηρείται μία κίνηση στη διακύμανση περιουσιακών στοιχείων η οποία ακολουθεί την κίνηση στη διακύμανση άλλων περιουσιακών στοιχείων. Για παράδειγμα, μπορεί να δούμε το φαινόμενο να αυξάνει η διακύμανση σε κάποιους δείκτες και να αυξάνει και σε άλλους. Και αυτό μπορεί να μην παρατηρείται μόνο με τη διακύμανση χρηματοοικονομικών στοιχείων αλλά και με τις διακυμάνσεις διάφορων αγορών. Οι λόγοι αυτής της συμμεταβολής μπορεί να είναι, όπως η ύπαρξη κοινών χαρακτηριστικών ή κοινών τάσεων.

° Χαρακτηριστικό, ακόμα, είναι η «μακρόχρονη μνήμη» και η «μονιμότητα» των διαταραχών(shocks) (*long memory and persistence*) που παρουσιάζουν οι σειρές των αλλαγών τιμών των χρηματοοικονομικών στοιχείων. Δηλαδή, πολλά χρηματοοικονομικά στοιχεία, όπως τα επιτόκια, παρουσιάζουν το φαινόμενο «mean reversion», που αναφέρεται στο γεγονός ότι η τιμή τους θα διαφέρει σχετικά από κάποια πιο μακρόχρονη τιμή στην οποία κάποια στιγμή, ίσως και πολύ μακροχρόνια, να επιστρέψουν. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζει και τη συμπεριφορά της διακύμανσης, όπως και αυτό της «persistence», που περιγράφει το πόσο μια μόνο αλλαγή της τιμής θα επηρεάσει τις μελλοντικές προβλέψεις της μεταβλητότητας (είναι μια σχέση ανάλογη).

Η σύλληψη και η ερμηνεία των παραπάνω χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών δεδομένων αποτελεί κριτήριο για την καταλληλότητα των μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας για την επιτυχή πρόβλεψη της μελλοντικής διακύμανσης και κατ’επέκταση του υπολογισμού των μέτρων κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

8.1 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αβεβαιότητα και ο κίνδυνος κατέχουν κυρίαρχο ρόλο στην οικονομική και χρηματοοικονομική θεωρία. Αυτή η αβεβαιότητα εκφράζεται με την παραβίαση της υπόθεσης των κλασικών – συμβατικών οικονομετρικών μοντέλων που κυριαρχούσαν μέχρι τη δεκαετία του 1980, και την συνεπακόλουθη υιοθέτηση της υπόθεσης της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας, δηλαδή της υπόθεσης των χρονικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων των οικονομικών και χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών. Αναγκαία καθίσταται, λοιπόν, η παραδοχή της μη σταθερής διακύμανσης στο χρόνο (φαινόμενο ετεροσκεδαστικότητας) για την εκτίμηση κινδύνου, καθώς το να υιοθετήσουμε το αντίθετο (περίπτωση ομοσκεδαστικότητας) μπορεί να οδηγήσει σε πολύ παραπλανητικά αποτελέσματα. Σ'αυτήν την κατεύθυνση κινήθηκε πρώτος ο Engle (1982) προτείνοντας το μοντέλο χρονικά μεταβαλλόμενης διακύμανσης τύπου ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Και αργότερα ο Bollerslev (1986) παρουσιάζοντας το μοντέλο GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity).

Στην περίπτωση, λοιπόν, ενός χαρτοφυλακίου, για να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο, και την συνακόλουθη ελαχιστοποίηση του ώστε να καταλήξουμε σ'ένα βέλτιστο από άποψη κινδύνου χαρτοφυλάκιο, απαιτείται η εκτίμηση της διακύμανσης της απόδοσης του. Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου θα εξαρτάται από τη διακύμανση της απόδοσης καθένα περιουσιακού στοιχείου. Άρα χρειάζεται να εκτιμήσουμε τις διακυμάνσεις των αποδόσεων όλων των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Όμως αυτά τα στοιχεία μπορεί και να σχετίζονται μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα αν η συνδιακύμανση μεταξύ δύο στοιχείων είναι αρνητική, τότε όταν ένα στοιχείο έχει θετική απόδοση το άλλο έχει αρνητική, και το αντίστροφο. Επομένως απαραίτητη είναι και η εκτίμηση της συνδιακύμανσης τους. Έχοντας λοιπόν στη διάθεση μας τις εκτιμήσεις των διακυμάνσεων των περιουσιακών στοιχείων και των συνδιακυμάνσεων μεταξύ τους μπορούμε να εκτιμήσουμε την διακύμανση όλου του χαρτοφυλακίου και να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο.

Για να ελαχιστοποιήσουμε, λοιπόν, τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου δεδομένου κάποιας απαιτούμενης απόδοσης που θέτουμε, και να προσδιορίσουμε έτσι την αναλογία (τα βάρη – weights) των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή των αποδόσεων των στοιχείων αυτών, και το πρόβλημα έγκειται στο ότι δεν γνωρίζουμε την κατανομή αυτή καθώς αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας. Για αυτό το σκοπό παρουσιάζονται στη συνέχεια γενικά ορισμένα υποδείγματα για τη μοντελοποίηση της δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας και τα αντίστοιχα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τους με βάσει τη σύλληψη και την ερμηνεία των βασικών χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών στοιχείων.

8.1.1 **ARCH** (**A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity)

Μία διαδικασία ARCH μπορεί να περιγραφεί ως εξής :
Έστω y_t = ln (P_t/P_{t-1}) η απόδοση ενός στοιχείου από τον χρόνο t-1 στο χρόνο t. Υποθέτουμε ότι η χρονολογική σειρά yt αποτελείται από δύο μέρη, το προβλέψιμο μέρος και το μη προβλέψιμο, $y_t = E(y_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t$, όπου I_{t-1} είναι το σύνολο πληροφορίας μέχρι τη χρονική στιγμή t-1, E(▪) είναι ο δεσμευμένος μέσος και ε_t είναι το μη προβλέψιμο κομμάτι (διαταρακτικός όρος ή σφάλμα) που μπορεί να περιγραφεί ως : $\varepsilon_t = z_t\sigma_t$, όπου z_t είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με μέσο μηδέν και διακύμανση μονάδα, δηλαδή z_t ~iid (0,1) .
Η διαδικασία ARCH (q) εκφράζει τη δεσμευμένη διακύμανση (σ^2_t ή h_t) ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων διαταρακτικών όρων :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i u_{t-1}^2 \quad .$$

Για να είναι θετική η δεσμευμένη διακύμανση πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες : $\alpha_0 > 0$ και $a_i \geq 0$.
Το μοντέλο αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει στη δεσμευμένη διακύμανση να μεταβάλλεται στο χρόνο ως συνάρτηση των τετραγώνων των παρελθοντικών σφαλμάτων αφήνοντας τη μη δεσμευμένη διακύμανση σταθερή αλλά απαιτείται η γενίκευση του λόγω της δυσκολίας εκτίμησης πολλών παραμέτρων, των περιορισμών θετικότητας και της μη σύλληψης του συνόλου των χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών στοιχείων.

8.1.2 GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)

Γενίκευση των μοντέλων ARCH είναι το μοντέλο GARCH (p,q) που εκφράζει τη δεσμευμένη διακύμανση στο χρόνο t όχι μόνο ως συνάρτηση των τετραγώνων των σφαλμάτων των προηγούμενων περιόδων αλλά και των προηγούμενων τιμών της διακύμανσης κάτι που είναι προτιμότερο καθώς είναι λογικό το μέτρο της τρέχουσας διακύμανσης να εξαρτάται και από προηγούμενες τιμές της ώστε να ενσωματώνει και το στοιχείο του κινδύνου.
Ένα GARCH (p,q) μοντέλο, όπου p είναι η τάξη των όρων GARCH και q είναι η τάξη των όρων ARCH, μπορεί να γραφεί ως :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \, u_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_j \, h_{t-j}$$

όπου πρέπει $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ για κάθε i = 1,…,q και $b_j \geq 0$ για κάθε j = 1,…,p ώστε η διακύμανση να παίρνει πραγματικές και θετικές τιμές.

Για p = 0, η διαδικασία μειώνεται σε μία ARCH(q) διαδικασία, ενώ για p = q = 0 η { ut } είναι απλώς λευκός θόρυβος. Παρατηρώντας ειδικά ότι το μοντέλο GARCH (1,1) μπορεί να γραφεί ως ένα μοντέλο άπειρων όρων p, ARCH(p)[36], μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα «οικονομικό» μοντέλο, με λίγες παραμέτρους που ερμηνεύει σχετικά καλά τα δεδομένα καθώς συλλαμβάνει παράλληλα πολλά από τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών σειρών, όπως το φαινόμενο των fat tails (σε ορισμένο βαθμό, για κατανομές με κύρτωση μεγαλύτερη του 3) volatility clustering, mean reversion, persistence.

Το μοντέλο GARCH είναι εύκολο στο να εκτιμηθεί και να ελέγχει αν σκεφτούμε πως μπορεί να γραφεί ως ένα ARMA υπόδειγμα στα τετράγωνα των καταλοίπων.[37] Αποδεικνύεται εύκολα αν πάρουμε ως παράδειγμα ένα GARCH(1,1) :
$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + b_1 h_{t-1}$.
Θεωρούμε τη σχέση : $u^2_t = u^2_t$, προσθαφαιρούμε τον όρο h_t ,

$\Rightarrow u^2_t = u^2_t + h_t - h_t$ θέτουμε $v_t = u^2_t - h_t$,

$\Rightarrow u^2_t = v_t + h_t$ και αντικαθιστώντας τη σχέση h_t ,

$\Rightarrow u^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + b_1 h_{t-1} + v_t$

[36] Βλ.Applied Econometrics , Asteriou-Hall, (2007).
[37] Συνδυάζει χαρακτηριστικά του AR (Autoregressive process) και του MA (Moving Average process). Βλ.Chris Brooks. Βοηθάει στην αναγνώριση υποδείγματος και της συνακόλουθης μοντελοποίησης του αναγνωρίζοντας χαρακτηριστικά του autocorrelation function και του partial autocorrelation function.

Καταλήγοντας σε μία σχέση ARMA (1,1) στα τετράγωνα των σφαλμάτων.
Η εκτίμηση ενός GARCH μοντέλου μπορεί να γίνει όπως και στην περίπτωση του ARCH υποδείγματος με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.[38]

Παρόλο όμως τα θετικά χαρακτηριστικά, τα υποδείγματα GARCH έχουν ορισμένα μειονεκτήματα : δεν συλλαμβάνουν τη σχέση ασυμμετρίας μεταξύ της τωρινής απόδοσης και της μελλοντικής διακύμανσης, τον αντίκτυπο δηλαδή που έχουν τα «καλά» και «κακά» νέα στη μελλοντική μεταβλητότητα (leverage effect) αλλά αντίθετα βλέπουμε ότι εξαρτάται μόνο από το μέγεθος των u_t και όχι από το πρόσημο τους, όπως επίσης περιλαμβάνουν περιορισμούς στις παραμέτρους και ανισότητες που συχνά παραβιάζονται από τους εκτιμώμενους συντελεστές και που περιορίζουν τη δυναμική της δεσμευμένης διακύμανσης.

8.1.3 ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

° Έχουν προταθεί και άλλα μοντέλα GARCH ώστε ν'αντιμετωπιστούν οι παραπάνω περιορισμοί, όπως το μοντέλο **TS-GARCH (Taylor-Schwert GARCH)**. Το μοντέλο TS-GARCH**(**p,q) του Taylor (1986) και του Schwert (1989) που σχετίζει την δεσμευμένη τυπική απόκλιση με την απόλυτη τιμή προηγούμενων περιόδων διαταρακτικών όρων και τυπικών αποκλίσεων, ώστε να περιορίσει τον αντίκτυπο μεγάλων, σε απόλυτη έννοια, παρατηρήσεων σε σύγκριση με το παραδοσιακό μοντέλο GARCH (p,q). Πολλές φορές αναφέρεται και ως Absolute Value GARCH ή AVGARCH (ή απλά AGARCH) :

$$\sqrt{h} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, |\varepsilon_{t-1}| + \sum_{j=1}^{p} b_j \sqrt{h}_{t-1}$$

° Ένα άλλο μοντέλο είναι το **TGARCH (The threshold GARCH)**. Το μοντέλο TGARCH(p,q) προτάθηκε από τον Zakoian(1990) και επεκτείνει το μοντέλο TS-GARCH**(**p,q) ώστε να επιτρέψει στην δεσμευμένη τυπική απόκλιση να εξαρτάται από το πρόσημο των παρελθοντικών διαταρακτικών όρων. Το μοντέλο αυτό, έχει σκοπό να υπολογίσει στην εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την ασυμμετρία σε σχέση με αρνητικές και θετικές διαταραχές (shocks) και, με την μετέπειτα μελέτη των Glosten, Jaganathan και Runkle (1993) το υπόδειγμα παίρνει την παρακάτω μορφή

[38] Davidson and MacKinnon (1997).

εισάγοντας στην εξίσωση της διακύμανσης μία πολλαπλασιαστική ψευδομεταβλητή για να ελεγχθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά όταν οι διαταραχές είναι αρνητικές :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}(\alpha_\iota + \gamma_i\, d_{t-i}\,)u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j\, h_{t-j}$$

όπου για την ψευδομεταβλητή d_t ισχύει : = $d_t = \begin{cases} 1, & ut < 0 \\ 0, & διαφορετικά \end{cases}$

Έτσι το είδος των «ειδήσεων» έχουν διαφορετική επίδραση στη διακύμανση. Τα «καλά» νέα έχουν επίδραση με τον συντελεστή α_i ενώ τα «κακά» νέα έχουν επίδραση με τον συνδυασμό των συντελεστών α_i και γ_i . Αν ο συντελεστής γ_i είναι θετικός τότε υπάρχει ασυμμετρία, ενώ αν $\gamma_i = 0$ τότε η επίδραση των «ειδήσεων» είναι συμμετρική.

◦ Μία βασική και πολύ χρήσιμη επέκταση των GARCH μοντέλων είναι το υπόδειγμα **E-GARCH** (**E**xponential **G**eneralized Auto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity) που προτάθηκε από τον Nelson (1991). Το μοντέλο αυτό εκτός από ότι συλλαμβάνει τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών σειρών όπως το υπόδειγμα GARCH, συλλαμβάνει επιπλέον και την ασύμμετρη σχέση της απόδοσης και της μελλοντικής διακύμανσης (leverage effect). Το υπόδειγμα E-GARCH (p,q) εκφράζεται ως :

$$\ln(\,h_t\,) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}[\,\alpha_i \left|\frac{u_{t-i}}{\sqrt{h}_{t-i}}\right| - \alpha_i\, E\left|\frac{u_{t-i}}{\sqrt{h}_{t-i}}\right| + \gamma_i \left|\frac{u_{t-i}}{\sqrt{h}_{t-i}}\right|] + \sum_{j=1}^{p} b_j \ln(\,h_{t-j}\,)$$

Σημαντικό πλεονέκτημα έναντι του GARCH είναι ότι δεν χρειάζεται να θέσουμε κανέναν περιορισμό στις παραμέτρους για την εκτίμηση του μοντέλου αφού η λογαριθμική μορφή εξασφαλίζει ότι οι προβλέψεις της διακύμανσης δεν θα είναι αρνητικές. Επίσης, έχει το σημαντικό χαρακτηριστικό ότι η $\ln(\,h_t\,)$ είναι μία γραμμική διαδικασία,και μπορούμε να εκτιμήσουμε πιο εύκολα αν οι διαταραχές (shocks) επηρεάζουν τη διακύμανση μόνιμα ή όχι αφού η στασιμότητα (ασθενούς ή αυστηρού τύπου)[39] μπορεί να ελεγχθεί πολύ εύκολα. Επιπλέον, οι παράμετροι γ_i επιτρέπουν την ασυμμετρία. Αν $\gamma_1 = 0$ τότε μία θετική διαταραχή, $u_t > 0$, έχει την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα όπως μία αρνητική διαταραχή, $u_t < 0$. Η παρουσία του leverage effect εντοπίζεται με την εξέταση της υπόθεσης για $\gamma_1 < 0$, γιατί, για παράδειγμα, θα ισχύει :

[39] Για ορισμό βλ.κεφάλαιο 8.3.

- αν $\gamma_1 < 0$ και $u_{t-1} < 0$, ο λογάριθμος της διακύμανσης θα αυξηθεί («κακή είδηση» προκαλεί αύξηση μεταβλητότητας), και,
- αν $\gamma_1 < 0$ και $u_{t-1} > 0$, ο λογάριθμος της διακύμανσης θα μειωθεί. («καλή είδηση» προκαλεί μείωση μεταβλητότητας).

8.2 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ GARCH

Τα πολυμεταβλητά GARCH υποδείγματα είναι η επέκταση των μονομεταβλητών και διακρίνονται από την ίδια φιλοσοφία μόνο που τα πολυμεταβλητά καθορίζουν και εξισώσεις για το πώς οι συνδιακυμάνσεις μεταβάλλονται στο χρόνο.

Τρία κύρια πολυμεταβλητά μοντέλα GARCH είναι :

- VECH
- Diagonal VECH
- BEKK

Παρακάτω γίνεται μία αναφορά σ'αυτά τα μοντέλα υποθέτοντας ένα διμεταβλητό υπόδειγμα.

- Το μοντέλο VECH προτάθηκε από τον Bollerslev (1986) παίρνει τη μομφή :

$$\text{VECH}(H_t) = C + A\,\text{VECH}(\Xi_{t-1}\,\Xi'_{t-1}) + B\,\text{VECH}(H_{t-1})$$

όπου ισχύουν τα παρακάτω :

- $\Xi_t \mid I_{t-1} \sim N(0, H_t)$, με I_{t-1} σύνολο πληροφορίας στο χρόνο t-1.
- Ht είναι η δεσμευμένη μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης 2x2 :

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix}$$

όπου hiit οι δεσμευμένες διακυμάνσεις στο χρόνο t των δύο στοιχείων (i=1,2) και hijt ($i \neq j$) οι δεσμευμένες συνδιακυμάνσεις μεταξύ των στοιχείων.

- Α και Β είναι οι 3x3 μήτρες των παραμέτρων :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

- VECH (▪) είναι ο τελεστής που μετατρέπει το άνω τριγωνικό κομμάτι ενός πίνακα σε διάνυσμα στήλης : $\text{VECH (Ht)} = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{22t} \\ h_{12t} \end{bmatrix}$

- C είναι ένα διάνυσμα διάστασης 3x1 : $C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$

Το μοντέλο VECH είναι πάρα πολύ δύσκολο να εκτιμηθεί καθώς έχει παρά πολλές παραμέτρους που πρέπει να εκτιμηθούν που αυξάνονται όσο αυξάνονται οι μεταβλητές στο υπόδειγμα. Η εκτίμηση είναι ήδη πάρα πολύ δύσκολη στο διμεταβλητό αυτό υπόδειγμα καθώς έχει 21 παραμέτρους (το διάνυσμα C έχει 3, ενώ οι μήτρες A και B από 9) όπως φαίνεται παρακάτω από την περιγραφή του μοντέλου στην πλήρη μορφή του:

$$h_{11t} = c_{11} + \alpha_{11}\, u^2_{1,t-1} + \alpha_{12}\, u^2_{2,t-1} + \alpha_{13}\, u_{1,t-1}\, u_{2,t-1} + b_{11}\, h_{11,t-1} + b_{12}\, h_{22,t-1} + b_{13}\, h_{12,t-1}$$
$$h_{22t} = c_{21} + \alpha_{21}\, u^2_{1t-1} + \alpha_{22}\, u^2_{2,t-1} + \alpha_{23}\, u_{1t-1}\, u_{2,t-1} + b_{21}\, h_{11,t-1} + b_{22}\, h_{22,t-1} + b_{23}\, h_{12,t-1}$$
$$h_{12t} = c_{31} + \alpha_{31}\, u^2_{1t-1} + \alpha_{32}\, u^2_{2,t-1} + \alpha_{33}\, u_{1,t-1}\, u_{2,t-1} + b_{31}\, h_{11,t-1} + b_{32}\, h_{22,t-1} + b_{33} h_{12t-1}$$

- Για τον περιορισμό των παραμέτρων και την εφικτή εκτίμηση του υποδείγματος προτάθηκε από τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988) το diagonal VECH όπου έχουν κάνει την υπόθεση ότι οι μήτρες A και B είναι διαγώνιες και έτσι οι παράμετροι στο υπόδειγμα (διμεταβλητό όπως πριν) μειώνονται σε 9 (οι μήτρες A και B έχουν από 3 στοιχεία) και έτσι παίρνει την παρακάτω μορφή :

$$h_{11t} = \alpha_0 + \alpha_1\, u^2_{1t-1} + \alpha_2\, h_{11,t-1}$$
$$h_{22t} = \beta_0 + \beta_1\, u^2_{2t-1} + \beta_2\, h_{22,t-1}$$
$$h_{12t} = \gamma_0 + \gamma_1\, u_{1t-1}\, u_{2t-1} + \gamma_2\, h_{12,t-1}$$

Το σημαντικό μειονέκτημα του VECH και του Diagonal VECH είναι ότι δεν εξασφαλίζουν θετικά ορισμένη μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων, κάτι που είναι απαραίτητο για τη διαχείριση κινδύνου καθώς εξασφαλίζει πως για οποιαδήποτε βάρη (weights) των περιουσιακών στοιχείων σε ένα χαρτοφυλάκιο το εκτιμώμενο Value-at-Risk θα είναι πάντα θετικό.

- Το μοντέλο που εξασφαλίζει πάντα θετικά ορισμένη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων H_t είναι το μοντέλο BEKK που προτάθηκε από τους Engle και Kroner (1995) :

$$H_t = W'W + A' H_{t-1}A + B' \Xi_{t-1}\Xi'_{t-1}B$$

όπου A και B οι 2x2 μήτρες των παραμέτρων και W η άνω τριγωνική μήτρα των παραμέτρων.

Γενικά για όλες τις μορφές των πολυμεταβλητών μοντέλων GARCH μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση τους (όπως και στα μονομεταβλητά) η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας :

$$\ell(\theta) = -\frac{TN}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\log|H_t| + \Xi_t' H_t^{-1}\Xi_t)$$

όπου :

- Ν είναι ο αριθμός των μεταβλητών στο υπόδειγμα (εδώ 2 όπως και παραπάνω).
- θ είναι το διάνυσμα του συνόλου των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν και
- Τ είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων.

8.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός 1 : Αυστηρώς στάσιμη σειρά (Strictly stationary process)

Μία στοχαστική διαδικασία, όπως η χρονολογική σειρά είναι αυστηρώς στάσιμη διαδικασία όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μία αλλαγή στην αρχή μέτρησης του χρόνου. Δηλαδή, αν οι από κοινού κατανομές των συνόλων των τυχαίων μεταβλητών, (Y_i, Y_{i+1}, … , Y_{i+k}) και (Y_{i+m}, Y_{i+m+1},…Y_{i+m+k}) είναι ίδιες για όλα τα i, m, k.

Ορισμός 2 : Ασθενώς στάσιμη διαδικασία (weakly stationary process)

Μία στοχαστική διαδικασία είναι ασθενώς στάσιμη εάν η πρώτη ροπή (η μέση τιμή) και η δεύτερη ροπή (η διακύμανση) είναι σταθερά στο χρόνο, και η συνδιακύμανση μεταξύ χρονικών περιόδων t και t+k δεν εξαρτάται από τον χρόνο αλλά από την απόσταση (υστέρηση ή lag) k μεταξύ αυτών των χρονικών περιόδων . Δηλαδή, έχουμε αντίστοιχα :

- $E (Y_t) = \mu$
- $Var(Y_t) = E (Y_t – \mu)^2$ για κάθε t
- $Cov (Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t – \mu) (Y_{t+k} – \mu)] = \gamma^2$ για κάθε t, με $k \neq 0$

Η έννοια της στασιμότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μας ορίζει αν οι διαταραχές (Shocks ή κατάλοιπα) που παρατηρούνται σε μία χρονολογική σειρά είναι μόνιμες ή όχι και αν μπορούμε συνακολούθως να κάνουμε προβλέψεις βάσει αυτής της χρονολογικής σειράς. Έλεγχοι που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη ύπαρξη στασιμότητας, μεταξύ άλλων, είναι ο έλεγχος Augmented Dickey-Fuller, ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας (unit root test), και ο έλεγχος Phillips-Perron.

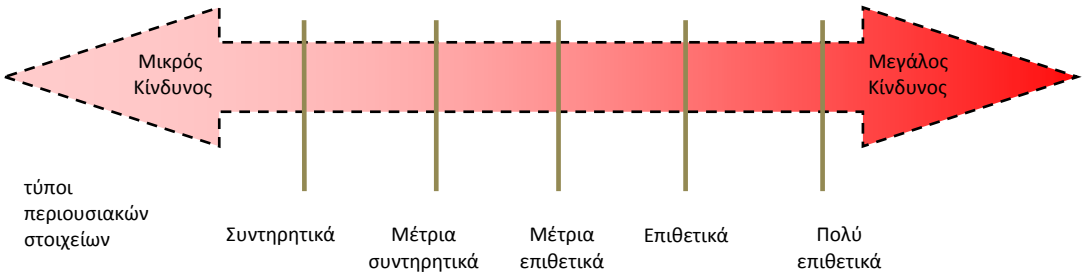
Επειδή ο προσδιορισμός της από κοινού κατανομής πιθανότητας μιας στοχαστικής διαδικασίας είναι δύσκολος συνήθως υιοθετείται ο παραπάνω ορισμός της ασθενούς στασιμότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Πίσω από το ζήτημα κατασκευής του χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή υπάρχουν πολλά ζητήματα τα οποία σχετίζονται με αυτό. Ένα από αυτά είναι ο καθορισμός του κινδύνου. Είναι γνωστό πως όσο μεγαλύτερο κίνδυνο ενέχει μία επένδυση τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανή απόδοση. Πολλοί επενδυτές όμως δεν μπορούν να κατανοήσουν πώς να καθορίσουν το επίπεδο κινδύνου που μπορεί να «αντέξει» το χαρτοφυλάκιο τους.

9.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ - ΑΠΟΔΟΣΗΣ

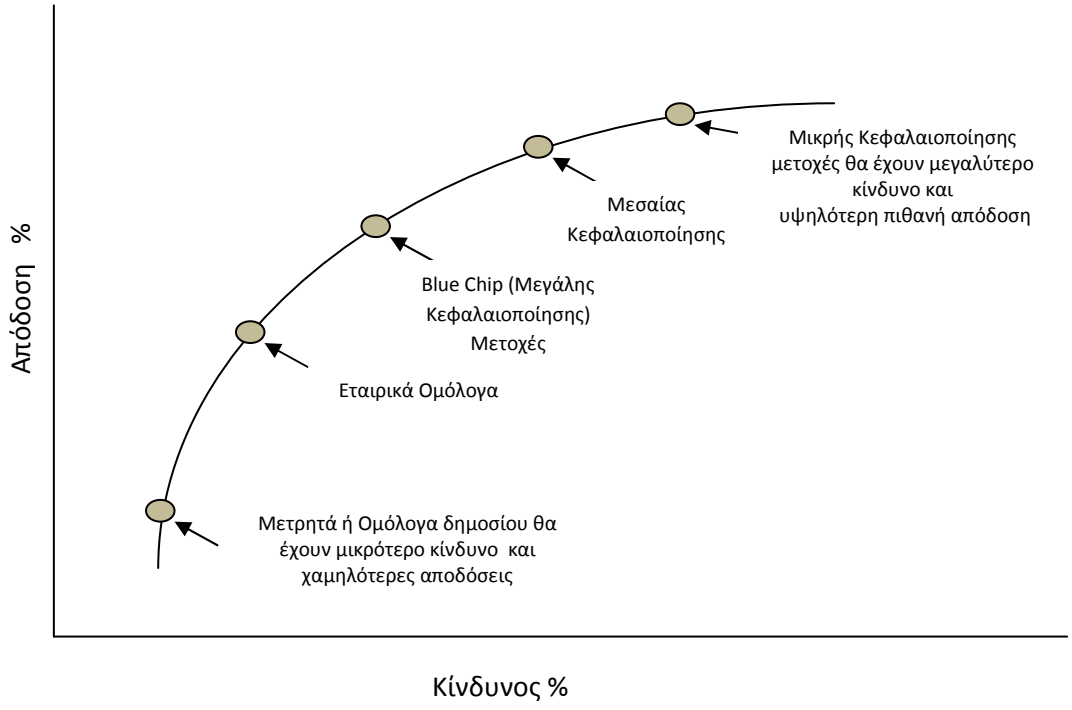
Θεωρητικά όσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος (ρίσκο) τόσο περισσότερο πρέπει να «αμείβεται» ο επενδυτής για τη διακράτηση της επένδυσης και όσο μικρότερος είναι ο κίνδυνος τόσο μικρότερη απόδοση θα πρέπει να λάβει ο επενδυτής. Οι επενδυτές θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους ένα σχετικό πλάνο σχετικά με τα περιουσιακά στοιχεία που πρέπει να περιλαμβάνει το χαρτοφυλάκιο τους βάση ενός ενδεικτικού δείγματος συσχέτισης του μεγέθους κινδύνου και του διαφορετικού τύπου περιουσιακών στοιχείων. Ενδεικτικά έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Γράφημα 15

Σύμφωνα μ'αυτό το ενδεικτικό σχήμα, θα μπορούσε ένας επενδυτής να το χρησιμοποιήσει για να διαλέξει ανάμεσα σε διαφορετικές επενδύσεις. Στην δεξιά πλευρά του σχήματος βρίσκονται οι επενδύσεις που προσφέρουν στους επενδυτές μία μεγαλύτερη δυνατότητα για πάνω από τη μέση τιμή αποδόσεις που συνδυάζεται με μεγαλύτερη ανάληψη κινδύνου απ'ότι οι κάτω της μέσης τιμής αποδόσεις. Ενώ στην αριστερή πλευρά του σχήματος βρίσκονται οι περισσότερο ασφαλείς επενδύσεις που συνδυάζονται όμως με μικρότερη δυνατότητα για υψηλές αποδόσεις. Έτσι, λοιπόν , ένας επενδυτής μπορεί να αποφασίσει την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο του λαμβάνοντας υπόψη του το προφίλ κινδύνου που χαρακτηρίζει αυτά τα στοιχεία. Η κατανομή αυτή βασικά είναι μία οργανωμένη και αποτελεσματική μέθοδος διαφοροποίησης ώστε να μεγιστοποιήσει ο επενδυτής την απόδοση για δεδομένο κίνδυνο ή να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο δεδομένου ενός αναμενόμενου επιπέδου απόδοσης.

Ενδεικτικά, στο παρακάτω σχήμα, γίνεται σύγκριση κινδύνου – απόδοσης για κάποια απ΄τα γνωστά χρηματοοικονομικά στοιχεία :



Γράφημα 16

9.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

Σημαντικός παράγοντας στον καθορισμό του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου και της απόδοσης του είναι ο κατάλληλος συνδυασμός χρηματοοικονομικών προϊόντων στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο και η δυναμική διαδικασία κατανομής αυτών, που θα πρέπει να αντικατοπτρίζει κάθε στιγμή τους στόχους του επενδυτή. Ενδεικτικά, αναφέρονται έξι πιθανές στρατηγικές κατανομής των περιουσιακών στοιχείων σ'ένα χαρτοφυλάκιο που ένας επενδυτής θα μπορούσε:

- Στρατηγική κατανομή (*strategic asset allocation*): Είναι μία μέθοδος κατά την οποία ο επενδυτής προτιμάει τον αναλογικό συνδυασμό των στοιχείων βάσει των αναμενόμενων αποδόσεων κάθε ευρύτερης κατηγορίας στην οποία αυτά ανήκουν. Για παράδειγμα, αν οι μετοχές έχουν ιστορικά απόδοση 10% ανά έτος και οι ομολογίες 5% ανά έτος, τότε ένας συνδυασμός 50% μετοχών και 50% ομολογίες θα αναμένεται να έχουν απόδοση 7.5% ανά έτος. Η στρατηγική αυτή υπονοεί μία παθητική επενδυτική στρατηγική σύμφωνα με την οποία ο επενδυτής αγοράζει μετοχές και τις διακρατεί στο χαρτοφυλάκιο του για μεγάλο χρονικό διάστημα ανεξάρτητα από τις διακυμάνσεις στην αγορά.

- Συνεχώς Αναπροσαρμοσμένη Κατανομή (*constant-weighting asset allocation*): Σύμφωνα με αυτή την στρατηγική, σε αντίθεση με την παραπάνω, γίνεται συνεχώς προσαρμογή των στοιχείων του χαρτοφυλακίου ώστε να λαμβάνονται υπόψη και οι τυχόν μεταβολές στην αξία των στοιχείων κατά τη διάρκεια διακράτησης τους στο χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα, αν σημειωθεί μείωση στην αξία ενός περιουσιακού στοιχείου θα πρέπει ο επενδυτής να ν'αγοράσει περισσότερο από αυτό, ενώ αντίθετα αν αυξηθεί η αξία του θα πρέπει να το πουλήσει.

- Τακτική Κατανομή (*tactical asset allocation*): Η στρατηγική αυτή χαρακτηρίζεται ως «συγκρατημένη» ενεργή στρατηγική και απαιτεί την κατάλληλη αναπροσαρμογή του συνδυασμού των περιουσιακών στοιχείων όταν παρουσιάζονται βραχυπρόθεσμες ευκαιρίες και έτσι δίνεται η ευκαιρία στον επενδυτή να συμμετέχει στις οικονομικές συνθήκες που ευνοούν κάποια κατηγορία στοιχείων έναντι κάποιας άλλης.

- Δυναμική Κατανομή (*dynamic asset allocation*): Η στρατηγική αυτή είναι ένα είδος ενεργής στρατηγικής σύμφωνα με την οποία ο επενδυτής αναπροσαρμόζει συνεχώς την αναλογία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου ανάλογα με την άνοδο και κάθοδο των αγορών και την ευρωστία ή ενέχεια της οικονομίας. Λέγεται δυναμική γιατί σύμφωνα μ'αυτή τη στρατηγική ο επενδυτής πουλάει περιουσιακά στοιχεία που η αξία τους βρίσκεται σε πτώση (με το σκεπτικό ότι ακολουθεί μία περαιτέρω πτώση) και αγοράζει στοιχεία των οποίων η αξία βρίσκεται σε άνοδο (με το σκεπτικό ότι ακολουθεί περαιτέρω άνοδος).

- Ασφαλής Κατανομή (*insured asset allocation*): Σύμφωνα μ'αυτή την στρατηγική ο επενδυτής καθορίζει μία σταθερή αξία χαρτοφυλακίου κάτω από την οποία δεν θα επιτρέπεται αυτή να μειωθεί. Είναι κατάλληλη περισσότερο για επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο που επιθυμούν μία ενεργή διαχείριση του χαρτοφυλακίου τους αλλά θέλουν μία σταθερή κατώτατη βάση ώστε να έχουν τον έλεγχο.

- Ολοκληρωμένη Κατανομή (*integrated asset allocation*): Αυτή η στρατηγική λαμβάνει υπόψη τις οικονομικές προσδοκίες και τον κίνδυνο και αποτελεί ένα μερικό συνδυασμό των παραπάνω στρατηγικών αρκεί να μην είναι αντιμαχόμενες μεταξύ τους όπως η δυναμική και η συνεχώς αναπροσαρμοσμένη στρατηγική.

Έτσι, λοιπόν , ένας επενδυτής καθορίζοντας την κατάλληλη κατανομή των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο του επιλέγοντας ανάμεσα σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια και συναλλαγματικά προϊόντα, επανεκτιμώντας περιοδικά τις σταθμίσεις αυτών των στοιχείων και επανεξετάζοντας την συνολική στρατηγική του, καταλήγει σ'ένα επικερδές χαρτοφυλάκιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της εφαρμογής είναι ο υπολογισμός του βέλτιστου χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο χρηματοοικονομικά προϊόντα, έστω μετοχές. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε τις σταθμίσεις εκείνες των τίτλων (weights) που σε συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης ελαχιστοποιούν το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιούμε για το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο (Standard Deviation, Value-at-Risk, Tail VaR).

Υποθέτουμε στο υπόδειγμα που χρησιμοποιούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο χρηματοοικονομικά στοιχεία στο χρόνο t έχει την παρακάτω μορφή:

$$\binom{r_{1t}}{r_{2t}}/I_t \quad \sim \quad \mathbb{N}\left(\binom{\mu_{1t}}{\mu_{2t}} \;\middle|\; \begin{matrix} h_{1t} & \rho h_{1t}^{1/2} h_{2t}^{1/2} \\ \rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2} & h_{2t} \end{matrix} \right) \qquad (1)$$

όπου :

- r_{1t} και r_{2t} η απόδοση της πρώτης και της δεύτερης μετοχής αντίστοιχα στο χρόνο t.
- I_t σύνολο πληροφορίας μέχρι και τη χρονική στιγμή t.
- h_{1t} και h_{2t} η δαικύμανση της πρώτης και δεύτερης αντίστοιχα μετοχής στο χρόνο t.
- μ_{1t} και μ_{2t} η μέση απόδοση της πρώτης και δεύτερης μετοχής αντίστοιχα στο χρόνο t.
- ρ συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο μετοχών, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση για υπολογιστική ευκολία θεωρείται μηδέν.

Το χαρτοφυλάκιο μας είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο μετοχών από τις οποίες αποτελείται, οπότε και η απόδοση του θα είναι :

$r^p_t = \alpha\, r_{1t} + (1 - \alpha)\, r_{2t}$, όπου: 1-α = b ⇔ α + b = 1, δηλαδή οι σταθμίσεις αθροίζουν στη μονάδα εφόσον αναφερόμαστε σε ποσοστά. Και εκφράζοντας τη σχέση αυτή ως εξής :

$$r^p_t = \begin{pmatrix} \alpha & (1-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} \quad ,$$

το χαρτοφυλάκιο θα έχει την παραπάνω κατανομή (1) με **μέσο** και **διακύμανση** αντίστοιχα:

- **E ($r^p | I_t$) =** $(\alpha \quad (1-\alpha)) \begin{pmatrix} E(r_{1t})/I_t \\ E(r_{2t})/I_t \end{pmatrix}$ =

  $= (\alpha \quad 1-\alpha)) \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$ = α μ_{1t} + (1-α) μ_{2t}

- **Var ($r^p | I_t$) = (** $\alpha \quad (1-\alpha)) \begin{pmatrix} h_{1t} & \rho h_{1t}^{1/2} h_{2t}^{1/2} \\ \rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2} & h_{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$ =

  $= \left(a h_{1t} + (1-a)\, \rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2} \quad a\, \rho h_{1t}^{1/2} h_{2t}^{1/2} + (1-a) h_{2t}\right) \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$

  = $\alpha^2 h_{1t}$ + α (1-α) $\rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2}$ + α (1-α) $\rho h_{1t}^{1/2} h_{2t}^{1/2}$ + $(1-\alpha)^2 h_{2t}$

  = $\alpha^2 h_{1t}$ + 2 α (1-α) $\rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2}$ + $(1-\alpha)^2 h_{2t}$

Σημειώνεται ότι λόγω συμμετρίας ισχύει : $\rho h_{2t}^{1/2} h_{1t}^{1/2} = \rho h_{1t}^{1/2} h_{2t}^{1/2}$

Υποθέτουμε επίσης ότι:

- η διακύμανση των αποδόσεων των μετοχών ακολουθεί ένα τύπου E-GARCH υπόδειγμα και έχουμε αντίστοιχα για τις δύο μετοχές:

  $$\ln h_{1t} = \omega_1 + \alpha_1 \left|z_{1,t-1}\right| + \gamma_1 z_{1,t-1} + \beta_1 \ln h_{1,t-1} + \beta_{12} \ln h_{2,t-1} \qquad (2)$$
  $$\ln h_{2t} = \omega_2 + \alpha_2 \left|z_{2,t-1}\right| + \gamma_2 z_{1,t-1} + \beta_2 \ln h_{2,t-1} + \beta_{21} \ln h_{1,t-1} \qquad (3)$$

  όπου, $\begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix} \sim N\left(0\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, με ρ = 0

- Για τις αποδόσεις των δύο μετοχών ισχύει:

  $r_{1t} = z_{1t} \sqrt{h_{1t}}$ (4)

$r_{2t} = z_{2t} \sqrt{h_{2t}}$ (5)

Σημειώνεται ότι η διακύμανση των αποδόσεων θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι ακολουθεί ένα E-GARCH, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $E\left|\frac{u_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}}\right| = 0$, και υποθέτωντας παράλληλα ότι $\beta_{12} = 0$ και $\beta_{21} = 0$.

Το ίδιο επισημαίνεται και για τη διακύμανση της από κοινού κατανομής των αποδόσεων κάτω από την εξής υπόθεση : Αν ισχύει α = 0 ή α = 1.

Ακολουθεί η περιγραφή των προγραμμάτων συνεχούς βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο χρηματοοικονομικά προϊόντα που γίνεται με την κατασκευή τεχνητών στοιχείων με σκοπό την περαιτέρω χρησιμοποίηση και εφαρμογή τους σε πραγματικά δεδομένα χρηματοοικονομικών προϊόντων για τη μελέτη και σύγκριση των μέτρων κινδύνου. Η εφαρμογή πραγματοποιείται σε υπολογιστικό περιβάλλον E-Views. Χρησιμοποιούνται, λοιπόν, τρία προγράμματα, των οποίων η δομή και τ'αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή τους περιγράφονται παρακάτω. (Τα γραφήματα που προκύπτουν από τα καθώς και τα 6 προγράμματα, χωρίς τις παραλλαγές τους, παρουσιάζονται στο Α' και Β' Μέρος, αντίστοιχα, του Παραρτήματος).

Επισημαίνεται πως οι βελτιστοποιήσεις που γίνονται είναι χωρίς περιορισμούς γιατί στα υποδείγματα οι αναμενόμενες τιμές (δεσμευμένες ή μη) είναι μηδενικές.

10.1 1η ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην εφαρμογή αυτή χρησιμοποιούμε για την κατασκευή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου ένα σχετικά μικρό δείγμα παρατηρήσεων (120), καλώς εξειδικευμένο, με μέσο μηδέν και διακύμανση που αντιστοιχεί στο άθροισμα του

γινομένου της τετραγωνισμένης στάθμισης επί την δεσμευμένη διακύμανση του πρώτου χρηματοοικονομικού στοιχείου που έχουμε εκτιμήσει μέχρι τη χρονική στιγμή t, και του γινομένου της υπολειπόμενης της μονάδας στάθμισης επί την δεσμευμένη διακύμανση του δεύτερου χρηματοοικονομικού στοιχείου. Τη χρονική στιγμή t κάνουμε την εκτίμηση για το δείγμα και τις δεσμευμένες διακυμάνσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων και παίρνουμε έτσι μία εκτίμηση για τη δεσμευμένη διακύμανση του χαρτοφυλακίου η οποία είναι αντίστοιχα όπως παραπάνω : $\alpha^2 * \widehat{h_{1t}} + (1 - \alpha)^2 * \widehat{h_{2t}}$. Επισημαίνεται πως σ'αυτήν την εφαρμογή ελαχιστοποιούμε μόνο την τυπική απόκλιση καθώς καθένα από τα τρία μέτρα κινδύνου που μελετώνται αποτελεί μονοτονικό μετασχηματισμό του άλλου οπότε τα αποτελέσματα τους δεν θα διαφέρουν.

Χρησιμοποιούνται 3 υπορουτίνες, από τις όποιες οι 2 πρώτες είναι βοηθητικές και η τελευταία είναι η κυρίως ρουτίνα βελτιστοποίησης.(Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [1] του Β' μέρους του Παραρτήματος):

◦ 1η υπορουτίνα (subroutine monte) :

Με τη βοηθητική αυτή υπορουτίνα γίνεται η προσομοίωση Monte Carlo ώστε να παράξουμε τα τεχνητά στοιχεία για τις σειρές των αποδόσεων r_1 και r_2 των δύο τίτλων αντίστοιχα. Για την εξαγωγή των τιμών αυτών και με δεδομένη την υπόθεση που έχουμε κάνει ότι $r_{i\,t} = z_{it}\sqrt{h_{it}}$, όπου i =1, 2, και τη μορφή της διακύμανσης των αποδόσεων των δύο τίτλων $h_{it} = \exp(\omega_i + \alpha_i |z_{i,t-1}| + \gamma i\, z_{i,t-1} + \beta_i \ln h_{i,t-1} + \beta_{ij} \ln h_{j,t-1})$, όπου i ≠ j και i , j = 1,2 εισάγουμε τα διανύσματα των παραμέτρων των διακυμάνσεων, τις τιμές των οποίων έχουμε θέσει εξ υποθέσεως αντίστοιχα ως εξής:

$\omega_1 = - 0.1$		$\omega_2 = - 0.3$
$\alpha_1 = 0.4$		$\alpha_2 = 0.2$
$\gamma_1 = - 0.6$	και	$\gamma_2 = - 0.8$
$\beta_1 = 0.4$		$\beta_2 = 0.3$
$\beta_{12} = 0.4$		$\beta_{21} = - 0.6$

Επισημαίνεται ότι σε κάθε διαδικασία βελτιστοποίησης λόγω του ότι η διακύμανση δεν είναι παρατηρήσιμη χρησιμοποιείται η εκτίμηση της. Λόγω της μορφής της διακύμανσης που έχουμε υποθέσει για τις αποδόσεις των δύο χρηματοοικονομικών

προϊόντων χρειάζονται οι τιμές της διακύμανσης σε κάθε προηγούμενη χρονική στιγμή γι'αυτό θεωρούμε αυθαίρετα τις εξής αρχικές τιμές για τη διακύμανση των αποδόσεων των δύο χρηματοοικονομικών προϊόντων : $\widehat{h_{11}}$ = 1 και $\widehat{h_{21}}$ = 1 , αντίστοιχα . Λόγω της μορφής των αποδόσεων που έχουμε υποθέσει ($r_{it} = z_{it}\sqrt{h_{it}}$) προκύπτουν τα εξής :

$\widehat{z_{11}} = \frac{r_{11}}{\widehat{h_{11}^{1/2}}}$ και $\widehat{z_{21}} = \frac{r_{21}}{\widehat{h_{21}^{1/2}}}$ $\Rightarrow$ $\widehat{z_{11}} = r_{11}$ και $\widehat{z_{21}} = r_{21}$ κ.ο.κ.

◦ 2η υποροutίνα : (subroutine local mle_model)

Η υποροutίνα αυτή έχει ως σκοπό την εκτίμηση των παραμέτρων των διακυμάνσεων των δύο τίτλων με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας με δεδομένες τις σειρές r_1 και r_2 που παρήχθησαν από την προηγούμενη υποροutίνα και έτσι οι σειρές αυτές χρησιμοποιούνται ως είσοδοι όπως και τα διανύσματα των παραμέτρων τις τιμές των οποίων θέσαμε παραπάνω, και ως εξόδους έχουμε τις εκτιμημένες διακυμάνσεις των τίτλων.

◦ 3η υποροutίνα : (subroutine local Port_Choice)

Η υποροutίνα αυτή είναι η κυρίως ροutίνα βελτιστοποίησης. Επιλέγει με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποιώντας το μέτρο κινδύνου του υποκείμενου χαρτοφυλακίου θέτοντας ως εισόδους τις δεσμευμένες διακυμάνσεις των δύο τίτλων.

Κυρίως Πρόγραμμα

Το δείγμα που έχουμε στη διάθεση μας είναι 120 παρατηρήσεων. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής : Σύμφωνα με το σύνολο πληροφορίας που διαθέτουμε τη στιγμή t, σχηματίζουμε ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για τη χρονική στιγμή t+1, ενώ την επόμενη χρονική στιγμή t+2 σχηματίζεται το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο με το νέο σύνολο πληροφορίας που διαθέτουμε ενσωματώνοντας τη νέα πληροφορία κ.ο.κ. . Έτσι, λοιπόν, στο σημείο αυτό προσδιορίζονται οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στις βοηθητικές υποροutίνες, τίθεται επίπεδο

εμπιστοσύνης α=5%, οι επιμέρους κατηγοριοποιήσεις του δείγματος, κάνει την προσομοίωση και προσδιορίζεται το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με το εν λόγω μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται, για καθεμία από την 101η ‘έως την 119η χρονική στιγμή.

Στο παράρτημα παρουσιάζεται το γράφημα που αναπαριστά την αδέσμευτη κατανομή των βέλτιστων αυτών χαρτοφυλακίων με συνάρτηση Kernel τη συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής [1.a].

10.2 2η ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σ’αυτήν την εφαρμογή έχουμε και πάλι ένα καλώς εξειδικευμένο υπόδειγμα αλλά η διαφορά με την προηγούμενη εφαρμογή είναι ότι κάνουμε εκτιμήσεις των αποδόσεων των τίτλων και έτσι χρησιμοποιούμε δειγματικά μεγέθη. Έχοντας, λοιπόν, εκτιμήσει τις διακυμάνσεις των τίτλων σε κάθε χρονική στιγμή, κανονικοποιούμε βάσει αυτών τις αποδόσεις των υποκείμενων τίτλων. Για τον λόγο, λοιπόν, ότι οι τυποποιημένες αποδόσεις δεν θ’ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή αλλά μία άγνωστη σ’εμάς και επειδή όλα τα μεγέθη αναφέρονται σε δειγματικά μεγέθη, η μέθοδος προσέγγισης των τριών μέτρων κινδύνου θα διαφέρει αναμεταξύ τους. (Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [2] του Β’ μέρους του Παραρτήματος).

- 1η υπορουτίνα : (subroutine monte)

Προσομοίωση Monte Carlo. Ακριβώς ίδια υπορουτίνα με την αντίστοιχη της 1ης Εφαρμογής.

- 2η υπορουτίνα : (subroutine local mle_model)

Αυτή η βοηθητική υπορουτίνα διαφέρει από την αντίστοιχη της προηγούμενης εφαρμογής για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω. Γι’αυτό, λοιπόν, για τη μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας με σκοπό την εκτίμηση των παραμέτρων, χρησιμοποιούνται ως είσοδοι τα (προκαθορισμένα) διανύσματα των παραμέτρων

των διακυμάνσεων των δύο τίτλων και οι σειρές των αποδόσεων αντίστοιχα r_{1t} και r_{2t}, αλλά ως έξοδοι ορίζονται τυποποιημένες σειρές των αποδόσεων, οι αποδόσεις των τίτλων, δηλαδή, διαιρεμένες με τις αντίστοιχες εκτιμημένες τυπικές αποκλίσεις τους.

- $3^{η}$ υπορουτίνα : (subroutine local Port_Choice)

Η υπορουτίνα αυτή χρησιμοποιείται για να υπολογίσει και τα τρία μέτρα κινδύνου για τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Έτσι σε κάθε βήμα της υπορουτίνας ελαχιστοποιούμε το αντίστοιχο μέτρο κινδύνου, θεωρώντας για την τυπική απόκλιση την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου, για το Value-at-Risk παίρνοντας το κατάλληλο τεταρτημόριο, και για το Tail VaR το μέσο όρο των τιμών που βρίσκονται κάτω από το VaR.

Κυρίως Πρόγραμμα

Προσδιορίζονται στο σημείο αυτό, όπως και στο παραπάνω πρόγραμμα, το πλήθος του δείγματος (120), τα (προκαθορισμένα) διανύσματα των παραμέτρων, κάνει την προσομοίωση, κατασκευάζει βοηθητικές σειρές και διανύσματα, και προσδιορίζει τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια για καθεμία από τις τρεις μεθόδους αποτίμησης κινδύνου για κάθε χρονική στιγμή από την $101^{η}$ έως την $119^{η}$. Και τέλος, συγκρίνει τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια, κατασκευάζοντας όπως και στο παραπάνω πρόγραμμα τα γραφήματα αναπαριστούν την αδέσμευτη κατανομή των βέλτιστων αυτών χαρτοφυλακίων με συνάρτηση Kernel τη συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι τα παρακάτω :

Στο πλαίσιο της θεωρίας βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου η οποία βασίζεται στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης ωφέλειας του επενδυτή, που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της επιθυμίας του επενδυτή της μέγιστης δυνατής απόδοσης και της αποστροφής του επενδυτή στον κίνδυνο, συγκρίνονται τα μέτρα κινδύνου με βάση τα χαρακτηριστικά του καθενός που αναλύθηκαν παραπάνω, και της κάθε φορά προκύπτουσας κατανομής των βέλτιστων χαρτοφυλακίων. (Ισχύει σε κάθε εφαρμογή).

Σύμφωνα με αυτά, λοιπόν, το μέτρο κινδύνου που φαίνεται ότι δίνει καλύτερη κατανομή βέλτιστων χαρτοφυλακίων είναι το TVaR όπως φαίνεται στο γράφημα [4.α], καθώς μπορεί να παρουσιάζει μικρότερη μέση τιμή απ'ότι οι άλλες δύο κατανομές και μεγαλύτερη τυπική απόκλιση (όπως φαίνεται από τα διαγράμματα 2.b, 3.b και 4.b) όμως δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα το φαινόμενο της λεπτοκύρτωσης και της αρνητικής ασυμμετρίας όσο οι άλλες δύο κατανομές. Υπό την ελαχιστοποίηση του μέτρου της τυπικής απόκλισης τα αποτελέσματα που προκύπτουν και απεικονίζονται στο γράφημα [2.α] μπορεί να είναι αρκετά παραπλανητικά καθώς ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης κάθε φορά των εκάστοτε χαρτοφυλακίων μπορεί επηρεάζεται από τυχόν μεμονομένες υψηλές αποδόσεις. Όπως αντίστοιχα, υπό την ελαχιστοποίηση του μέτρου VaR μπορεί οι τιμές που προκύπτουν να είναι εξίσου παραπλανητικές σε περίπτωση που οι εκτιμήσεις που έχουν αποτύχει να συμπεριλάβουν τυχόν ακραία αρνητικά γεγονότα.

Ακολούθως, παρουσιάζονται δύο παραλλαγές (2.1 και 2.2) του παραπάνω προγράμματος για μεσαίο μέγεθος δείγματος (1000) και για μεγάλο μέγεθος δείγματος (10000) αντίστοιχα, και δύο παραλλαγές (2.3 και 2.4) που αφορούν τα ίδια μεγέθη δείγματος όπως στις 2.1 και 2.2 αλλά η κατασκευή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων γίνεται κρατώντας σταθερό τον αριθμό (20) των παρατηρήσεων βάσει των οποίων γίνεται η συνεχής επανεκτίμηση της δεσμευμένης διακύμανσης των αποδόσεων και η συνακόλουθη βελτιστοποίηση.

10.2.1 1η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Η πρώτη αυτή παραλλαγή της παραπάνω εφαρμογής έχει ως ένα δείγμα παρατηρήσεων μεγέθους 1000. Η διαδικασία εκτίμησης των βέλτιστων χαρτοφυλακίων γίνεται για καθένα από τα μέτρα κινδύνου για τις χρονικές στιγμές t = 501 έως 999 και ακολουθεί η σύγκριση τους. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν για τα διαφορετικά μέτρα κινδύνου, τυπική απόκλιση, VaR και TVaR, αναπαρίστανται στα γραφήματα [5.α], [6.α], [7.α] αντίστοιχα. Συγκριτικά με την κυρίως εφαρμογή, διαπιστώνεται ότι τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια κινούνται περισσότερο γύρω από τη μέση τιμή των κατανομών απ'ότι

συμβαίνει στις αντίστοιχες κατανομές με δείγμα παρατηρήσεων σχετικά μικρού μεγέθους. Μολονότι, οι κατανομές που προκύπτουν υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης και του VaR παρουσιάζουν μία θετική ασυμμετρία, σε αντίθεση με την κατανομή που προκύπτει υπό την ελαχιστοποίηση του TVaR, λόγω των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των μέτρων αυτών όπως αναλύθηκαν, και της επιθυμητής εξασφάλισης του επενδύτη, στο μέτρο που είναι δυνατό, έναντι του κινδύνου και των ακραίων αρνητικών τιμών που μπορεί να προκύψουν, προτιμάται το μέτρο TVaR.

10.2.2 2η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Η δεύτερη αυτή παραλλαγή της παραπάνω εφαρμογής έχει ως ένα δείγμα παρατηρήσεων μεγέθους 10000. Η διαδικασία εκτίμησης των βέλτιστων χαρτοφυλακίων για καθένα από τα μέτρα κινδύνου και η συνακόλουθη σύγκριση τους γίνεται για τις χρονικές στιγμές t = 9745 έως 9999. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν για τα διαφορετικά μέτρα κινδύνου, τυπική απόκλιση, VaR και TVaR, αναπαρίστανται στα γραφήματα [8..a], [9.a], [10.a] αντίστοιχα. Καθώς το δείγμα παρατηρήσεων αυξάνεται, διαπιστώνεται πως οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό τα διαφορετικά μέτρα κινδύνου μοιάζουν περισσότερο μεταξύ τους απ'ότι προέκυπτε με μικρότερο σχετικά μέγεθος δείγματος. Θετική ασυμμετρία υπάρχει και στις τρεις κατανομές, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης ακραίων θετικών τιμών είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα για αρνητικές τιμές, αλλά επειδή όμως στην περίπτωση της βελτιστοποίησης υπό το VaR δεν υπάρχει «κάλυψη» του επενδυτή στη δεξιά ουρά της κατανομής, και στην περίπτωση βελτιστοποίησης υπό την τυπική απόκλιση λαμβάνονται χαρτοφυλάκια ως ισάξια στη δεξιά και αριστερή ουρά της κατανομής, θα ήταν προτιμότερο και σ'αυτήν την περίπτωση το μέτρο κινδύνου TVaR.

10.2.3 3η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Στην τρίτη αυτή παραλλαγή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 1000 και η συνεχής βελτιστοποίηση γίνεται βάσει των τελευταίων 20 παρατηρήσεων, δηλαδή για χρονικές στιγμές t=980 έως 999. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την συνεχή βελτιστοποίηση για τα τρία μέτρα κινδύνου φαίνονται στα γραφήματα [11.a], [12.a] και [13.a]. Όπως φαίνεται οι κατανομές συγκριτικά με την παραλλαγή 2.1 δεν είναι τόσο συγκεντρωμένες γύρω από τη μέση τιμή καθώς παρουσιάζουν τυπική απόκλιση μεγαλύτερη και εμφανίζουν περισσότερο το φαινόμενο ακραίων τιμών. Σ'αυτήν την περίπτωση η βελτιστοποίηση υπό το VaR φαίνεται να δίνει καλύτερα χαρτοφυλάκια καθότι οι αρνητικές τιμές είναι περισσότερο πιθανές στις άλλες δύο κατανομές χαρτοφυλακίων και όπως φαίνεται από το διάγραμμα [12.b] η μέση τιμή είναι αισθητά μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες των άλλων κατανομών όπως φαίνεται από τα διαγράμματα [11.b] και [13.b].

10.2.4 4η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Στην τέταρτη αυτή παραλλαγή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10000 και η συνεχής βελτιστοποίηση γίνεται βάσει των τελευταίων 20 παρατηρήσεων, δηλαδή για χρονικές στιγμές t=9980 έως 9999. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την συνεχή βελτιστοποίηση για τα τρία μέτρα κινδύνου φαίνονται στα γραφήματα [14.a], [15.a] και [16.a]. Στην περίπτωση αυτή οι κατανομές παρουσιάζουν θετική ασυμμετρία και ειδικότερα η κατανομή υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης φαίνεται ότι μπορεί να δίνει καλύτερα αποτελέσματα δεδομένου ότι έχει μεγαλύτερη μέση τιμή και μικρότερη τυπική απόκλιση απ'ότι οι κατανομές που αντιστοιχούν στο VaR και το TVaR . Όμως ο υπολογισμός με τον οποίο έχουν προκύψει τα χαρτοφυλάκια αυτά, με το μέτρο δηλαδή της τυπικής απόκλισης, όπως και σε κάθε άλλη περίπτωση μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα και στην τελική καλύτερο μέτρο ν'αποδεικνύεται το TVaR.

Σημειώνεται ότι στις παραλλαγές όπου διαθέτουμε μεγάλα δείγματα αναμένουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις των παραμέτρων και επομένως στις εκτιμήσεις των διακυμάνσεων και άρα ισοδυναμία των μέτρων κινδύνου. Η ακριβής ισοδυναμία των μέτρων κινδύνου δεν παρατηρείται (λόγω ίσως των περιοριστικών δυνατοτήτων του υπολογιστικού προγράμματος ή λόγω σφαλμάτων στα προγράμματα) όπως

φαίνεται και στις παραπάνω αλλά και στις παρακάτω παραλλαγές, παρατηρείται όμως ομοιότητα των κατανομών που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση καθενός από τα μέτρα αποτίμησης κινδύνου σε ορισμένες εξ αυτών περιπτώσεις συγκριτικά με περιπτώσεις μικρότερου μεγέθους.

10.3 3η ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η εφαρμογή αυτή αποτελεί μία μη παραμετρική μέθοδο. Το μέγεθος δείγματος είναι σχετικά μικρό (120). Η 1η, 2η, και 3η υπορουτίνα είναι ίδιες με τις αντίστοιχες της (κυρίως) εφαρμογής 2. Η διαφορά έγκειται στο κυρίως πρόγραμμα, στο σημείο του βρόγχου όπου δεν ανακαλείται πλέον η υπορουτίνα της μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας (mle_model), και η εντολή επιλογής χαρτοφυλακίου δεν περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις των τυποποιημένων z μεταβλητών που προέκυπταν από τη διαίρεση των αποδόσεων των τίτλων με την τετραγωνική ρίζα των διακυμάνσεων τους (zf1, zf2), αλλά περιλαμβάνει τις ίδια τα δεδομένα (αποδόσεις) του δείγματος μας αντίστοιχα για τους δύο τίτλους (r1, r2). (Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [3] του Β' μέρους του Παραρτήματος).

Τ'αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στα γραφήματα [17.a], [18.a], και [19.a] :

Οι κατανομές βλέπουμε, σε αντίθεση, με την αντίστοιχη περίπτωση του μικρού δείγματος στην εφαρμογή 2, ότι δεν έχουν μεγάλες αποκλίσεις η μία από την άλλη, κάτι που διαπιστωνόταν περισσότερο σε μεγαλύτερα δείγματα (1η και 2η Παραλλαγή εφαρμογής 2). Η κατανομή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό τη βελτιστοποίηση με το VaR έχει τη μικρότερη τυπική απόκλιση αλλά η κατανομή υπό τη βελτιστοποίηση του TVaR έχει τη μεγαλύτερη μέση τιμή, και όπως και προηγουμένως σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά του καθενός από τα τρία μέτρα κινδύνου και τα χαρακτηριστικά του επενδυτή, προτιμότερο είναι το TVaR.

10.3.1 1η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Η πρώτη αυτή παραλλαγή της παραπάνω εφαρμογής έχει ως ένα δείγμα παρατηρήσεων μεγέθους 1000. Η διαδικασία εκτίμησης των βέλτιστων χαρτοφυλακίων για καθένα από τα μέτρα κινδύνου και η συνακόλουθη σύγκριση τους γίνεται για τις χρονικές στιγμές t = 501 έως 999. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν για τα διαφορετικά μέτρα κινδύνου, τυπική απόκλιση, VaR και TVaR, αναπαρίστανται στα γραφήματα [20.a], [21.a], [22.a] αντίστοιχα. Από αυτά φαίνεται ότι μολονότι η κατανομή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτει υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης λόγω θετικής ασυμμετρίας μπορεί να δώσει ακραία θετικά αποτελέσματα και η κατανομή υπό την ελαχιστοποίηση του VaR είναι περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση τιμή απ'ότι η αντίστοιχη κατανομή του TVaR, το προτιμότερο μέτρο κινδύνου είναι το τελευταίο καθώς δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες δύο κατανομές, με τη μέση τιμή της κατανομής θετική και την απουσία ακραίων αρνητικών τιμών, και σύμφωνα πάντα με τις ιδιότητες του μέτρου αυτού και τα χαρακτηριστικά του επενδυτή.

10.3.2 2η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Η δεύτερη αυτή παραλλαγή της παραπάνω εφαρμογής έχει ως ένα δείγμα παρατηρήσεων μεγέθους 10000. Η διαδικασία εκτίμησης των βέλτιστων χαρτοφυλακίων για καθένα από τα μέτρα κινδύνου και η συνακόλουθη σύγκριση τους γίνεται για τις χρονικές στιγμές t = 9745 έως 9999. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν για τα διαφορετικά μέτρα κινδύνου, τυπική απόκλιση, VaR και TVaR, αναπαρίστανται στα γραφήματα [23.a], [24.a], [25.a] αντίστοιχα. Η κατανομή βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την τυπική απόκλιση και το TVaR παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία και το ίδιο και η κατανομή υπό το VaR αλλά οριακά. Το βέλτιστο μέτρο λόγω όπως πριν χαρακτηριστικών ιδιοτήτων που λήφθηκαν υπόψη κατά τον υπολογισμό των βέλτιστων χαρτοφυλακίων, και του χαρακτηριστικού της αποστροφής στον κίνδυνο του επενδυτή είναι το TVaR.

10.3.3 3η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Στην τρίτη αυτή παραλλαγή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 1000 και η συνεχής βελτιστοποίηση γίνεται βάσει των τελευταίων 20 παρατηρήσεων, δηλαδή για χρονικές στιγμές t=980 έως 999. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την συνεχή βελτιστοποίηση για τα τρία μέτρα κινδύνου φαίνονται στα γραφήματα [26.a], [27.a] και [28.a]. Η κατανομή που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του VaR παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία, κάτι που δεν προτιμάται από τον επενδυτή. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την ελαχιστοποίηση του TVaR και της τυπικής απόκλισης δεν διαφέρουν ιδιαίτερα, η μεν πρώτη έχει μικρότερη μέση τιμή και μικρότερη τυπική απόκλιση από την αντίστοιχη της δεύτερης, όπως φαίνεται στα διαγράμματα [28.b] και [26.b] αντίστοιχα, αλλά λόγω των μειονεκτημάτων του μέτρου της τυπικής απόκλισης και των συνακόλουθων κινδύνων στον υπολογισμό των βέλτιστων χαρτοφυλακίων προτιμάται το TVaR.

10.3.4 4η ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Στην τέταρτη αυτή παραλλαγή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10000 και η συνεχής βελτιστοποίηση γίνεται βάσει των τελευταίων 20 παρατηρήσεων, δηλαδή για χρονικές στιγμές t=9980 έως 9999. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την συνεχή βελτιστοποίηση για τα τρία μέτρα κινδύνου φαίνονται στα γραφήματα [29.a], [30.a] και [31.a]. Σε σύγκριση με την αντίστοιχη περίπτωση 3.2. οι κατανομές δεν παρουσιάζουν τόσο ακραίες τιμές και αν και φαίνεται πως οι κατανομές που προκύπτουν υπό την ελαχιστοποίηση του VaR και του TVaR μοιάζουν αρκετά μεταξύ τους, όπως φαίνεται από τα διαγράμματα [30.b] και [31.b] αντίστοιχα, η κατανομή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων με το μέτρο VaR έχει μεγαλύτερη μέση τιμή και μικρότερη διασπορά τιμών. Όμως τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες υπολογισμού του μέτρου VaR στα διάφορα χαρτοφυλάκια μπορεί να έχει οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτέλεσματα, όπως και το μέτρο της τυπικής απόκλισης, με αποτέλεσμα το μέτρο TVaR να είναι αυτό που αντανακλά ίσως καλύτερα μια πιο ρεαλιστική κατανομή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων συγκριτικά με τις άλλες δύο.

10.4 ΣΦΑΛΜΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι παρακάτω δύο εφαρμογές οι οποίες βασίζονται στην εφαρμογή 2 (10.2) και οι οποίες αφορούν λάθος εξειδίκευση, η μεν πρώτη αφορά τη λάθος εξειδίκευση του εν λόγω υποδείγματος, και η δεύτερη την λανθασμένη υιοθέτηση της υπόθεσης της ανεξαρτησίας των αποδόσεων των δύο τίτλων. (Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [4] του Β' μέρους του Παραρτήματος).

10.4.1 ΣΦΑΛΜΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Στην εφαρμογή αυτή έχουμε κάνει σφάλμα εξειδίκευσης του υποδείγματος που αφορά σφάλμα ως προς την οριακή κανονική κατανομή των αποδόσεων. Έχουμε υποθέσει λανθασμένα ότι τα z προέρχονται από την κανονική κατανομή ενώ στην πραγματικότητα προέρχονται από την t-student κατανομή. Η εφαρμογή αναφέρεται σε μέγεθος δείγματος 120 παρατηρήσεων και η εκτίμηση γίνεται με βάσει τις τελευταίες 20 χρονικές στιγμές.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι παρόμοια με αυτήν που ακολουθείται στην εφαρμογή 10.2 με τη διαφορά ότι στην $1^{η}$ υπορουτίνα ορίζουμε για τις τελευταίες 20 χρονικές στιγμές τα z να προέρχονται από την t-student κατανομή, και ορίζουμε στο σημείο του βρόγχου στο κυρίως πρόγραμμα επιπλέον την εκτίμηση της δειγματικής διακύμανσης ενός E-GARCH (1,1) υποδείγματος για καθένα από τους δύο τίτλους, ώστε να έχουμε πάλι την απόδοση για το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Το υπολογιστικό πρόγραμμα E-Views κάνει τον έλεγχο για το μοντέλο E-GARCH θεωρώντας ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα [32.a], [33.a], και [34.a] που αντιστοιχούν στις κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης, του VaR και του TVaR αντίστοιχα.

Το μέτρο κινδύνου VaR υπό αυτή την λανθασμένη υπόθεση δε δίνει ιδιαίτερα καλά και αξιόπιστα αποτελέσματα σε σύγκριση με τα άλλα δύο μέτρα κινδύνου που όπως φαίνεται από τα διαγράμματα [32.b] και [34.b] παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα. Η βελτιστοποίηση του VaR για μη κανονικές κατανομές, όπως

έχουμε υποθέσει σ'αυτήν την περίπτωση, ακολουθεί μια πιο δύσκολη διαδιακσία απ'ότι η αντίστοιχη με το μέτρο TVaR. Επηρεάζει όπως φαίνεται τα αποτελέσματα που δίνει η βελτιστοποίηση του VaR το γεγονός ότι οι αποδόσεις δεν ακολουθούν την t-student κατανομή που χαρακτηρίζεται από πιο παχιές ουρές σε σύγκριση με την κανονική κατανομή που οι αποδόσεις κατανέμονται πιο ομαλοποιημένες στα άκρα και πιο συγκεντρωμένες γύρω από το μέσο. Παρουσιάζοντας, λοιπόν, σχετικά καλά αποτελέσματα δεδομένου του σφάλματος εξειδίκευσης, η τυπική απόκλιση και το TVaR, λόγω των ιδιοτήτων του υπολογισμού του μέτρου TVaR και της συγκριτικής υπεροχής αυτού έναντι της τυπικής απόκλισης όσον αφορά και την εξασφάλιση απέναντι στον κίνδυνο, ενδείκνυται σε σχέση με την τυπική απόκλιση.

10.4.2 ΣΦΑΛΜΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ

Στην εφαρμογή αυτή έχουμε κάνει σφάλμα εξειδίκευσης που αφορά την εξάρτηση των δύο τίτλων. Στο γενικό υπόδειγμα έχουμε υποθέσει ότι οι αποδόσεις των δύο τίτλων είναι δεσμευμένα ανεξάρτητες αλλά αδέσμευτα εξαρτημένες. Στην περίπτωση αυτή υιοθετούμε λανθασμένη την υπόθεση ότι είναι και αδέσμευτα ανεξάρτητες, δηλαδή υποθέτουμε ότι στις σχέσεις (2) και (3) $\beta_{12}=0$ και $\beta_{21}=0$ αντίστοιχα. (Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [5] του Β' μέρους του Παραρτήματος).

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι παρόμοια με αυτήν που ακολουθείται στην εφαρμογή 10.2 αλλά ορίζουμε στο σημείο του βρόγχου στο κυρίως πρόγραμμα επιπλέον την εκτίμηση της δειγματικής διακύμανσης ενός E-GARCH (1,1) υποδείγματος για καθένα από τους δύο τίτλους, ώστε να έχουμε πάλι την απόδοση για το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Θέτοντας, δηλαδή $\beta_{12}=0$ και $\beta_{21}=0$ στη συνάρτηση της διακύμανσης, αυτή παίρνει τη μορφή ενός E-GARCH (1,1) και έτσι εκτιμάμε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους E-GARCH (1,1) υποδείγματα για καθεμία από τις τελευταίες 20 χρονικές στιγμές.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα [35.a], [36.a], και [37.a] που αντιστοιχούν στις κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης, του VaR και του TVaR αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται, οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την ελαχιστοποίηση του TVaR και της τυπικής απόκλισης παρουσιάζουν αρνητική ασυμμετρία με ακραίες αρνητικές τιμές, κάτι που δεν συμβαίνει με την κατανομή που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του VaR καθότι φαίνεται ότι η μέθοδος αυτή μας δίνει χαρτοφυλάκια με καλύτερες αποδόσεις. Θεωρητικά το VaR θα ήταν το βέλτιστο μέτρο κινδύνου αλλά έχοντας κάνει λανθασμένα την υπόθεση της ανεξαρτησίας αυτό δεν ισχύει γιατί καθότι οι αποδόσεις των τίτλων είναι αδέσμευτα εξαρτημένες μεταξύ τους και το μέτρο VaR δεν λαμβάνει υπόψη του τη διαφοροποίηση, στην πραγματικότητα τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια που κατασκευάζονται υπό την ελαχιστοποίηση του VaR θα αντιμετωπίζουν μεγαλύτερο κίνδυνο απ'ότι απεικονίζεται στο γράφημα αυτό.

Σημειώνεται ότι τ'αποτελέσματα των εφαρμογών μπορεί να επηρεάζονται από το κατά πόσο οι εκτιμήσεις μας είναι σωστές, από την υπολογιστική ορθότητα των προγραμμάτων βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται κάθε φορά, και τέλος σημαντικό στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων και τη συνακόλουθη σύγκριση τους είναι η ίδια η μέθοδος σύγκρισης με την Kernel κατανομή που θεωρείται μία εκλέπτυνση του ιστογράμματος ή της συνάρτησης πυκνότητας-συχνότητας και αποτελεί μία γραφική περιγραφή των δεδομένων, η οποία μπορεί να μην αντικατοπτρίζει απόλυτα την πραγματική μορφή της κατανομής των δεδομένων καθώς εξαρτάται από την παράμετρο εξομάλυνσης ή εύρους ζώνης (h) η επιλογή του οποίου είναι κρίσιμη καθώς μεγάλη τιμή θα υπερ-εξομαλύνει ενώ μικρή τιμή θα δυσκολεύει την προσέγγιση.

10.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Διαθέτουμε τις εβδομαδιαίες αποδόσεις των μετοχών του ΟΤΕ και της Εθνικής Τράπεζας για την χρονική περίοδο 09/04/98 – 13/12/07. Οι αποδόσεις αυτές των τίτλων αναφέρονται στις λογαριθμικές υπερβάλλουσες αποδόσεις τους, οι οποίες αντιστοιχούν στην απόδοση που έχουν αφού αφαιρέσουμε την απόδοση που δίνει ένα περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate), καθώς αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να απομονώσουμε τον καθαρό κίνδυνο που διατρέχουν οι τίτλοι

ώστε βάσει των προσδοκιών μας τη στιγμή κατασκευής του χαρτοφυλακίου να συγκρίνουμε την απόδοση αυτή με την χωρίς κίνδυνο απόδοση που μας δίνει ένα άλλο περιουσιακό στοιχείο, έστω για παράδειγμα επιτόκια ενός κρατικού ομολόγου. Έτσι, σε κάθε χρονική στιγμή t, και συγκεκριμένα σε κάθε εβδομάδα t εφόσον οι παρατηρήσεις είναι εβδομαδιαίες και σ'αυτό το χρονικό διάστημα θα αναπροσαρμόζουμε καταλλήλως το χαρτοφυλάκιο μας, υπολογίζοντας το μέτρο κινδύνου που έχουμε επιλέξει με βάση την κατανομή όπως θα έχει διαμορφωθεί εκείνη τη χρονική στιγμή t για κάθε δυνατό συνδυασμό βαρών (weights), θα ελαχιστοποιούμε το εν λόγω μέτρο επιλέγοντας έτσι χαρτοφυλάκιο.

Για να υπολογίσουμε την υπερβάλλουσα λογαριθμική απόδοση θεωρούμε τα επιτόκια κρατικού ομολόγου που είναι όμως σε ετήσια βάση γι'αυτό και χρειάζεται να αναπροεξοφλήσουμε την τιμή για να συγκρίνουμε σε εβδομαδιαία βάση θεωρώντας και συνεχή ανατοκισμό. Έχουμε λοιπόν : υπερβάλλουσα λογαριθμική απόδοση = $\ln\frac{p_{t+1}}{P_t}$ - $\ln(1+r)^{\frac{1}{52}}$.

Σημειώνεται, όπως είπαμε παραπάνω, ότι αναφερόμαστε στις υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις. Η λογαριθμική απόδοση τίτλου είναι r_t = $\ln(P_t\ /P_{t-1})$, όπου P_t η τιμή της μετοχής στο χρόνο t, στο τέλος δηλαδή της εβδομάδας t. Χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική απόδοση (λογαριθμική) γιατί έχει περισσότερο νόημα από οικονομικής άποψης από τη χρησιμοποίηση της αριθμητικής απόδοσης { $r_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$ } . Πρώτον, αν οι γεωμετρικές αποδόσεις κατανέμονται κανονικά τότε η κατανομή δεν μπορεί ποτέ να οδηγήσει σε μία αρνητική τιμή (αυτό συμβαίνει γιατί η αριστερή ουρά της κατανομής καθώς $\ln(P_t - P_{t-1}) \rightarrow -\infty$ πετυχαίνεται όταν (P_t /P_{t-1}) $\rightarrow 0$ ή $P_t \rightarrow 0$). Αντίθετα, χρησιμοποιώντας κανονικά κατανεμημένες αριθμητικές αποδόσεις μπορεί να προκύψουν και αρνητικές τιμές μετοχών, γεγονός που δεν έχει κάποιο οικονομικό νόημα γιατί οι μέτοχοι έχουν περιορισμένη ευθύνη (αυτό συμβαίνει γιατί, στις κανονικά διακριτές αποδόσεις, $r_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1} \rightarrow -\infty$ πετυχαίνεται όταν (P_t /P_{t-1}) - 1 < - 1 ή $P_t < 0$). Δεύτερο πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης των λογαριθμικών αποδόσεων είναι ότι μπορούν εύκολα να επιτρέψουν επεκτάσεις σε πολλαπλές περιόδους. Για παράδειγμα, αν έχουμε μία απόδοση για το χρονικό διάστημα δύο μηνών, η γεωμετρική (λογαριθμική) απόδοση μπορεί να διασπαστεί ως εξής : $r_{t,2} = \ln(P_t / P_{t-2}) = \ln(P_{t-1} / P_{t-2}) = r_{t-1} + r_t$, έχοντας έτσι την 2-μηνών λογαριθμική απόδοση εκφρασμένη απλά ως το άθροισμα των αποδόσεων των δύο μηνών. (Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αντιστοιχεί στο πρόγραμμα [6] του Β' μέρους του Παραρτήματος).

Η διαδικασία εκτίμησης των βέλτιστων χαρτοφυλακίων για καθένα από τα μέτρα κινδύνου και η συνακόλουθη σύγκριση τους γίνεται για τις χρονικές στιγμές t = 253 έως 506. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα [38.a], [39.a], και [40.a] που αντιστοιχούν στις κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων υπό την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης, του VaR και του TVaR αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι με τη βελτιστοποίηση των τριών διαφορετικών μέτρων οι κατανομές που προκύπτουν των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που αποτελούνται από αυτές τις δύο μετοχές, δίνουν παρόμοια αποτελέσματα και δεν διαφέρουν πολύ μεταξύ τους όπως σε προηγούμενες περιπτώσεις που είχαμε ένα σχετικά μεγάλο μέγεθος δείγματος. Εφόσον οι αποκλίσεις μεταξύ τους δεν είναι ιδιαίτερες και για λόγους που έχουν αναφερθεί, όπως της αποστροφής του επενδυτή ως προς τον κίνδυνο και των πλεονεκτημάτων του TVaR έναντι των άλλων δύο μέτρων, προτιμάται το μέτρο TVaR.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

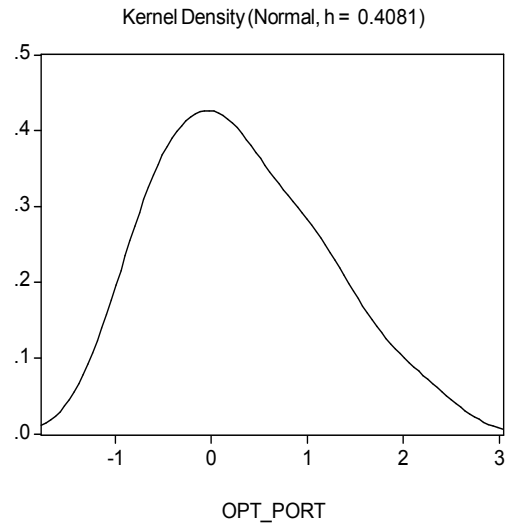
Στην παρούσα εργασία έχει γίνει ανάλυση και ερμηνεία της έννοιας του Value-at-Risk ως μέτρο αποτίμησης κινδύνου των χαρτοφυλακίων και ακολούθως σύγκριση για την αποτελεσματικότητα του και τις διαφορές ή ομοιότητες με άλλα μέτρα κινδύνου, όπως το Tail Value-at-Risk. Η κατασκευή χαρτοφυλακίου είναι ένα σύνθετο πρόβλημα που εκτός από το αντικειμενικό κριτήριο του κινδύνου που αντιμετωπίζει ένας επενδυτής στο χαρτοφυλάκιο του, σχετίζεται και με τις υποκειμενικές προτιμήσεις του και τους στόχους που ο ίδιος θέτει για τις αποδόσεις που αναμένει από την επένδυση του σε αυτό το χαρτοφυλάκιο.

Οι διαδικασίες βελτιστοποίησης των διαφορετικών μέτρων κινδύνου που διεξήχθησαν είχαν ως σκοπό την πρακτική απεικόνιση και εξέταση των θεωρητικών διαφορών και ομοιοτήτων των μέτρων αυτών, ώστε να είναι δυνατή η περαιτέρω μελέτη και σύγκριση τους από τις κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων που αποδίδει καθένα από αυτά.

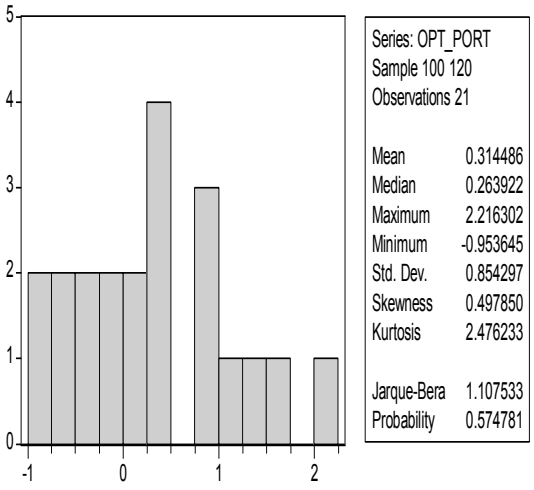
Αυτές οι διαδικασίες βελτιστοποίησης στηρίχτηκαν στην υπόθεση της κανονικότητας των αποδόσεων, για την ακρίβεια της δεσμευμένης κανονικότητας, μία υπόθεση που συνήθως δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, καθώς οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών προϊόντων τείνουν ν'ακολουθούν μία μη-κανονική κατανομή με πιο παχιές ουρές και ασυμμετρία λόγω των ακραίων αλλαγών των τιμών, όπως η t-student κατανομή. Η επέκταση των υποδειγμάτων με αντικατάσταση τέτοιων κατανομών ενδείκνυται για περαιτέρω έρευνα. Όπως επίσης, θα μπορούσε να αρθεί και η υπόθεση των μηδενικών δεσμευμένων ή μη δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών, υπόθεση που χρησιμοποιήθηκε ώστε να μη λάβουμε περιορισμούς στις βελτιστοποιήσεις που διεξήχθησαν.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

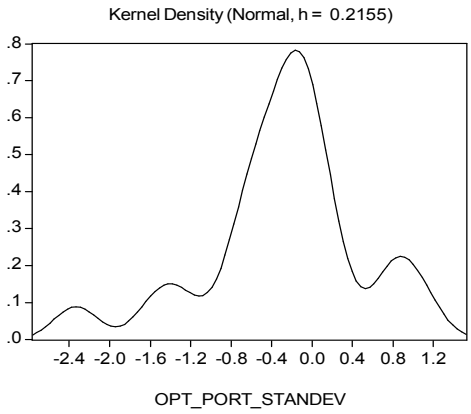
Α’ ΜΕΡΟΣ


Kernel Density (Normal, h = 0.4081)
.5
.4
.3
.2
.1
.0
-1
0
1
2
3
OPT_PORT

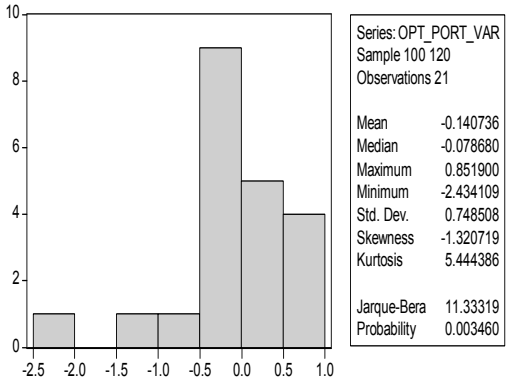
[1.a]


5
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
Series: OPT_PORT
Sample 100 120
Observations 21
Mean 0.314486
Median 0.263922
Maximum 2.216302
Minimum -0.953645
Std. Dev. 0.854297
Skewness 0.497850
Kurtosis 2.476233
Jarque-Bera 1.107533
Probability 0.574781

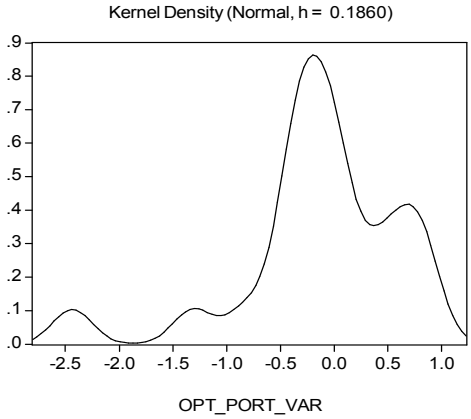
[1.b]



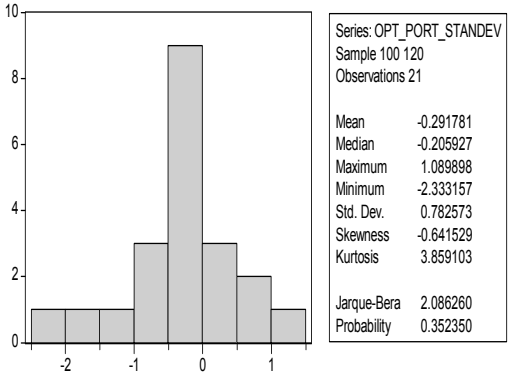
[2.a]



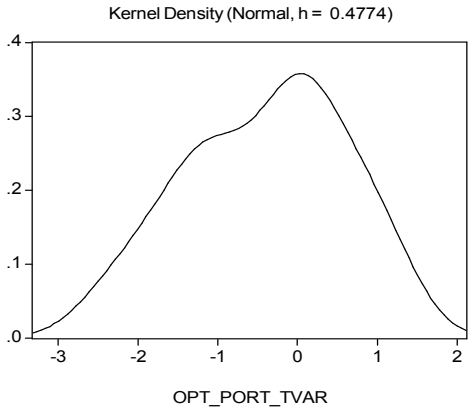
[2.b]



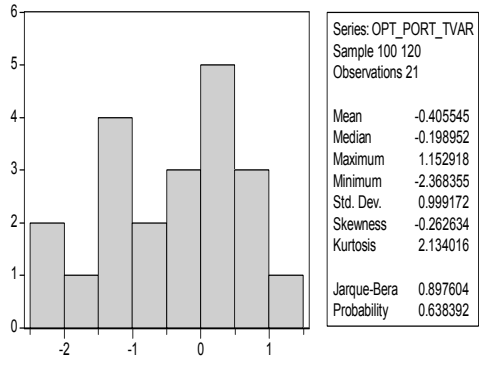
[3. a]



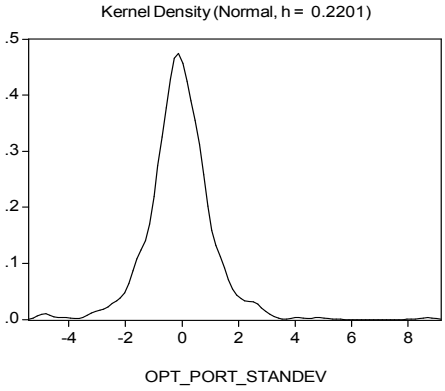
[3.b]



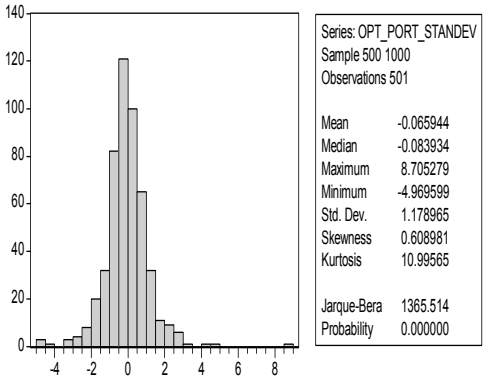
[4.a]



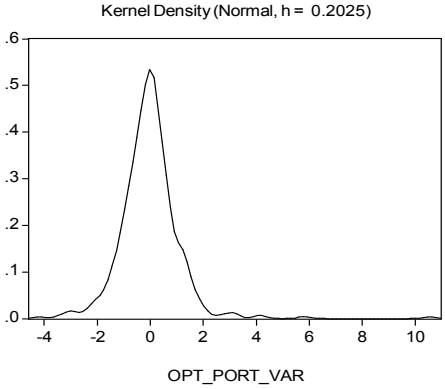
[4.b]



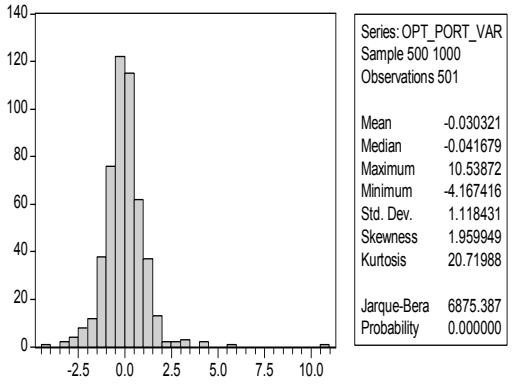
[5.a]



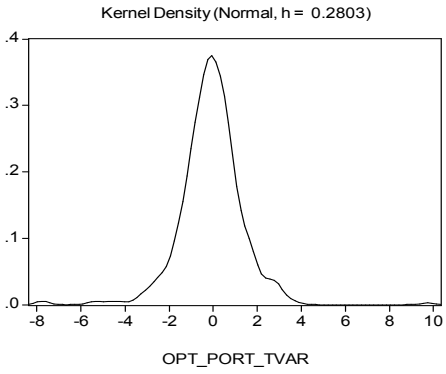
[5.b]



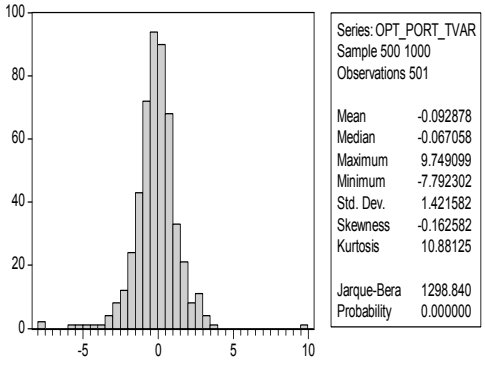
[6.a]



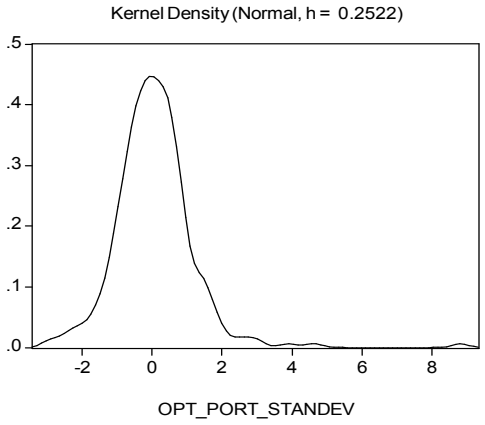
[6.b]



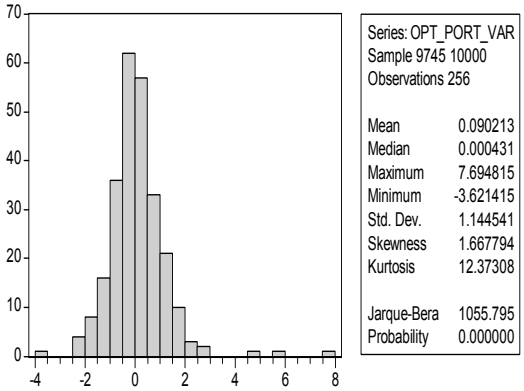
[7. a]



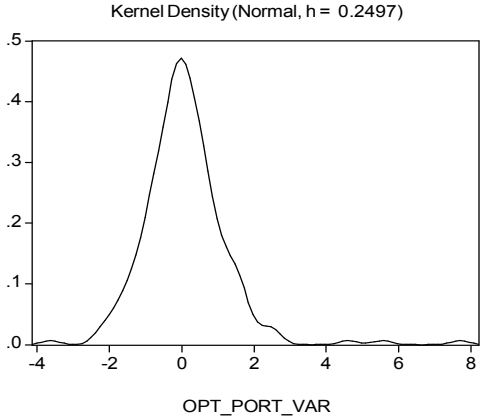
[7.b]



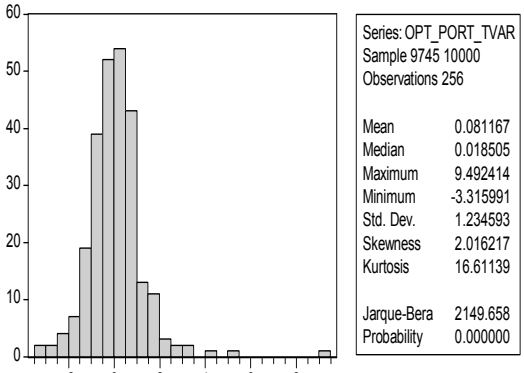
[8.a]



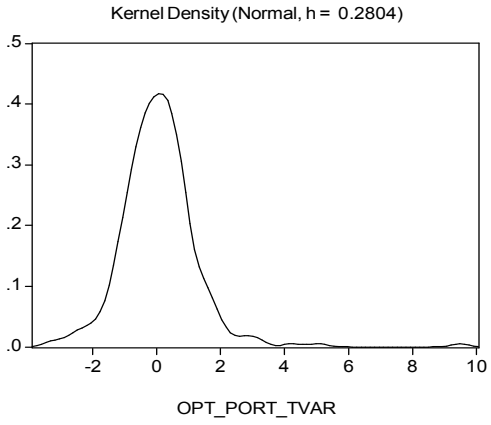
[8.b]



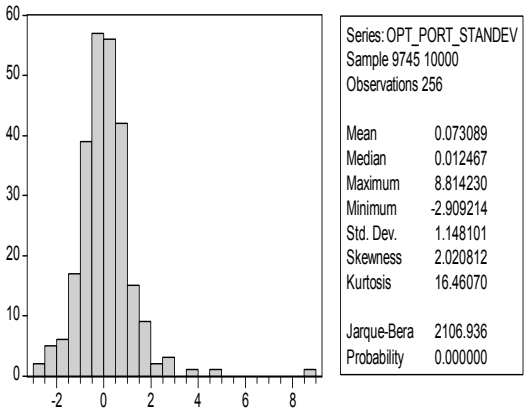
[9.a]



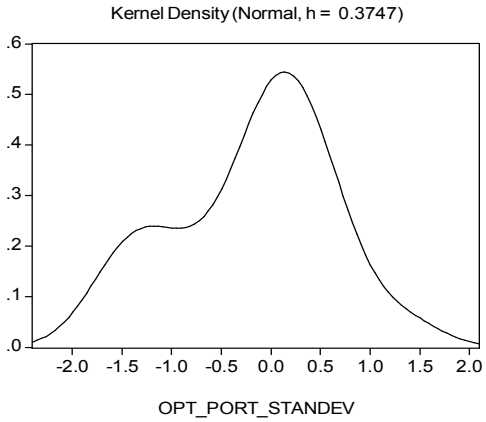
[9.b]



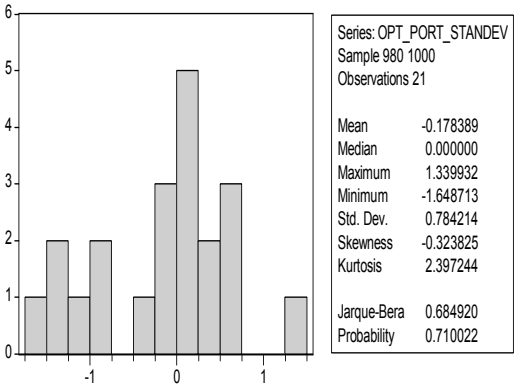
[10.a]



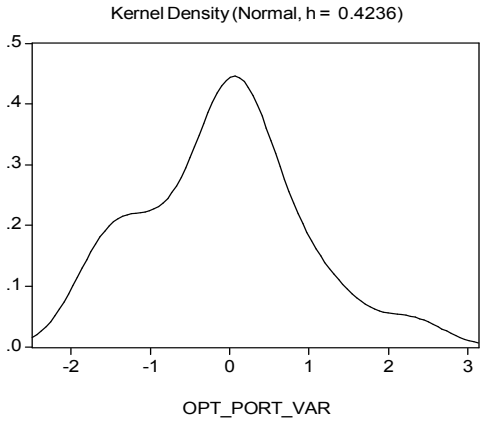
[10.b]



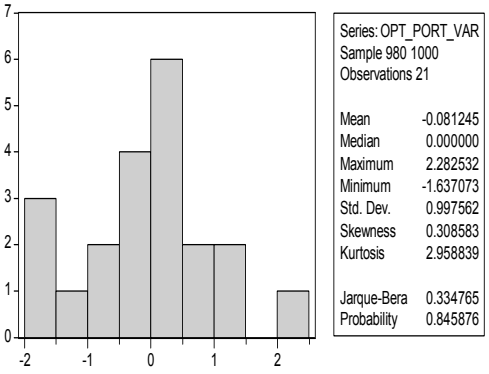
[11.a]



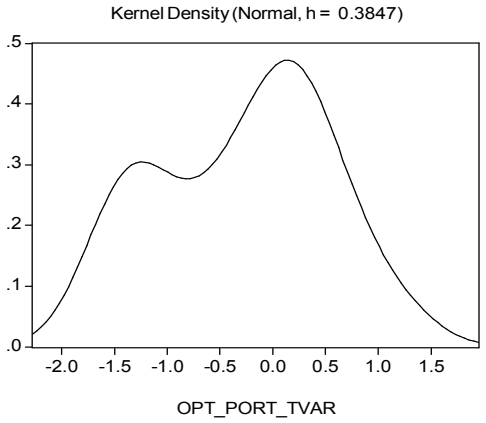
[11.b]



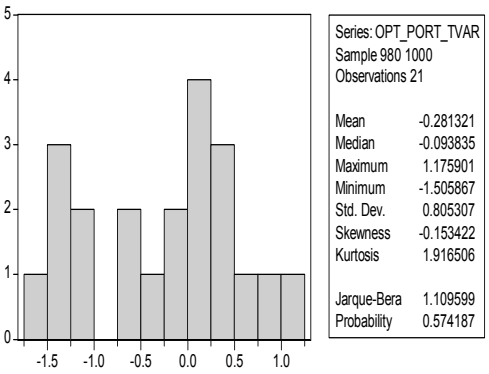
[12.a]



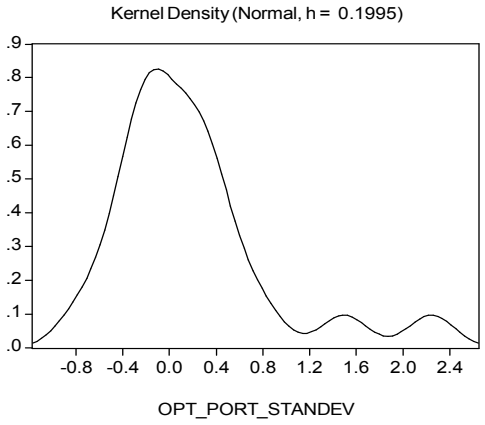
[12.b]



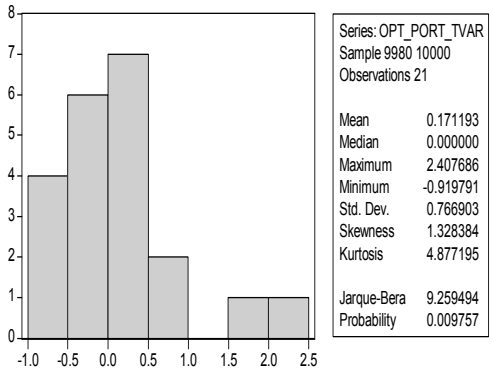
[13.a]



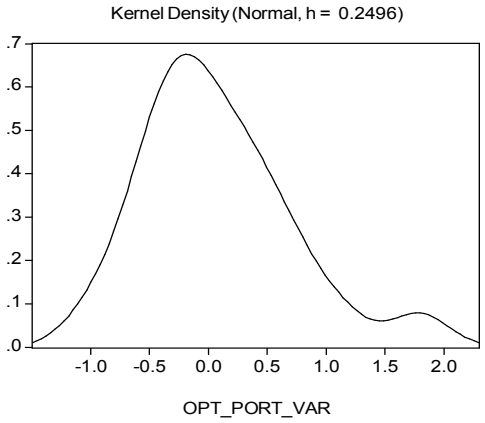
[13.b]



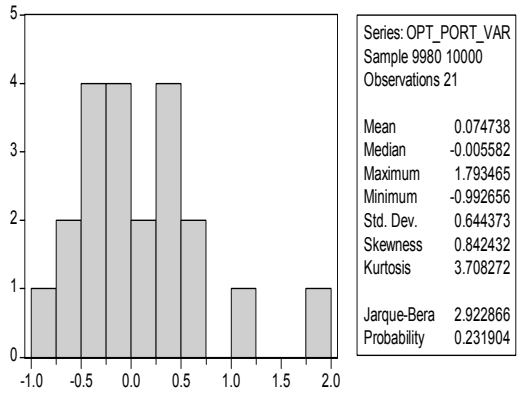
[14.a]



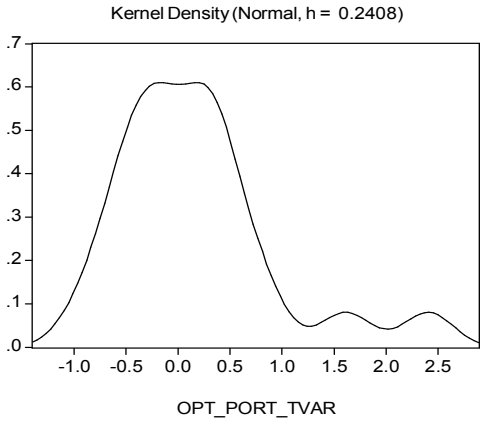
[14.b]



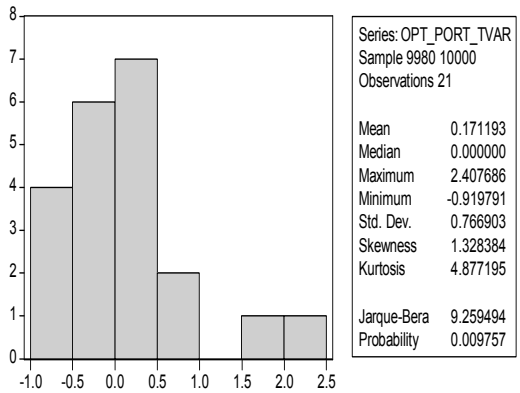
[15.a]



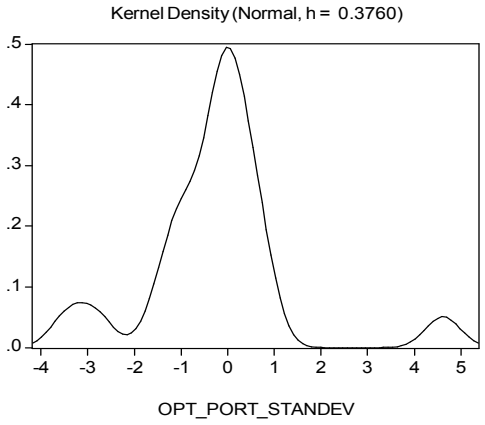
[15.b]



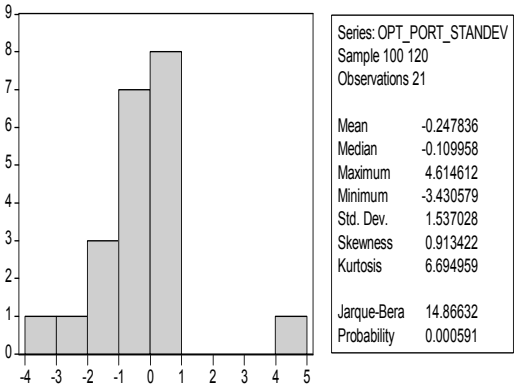
[16. a]



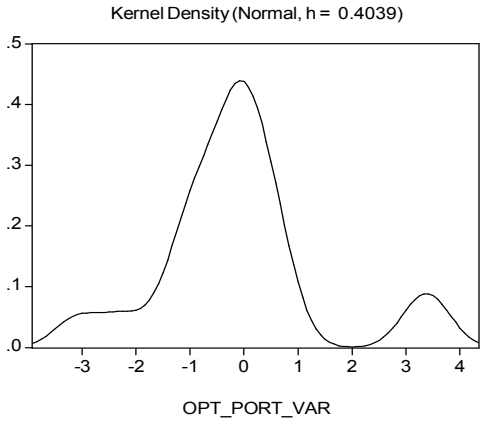
[16.b]



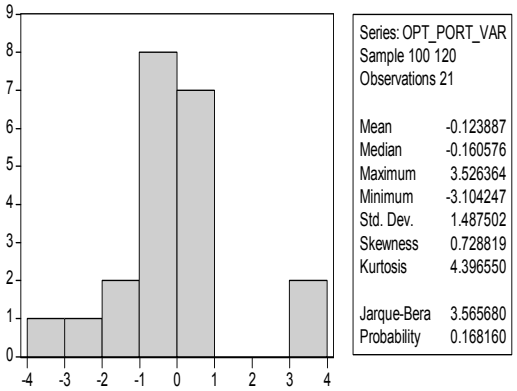
[17.a]



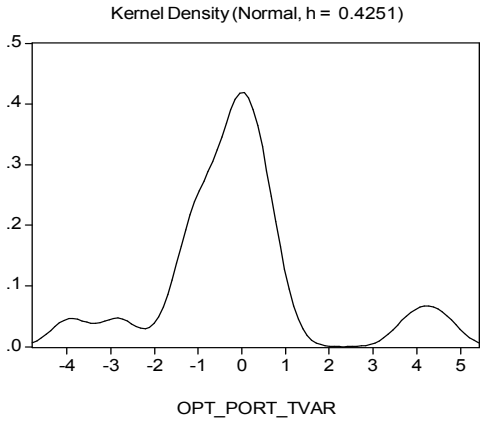
[17.b]



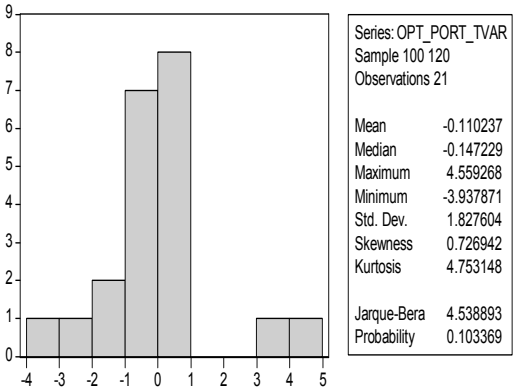
[18.a]



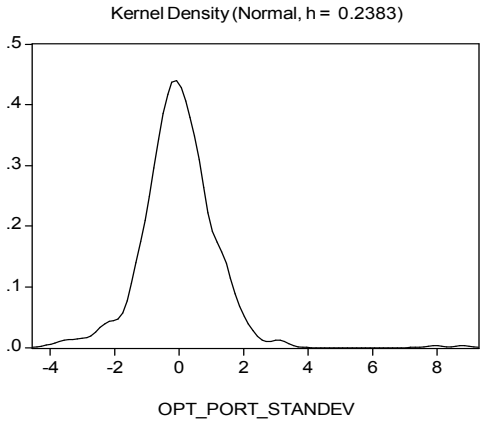
[18.b]



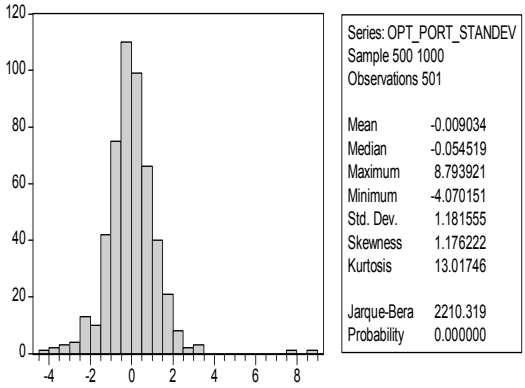
[19.a]



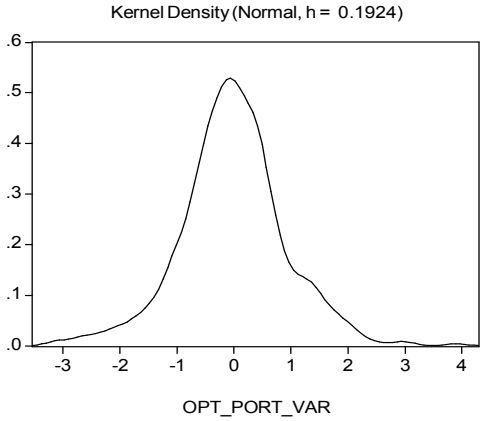
[19.b]



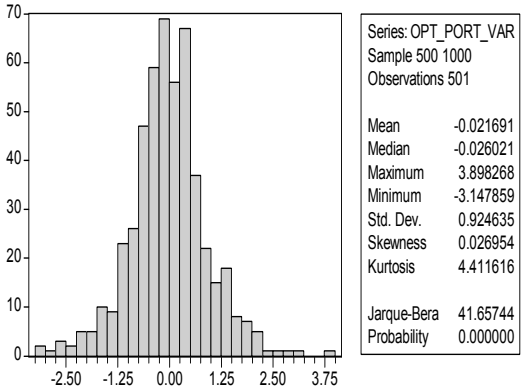
[20.a]



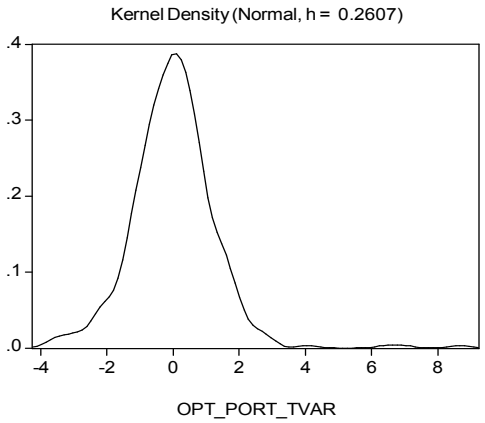
[20.b]



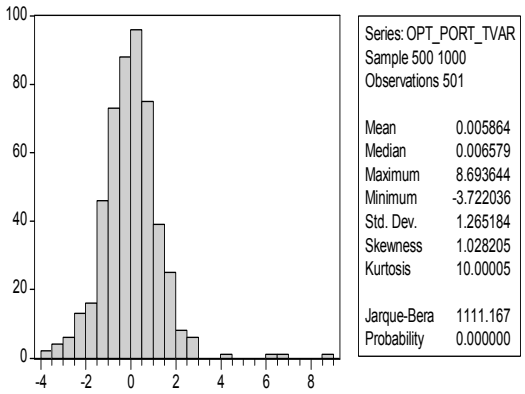
[21.a]



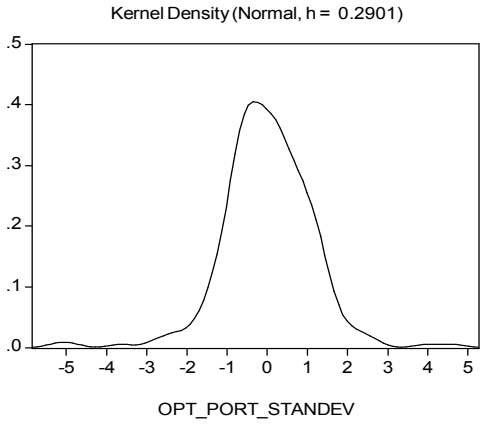
[21.b]



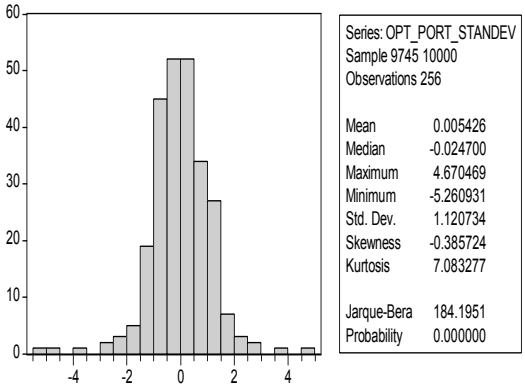
[22.a]



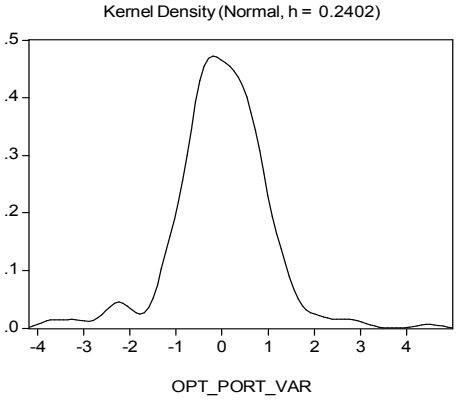
[22.b]



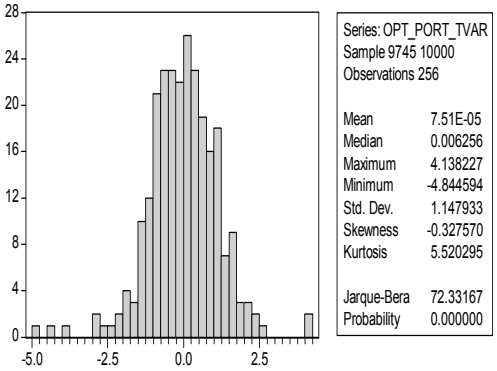
[23.a]



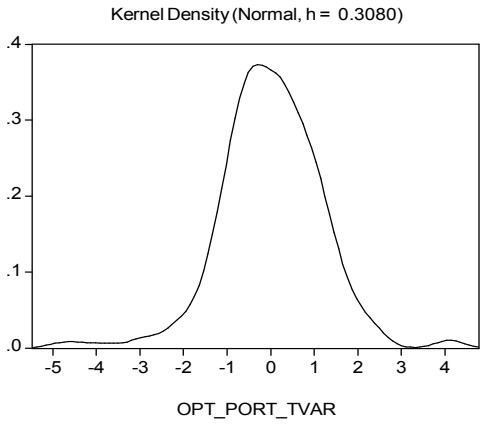
[23.b]



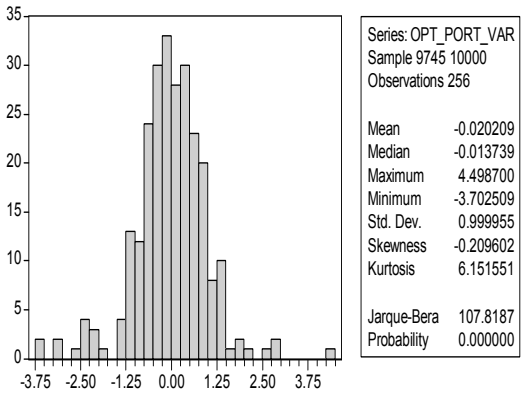
[24.a]



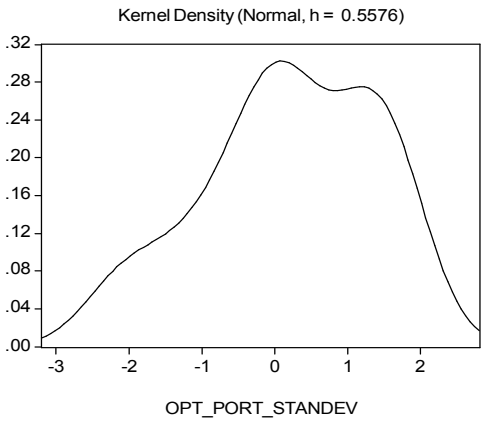
[24.b]



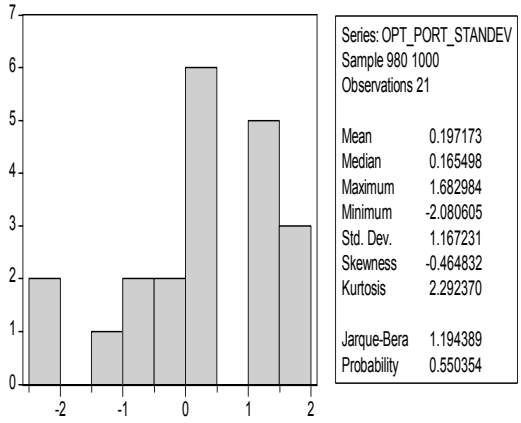
[25.a]



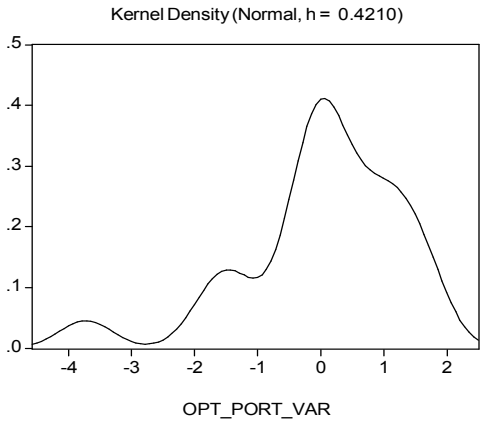
[25.b]



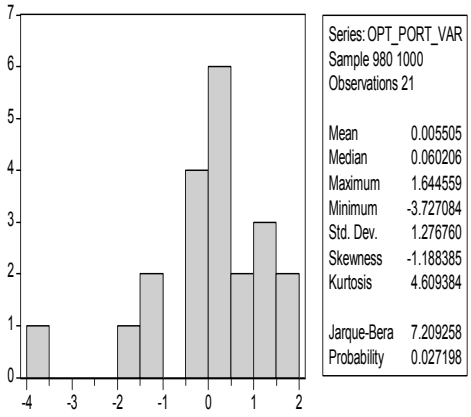
[26.a]



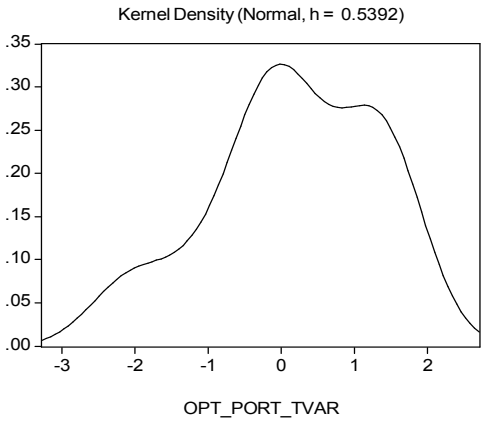
[26.b]



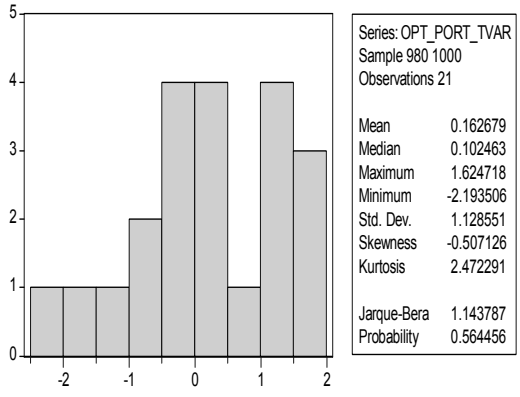
[27.a]



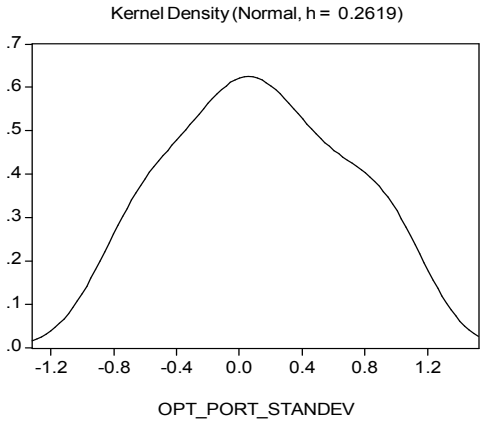
[27.b]



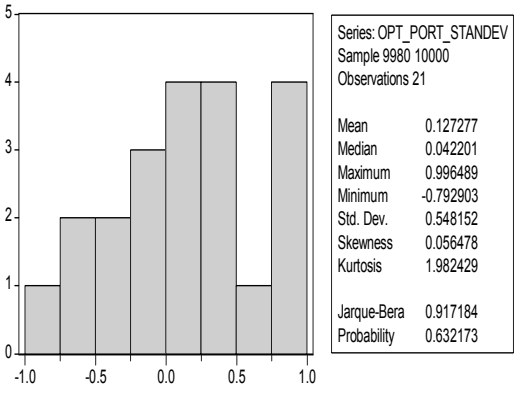
[28.a]



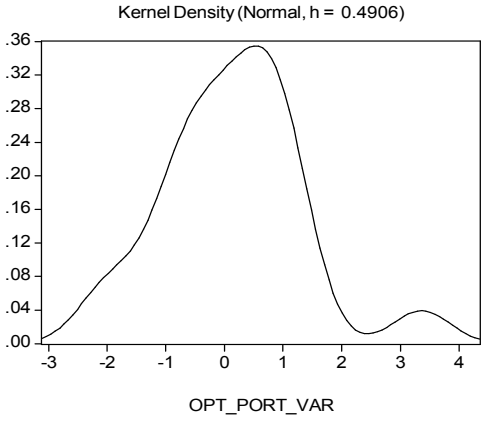
[28.b]



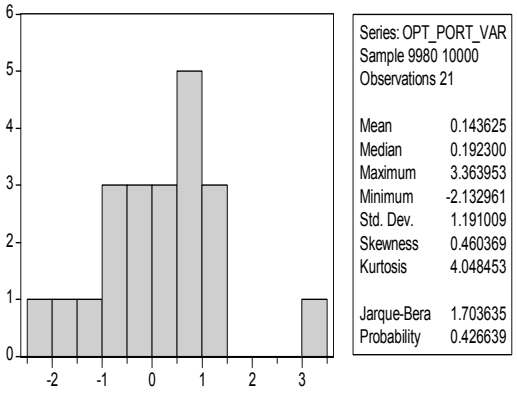
[29.a]



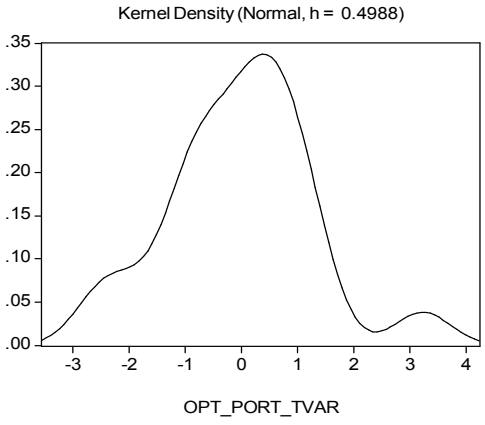
[29.b]



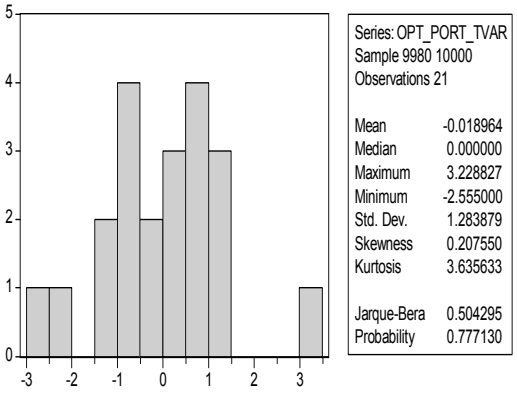
[30.a]



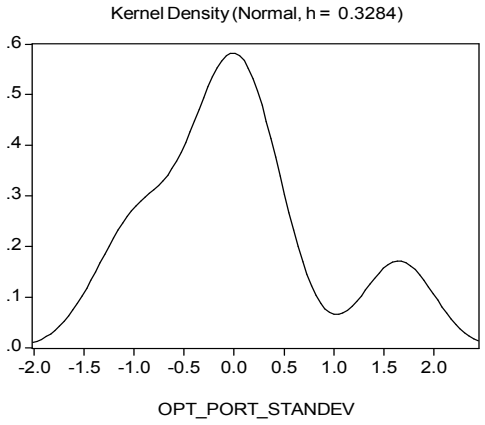
[30.b]



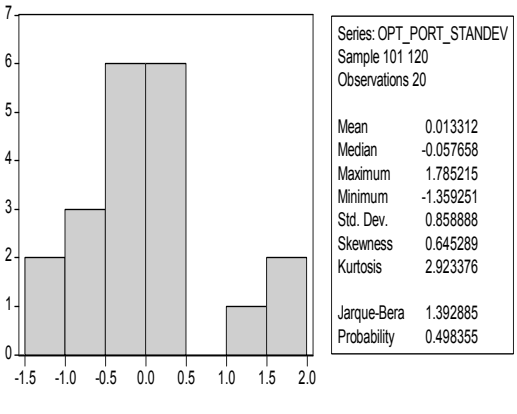
[31.a]



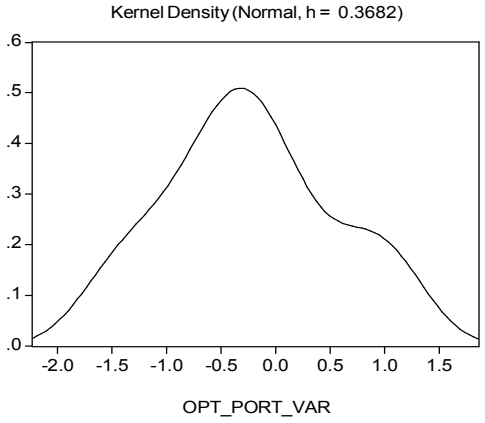
[31.b]



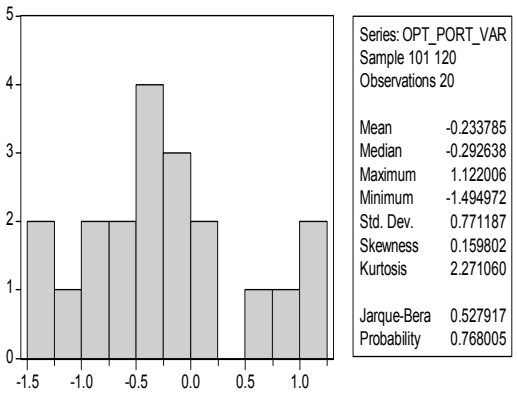
[32.a]



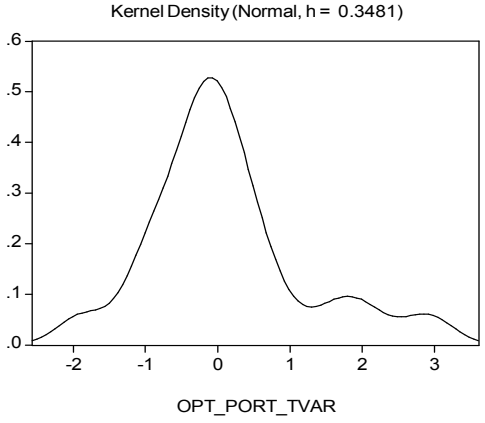
[32.b]



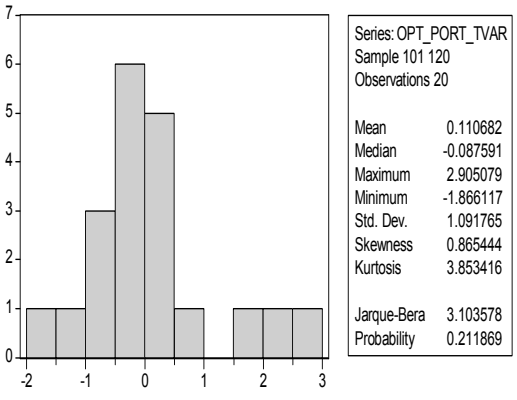
[33.a]



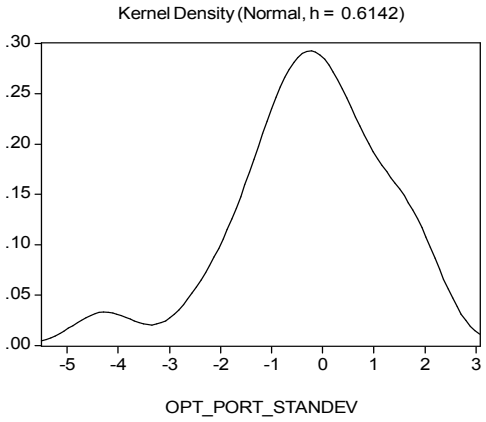
[33.b]



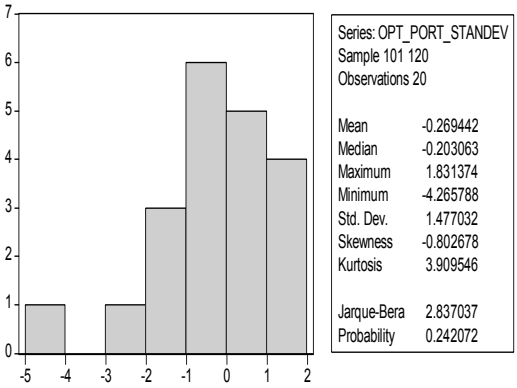
[34.a]



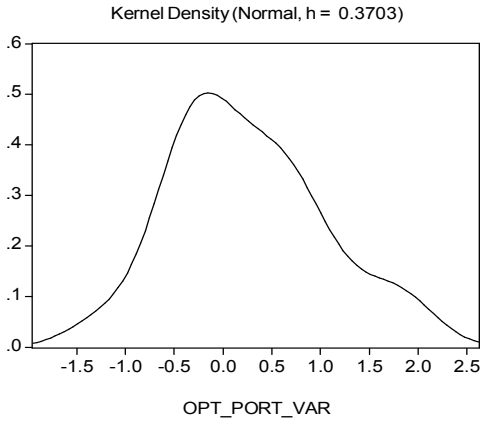
[34.b]



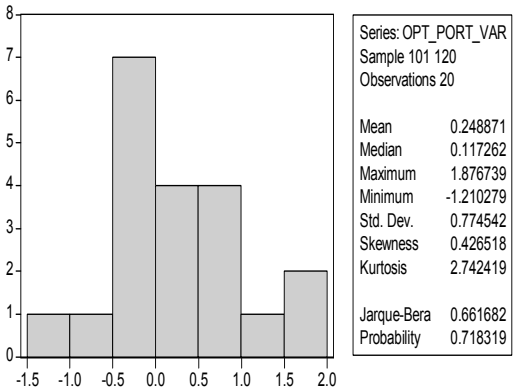
[35.a]



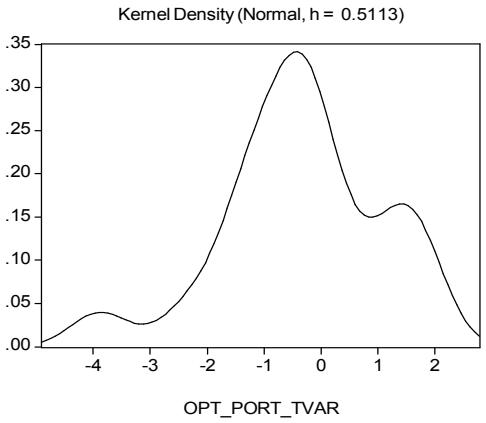
[35.b]



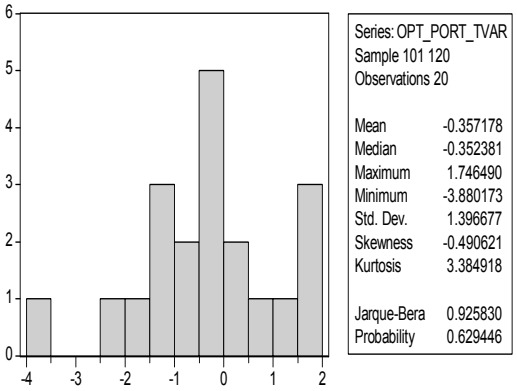
[36.a]



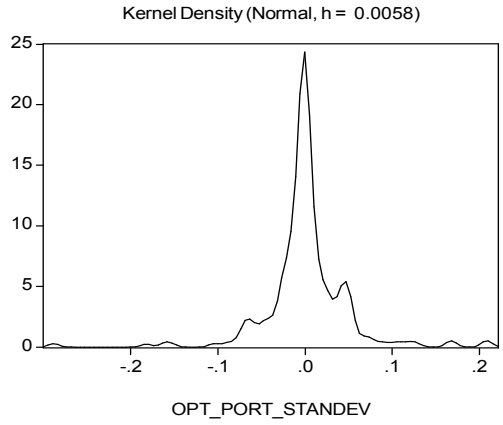
[36.b]



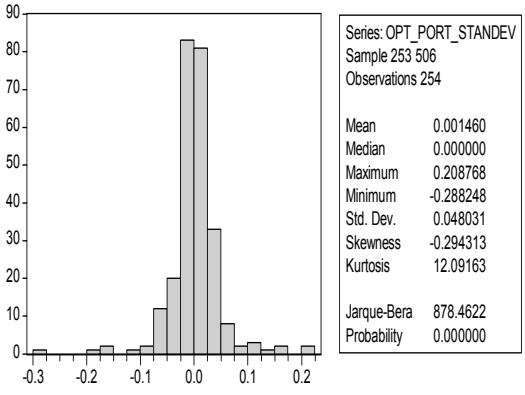
[37.a]



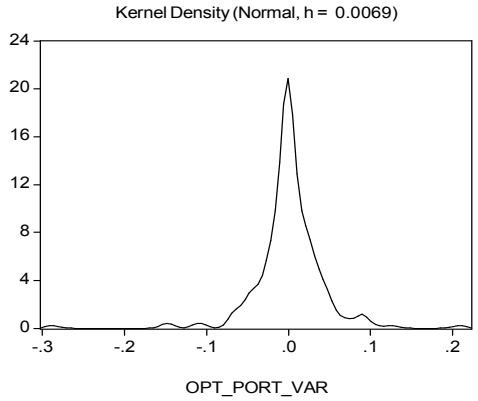
[37.b]



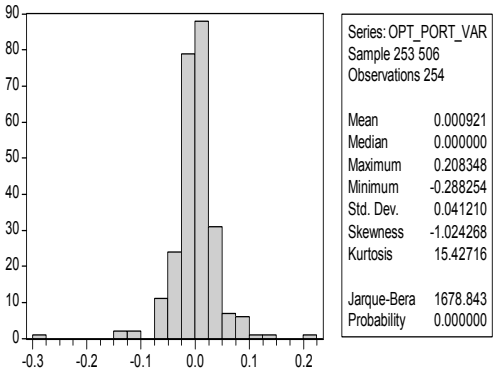
[38.a]



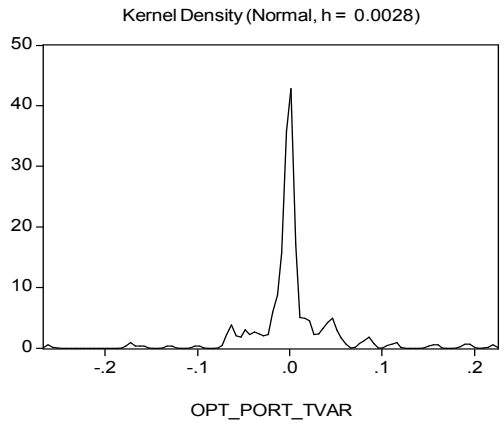
[38.b]



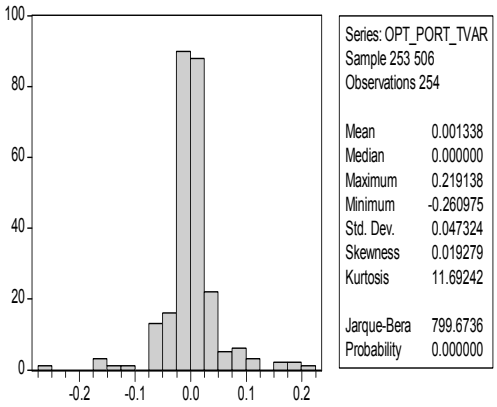
[39.a]



[39.b]



[40.a]



[40.b]

Β’ ΜΕΡΟΣ

ПРОГРАММАТА

ПРОГРАММА [1]

```
subroutine monte (series r1, series r2, vector par1, vector par2)

vector(5) par1
vector(5) par2

scalar omega_a=par1(1)
scalar alpha_a=par1(2)
scalar gamma_a=par1(3)
scalar beta_a=par1(4)
scalar beta_ab=par1(5)

scalar omega_b=par2(1)
scalar alpha_b=par2(2)
scalar gamma_b=par2(3)
scalar beta_b=par2(4)
scalar beta_ba=par2(5)

smpl s1

series z1=nrnd
series z2=nrnd

series hh1=1
series hh2=1

series r1=z1*@sqrt(hh1)
series r2=z2*@sqrt(hh2)

smpl s2

hh1=@exp(omega_a+alpha_a*@abs(z1(-1))+gamma_a*z1(-1)+beta_a*@log(hh1(-
1))+beta_ab*@log(hh2(-1)))

hh2=@exp(omega_b+alpha_b*@abs(z2(-1))+gamma_a*z2(-1)+beta_b*@log(hh2(-
1))+beta_ba*@log(hh1(-1)))


r1=z1*@sqrt(hh1)
r2=z2*@sqrt(hh2)

endsub


subroutine local mle_model (series hf1, series hf2, series r1, series r2, vector par1, vector
par2)

!rows=@obs(r1)
```

```
sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2

coef(1) lomega_a=par1(1)
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1
ll1.append hf2=1
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-
1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-
1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-
1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-
1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)


ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)


endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight, scalar h1, scalar h2, scalar alpha)

logl ll2
```

```
series help1=h1
series help2=h2

coef(1) w=0
ll2.append @logl lik2
ll2.append lik2=-@sin(w(1))*@sin(w(1))*help1-(1-@sin(w(1)))*(1-@sin(w(1)))*help2
ll2.ml

opt_weight=@abs(@sin(w(1)))

endsub

workfile initial_exercise u 1 120


sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 100 @last
sample s4 101 @last

smpl s1

scalar s=20
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
par1(5)=0.4

vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

call monte ( r1, r2, par1, par2 )


vector(s) opt_weight

scalar alpha=0.05

scalar sc1

series Opt_Port=0

for !i=1 to s

smpl 1 100+!i-1

series hf1=0
```

```
series hf2=0

call mle_model (hf1, hf2, r1, r2, par1, par2 )
smpl 1 100+!i-1
sc1=0
call Port_Choice (sc1, hf1(100+!i-1), hf2(100+!i-1),  alpha)
opt_weight(!i)=sc1
Opt_Port(100+!i)=opt_weight(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight(!i))*r2(100+!i)
next
smpl s3
Opt_Port.kdensity(k=n)
```

ПРОГРАММА [2]

```
subroutine monte (series r1, series r2, vector par1, vector par2)

vector(5) par1
vector(5) par2

scalar omega_a=par1(1)
scalar alpha_a=par1(2)
scalar gamma_a=par1(3)
scalar beta_a=par1(4)
scalar beta_ab=par1(5)

scalar omega_b=par2(1)
scalar alpha_b=par2(2)
scalar gamma_b=par2(3)
scalar beta_b=par2(4)
scalar beta_ba=par2(5)

smpl s1

series z1=nrnd
series z2=nrnd

series hh1=1
series hh2=1

series r1=z1*@sqrt(hh1)
series r2=z2*@sqrt(hh2)

smpl s2

hh1=@exp(omega_a+alpha_a*@abs(z1(-1))+gamma_a*z1(-1)+beta_a*@log(hh1(-
1))+beta_ab*@log(hh2(-1)))

hh2=@exp(omega_b+alpha_b*@abs(z2(-1))+gamma_b*z2(-1)+beta_b*@log(hh2(-
1))+beta_ba*@log(hh1(-1)))


r1=z1*@sqrt(hh1)
r2=z2*@sqrt(hh2)

endsub


subroutine local mle_model (series zf1, series zf2, series r1, series r2, vector par1, vector
par2)

!rows=@obs(r1)

sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2
```

```
coef(1) lomega_a=par1(1)
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1.5
ll1.append hf2=1.5
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-
1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-
1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-
1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-
1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)


ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)

smpl ss1

series zf1=r1/@sqrt(hf1)
series zf2=r2/@sqrt(hf2)

endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight_StanDev,scalar opt_weight_VaR, scalar
opt_weight_TVaR, series A, series B, scalar alpha)


logl ll2
```

```
coef(1) w=0
series help=0

ll2.append @logl lik2
ll2.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll2.append lik2=-@sqrt(@var(help))
ll2.ml
opt_weight_StanDev=@abs(@sin(w(1)))


logl ll3

coef(1) w=0
series help=0
series alphas=alpha

ll3.append @logl lik3
ll3.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll3.append lik3=-@mean(help)+@quantile(help,alphas)
ll3.ml
opt_weight_VaR=@abs(@sin(w(1)))

logl ll4

coef(1) w=2
series help=0
series help1=0
series help2=0
series help3=0
series help4=1


ll4.append @logl lik4
ll4.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B

ll4.append help1=help*(help<= @quantile(help,alphas))
ll4.append lik4=-@mean(help)+@mean(help1<>0)
ll4.ml
opt_weight_TVaR=@abs(@sin(w(1)))

endsub

workfile initial_exercise u 1 120


sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 100 @last
sample s4 101 @last

smpl s1

scalar s=20
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
```

```
par1(5)=0.4

vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

call monte ( r1, r2, par1, par2 )


vector(s) opt_weight_StanDev
vector(s) opt_weight_VaR
vector(s) opt_weight_TVaR

scalar alpha=0.05

scalar sc1
scalar sc2
scalar sc3

series Opt_Port_StanDev=0
series Opt_Port_VaR=0
series Opt_Port_TVaR=0

for !i=1 to s

smpl 1 100+!i-1

series zf1=0
series zf2=0


call mle_model (zf1, zf2, r1, r2, par1, par2 )


sc1=0
sc2=0
sc3=0

call Port_Choice (sc1, sc2, sc3, zf1, zf2,  alpha)

opt_weight_StanDev(!i)=sc1
opt_weight_VaR(!i)=sc2
opt_weight_TVaR(!i)=sc3

Opt_Port_StanDev(100+!i)=opt_weight_StanDev(!i)*r1(100+!i)+(1-
opt_weight_StanDev(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_VaR(100+!i)=opt_weight_VaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_VaR(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_TVaR(100+!i)=opt_weight_TVaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_TVaR(!i))*r2(100+!i)

next

smpl s3
```

Opt_Port_StanDev.kdensity(k=n)
Opt_Port_VaR.kdensity(k=n)
Opt_Port_TVaR.kdensity(k=n)

ПРОГРАММА [3]

```
subroutine monte (series r1, series r2, vector par1, vector par2)

vector(5) par1
vector(5) par2

scalar omega_a=par1(1)
scalar alpha_a=par1(2)
scalar gamma_a=par1(3)
scalar beta_a=par1(4)
scalar beta_ab=par1(5)

scalar omega_b=par2(1)
scalar alpha_b=par2(2)
scalar gamma_b=par2(3)
scalar beta_b=par2(4)
scalar beta_ba=par2(5)

smpl s1

series z1=nrnd
series z2=nrnd

series hh1=1
series hh2=1

series r1=z1*@sqrt(hh1)
series r2=z2*@sqrt(hh2)

smpl s2

hh1=@exp(omega_a+alpha_a*@abs(z1(-1))+gamma_a*z1(-1)+beta_a*@log(hh1(-
1))+beta_ab*@log(hh2(-1)))

hh2=@exp(omega_b+alpha_b*@abs(z2(-1))+gamma_b*z2(-1)+beta_b*@log(hh2(-
1))+beta_ba*@log(hh1(-1)))


r1=z1*@sqrt(hh1)
r2=z2*@sqrt(hh2)

endsub


subroutine local mle_model (series zf1, series zf2, series r1, series r2, vector par1, vector
par2)

!rows=@obs(r1)

sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2

coef(1) lomega_a=par1(1)
```

```
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1.5
ll1.append hf2=1.5
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-
1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-
1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-
1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-
1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)


ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)

smpl ss1

series zf1=r1/@sqrt(hf1)
series zf2=r2/@sqrt(hf2)

endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight_StanDev,scalar opt_weight_VaR, scalar
opt_weight_TVaR, series A, series B, scalar alpha)


logl ll2

coef(1) w=0
```

```
series help=0

ll2.append @logl lik2
ll2.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll2.append lik2=-@sqrt(@var(help))
ll2.ml
opt_weight_StanDev=@abs(@sin(w(1)))


logl ll3

coef(1) w=0
series help=0
series alphas=alpha

ll3.append @logl lik3
ll3.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll3.append lik3=-@mean(help)+@quantile(help,alphas)
ll3.ml
opt_weight_VaR=@abs(@sin(w(1)))

logl ll4

coef(1) w=2
series help=0
series help1=0
series help2=0
series help3=0
series help4=1


ll4.append @logl lik4
ll4.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B

ll4.append help1=help*(help<= @quantile(help,alphas))
ll4.append lik4=-@mean(help)+@mean(help1<>0)
ll4.ml
opt_weight_TVaR=@abs(@sin(w(1)))

endsub

workfile initial_exercise u 1 120


sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 100 @last
sample s4 101 @last

smpl s1

scalar s=20
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
par1(5)=0.4
```

```
vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

call monte ( r1, r2, par1, par2 )


vector(s) opt_weight_StanDev
vector(s) opt_weight_VaR
vector(s) opt_weight_TVaR

scalar alpha=0.05

scalar sc1
scalar sc2
scalar sc3

series Opt_Port_StanDev=0
series Opt_Port_VaR=0
series Opt_Port_TVaR=0

for !i=1 to s

smpl 1 100+!i-1

series zf1=0
series zf2=0

call Port_Choice (sc1, sc2, sc3, r1, r2,  alpha)

opt_weight_StanDev(!i)=sc1
opt_weight_VaR(!i)=sc2
opt_weight_TVaR(!i)=sc3

Opt_Port_StanDev(100+!i)=opt_weight_StanDev(!i)*r1(100+!i)+(1-
opt_weight_StanDev(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_VaR(100+!i)=opt_weight_VaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_VaR(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_TVaR(100+!i)=opt_weight_TVaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_TVaR(!i))*r2(100+!i)

next

smpl s3

Opt_Port_StanDev.kdensity(k=n)
Opt_Port_VaR.kdensity(k=n)
Opt_Port_TVaR.kdensity(k=n)
```

ПРОГРАММА [4]

```
subroutine monte (series r1, series r2, vector par1, vector par2)

vector(5) par1
vector(5) par2

scalar omega_a=par1(1)
scalar alpha_a=par1(2)
scalar gamma_a=par1(3)
scalar beta_a=par1(4)
scalar beta_ab=par1(5)

scalar omega_b=par2(1)
scalar alpha_b=par2(2)
scalar gamma_b=par2(3)
scalar beta_b=par2(4)
scalar beta_ba=par2(5)

smpl s1

series z1=@rtdist(20)
series z2=@rtdist(20)

series hh1=1
series hh2=1

series r1=z1*@sqrt(hh1)
series r2=z2*@sqrt(hh2)

smpl s2

hh1=@exp(omega_a+alpha_a*@abs(z1(-1))+gamma_a*z1(-1)+beta_a*@log(hh1(-
1))+beta_ab*@log(hh2(-1)))

hh2=@exp(omega_b+alpha_b*@abs(z2(-1))+gamma_b*z2(-1)+beta_b*@log(hh2(-
1))+beta_ba*@log(hh1(-1)))


r1=z1*@sqrt(hh1)
r2=z2*@sqrt(hh2)

endsub


subroutine local mle_model (series zf1, series zf2, series r1, series r2, vector par1, vector
par2)

!rows=@obs(r1)

sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2

coef(1) lomega_a=par1(1)
```

```
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1.5
ll1.append hf2=1.5
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-
1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-
1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-
1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-
1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)


ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)

smpl ss1

series zf1=r1/@sqrt(hf1)
series zf2=r2/@sqrt(hf2)

endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight_StanDev,scalar opt_weight_VaR, scalar
opt_weight_TVaR, series A, series B, scalar alpha)


logl ll2

coef(1) w=0
```

```
series help=0

ll2.append @logl lik2
ll2.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll2.append lik2=-@sqrt(@var(help))
ll2.ml
opt_weight_StanDev=@abs(@sin(w(1)))


logl ll3

coef(1) w=0
series help=0
series alphas=alpha

ll3.append @logl lik3
ll3.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll3.append lik3=-@mean(help)+@quantile(help,alphas)
ll3.ml
opt_weight_VaR=@abs(@sin(w(1)))

logl ll4

coef(1) w=2
series help=0
series help1=0
series help2=0
series help3=0
series help4=1


ll4.append @logl lik4
ll4.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B

ll4.append help1=help*(help<= @quantile(help,alphas))
ll4.append lik4=-@mean(help)+@mean(help1<>0)
ll4.ml
opt_weight_TVaR=@abs(@sin(w(1)))

endsub

workfile initial_exercise u 1 120


sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 100 @last
sample s4 101 @last

smpl s1

scalar s=20
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
par1(5)=0.4
```

```
vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

call monte ( r1, r2, par1, par2 )


vector(s) opt_weight_StanDev
vector(s) opt_weight_VaR
vector(s) opt_weight_TVaR

scalar alpha=0.05


scalar sc1
scalar sc2
scalar sc3

series Opt_Port_StanDev=0
series Opt_Port_VaR=0
series Opt_Port_TVaR=0

for !i=1 to s

smpl 1 100+!i-1

series hf1=0
series hf2=0
series zf1=0
series zf2=0

vector(10) est=0


equation eq1.arch(1,1,e) r1
eq1.makegarch hf1
zf1=r1/@sqrt(hf1)

equation eq2.arch(1,1,e) r2
eq2.makegarch hf2
zf2=r2/@sqrt(hf2)


sc1=0
sc2=0
sc3=0

call Port_Choice (sc1, sc2, sc3, zf1, zf2,  alpha)

opt_weight_StanDev(!i)=sc1
opt_weight_VaR(!i)=sc2
opt_weight_TVaR(!i)=sc3
```

```
Opt_Port_StanDev(100+!i)=opt_weight_StanDev(!i)*r1(100+!i)+(1-
opt_weight_StanDev(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_VaR(100+!i)=opt_weight_VaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_VaR(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_TVaR(100+!i)=opt_weight_TVaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_TVaR(!i))*r2(100+!i)

next

smpl s4

Opt_Port_StanDev.kdensity(k=n)
Opt_Port_VaR.kdensity(k=n)
Opt_Port_TVaR.kdensity(k=n)
```

ПРОГРАММА [5]

```
subroutine monte (series r1, series r2, vector par1, vector par2)

vector(5) par1
vector(5) par2

scalar omega_a=par1(1)
scalar alpha_a=par1(2)
scalar gamma_a=par1(3)
scalar beta_a=par1(4)
scalar beta_ab=par1(5)

scalar omega_b=par2(1)
scalar alpha_b=par2(2)
scalar gamma_b=par2(3)
scalar beta_b=par2(4)
scalar beta_ba=par2(5)

smpl s1

series z1=nrnd
series z2=nrnd

series hh1=1
series hh2=1

series r1=z1*@sqrt(hh1)
series r2=z2*@sqrt(hh2)

smpl s2

hh1=@exp(omega_a+alpha_a*@abs(z1(-1))+gamma_a*z1(-1)+beta_a*@log(hh1(-
1))+beta_ab*@log(hh2(-1)))

hh2=@exp(omega_b+alpha_b*@abs(z2(-1))+gamma_b*z2(-1)+beta_b*@log(hh2(-
1))+beta_ba*@log(hh1(-1)))


r1=z1*@sqrt(hh1)
r2=z2*@sqrt(hh2)

endsub


subroutine local mle_model (series zf1, series zf2, series r1, series r2, vector par1, vector
par2)

!rows=@obs(r1)

sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2
```

```
coef(1) lomega_a=par1(1)
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1.5
ll1.append hf2=1.5
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-
1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-
1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-
1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-
1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)


ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)

smpl ss1

series zf1=r1/@sqrt(hf1)
series zf2=r2/@sqrt(hf2)

endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight_StanDev,scalar opt_weight_VaR, scalar
opt_weight_TVaR, series A, series B, scalar alpha)


logl ll2
```

```
coef(1) w=0
series help=0

ll2.append @logl lik2
ll2.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll2.append lik2=-@sqrt(@var(help))
ll2.ml
opt_weight_StanDev=@abs(@sin(w(1)))


logl ll3

coef(1) w=0
series help=0
series alphas=alpha

ll3.append @logl lik3
ll3.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll3.append lik3=-@mean(help)+@quantile(help,alphas)
ll3.ml
opt_weight_VaR=@abs(@sin(w(1)))

logl ll4

coef(1) w=2
series help=0
series help1=0
series help2=0
series help3=0
series help4=1


ll4.append @logl lik4
ll4.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B

ll4.append help1=help*(help<= @quantile(help,alphas))
ll4.append lik4=-@mean(help)+@mean(help1<>0)
ll4.ml
opt_weight_TVaR=@abs(@sin(w(1)))

endsub

workfile initial_exercise u 1 120


sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 100 @last
sample s4 101 @last

smpl s1

scalar s=20
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
```

```
par1(5)=0.4

vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

call monte ( r1, r2, par1, par2 )


vector(s) opt_weight_StanDev
vector(s) opt_weight_VaR
vector(s) opt_weight_TVaR

scalar alpha=0.05


scalar sc1
scalar sc2
scalar sc3

series Opt_Port_StanDev=0
series Opt_Port_VaR=0
series Opt_Port_TVaR=0

for !i=1 to s

smpl 1 100+!i-1

series hf1=0
series hf2=0
series zf1=0
series zf2=0

vector(10) est=0


equation eq1.arch(1,1,e) r1
eq1.makegarch hf1
zf1=r1/@sqrt(hf1)

equation eq2.arch(1,1,e) r2
eq2.makegarch hf2
zf2=r2/@sqrt(hf2)


sc1=0
sc2=0
sc3=0

call Port_Choice (sc1, sc2, sc3, zf1, zf2,  alpha)

opt_weight_StanDev(!i)=sc1
opt_weight_VaR(!i)=sc2
```

```
opt_weight_TVaR(!i)=sc3

Opt_Port_StanDev(100+!i)=opt_weight_StanDev(!i)*r1(100+!i)+(1-
opt_weight_StanDev(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_VaR(100+!i)=opt_weight_VaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_VaR(!i))*r2(100+!i)
Opt_Port_TVaR(100+!i)=opt_weight_TVaR(!i)*r1(100+!i)+(1-opt_weight_TVaR(!i))*r2(100+!i)

next

smpl s4

Opt_Port_StanDev.kdensity(k=n)
Opt_Port_VaR.kdensity(k=n)
Opt_Port_TVaR.kdensity(k=n)
```

ПРОГРАММА [6]

```
subroutine local mle_model (series zf1, series zf2, series r1, series r2, vector par1, vector par2)

!rows=@obs(r1)

sample ss1 1 !rows
sample ss2 2 !rows


vector(5) par1
vector(5) par2

coef(1) lomega_a=par1(1)
coef(1) lalpha_a=par1(2)
coef(1) lgamma_a=par1(3)
coef(1) lbeta_a=par1(4)
coef(1) lbeta_ab=par1(5)

coef(1) lomega_b=par2(1)
coef(1) lalpha_b=par2(2)
coef(1) lgamma_b=par2(3)
coef(1) lbeta_b=par2(4)
coef(1) lbeta_ba=par2(5)

logl ll1

ll1.append @logl lik1

smpl ss1

series hf1=1
series hf2=1

ll1.append hf1=1.5
ll1.append hf2=1.5
ll1.append lik1=-0.5*(r1*r1+ r2*r2)


smpl ss2

series hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))
series hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append hf1=@exp(lomega_a(1)+lalpha_a(1)*@abs(r1(-1)/@sqrt(hf1(-1)))+lgamma_a(1)*r1(-1)/@sqrt(hf1(-1))+lbeta_a(1)*@log(hf1(-1))+lbeta_ab(1)*@log(hf2(-1)))

ll1.append hf2=@exp(lomega_b(1)+lalpha_b(1)*@abs(r2(-1)/@sqrt(hf2(-1)))+lgamma_b(1)*r2(-1)/@sqrt(hf2(-1))+lbeta_b(1)*@log(hf2(-1))+ lbeta_ba(1)*@log(hf1(-1)))


ll1.append lik1=-0.5*((r1*r1/hf1)+r2*r2/(hf2))-0.5*@log(hf1*hf2)
```

```
ll1.ml(b, m=1000000, c=0.0000001, showopts)

smpl ss1

series zf1=r1/@sqrt(hf1)
series zf2=r2/@sqrt(hf2)

endsub


subroutine local Port_Choice (scalar opt_weight_StanDev,scalar opt_weight_VaR, scalar
opt_weight_TVaR, series A, series B, scalar alpha)


logl ll2

coef(1) w=0
series help=0

ll2.append @logl lik2
ll2.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll2.append lik2=-@sqrt(@var(help))
ll2.ml
opt_weight_StanDev=@abs(@sin(w(1)))


logl ll3

coef(1) w=0
series help=0
series alphas=alpha

ll3.append @logl lik3
ll3.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B
ll3.append lik3=-@mean(help)+@quantile(help,alphas)
ll3.ml
opt_weight_VaR=@abs(@sin(w(1)))

logl ll4

coef(1) w=2
series help=0
series help1=0
series help2=0
series help3=0
series help4=1


ll4.append @logl lik4
ll4.append help=@abs(@sin(w(1)))*A+(1-@abs(@sin(w(1))))*B

ll4.append help1=help*(help<= @quantile(help,alphas))
ll4.append lik4=-@mean(help)+@mean(help1<>0)
ll4.ml
opt_weight_TVaR=@abs(@sin(w(1)))

endsub

load workfile_data
```

```
sample s1 @all
sample s2 2 @last

sample s3 253 @last
sample s4 254 @last

smpl s1

scalar s=253
vector(5)  par1

par1(1)=-0.1
par1(2)=0.4
par1(3)=-0.6
par1(4)=0.4
par1(5)=0.4

vector(5) par2

par2(1)=-0.3
par2(2)=0.2
par2(3)=-0.8
par2(4)=0.3
par2(5)=-0.6

series r1
series r2

vector(s) opt_weight_StanDev
vector(s) opt_weight_VaR
vector(s) opt_weight_TVaR

scalar alpha=0.05

scalar sc1
scalar sc2
scalar sc3

series Opt_Port_StanDev=0
series Opt_Port_VaR=0
series Opt_Port_TVaR=0

for !i=1 to s

smpl 1 253+!i-1

series zf1=0
series zf2=0


call mle_model (zf1, zf2, r1, r2, par1, par2 )


sc1=0
sc2=0
sc3=0

call Port_Choice (sc1, sc2, sc3, zf1, zf2,  alpha)

opt_weight_StanDev(!i)=sc1
```

```
opt_weight_VaR(!i)=sc2
opt_weight_TVaR(!i)=sc3

Opt_Port_StanDev(253+!i)=opt_weight_StanDev(!i)*r1(253+!i)+(1-
opt_weight_StanDev(!i))*r2(253+!i)
Opt_Port_VaR(253+!i)=opt_weight_VaR(!i)*r1(253+!i)+(1-opt_weight_VaR(!i))*r2(253+!i)
Opt_Port_TVaR(253+!i)=opt_weight_TVaR(!i)*r1(253+!i)+(1-opt_weight_TVaR(!i))*r2(253+!i)

next

smpl s3

Opt_Port_StanDev.kdensity(k=n)
Opt_Port_VaR.kdensity(k=n)
Opt_Port_TVaR.kdensity(k=n)
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., (2001), “Expected Shortfall As a Tool for Financial Risk Measurement”, Working Paper, Italian Association for Financial Risk Management, (www.gloriamundi.org).

[2] Acerbi, C., Tasche, D., (2002), “Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk, Economic Notes, Vol.31 (2), pp.379-388. (www.gloriamundi.org).

[3] Acerbi, C., Tasche, D., (2002), “On the Coherence of Expected Shortfall”, Journal of Banking & Finance, Vol.26 (7), pp. 1487-1503.

[4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath D., (1997), “Thinking Coherently”, Risk magazine, Vol.10 (11), pp. 68-72.

[5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath D., (1999), “Coherent Measures of Risk”, Mathematical Finance, Vol.9 (3), pp. 203-228.

[6] Arvanitis, S., Lectures Notes on the issue: Risk Measures and Portfolio Choice, Athens University of Economics and Business.

[7] Asteriou, D., Hall S.G., (2007), “Applied Econometrics, A Modern Approach using EViews and Microfit Revised Edition”, Palgrave Macmillan, pp.248-277.

[8] Basak, S., Shapiro, A., (2001), “Value-at-Risk Based Management: Oprimal Policies and Asset Prices, Review of Financial Studies, Vol.14 (2), pp. 371-405.

[9] Basel Committee on Banking Supervision, (1988, July) “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards”, Bank of International Settlements,.

[10] Basel Committee on Banking Supervision, (2009, July), “Revisions to the Basel II Market Risk Framework”, Bank of International Settlements.

[11] Basel Committee on Banking Supervision, (2009, October) “Analysis of trading book Quantitative Impact Study”, Bank of International Settlements.

[12] Basel Committee on Banking Supervision, (2006, July), “History of Basel Committee and it’s Membership”, Bank of International Settlements.

[13] Basel Committee on Banking Supervision, (1996, January), “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks”, Bank of International Settlements.

[14] Basel Committee on Banking Supervision, (1988, July), “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards”, Bank of International Settlements.

[15] Basset, G., Koenker, R., Kordas G., “Pessimistic Portfolio Allocation and Choquet Expected Utility”, Journal of Econometrics, Oxford University Press, Vol.2 (4), pp. 477-492.

[16] Beder, T.S., (1995), “VAR: Seductive but Dangerous”, Financial Analyst Journal, Vol.51 (5), pp. 12-24.

[17] Benninga, S., Wiener, Z., (1998), “Value at Risk”, Mathematica in Education and Research, Vol.7 (4), pp.39-45.

[18] Best, P., (1998), “Implementing Value at Risk”, John Wiley&Sons.

[19] Black, F., (1976), “Studies of stock price volatility changes”, Proceedings of the 1976 meetings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Section, Washington, DC: American Statistical Association, pp. 177-181.

[20] Blake, D., (2006), “After VaR: The theory, estimation, and insurance applications of quantile - based risk measures”, Journal of Risk and Insurance, Vol.73 (2), pp.193-229.

[21] Bollerslev, T., (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, Journal of Econometrics, Vol.31 (3), pp. 307-328.

[22] Bollerslev, T. (2008), “Glossary to ARCH (GARCH)”, CREATES Research Papers 2008-49, School of Economics and Management, University of Aarhus.

[23] Bollerslev, T., Engle, R.F., Nelson, D.B., (2004), “ARCH Models”, in R.F.Engle ang D.McFadden (eds.), Handbook of Econometrics, Vol IV, pp. 2959-3038.

[24] Bollerslev, T., R.F. Engle, J.M. Wooldridge, (1998), “A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances”, Journal of Political Economy, Vol.96 (1), pp. 116-131.

[25] Boudoukh, J., Richardson, M., Whitelaw, R., (2005), “The Myth of Long-Horizon Predictability”, No.11841, NBER Working Papers from National Bureau of Economic Research, Inc.

[26] Brooks C., (2008), “Introductory Econometrics for Finance”, 2nd edition, Cambridge University Press.

[27] Choudhry, M., (2006), “An Introduction to Value-at-Risk”, 4th edition, John Wiley & Sons.

[28] Clark, P.K., (1973), “A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices”, Econometrica, Vol.41 (1), pp.135-155.

[29] Danielsson, J., (2001), “The emperor has no clothes: limits to risk modeling”, Working Paper, Financial Markets Group, London School of Economics.

[30] Duffie, D., Pan, J., (1997), “An overview of Value-at-Risk”, Journal of Derivatives, Vol.4 (3), pp.7-49.

[31] Easley, D., O’Hara, M., (1992), “Time and the process of Security Price Adjustment”, Journal of Finance, American Finance Association, Vol. 47 (2), pp.576-605.

[32] Engle, R.F., Ng, V., (1993), “Measuring and Testing the Impact of News On Volatility”, Journal of Finance, Vol.48 (5), pp.1749-1778.

[33] Engle, R.F., (1995), “ARCH Selected Readings”, Oxford University Press.

[34] Engle, R., (2001), “GARCH 101: The Use of ARCH and GARCH models in Applied Econometrics”, Journal of Economic Perspectives, Vol.15, pp.157-168.

[35] Fama, E.F., (1965), “The Behavior of Stock Market Prices”, Journal of Business, Vol.38 (1), pp. 34-105.

[36] Frye, J., (1997), “Principles of Risk: Finding Value-at-Risk Through Factor-Based Interest Rate Scenarios”, in Grayling, S., editor, VaR: Understanding and Applying Value-at-Risk, London, Risk, pp.275-287.

[37] Ghysels, E., Harvey, A., Renault ‘E., (1996), “Stochastic Volatility”, Cahiers de recherché 9613, Universite de Montreal, Department de sciences economiques.

[38] Goorbergh R., Vlaar, P., (1999), “Value-at-Risk Analysis of Stock Returns: Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?”, Netherlands Central Bank, (www.econpapers.com).

[39] Gujarati, D.N., (2003), “Basic Econometrics”, 4th edition, McGraw-Hill, New York.

[40] Gustafsson, M., Lundberg, C., (2009), “An empirical evaluation of Value at Risk”, Master Thesis, Industrial and Financial Management, University of Gothenburg, School of Business, Economics and Law.

[41] Hopper, G.P.,(1996), “Value at Risk: A New Methology for Measuring Portfolio Risk”, Research Publications-Business Review, Federal Reserve Bank of Philadelphia, (www.phil.frb.org).

[42] Hentschel, L., (1995), “All in The Family Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models”, Journal of Financial Economics, Vol.39 (1), pp.71-104.

[43] Holton, G., (2002), “History of Value-at-Risk: 1922-1998”, Working Paper, Method and Hist of Econ Thought.

[44] Holton, G., (2003), “Value-at-Risk: Theory and Practice”, Elsevier Academic Press.

[45] Holton, G., (2004), “Defining Risk”, Financial Analysts Journal, Vol.60 (6), pp.19-25.

[46] Holton, G., (2008), “The Case of Incoherence”, Article (www.glynhoton.com).

[47] Jitendra, S., “Basel II: Responding to a Whole New World of Risk”, USBanker Magazine, September 2006.

[48] Jorion, P., (1996), “Risk: Measuring the Risk in Value at Risk”, Financial Analysts Journal, Vol.52 (6), pp. 47-56.

[49] Jorion, P., (2000), “Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk”, 2nd edition, McGraw Hill, New York.

[50] Jiménez-Martin, J.Á., McAleer, M., Pérez-Amaral, T., (2009), “The ten Commandments for Managing Value-at-Risk Under the Basel II Accord”, Working Paper, (www.ssrn.com).

[51] Ju, X., Pearson, N.D., (1998), “Using Value at Risk to Control Risk Taking: How Wrong Can You Be?”, Working Paper, University of Illinois at Urbana-Champaign, OFOR No.98-08, (www.gloriamundi.org).

[52] Kordas, G., Lectures in Portfolio Analysis (2008), M.Sc.in Applied Economics and Finance, Athens University of Economics and Business.

[53] Krouse, A., (2003), “Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good is it in Practice?”, The Journal of Risk Finance, Vol.4 (2), pp. 19-28.

[54] Linsmeier, T.J., Pearson N.D., (1996), “Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk”, Working Paper, University of Illinois at Urbana-Champaign, (www.ssrn.com).

[55] Mandelbrot, B., Taylor, H.M., (1967), “On the Distribution of Stock Price Differences”, Operations Research, Vol.15 (6), pp.1057-1062.

[56] Madsen, H., (2008), “Time Series Analysis”, Texts in Statistical Science, Chapman & Hall / CRC.

[57] Nelson, D.B., (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”, Econometrica, 59 (2), pp. 347-370.

[58] Rockafellar, R.T., Uryasev, S., (2002), “Conditional Value at Risk for General Loss Distributions”, Journal of Banking and Finance, Vol.26 (5), 1443-1471.

[59] Sarykalin, S., Serraino, G., Uryasev, S., (2008), “Value at Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization”, Tutorials in operations Research, INFORMS, pp. 270-294.

[60] Wu, G., Xiao Z., (2002), “An Analysis of Risk Measures”, Journal of Risk, Vol.4 (4), pp.53-75.

[61] Yamai, Y., Yoshiba, T., (2002), “On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall”, Discussion paper, 2001-E-4, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Vol.20 (1), (www.gloriamundi.org).

[62] Yamai, Y., Yoshiba, T., (2002), “Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk”, Discussion paper, 2001-E-1 4, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Vol.20 (2), (www.gloriamundi.org).