ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΤΙΤΛΟ:
«Οικονομετρική Ανάλυση της μεταβλητότητας σε χρηματιστηριακούς δείκτες σε ΗΠΑ και Ευρώπη και μελέτη της οικονομικής κρίσης»

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στα Διεθνή Οικονομικά και Χρηματοδοτική του τμήματος Διεθνών και Ευρωπαϊκών Οικονομικών Σπουδών
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Παπαναστασίου Χαράλαμπος
Α.Μ 4140011

Περίληψη(Abstract): Οι χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές διαφέρουν από τις χρονολογικές σειρές που δεν περιέχουν δεδομένα από αποδόσεις μετοχών. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι οι αποδόσεις των μετοχών διαθέτουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα λεγόμενα Stylized facts. Για αυτό τον λόγο τα βασικά μοντέλα των χρονολογικών σειρών όπως το ARMA αδυνατούν να τις μοντελοποιήσουν κατάλληλα. Προκειμένου να εκτιμήσουμε τέτοιες σειρές χρησιμοποιούμε μοντέλα που αναφέρονται στην κλάση των conditional heteroscedastic models , τα ARCH,GARCH,EGARCH.Συλλέξαμε δεδομένα για τον δείκτη NYSE και DAX για χρονικό ορίζοντα 6 χρόνων (1/1/2008-31/12/2013) με στόχο να αναλύσουμε το φαινόμενο του volatility clustering και του leverage effect. Εντοπίσαμε το πιο κατάλληλο μοντέλο για την εκτίμηση της μεταβλητότητας στα δεδομένα μας χρησιμοποιώντας τα Akaike και Schwarz's κριτήρια. Διαπιστώσαμε ότι η μεταβλητότητα στην αρχή της υπο μελέτης περιόδου είναι πολύ υψηλή και στο τέλος της πολύ μικρή και την συνδέσαμε με την οικονομική κρίση του 2008.Τελος αναλύουμε την μεταβλητότητα σε δείκτες που σχετίζονται με τον χρηματοοικονομικό τομέα και την κατανάλωση και μελετώντας κάποιους δείκτες της πραγματικής οικονομίας προσπαθούμε να εντοπίσουμε τους τομείς που επηρέασε σε μεγαλύτερο βαθμό η οικονομική κρίση.
Keywords: *volatility, leverage effect, ARCH, GARCH ,EGARCH, economic crisis*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2. 0) STYLIZED FACTS

1) ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

3. ΘΕΩΡΙΑ

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΡΙΣΗΣ ΤΟΥ 2008

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα χρηματοοικονομικά το μεγαλύτερο μέρος της διαλεκτικής αφορά την σχέση μεταξύ της απόδοσης και του ρίσκου. Ο προσδιορισμός τους και η προσπάθεια μέτρησής τους είναι πολύ σημαντικός και επηρεάζει οποιοδήποτε αποτέλεσμα προσπαθούμε να εξάγουμε από αυτά. Ένας επενδυτής που θέλει να τοποθετήσει τα χρήματά του σε ένα χρηματοοικονομικό προϊόν σίγουρα θα πρέπει να έχει υπόψιν του την σχέση απόδοσης ρίσκου. Πάντοτε είναι διατεθειμένος να δεχθεί ένα επίπεδο κινδύνου για να επιτύχει το επιθυμητό επίπεδο πλούτου.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα που επιτεύχθηκε στην χρηματοοικονομική θεωρία ήταν η ικανότητα να μιλάμε για το ρίσκο σε ποσοτικό περιβάλλον. Προφανώς αν γνωρίζουμε πώς να μετρήσουμε το ρίσκο σωστά μπορούμε να εκτιμήσουμε καλύτερα την αξία ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου. Έτσι οι επενδυτές μπορούν να πάρουν βέλτιστες αποφάσεις κατανέμοντας τις επενδύσεις τους σε διαφόρων επιπέδου κινδύνου επενδύσεις και γενικότερα οδηγούμαστε σε καλύτερη κατανομή των πόρων στην οικονομία και όχι στην κατασπατάλησή τους. Προφανώς η σχέση απόδοσης κινδύνου είναι ανάλογη ,δηλαδή μεγάλο ρίσκο αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη απόδοση όμως θέλουμε να επιλέγουμε εκείνη τη ποσότητα αβεβαιότητας που μας δίνει βέλτιστα αποτελέσματα. Οπότε για να επιτύχουμε βέλτιστα χαρτοφυλάκια ακολουθούμε τον κανόνα ελαχιστοποίηση του ρίσκου για δεδομένο επίπεδο απόδοσης ή μεγιστοποίηση της απόδοσης για δεδομένο επίπεδο κίνδυνου.
Ο Markowitz στην θεωρία του για τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια ορίζει ως κίνδυνο την διακύμανση των στοιχείων. Επίσης η σχέση απόδοσης ρίσκου εκφράζεται και στο μοντέλο του CAPM όπως παρουσιάστηκε από τον Sharpe (1963) και τον Teynor (1972).

Βλέπουμε ότι ο προσδιορισμός του ρίσκου είναι θεμελιώδης παράγοντας σε μια χρηματοοικονομική θεωρία και η σωστή εκτίμησή του είναι καθοριστικής σημασίας για τις αποφάσεις μας. Ορίσαμε το ρίσκο ως την διακύμανση των αποδόσεων, το τετράγωνο της διακύμανσης ονομάζεται μεταβλητότητα .Μεταβλητότητα είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων σε μια χρονική περίοδο. Ο πιο απλός τρόπος για να πάρουμε την μεταβλητότητα είναι χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα των αποδόσεων, δηλαδή χρονολογικές σειρές και την ονομάζουμε ιστορική μεταβλητότητα. Αυτός ο τρόπος όμως μας δημιούργει ένα πρόβλημα , οι χρονολογικές σειρές και κυρίως με δεδομένα μετοχών υποφέρουν από ετεροσκεδαστικότητα, δηλαδή η διακύμανση των λαθών τους δεν είναι ίση, για ορισμένα σημεία για παράδειγμα αναμένουμε να είναι μεγαλύτεροι από ότι σε άλλα. Το κυριότερο προβλημα είναι ότι οι εκτιμήσεις που παίρνουμε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι αμερόληπτες αλλά οι τυπικές αποκλίσεις δεν είναι σωστές και κατά συνέπεια και τα διάφορα τεστ και τα διαστήματα εμπιστοσύνης , οδηγώντας μας τελικά σε λανθασμένες αποφάσεις. Αυτό μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας robust standard errors. Ο Engle όμως αυτό το προσδιόρισε ως «*ένα πρόβλημα που μπορεί να μετρηθεί και όχι να διορθωθεί*». Έτσι το 1982 μας σύστησε το ARCH model (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) για το οποίο κέρδισε το βραβείο Nobel το 2003.

Το μοντέλο ARCH δίνει βάρη ανάμεσα στα πιο πρόσφατα δεδομένα και σ 'αυτά που βρίσκονται μακρύτερα στο παρελθόν. Αυτά τα βάρη μπορούμε να τα υπολογίσουμε από τα ιστορικά δεδομένα. Ακόμα υπάρχουν πολλές επεκτάσεις του ARCH από το αρχικό άρθρο του Engle που μοντελοποιούν καλύτερα την μεταβλητότητα συμπεριλαμβάνοντας και άλλα στοιχεία στον προσδιορισμό της μεταβλητότητας. Τέτοια μοντέλα είναι το generalized-ARCH(GARCH) από τον Bollerslev (1986),exponential ARCH(EGARCH) από τον Nelson(1991).

Η μεταβλητότητα λοιπόν αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα στα περισσότερα χρηματοοικονομικά κατασκευάσματα. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα ευρωπαϊκό call option ,ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών σε προσυμφωνημένη τιμή και χρόνο. Έστω K η strike price του option και T ο χρόνος λήξης του συμβολαίου. Από την φόρμουλα του **Black –Scholes** έχουμε:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \text{ ,όπου } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{r * \sigma^2}{2}\right)\tau\alpha}{\sigma\sqrt{T}} \text{ και } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Όπου S_0 η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t=o ,το r το ακίνδυνο επιτόκιο και σ η από κοινού τυπική απόκλιση των αποδόσεων.

Τώρα από την άλλη αν θεωρήσουμε ότι η αγορά και οι τιμές των μέτοχων είναι αυτές που δίνει η φόρμουλα των Black-Scholes ,τότε μπορούμε να πάρουμε την μεταβλητότητα σ_t. Αυτή ονομάζεται **"*implied volatility*".**Βέβαια αυτή η προσέγγιση για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας έχει δεχθεί κριτικές γιατί γίνεται κάτω από υποθέσεις που πιθανών δεν ισχύουν στην πράξη. Στα ευρωπαϊκά call option υπάρχει η υπόθεση ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση brown.

Ο δείκτης VIX του χρηματιστήριου παράγωγων του Σικάγου (Chicago Board Options Exchange-CBOE) είναι ένα δημοφιλής μέτρο της implied volatility του δείκτη S&P 500 για τα options. Από την εγκαθίδρυσή του το 1993, θεωρείται από πολλούς ως βαρόμετρο για την αίσθηση των επενδυτών για την μεταβλητότητα της αγοράς.

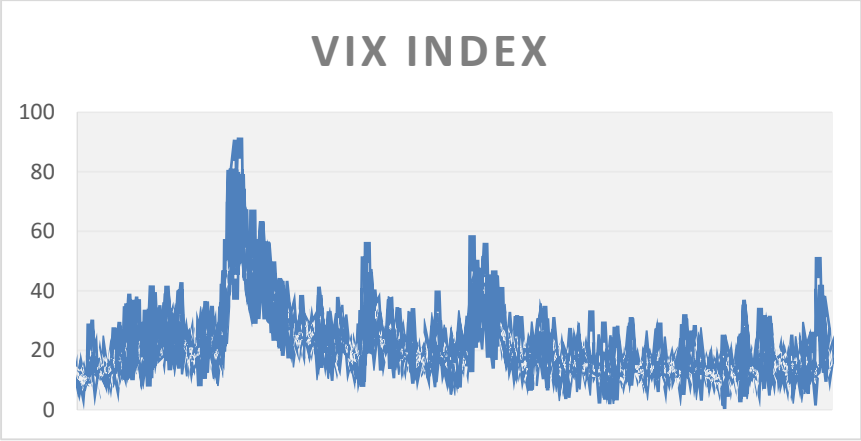


FIG .0: VIX index (1/3/2007 – 19/10/2015)

Τελικά όπως είδαμε η εκτίμηση της μεταβλητότητας είναι απαραίτητο κομμάτι μιας θεωρίας και αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη μοντέλων ως προς αυτό το σκοπό και την μελέτη τους με εμπειρικές εφαρμογές. Στην συνέχεια μέσα από το άρθρο θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε κάποια ερωτήματα που θέτονται στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές όπως:

- Παρατηρείται η μεταβλητότητα να είναι υψηλή ή χαμηλή σε ομάδες;
- Όταν πέφτουν οι τιμές μπορούμε να ανιχνεύσουμε το leverage effect;
- Που και πως εντοπίζεται η οικονομική κρίση;

Στο αμέσως επόμενο κομμάτι θα δούμε κάποια χαρακτηριστικά που διέπουν τις χρονολογικές σειρές που δημιουργούνται από δεδομένα μετοχών και προσπαθούν να πιάσουν τα διάφορα μοντέλα.

2.0 STYLIZED FACTS

Οι χρονολογικές σειρές με δεδομένα χρηματοοικονομικών στοιχείων παρουσιάζουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα λεγόμενα stylized facts. Στην πραγματικότητα η εξήγηση γιατί έχουν αυτά τα γνωρίσματα είναι μη ικανοποιητική και αρκούμαστε να τα παρατηρούμε εμπειρικά.
Αναφέρουμε μερικά παρακάτω που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια.

I. **Έλλειψη αυτοσυσχέτισης στις αποδόσεις** Η γραμμική αυτοσυσχέτιση των αποδόσεων είναι μη σημαντική δηλαδή, $\rho(\, r_t \,, r_{t-k}) = 0$.
II. **Volatility clustering**. Όπως ορίστηκε από τον Mandelbrot " μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές". Ενώ οι αποδόσεις από μόνες τους είναι ασυσχέτιστες ,η αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των αποδόσεων είναι θετική , $\rho(r_t^2, r_{t-k}^2) \gg 0$.
III. Η **αρνητική δυναμική συμμετρία** , $\rho(r_t^2, r_{t-k}) \ll 0$, στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως **leverage effect**.Το leverage effect γενικά αναφέρεται στην παρατηρούμενη τάση που έχει η μεταβλητότητα ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου να είναι αρνητικά συσχετισμένο με την απόδοση του στοιχείου αυτού. Τυπικά αύξουσες αποδόσεις συνοδεύονται από φθίνουσα μεταβλητότητα και το αντίθετο. Οι Black(1976) και Christie(1982) προσπάθησαν να εξηγήσουν αυτό το φαινόμενο ως εξής: καθώς η τιμή ενός στοιχείου μειώνεται οι εταιρείες εμφανίζουν αυτόματα μεγαλύτερη μόχλευση αφού η σχετική αξία το χρέους της εταιρείας αυξάνεται σε σχέση με τη καθαρή θέση της εταιρείας. Μια άποψη που έχει δεχθεί κριτικές γιατί δεν δίνει απάντηση στο γιατί η μεταβλητότητα επηρεάζεται λιγότερο από θετικά νέα.

IV. $r_{t\sim}$ ***non normal*** κατανομή όμως σε χαμηλότερης συχνότητας δεδομένα πλησιάζει στην κανονική κατανομή δηλαδη σε $\boldsymbol{Aggregation \rightarrow Normality}$.

V. **Heavy tails** και υπερβολική κύρτωση

Παρατηρήσεις σαν τις παραπάνω στις χρηματοοικονομικές σειρές οδήγησαν στην ανάπτυξη των μοντέλων GARCH για προβλέψεις διάφορων στοιχείων και στην αποτίμηση παραγώγων προϊόντων. Μοντέλα όπως το ARCH (Engle,1982) και GARCH (Bollerslev,1986) κατάφεραν να περιγράψουν καλύτερα φαινόμενα σαν το volatility και την κύρτωση. Όπως είδαμε η κύρια ιδέα πίσω από την χρήση τέτοιων μοντέλων είναι ότι η μεταβλητότητα εξηγείται και με την βοήθεια προηγούμενων παρατηρήσεων. Εξάλλου η μεταβλητότητα ενός στοιχείου τείνει να επιστρέφει σε ένα μέσο παρά να μένει σταθερή ή μονοτονική στην διάρκεια του χρόνου.

2.1 Εμπειρικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων

Χαρακτηριστικά παρακάτω παρουσιάζουμε γραφικά τις αποδόσεις του δείκτη NASDAQ από 15/10/2018 – 1/03/2007 , $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}$ όπου P_t ,η τιμή του δείκτη.

Τα δεδομένα για τον δείκτη και την μετοχή τα συλλέξαμε από το yahoo finance και τα τρέξαμε σε ένα απλό excel. Παρατηρούμε ξεκάθαρα το φαινόμενο του volatility clustering - μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές. Όπως επίσης και περίοδοι χαμηλής μεταβλητότητας βρίσκονται μαζί συγκεντρωμένες. Συγκεκριμένα βλέπουμε μεγάλη μεταβλητότητα στις αποδόσεις την περίοδο 2007-2009. Δεν είναι τυχαίο αυτό το γεγονός αφού το 2007 ξέσπασε η διεθνής χρηματοπιστωτική κρίση η οποία οδήγησε στην παγκόσμια οικονομική ύφεση το 2008.Οπότε αυτή η ανασφάλεια δημιούργησε πιέσεις στα χρηματιστήρια προκαλώντας περιόδους μεγάλης μεταβλητότητας.

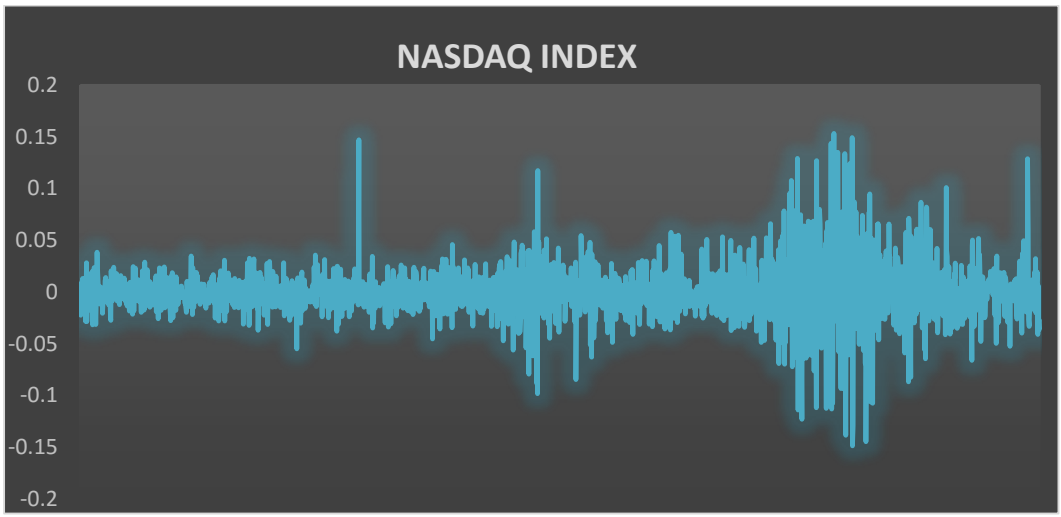


Fig. 2.1: Nasdaq daily returns (15/10/2015 – 1/03/2007) – μεγάλες μεταβολές ακολουθούνται από μεγάλες

Στο Fig.2 βλέπουμε τον δείκτη S&P 500 και τον VIX ,παρατηρούμε ξεκάθαρα μια αρνητική συσχέτιση, όταν ο S&P είναι στα υψηλά του ο VIX είναι στα ελάχιστά του. Όπως μας πληροφορεί το CBOE σε αυτή την χρονική περίοδο είχαν αντίθετη κατεύθυνση στο 80% του χρόνου. Επίσης διακρίνουμε και τι φαινόμενο του leverage effect .Τον Ιούλιο του 2012 όταν ο S&P 500 εμφανίζει πτώση στις τιμές του η μεταβλητότητα αυξάνεται και παίρνει μέγιστες τιμές .
Μια πτώση των τιμών αντιπροσωπεύει «κακά νέα» και κάνει την μεταβλητότητα ιδιαίτερα ευαίσθητη ,από την άλλη βλέπουμε ότι σε αύξηση των τιμών «καλά νέα» ο VIX εμφανίζει λιγότερη ευαισθησία.



Fig.2: VIX vs S&P 500 – πηγή: www.cboe.gr (ιστοσελίδα Chicago Board Excange) 3rd τρίμηνο 2012

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των χρηματοικονομικών χρονολογικών σειρών είναι η αυξημένη κύρτωση όπως αναφέραμε και παραπάνω. Η κύρτωση είναι η 4η ροπή.
Ορισμός: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $\mu = E(X)$ και σ^2=V(X).

Η μέση τιμή της συνάρτησης $h(X) = [(X-\mu)/\sigma]^4$, $\gamma = E[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4] = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$
,καλείται συντελεστής κυρτότητας ή απλώς κύρτωση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

Η κύρτωση μετρά τον βαθμό στον οποίο μια κατανομή είναι περισσότερο ή λιγότερο υψηλή από την κανονική κατανομή.Μεγάλη κύρτωση υποδηλώνει μια σχετικα υψηλή κατανομή . Η κανονική κατανομή έχει κύρτωση ίση με 3. Κατά συνέπεια, μια επένδυση που χαρακτηρίζεται από υψηλή κύρτωση θα έχει "παχιές ουρές» (υψηλότερες συχνότητες των αποτελεσμάτων) στα ακραία αρνητικά και θετικά άκρα της καμπύλης κατανομής μ'άλλα λόγια είναι πιο πιθανό να συμβούν ακραία γεγονότα. Η κατανομή των κερδών που εμφανίζουν υψηλή κύρτωση τείνει να υπερεκτιμά την πιθανότητα επίτευξης τη μέσης απόδοσης.

Κατανομές με μεγάλη κύρτωση λέγεται αλλιώς ότι παρουσιάζουν λεπτοκύρτωση,έχουν δηλαδή κύρτωση μεγαλύτερη από 3 και παρουσιάζουν υψηλότερη κορυφή και πιο παχιές ουρές.

Παρακάτω δείχνουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων των αποδόσεων του δείκτη Nasdaq για15/10/2015 – 1/03/2007- σε σύγκριση με την κανονική κατανομή και παρατηρούμε όλα αυτά που αναφέραμε παραπάνω για την κύρτωση και την κανονικότητα των αποδόσεων θεωρητικά.

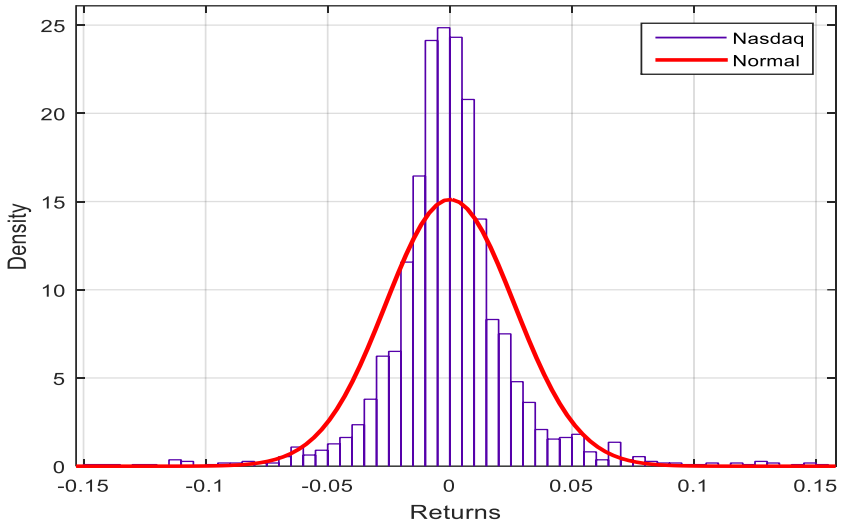


Fig.3: Ιστόγραμμα συχνοτήτων των αποδόσεων του Nasdaq (15/10/2015 – 1/03/2007)- και fit με την κανονική κατανομή.

Όλα αυτά που παρατηρήσαμε εμπειρικά προσπαθούν να τα διαχειριστούν τα διάφορα μοντέλα που εξελίχθηκαν ως επεκτάσεις του ARCH.

Στα επόμενα θα δούμε κάποιες υποθέσεις που θα μας βοηθήσουν να εξετάσουμε τα stylized facts από οικονομετρική άποψη και θα παρουσιάσουμε κάποια χαρακτηριστικά μοντέλα που εμπλέκονται στην διαχείριση αυτών των φαινομένων.

3.ΘΕΩΡΙΑ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι οι χρονολογικές σειρές είναι το κομμάτι εκείνο της στατιστικής ανάλυσης που μελετά διαδικασίες και πρότυπα που εξελίσσονται στον χρόνο. Ειδικότερα στα χρηματοοικονομικά η ανάλυση των χρονολογικών σειρών μας είναι χρήσιμη για δύο λόγους: **1)** στην μελέτη και περιγραφή δεδομένων που προέρχονται από μια ακολουθία παρατηρήσεων
και **2)** στην πρόβλεψη για την μελλοντική συμπεριφορά της εξεταζόμενης μεταβλητής της χρονολογικής σειράς.

Ορισμός: Έστω Η ένα υποσύνολο του $\mathcal{R}$ $(H \subset \Re)$. Τότε η μεταβλητή $x_t(p)$, $\forall\, t \in H$ είναι τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $\wp$ $(p \in \wp)$.
Η στοχαστική διαδικασία $x_t(p)$, $\forall\, t \in H$ είναι μια χρονολογική σειρά. Αν το Η είναι συνεχές π.χ. Η= [0,1] ονομάζεται συνεχούς χρόνου και αν είναι διακριτό π.χ. Η= 1,2,3,….,N η χρονολογική σειρά ονομάζεται διακριτού χρόνου. Δηλαδή χρονολογική σειρά είναι ένα δείγμα $x_1,x_2...x_t$ από ισαπέχοντα σημεία ή χρονικά διαστήματα.

Μια σημαντική συμπεριφορά που μελετάμε στις χρονολογικές σειρές είναι η στασιμότητα. Λέμε ότι μια διαδικασία είναι αυστηρώς στάσιμη (strictly stationary) όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μέτρησης του χρόνου.

Ορισμός(στασιμότητα): Μια χρονολογική σειρά $\{r_t\}$ είναι αυστηρώς στάσιμη όταν η από κοινού κατανομή των $(r_{t1,}r_{t2}, \dots r_{tk})$ είναι ταυτόσημη με την από κοινού κατανομή των $(r_{t1+t}, r_{t2+t}, \dots, r_{tk+t})$ για κάθε $t, \kappa \in \mathbb{N}$ και $(t_1,t_2,...t_k)$ μια συλλογή από κ θετικούς ακεραίους.

Π.χ. για την από κοινού κατανομή του ΑΕΠ ισχύει ότι ($GDP_{2000,.....,}GDP_{2005}$) = ($GDP_{2007},\dots, GDP_{2012}$)

Η ισχυρή στασιμότητα παρόλο που διευκολύνει την ανάλυση είναι μια πολύ ισχυρή υπόθεση για την στοχαστική συμπεριφορά των χρονολογικών σειρών και δεν παρατηρείται στην χρονική συμπεριφορά διαφόρων οικονομικών φαινομένων δηλαδή είναι εξαιρετικά δύσκολο να την επαληθεύσουμε εμπειρικά.
Για αυτό τον λόγο εισάγουμε μια ασθενέστερη έκδοση της στασιμότητας.
Μια χρονολογική σειρά είναι ασθενώς στάσιμη όταν ο μέσος της r_t και η συν-διακύμανση της r_t και r_{t-k} είναι ανεξάρτητες του χρόνου οπού κ θετικός ακέραιος.
Ειδικότερα μια στοχαστική διαδικασία για να είναι ασθενώς στάσιμη πρέπει να ισχύουν τα εξής τρία :

1. $\mathrm{E}(r_t) = \mu < \infty$, $\forall\, t$,δηλαδή ο μέσος υπάρχει και είναι ανεξάρτητος του χρόνου,

2. $V(r_t) = \sigma^2 < \infty, \forall\ t$, η διακύμανση υπάρχει και είναι ανεξάρτητη του χρόνου,
3. $Cov(r_t, r_{t-k}) = \gamma_\kappa, \forall\ t$, δηλαδή η συνδιακύμανση δεν εξαρτάται από τον χρόνο παρά μόνο από το κ για $\kappa < \infty$.Αυτό που επιτρέπει είναι η συνδιακυμάνσεις να εξαρτώνται από την χρονική απόσταση μεταξύ των στοιχείων.

Επιπλέον η ισχύ της ισχυρής στασιμότητας συνεπάγεται και την ισχύ της ασθενούς όταν οι δυο πρώτες ροπές είναι πεπερασμένες. Το αντίθετο δεν ισχύει.

Αναφέρουμε ότι το $Cov(r_t, r_{t-k}) = \gamma_\kappa$ λέγεται lag κ συντελεστής. Ισχύει ότι $\gamma_0 = Var(r_t)\ \kappa\alpha\iota\ \gamma_\kappa = \gamma_{-\kappa}$

Στα χρηματοοικονομικά είναι σύνηθες να υποθέτουμε ότι μια χρονολογική σειρά είναι ασθενώς στάσιμη. Αυτή η υπόθεση μπορεί να ελεχθεί εμπειρικά χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα και δοκιμάζοντας την συνέπεια των αποτελεσμάτων μεταξύ διαφόρων υποσυνόλων στα οποία έχω ταξινομήσει το δείγμα μου.

Συντελεστής συσχέτισης: Γενικά η συσχέτιση μεταξύ δυο τυχαίων μεταβλητών X,Y ορίζεται ως εξής:

$\rho_{x,y} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_y)]}{\sqrt{E(X-\mu_X)^2 E(Y-\mu_y)^2}}$,όπου $\mu_\chi\ \kappa\alpha\iota\ \mu_y$ είναι ο μέσος των X,Y αντίστοιχα. Αυτός ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης και μετρά το πόσο δυνατή είναι η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δυο τυχαίων μεταβλητών, αποδεικνύεται ότι ισχύει: $-1 \le \rho_{x,y} \le 1\ \kappa\alpha\iota\ \rho_{x,y} = \rho_{y,x}$.Όταν έχουμε $\rho_{x,y} = 0$ λέμε ότι δυο τυχαίες μας μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες και όταν $\rho_{x,y} = \pm 1$ λεμέ ότι έχουμε τέλεια αρνητική ή θετική γραμμική συσχέτιση. Επιπλέον μπορεί να δειχθεί αν οι X,Y ακολουθούν κανονική κατανομή τότε $\rho_{x,y} = 0$ αν και μόνο αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες μεταβλητές.

Συνάρτηση αυτοσυσχετισης (autocorrelation function-ACF): Έστω μια χρονολογική σειρά r_t με ασθενής στασιμότητα. Όταν μελετάμε την γραμμική εξάρτηση της r_t και των προηγουμένων χρονικά τιμών της r_{t-l} μιλάμε για την έννοια της αυτοσυσχέτισης. Ορίζουμε ως συνάρτηση αυτοσυσχετισης:

$$\rho_l = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-l})}} = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)}} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0},$$

όπου $Var(r_t) = Var(r_{t-l})$ κάτω από την ισχύ της ασθενούς στασιμότητας(η προϋπόθεση 2 πιο πάνω). Από την παραπάνω έχουμε ότι $-1 \le \rho_l \le 1, \rho_0 = 1\ \kappa\alpha\iota\ \rho_l = \rho_{-l}$. Μία χρονολογική σειρά r_t με ασθενής στασιμότητα δεν είναι συσχετισμένη αν και μόνο αν $\rho_l = 0, \forall\ l > 0$.

Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (partial autocorrelation function - PACF): Μετράει την γραμμική συσχέτιση παρατηρήσεων που διαφέρουν κατά κ αφού έχω αφαιρέσει τις ενδιάμεσες συσχετίσεις.

Αν έχω $z_t = c + az_{t-1} + \beta z_{t-2} + \gamma z_{t-3} + \cdots + \dot{\rho}_k z_{t-k}$

Και ψάχνω να βρω τον θεωρητικό συντελεστή $\dot{\rho}_k$.

Γενικά οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται πλήρως από το autocorrelation και partial autocorrelation function

Portmanteau Test: Όταν στην ανάλυσή μας απαιτείται να ελέγξουμε πολλές αυτοσυσχετίσεις μιας σειράς r_t μαζί αν είναι μηδέν χρησιμοποιούμε το Portmanteau test.Το συγκεκριμένο τεστ προτάθηκε από τον Box και Pierce (1970)

$$Q(m) = T\sum_{l=1}^{m} \hat{\rho}_l^2$$

Όπου το στατιστικό τεστ για την μηδενική υπόθεση είναι $H_0: \rho_1 = \cdots = \rho_m = 0$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \rho_j \neq 0\ για\ τουλαχιστον\ ενα\ j\ \in (1,2,\dots,m)$. Κάτω από την υπόθεση ότι η $\{r_t\}$ είναι i.i.d (independent and identically distribution) η Q(m) προσεγγίζει ασυμπτωτικά την χ^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας.

Ο Ljung και Box (1978) προτείναν μια παραλλαγή του αρχικού τεστ το οποίο και περιέχουν τα ευρέως διαδεδομένα στατιστικά πακέτα.

$$Q(m) = T(T+2)\sum_{l=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_l}{T-l}$$

στο οποίο απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 όταν $Q(m) \geq \chi_\alpha^2$ της χ^2 κατανομής με m βαθμούς ελευθερίας ή αν έχουμε την p- value απορρίπτουμε τη μηδενική όταν το p είναι μικρότερο ή ίσο του επίπεδου στατιστικής σημαντικότητας α που έχουμε θέσει .

Λευκός θόρυβος (white noise): Μια χρονολογική σειρά r_t η οποία είναι i.i.d και έχει πεπερασμένο μέσο και διακύμανση λέμε ότι είναι λευκός θόρυβος. Δηλαδή πρέπει να ισχύουν:

1. $\mathrm{E}(r_t) = \mu < \infty\ , \forall\ t$
2. $V(r_t) = \sigma_0^2 < \infty, \forall\ t$
3. $\gamma(\kappa) = 0\ για\ καθε\ \kappa < \infty$

Ειδικότερα όταν ο μέσος είναι μηδέν και η διασπορά σ^2 τότε η χρονολογική σειρά λέγεται Gaussian white noise.

Σε δεδομένα με αυτοσυσχετιση είναι απαραίτητο να την διαχειριστούμε για να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα.

Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο(Autoregressive model) : Όταν υπάρχει συσχέτιση της απόδοσης r_t με αυτήν με ένα lag την r_{t-1} τότε υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι πιθανών θα είναι χρήσιμη στον προσδιορισμό της r_t. Γενικά μοντέλα που προηγούμενες αποδόσεις συμμετέχουν στον προσδιορισμό της σημερινής έχουν την παρακάτω μορφή:

$$r_t = \mu + a_1 r_{t-1} + a_2 r_{t-2} + \cdots + a_p r_{t-p} + u_t,$$

όπου η τρέχουσα απόδοση r_t εξαρτάται απευθείας από τα τις προηγούμενες p αποδόσεις (p-lags).Αυτά τα μοντέλα είναι σαν την απλή γραμμική παλινδρόμηση μόνο που η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η r_t και η ανεξάρτητη η r_{t-1}.

Τέτοια σχήματα στην βιβλιογραφία ονομάζονται ως αυτοπαλινδρωμα μοντέλα τάξης p (autoregressive model of order 1) ή εν συντομία AR(p).Για παράδειγμα έχουμε της τάξης 1 το AR(1) με την παρακάτω μορφή:

$AR(1)$: $r_t = \mu + a_1 r_{t-1} + u_t$ με $u_t \backsim iid\ (0, \sigma^2)$, δηλαδη είναι Gaussian white noise

Ιδιότητες AR(1): Υποθέτοντας ότι η r_t είναι ασθενώς στάσιμη χρονολογική σειρά έχουμε ότι ισχύουν αυτά:

$E(r_t) = \mu$, $Var(r_t) = \gamma_0$ $και$ $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$ με μ, γ σταθερες και το γ_l συναρτήσει του l.

Οπότε για τον μέσο έχουμε:

Χρησιμοποιώντας τον lag operator η $r_t = \mu + ar_{t-1} + u_t$ γράφεται :

$$r_t = \mu + aLr_t + u_t \Rightarrow (1 - aL)r_t = \mu + u_t \Rightarrow r_t = \frac{\mu}{1-aL} + \frac{1}{1-aL}u_t \qquad (3.1)$$

Ξέρουμε : $\frac{1}{1-aL} = 1 + aL + (aL)^2 + (aL)^3 + \cdots = 1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + \cdots = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$ (άθροισμα φθίνουσας γεωμετρικής σειράς).

Άρα η (3.1) :

$$r_t = \mu[1 + aL + (aL)^2 + (aL)^3 + \cdots] + u_t(1 + aL + a^2L^2 + \cdots) \Rightarrow$$

$r_t = \frac{\mu}{1-a} + u_t + u_{t-1}a + u_{t-2}a^2 + \cdots$ και ο μέσος γίνεται

$$E(r_t) = \frac{\mu}{1-a} + 0 = \frac{\mu}{1-a}, \alpha\varphi ou\ E(u_t) = 0\ \alpha\pi o\ iid$$

Ο μέσος της r_t όπως φαίνεται είναι ανεξάρτητος του χρόνου t και για να υπάρχει πρέπει $a \neq 1$.

Για την διακύμανση της r_t έχουμε:

$$Var(r_t) = Var(\mu + ar_{t-1} + u_t) = Var(ar_{t-1} + u_t) = a^2 Var(r_{t-1}) + Var(u_t) + 2Cov(r_{t-1}, u_t)$$

Το $Cov(r_{t-1}, u_t) = 0$ άρα, $Var(r_t) = a^2 Var(r_{t-1}) + \sigma^2 + 2\alpha 0$

Και κάτω από τη ισχύ της στασιμότητας $Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$, ανεξάρτητο του t και για να υπάρχει πρέπει $|a| < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$.

Η συνδιακύμανση και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης διαμορφώνεται ως εξής:

$$Cov(r_t, r_{t-k}) = Cov(\mu + ar_{t-1} + u_t, r_{t-k}) \Leftrightarrow \gamma_\kappa = aCov(r_{t-1}, r_{t-k}) + Cov(u_t, r_{t-k}) \Leftrightarrow \gamma_\kappa = a\gamma_{k-1} + 0$$

$$\rho_\kappa = \frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-k})}} \xrightarrow{stationarity} = \frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{Var(r_t)^2}} = \frac{\gamma_\kappa}{\gamma_0} = a^k$$

επειδή το $\alpha < 1$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Βλέπουμε ότι $\rho_0 = 1$ και μετά μειώνεται εκθετικά με ρυθμό α. Δηλαδή παρατηρήσεις που απέχουν πολύ έχουν ξεχαστεί μετά από έναν ικανό αριθμό παρατηρήσεων.

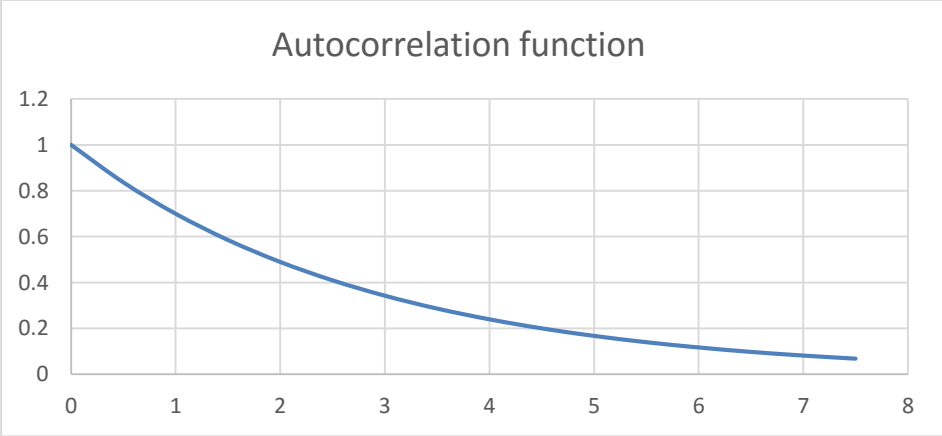


Fig.5: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνουσα με εκθετικό ρυθμό, $\rho_\kappa = a^k$ αφού α<1.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιγράφει μοναδικά το αυτοπαλινδρομο μοντέλο όπως και αυτή της partial autocorrelation.

Για την partial autocorrelation ισχύει ότι $r_t = \mu + ar_{t-1} + \dot{\rho}_2 r_{t-2} + u_t, u_t \sim iid$

Μέσα από πράξεις βρίσκουμε τον θεωρητικό συντελεστή $\dot{\rho}_2$, και έχουμε:

$$\rho_1 = \dot{\rho}_1 \, , \dot{\rho}_2 = \cdots = \dot{\rho}_\kappa = 0$$

Στο γράφημα παρακάτω βλέπουμε την συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης

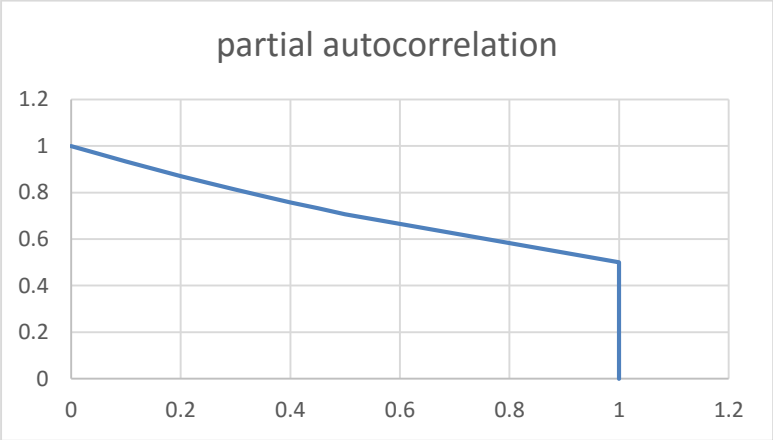


Fig.6: γραφική παράσταση της partial autocorrelation

Τελικά όπως είδαμε για να υπάρχει ο μέσος και η διακύμανση αρά και για να έχουμε στασιμότητα (stationarity) πρέπει το $|\alpha|<1$.

Moving average(MA)- υπόδειγμα κινητών μέσων:

Ένα δεύτερο υπόδειγμα χρήσιμο στην ερμηνεία των χρηματοοικονομικών σειρών είναι το moving average
Το γενικό υπόδειγμα έχει την παρακάτω μορφή :

$$MA(q)\colon\ r_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}, \qquad u_t \sim iid$$

Η τρέχουσα απόδοση r_t εξαρτάται από τις q προηγούμενες τιμές(q-lags) του u_t.

Ειδικότερα το υπόδειγμα κινητών μέσων τάξης 1 διαμορφώνεται ως εξής:

$$MA(1)\colon\ r_t = \mu + u_t - \theta u_{t-1}, u_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Σ 'αυτό η τρέχουσα απόδοση εξαρτάται από την τωρινή μεταβλητή και από την πρώτη παρελθοντική των λαθών.

Ιδιότητες MA: Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε τιμή του θ ισχύουν:

- $E(r_t) = E(\mu + u_t - \theta u_{t-1}) = \mu + E(u_t) - \theta E(u_{t-1}) = \mu$

- $Var(r_t) = E[r_t - E(r_t)]^2 = E(u_t - \theta u_{t-1})^2 = E({u_t}^2) + \theta^2 E({u_{t-1}}^2) - 2\theta E(u_t, u_{t-1}) = \sigma^2(1 + \theta^2)$

- $Cov(r_t, r_{t-k}) = Cov(\mu + u_t - \theta u_{t-1}, \mu + u_{t-k} - \theta u_{t-k-1}) = Cov(u_t - \theta u_{t-1}, u_{t-k} - \theta u_{t-k-1})$.

Έχουμε για: k>1: $Cov(r_t, r_{t-k}) = 0$

k=1: $Cov(r_t, r_{t-2}) = Cov(u_t - \theta u_{t-1}, u_{t-1} - \theta u_{t-2}) = Cov(u_t, u_{t-1}) - \theta Cov(u_{t-1}, u_{t-1}) - \theta Cov(u_t, u_{t-2}) - \theta^2 Cov(u_{t-1}, u_{t-2}) = -\theta\sigma^2$.

Οπότε τελικά το υπόδειγμα είναι ασθενώς στάσιμο για κάθε πεπερασμένο $\theta_0, \theta_0 < \infty$.

Έτσι έχουμε: $\gamma_k = \begin{cases} -\theta\sigma^2, k = 1, \\ 0, k \geq 2 \end{cases}$ και $\rho_k = \begin{cases} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}, k = 1 \\ \frac{0}{(1+\theta^2)\sigma^2} = 0, \ k > 1 \end{cases}$

Βλέπουμε ότι το MA υπόδειγμα είναι *ασθενούς μνήμης* αφού παρατηρήσεις που απέχουν μεταξύ τους έχουν μηδενική συσχέτιση.

Για την partial autocorrelation μετά από πράξεις έχουμε:

$\dot{\rho}_1 = \rho_1$ και

$\dot{\rho}_k = -\theta^k \frac{1-\theta^2}{1-\theta^{2(k+1)}}, \kappa > 1, \kappa \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι $\dot{\rho}_k$ μειώνεται εκθετικά για $|\theta| < 1$.

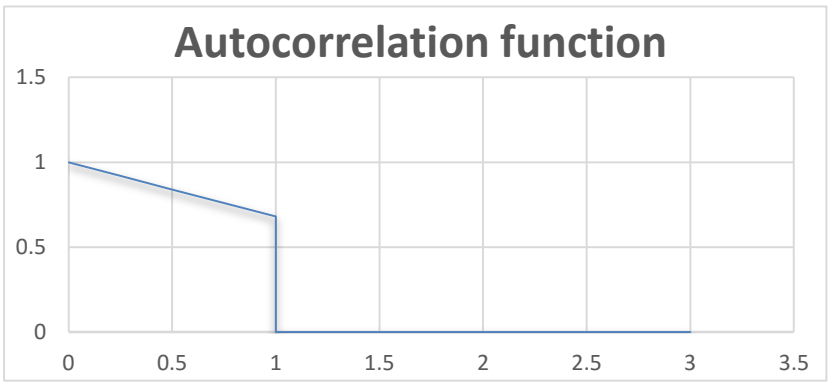


Fig.7: Γραφική παράσταση της αυτοσυσχέτισης σε MA(1)

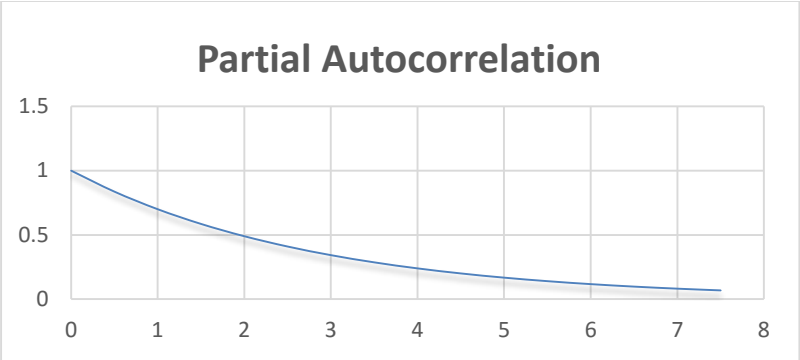


Fig.8: Γραφική παράσταση της μερικής αυτοσυσχέτισης σε MA(1)

Τελικά σε μια MA(1) διαδικασία η ρ_1 είναι μη μηδενική και η $\rho_\kappa=0$ για κ≥2, ενώ η $\dot{\rho}_k$ μειώνεται εκθετικά. Επίσης είναι ασθενώς στάσιμη για κάθε τιμή του θ.

Όπως είπαμε αυτή η συμπεριφορά της αυτοσυσχέτισης και της μερικής αυτοσυσχέτισης χαρακτηρίζουν μοναδικά τόσο την AR(1) όσο και την MA(1) διαδικασία. Έτσι χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορούμε να επιλέξουμε το είδος της διαδικασίας καθώς και την τάξη της.

Mixed models (ARMA): Πολλές φορές σε μια οικονομετρική ανάλυση τα AR, MA μοντέλα μπορεί να γίνονται σχετικά δύσχρηστα γιατί τα δεδομένα απαιτούν να είναι υψηλής τάξης και έχουμε μεγάλες το πλήθος παραμέτρους να διαχειριστούμε. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν μοντέλα που περιέχουν χαρακτηριστικά και από τις δυο παραπάνω διαδικασίες , τα μικτά μοντέλα όπως το ARMA (autoregressive moving average).
Το γενικό υπόδειγμα ARMA αναπτύχθηκε το 1971 από τους George.E.P.Box, Guilyn Jenkins.
Έτσι σε μια χρονολογική σειρά r_t το ARMA είναι ένα εργαλείο για να καταλάβουμε και σε ένα βαθμό να προβλέψουμε τις μελλοντικές τιμές μιας τέτοιας σειράς. Το μοντέλο αποτελείτο από δύο μέρη ,ένα AR μέρος και ένα MA μέρος.

Το πλήρως αναπτυγμένο υπόδειγμα είναι το εξής:

$$ARMA(p,q):$$

$$r_t = \mu + a_1 r_{t-1} + a_2 r_{t-2} + \cdots + a_p r_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

Ο πρώτος αριθμός στην παρένθεση αναφέρεται στον AR παράγοντα και ο δεύτερος στον MA.

Ειδικότερα για τον ARMA τάξης 1,1 έχουμε:

$$ARMA(1,1): r_t = \mu + a_1 r_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}, u_t \sim iid(0,\sigma^2)$$

Ιδιότητες: Μετά από μετασχηματισμούς της ARMA(1,1) παίρνουμε:

- $E(r_t) = \frac{\mu}{1-\alpha}, |\alpha| < 1.$
- $Var(r_t) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2(\alpha-\theta)^2}{1-\alpha^2} = \sigma^2 \frac{1-2\alpha\theta+\theta^2}{1-\alpha^2}, |\alpha| < 1.$
- $\rho_k = \begin{cases} \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)}{1-2\alpha\theta+\theta^2}, \gamma\iota\alpha\ k = 1 \\ \alpha^{k-1}\rho_1\ , \quad \gamma\iota\alpha \quad k \geq 2 \end{cases}$

  Παρατηρούμε ότι για $k \geq 2$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ARMA(1,1) συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο με αυτήν της AR(1) διαδικασίας μειώνεται με εκθετικό ρυθμό αφού $|\alpha| < 1.$

Τελικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα ARMA(1,1) μοντέλο είναι ασθενώς στάσιμο αν και μόνο αν $|\alpha| < 1.$

- Για την partial autocorrelation έχουμε:

  $\dot{\rho}_1 = \rho_1$ και $\dot{\rho}_2 = \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)\theta}{[1-\theta(\alpha-\theta)]^2-\theta^2}$

Αποδεικνύεται ότι η $\dot{\rho}_k$ μειώνεται εκθετικά εξαρτώμενη από τον παράγοντα α-θ. Δηλαδή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι συμπεριφέρεται σαν την partial autocorrelation του MA μοντέλου.

Conditional Heteroskedastic Models:

Στην εφαρμοσμένη οικονομετρία η μέθοδος των ελαχίστων τετράγωνων (ordinary least squares) αποτελεί έναν μεγάλο μέρος της εργασίας όσων θεραπεύουν αυτό τον τομέα. Απόλυτα φυσιολογικό αφού συνήθως ενδιαφερόμαστε πως μια μεταβλητή αλλάζει σε σχέση με μια άλλη ,κρατώντας όλα τα άλλα σταθερά (ceteris paribus).Βέβαια ενδιαφερόμαστε εξίσου για την πρόβλεψη και την ανάλυση των error term ενός μοντέλου.

Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων υποθέτουμε ότι $E({\varepsilon_t}^2) = 0$,για κάθε t, δηλαδή με άλλα λόγια υπάρχει ομοσκεδαστικότητα .Αν δεν ισχύει η παραπάνω σχέση στα δεδομένα μας οι διακυμάνσεις των λαθών διαφέρουν μεταξύ τους και λέμε ότι έχουμε ετεροσκεδαστικότητα. Όπως γνωρίζουμε αυτό δημιούργει αμερόληπτες εκτιμήτριες άλλα μη συνεπείς τυπικές αποκλίσεις, δίνοντας λάθος t-test και διαστήματα εμπιστοσύνης. Αυτό κυρίως σε μεγάλα μεγέθους δείγματα μπορεί να διορθωθεί με την χρήση robust errors.Τέτοιου είδους προβλήματα όμως ο Engle " τα αντιμετώπισε σαν προβλήματα που μπορούν να

μετρηθούν και όχι να διορθωθούν" .Αυτό που πρέπει να προσδιοριστεί είναι η διακύμανση των λαθών και τι τα μεταβάλει.

Όπως είδαμε στα χρηματοοικονομικά οι χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά(stylized facts) και συγκεκριμένα εδώ αναφερόμαστε στο volatility clustering. Το μοντέλο που μας σύστησε ο Engle το 1982 το ARCH σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει αυτά τα προβλήματα. Πάρα πολλές επεκτάσεις του αρχικού μοντέλου του Engle εμφανίστηκαν από τότε στην βιβλιογραφία όπως τα GARCH,E-GARCH,TGARCH,ARCH-M,TARCH,GJR κ.α.
Εμείς θα αναφέρουμε παρακάτω τα ARCH , GARCH για να πιάσουμε το volatility clustering , και τα EGARCH,QGARCH ,GJR που πιάνουν την αρνητική δυναμική ασσυμετρία ή αλλιώς leverage effect.

ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity):

Τέτοια μοντέλα έχουν δεσμευμένη διακύμανση που είναι συνάρτηση όλης της διαθέσιμης πληροφορίας την στιγμή t-1 (διαχρονική δεσμευμένη διακύμανση)

$$ARCH(p): y_t = \mu + u_t,$$

$$\text{όπου} \quad u_t|I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2{}_t) \quad \text{και} \quad \sigma_\tau^2 = c + a_1 u_{t-1}^2 + \cdots + a_m u_{t-m}^2 \quad ,$$
$$I_{t-1} = \{ y_{t-1}, y_{t-2}, \dots \}.$$

Από την δομή της δεσμευμένης διακύμανσης βλέπουμε ότι μεγάλα σοκ στο παρελθόν έχουν σαν αποτέλεσμα μεγάλη δεσμευμένη διακύμανση σ_τ^2 για την y_t όπως και η y_t τείνει να εμφανίζει μεγάλη τιμή. Έτσι στο πλαίσιο της ARCH διαδικασίας μεγάλα σοκ τείνουν να ακολουθούνται από άλλα μεγάλα σοκ – το φαινόμενο του volatility clustering που περιγράψαμε στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές.

Θα δούμε το ARCH(1):

$$ARCH(1): y_t = \mu + u_t, \ \text{όπου} \quad u_t|I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2{}_t) \quad \text{και} \quad \sigma_\tau^2 = c + a u_{t-1}^2$$

Στο υπόδειγμα βλέπουμε ότι:

- Η δεσμευμένη διακύμανση σ_τ^2 μεταβάλλεται χρονικά

- Η δεσμευμένη διακύμανση σ_τ^2 για να είναι καλώς ορισμένη πρέπει το $c > 0 \ \text{και} \ a \geq 0$, δηλαδή $P(\sigma_t^2 > 0) = 1 \overset{iff}{\Leftrightarrow} c > 0 \ \text{και} \ a \geq 0$. Αυτοί οι περιορισμοί στην βιβλιογραφία ονομάζονται **positive constraints**.

- Η δεσμευμένη διακύμανση $\sigma_\tau^2 = c + a u_{t-1}^2$ μπορεί να γραφτεί $u_t^2 = c + a u_{t-1}^2 + u_t^2 + \sigma_t^2 = c + a u_{t-1}^2 + v_t$

Φαίνεται λοιπόν ότι η παραπάνω εξίσωση περιγράφει ένα AR(1) μοντέλο. Οπότε αυτό σημαίνει ότι η u_t^2 είναι στάσιμη αν και μόνο αν $|\alpha| < 1$.

- Για τον μη δεσμευμένο μέσο της y_t έχουμε ότι

$$E(y_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E[E(u_t|I_{t-1})] = \mu + E(0) = \mu$$

Για την μη δεσμευμένη διακύμανση έχουμε:

$$Var(y_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{c}{1-a}$$

Δηλαδή *unconditionally* η διαδικασία είναι *ομοσκεδαστικη*

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της u_t^2 δίνεται από αυτή της AR(1)

$$\delta\eta\lambda\alpha\delta\eta\ \rho_k = \alpha^k$$

- Για την μη δεσμευμένη κύρτωση της y_t έχουμε:

$$\frac{E(y_t^4)}{[Var(y_t)]^2} = 3\frac{1-\alpha^2}{1-3a^2} > 3.$$

Οπότε η κύρτωση είναι θετική και οι ουρές της κατανομής είναι πιο παχιές από αυτές της κανονικής κατανομής [Bera and Higgins (1993)].Οι παχιές ουρές είναι όπως είδαμε χαρακτηριστικό των σειρών από χρηματοοικονομικά δεδομένα για αυτό και η μεγάλη εφαρμογή του ARCH μοντέλου σ αυτό τον χώρο έρευνας.

Πλεονεκτήματα: Το ARCH μοντέλο είναι εύκολο και γρήγορο στην χρήση του ,επίσης λαμβάνει υπόψιν του το volatility clustering και τις μη συγραμμικότητες.

Μειονεκτήματα: Θετικά και αρνητικά σοκ επιδρούν με τον ίδιο τρόπο στην μεταβλητότητα αφού δίνονται από τα τετράγωνα των προηγούμενων σοκ.
Εμπειρικά γνωρίζουμε ότι οι τιμές χρηματοοικονομικών στοιχείων αντιδρούν διαφορετικά σε σοκ με θετικό ή αρνητικό πρόσημο.
Επίσης είναι πιθανών να υπερεκτιμήσουν την μεταβλητότητα αφού αντιδρά αργά σε μεγάλα απομονωμένα σοκ των αποδόσεων.
Τέλος δεν μας παρέχει μια γνώση για την πηγή της μεταβλητότητας αλλά ένα μηχανιστικό τρόπο διαχείρισης της .

Για την πηγή της μεταβλητότητας πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει διάφορες λύσεις. Οι Christopher G. Lamoureux ,William D.Lastrapes (1990) ανέφεραν στο άρθρο τους ότι η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα ίσως προκαλείται από την εξάρτηση του χρόνου στον ρυθμό που μια πληροφορία φθάνει στην αγορά.

Christopher G. Lamoureux ,William D.Lastrapes (1990),Journal of Finance ,Volume45, Issue1(Mar.1990), 221-229

Χρησιμοποιώντας τις καθημερινές τιμές των μετοχών ως την εισερχόμενη πληροφορία έδειξαν την εικασία τους. Άλλοι όπως ο Mizrach (1990) αναφέρθηκαν στις προσδοκίες των οικονομικών πρακτόρων και ο Stock(1998) μίλησε για την «εσωτερική» χρονική κλίμακα που περιέχεται σε κάθε οικονομική μεταβλητή ενώ στην πράξη την απεικονίζουμε στην ημερολογιακή κλίμακα.

Εκτίμηση του ARCH model:

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου ,θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση πιθανότητας και θα την μεγιστοποιήσουμε(maximum likelihood estimation -MLE).

Έχουμε ότι: $y_t|I_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ και $\sigma_\tau^2 = c + a u_{t-1}^2$

Υποθέτοντας ότι $u_0 = 0$ η πιθανότητα δίνεται από:

$$L(\mu, c, a|u_0) = \prod_{t=1}^{T} L(y_t|I_{t-1}, u_0)$$

και ο λογάριθμος της πιθανότητας

$$l(\mu, c, a|u_0) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} ln\sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}$$

Παίρνοντας συνθήκες πρώτης τάξης ως προς μ και α μεγιστοποιούμε την παραπάνω συνάρτηση.

ARCH effects test: Για να δούμε αν έχουμε ARCH effects στα δεδομένα μας χρησιμοποιούμε κάποια τεστ:

Ο Johnston και DiNardo (1997) πρότειναν ένα πολύ απλό τρόπο για να το ελέγξουμε:

- Παλινδρομούμε κανονικά το μοντέλο με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων(OLS) αγνοώντας την ετεροσκεδαστικότητα.
- Κρατάμε τα κατάλοιπα από την παλινδρόμηση
- Εκτελούμε την παλινδρόμηση των καταλοίπων πάνω στις “lag” τιμές τους με OLS $u_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + a_2 u_{t-2}^2 + \cdots + a_m u_{t-m}^2 + error$
- Σ’ αυτή την παλινδρόμηση οι εκτιμημένες τιμές πρέπει να είναι διαφορετικές του μηδέν.

Κάτω από την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης $H_0: no\ ARCH\ effects$ για το στατιστικό τεστ(Lagrange multiplier LM test) $LM = nR^2$ έχουμε $nR^2 \sim X^2$ κατανομή με P-1 βαθμούς ελευθερίας όπου P ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων. Αν η τιμή του στατιστικού είναι χαμηλή δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και

συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν ARCH effects ,αν είναι υψηλή η τιμή του απορρίπτουμε την μηδενική και λεμέ ότι υπάρχουν ARCH effects.

Ένα άλλος έλεγχος είναι το συνηθισμένο τεστ των Ljung –Box που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα για την $\{u_t^2\}$ χρονολογική σειρά και με μηδενική υπόθεση ότι τα πρώτα m lags της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για την $\{u_t^2\}$ είναι μηδέν.

Οπότε συγκεντρωτικά όταν έχουμε δεδομένα από χρηματοοικονομικές σειρές κάνουμε τα εξής:

- Ελέγχουμε αν υπάρχει γραμμική εξάρτηση στα δεδομένα μας και αν ναι ,επιλέγουμε το κατάλληλο μοντέλο(σε χρηματοοικονομικά δεδομένα συνήθως αρκεί ένα AR) για να την αφαιρέσουμε.
- Ελέγχουμε για ARCH effects αν είναι στατιστικά σημαντικά εκτελούμε το ARCH model και παίρνουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων για τον μέσο και την μεταβλητότητα.

GARCH Model: Το ARCH μοντέλο ενώ είναι σχετικά εύκολο στην χρήση του πολλές φορές απαιτείται να εντάξουμε πολλές παραμέτρους για να προσδιορίσουμε την μεταβλητότητα των αποδόσεων. Για παράδειγμα κάποιες φορές ένα ARCH(9) μοντέλο είναι κατάλληλο για την ερμηνεία των δεδομένων μας.
Γ 'αυτό τον λόγο δημιουργήθηκαν εναλλακτικά μοντέλα. Η πιο διαδεδομένη επέκταση του ARCH είναι το GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) μοντέλο.

Το GARCH model μας το σύστησε ο Bollerslev (1986).

Το GARCH(1,1) έχει την μορφή:

$$GARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t,\ \text{όπου}\quad u_t|I_{t-1} \sim N(0,\sigma_t^2)\quad \text{και}$$

$$\sigma_\tau^2 = c + au_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2\ ,\ I_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}.$$

Επίσης μπορεί να γραφτεί:

$$GARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t,\ \text{όπου}\quad \frac{u_t}{\sqrt{\sigma_t^2}} \sim iid\ \ N(0,1)\quad \text{και}$$

$$\sigma_\tau^2 = c + au_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Bollerslev T.P (1986). ' Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity' ,Journal of Econometrics ,31: 309-28

Από το υπόδειγμα προκύπτουν:

- Η δεσμευμένη διακύμανση σ_τ^2 μεταβάλλεται χρονικά λαμβάνοντας υπόψιν και την προηγούμενη μεταβλητότητα και μοντελοποιείται το volatility clustering αφού μεγάλα u_{t-1}^2 ή σ_{t-1}^2 δίνουν μεγάλα σ_τ^2.

- Η σ_τ^2 προφανώς για να είναι καλά ορισμένη πρέπει να είναι θετική, τα λεγόμενα **positive constraints** του μοντέλου. Έτσι ισχύει $P(\sigma_t^2 > 0) = 1 \overset{iff}{\Leftrightarrow} c > 0 \; και \; a \geq 0 \; και \; \beta \geq 0$.

- Για τον μη δεσμευμένο μέσο της y_t έχουμε ότι

$$E(y_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E[E(u_t|I_{t-1})] = \mu + E(0) = \mu$$

και για την μη δεσμευμένη πιθανότητα ισχύει:

$$Var(y_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{c}{1 - a - \beta}$$

Και πρέπει να ισχύει $|\alpha + \beta| < 1$ για να έχουμε στασιμότητα.

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $\{u_t^2\}$ διαδικασίας δίνεται από αυτό του ARMA(1,1) μοντέλου.

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha[1 - (\alpha + \beta)\beta}{1 - 2\alpha\beta + \beta}, \gamma\iota\alpha \; k = 1 \\ (\alpha + \beta)^{k-1}\rho_1 \, , \quad \gamma\iota\alpha \quad k \geq 2 \end{cases}$$

- Για την μη δεσμευμένη κύρτωση της y_t έχουμε:

$$\frac{E(y_t^4)}{[Var(y_t)]^2} = 3\frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3.$$

Οπότε έχει παχιές ουρές αν ισχύει:

$$1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 > 0$$

Τα μειονεκτήματα της GARCH είναι αυτά που αναφέραμε και στην ARCH.

Εκτίμηση: Για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου εφαρμόζουμε όπως στην ARCH την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.
Αναλυτικά:

$y_t|I_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ και $\sigma_\tau^2 = c + au_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$

Υποθέτοντας ότι $u_0 = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma_0^2 = \frac{c}{1-a-\beta}$ η πιθανότητα δίνεται από:

$$L(\mu, c, a, \beta|u_0, \sigma_0^2) = \prod_{t=1}^{T} L(y_t|I_{t-1}, u_0, \sigma_0^2)$$

και ο λογάριθμος της πιθανότητας

$$l(\mu, c, a, \beta|u_0, \sigma_0^2) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} ln\sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{2\sigma_t^2}$$

Παίρνοντας συνθήκες πρώτης τάξης ως προς μ, α, β και c μεγιστοποιούμε την παραπάνω συνάρτηση.

GQARCH (Generalized Quadratic ARCH) :

Το GQARCH (1,1) μελετήθηκε από τον Sentana (1995) και είναι ένα μοντέλο που μπορεί να πιάσει το leverage effect που είδαμε στα stylized facts .Το μοντέλο έχει την παρακάτω μορφή.

$$GQARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t,\ \text{όπου}\quad u_t|I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)\ \ \kappa\alpha\iota$$

$$\sigma_\tau^2 = c + a(u_{t-1} - \gamma)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

Ή αλλιώς γράφεται στην μορφή :

$$GQARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t,\ \text{όπου}\quad \frac{u_t}{\sqrt{\sigma_t^2}} \sim iid\ \ N(0,1)\ \ \kappa\alpha\iota$$

$$\sigma_\tau^2 = c + a(u_{t-1} - \gamma)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

Το γ είναι ο συντελεστής που ποσοτικοποιεί το leverage effect(αρνητική δυναμική ασυμμετρία).Παρατηρούμε ότι αρνητικά σοκ μεγεθύνονται ,δηλαδή αυξάνεται το σ_τ^2,επιπλέον όταν γ=0 το μοντέλο συρρικνώνεται στο GARCH(1,1).

Η δεσμευμένη διακύμανση για ευκολία στους υπολογισμός μπορεί να γραφεί επίσης:

$$\sigma_\tau^2 = \omega + au_{t-1}^2 - \delta u_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2, \text{όπου } c = \omega + \gamma\ \kappa\alpha\iota\ \delta = 2\alpha\gamma.$$

- Τα ***positive constraints*** του μοντέλου είναι:

$$P(\sigma_t^2 > 0) = 1 \overset{iff}{\Leftrightarrow} c > 0\ \kappa\alpha\iota\ \boldsymbol{a \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \beta \geq 0}, \boldsymbol{c > 0}.$$

- Για τον μη δεσμευμένο μέσο της y_t έχουμε ότι

$$E(y_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E[E(u_t|I_{t-1})] = \mu + E(0) = \mu$$

και για την μη δεσμευμένη πιθανότητα ισχύει:

$$Var(y_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = E(z_t^2\sigma_t^2) =$$

$$= E(z_t^2)E(\sigma_t^2) = E(\sigma_t^2) = \frac{\omega}{1-a-\beta}$$

Και θέλουμε να ισχύει $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| < \mathbf{1}$, για να έχουμε ***στασιμότητα***.

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται:

$$\rho_k = (\alpha+\beta)^\kappa \left[\frac{2\omega^2\alpha^2 + 4\alpha^2\delta^2\omega(1-\alpha-\beta)}{(1-3\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta)(1-\alpha-\beta)^2}\right]$$

και $3\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta < 1.$

Η εκτίμηση των παραμέτρων αυτού του μοντέλου γίνεται κατ' ανάλογο τρόπο με αυτή του GARCH. Υπολογίζουμε την συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας και την μεγιστοποιούμε παίρνοντας συνθήκες πρώτης τάξης.

EGARCH(Exponential GARCH):

Το μοντέλο αυτό εισάχθηκε από τον Nelson(1991) και η χρησιμότητα του έγκειται στο ότι μπορεί να πιάσει την αρνητική δυναμική συμμετρία ,την οποία δεν μπορούν να πιάσουν το ARCH, GARCH .Το leverage effect συσχετίζεται με την επίδραση των νέων στις τιμές των μετοχών. Αυτό συμβαίνει όταν η μεταβλητότητα αυξάνεται περισσότερο σε μια πτώση των τιμών που αντιπροσωπεύουν τα κακά νέα παρά σε μια αύξηση των τιμών(καλά νέα).

Το μοντέλο έχει την παρακάτω μορφή:

Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach
Daniel B. Nelson Econometrica ,Vol.59,No.2,(Mar.1991),347-370.

$$EGARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t\ ,\ \text{όπου}\quad u_t|I_{t-1} \sim N(0,\sigma_t^2)\ \ \text{και}$$

$$ln\sigma_\tau^2 = c + az_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) + \beta ln\sigma_{t-1}^2,\quad \text{όπου}$$

$$z_t = \frac{u_t}{\sqrt{\sigma_t^2}}\ \ iid \sim N(0,1).$$

- Το leverage effect το δείχνει η παράμετρος *α.* Αν η *α=0* τότε οποιοδήποτε αρνητικό ή θετικό σοκ έχει την ίδια επίδραση στην μεταβλητότητα. Αν *-1<α<0* τότε ένα αρνητικό σοκ μειώνει την μεταβλητότητα σε μεγαλύτερο βαθμό από ένα θετικό .Όταν το *α<-1* τότε ένα αρνητικό σοκ αυξάνει την μεταβλητότητα καθώς ένα αρνητικό σοκ μειώνει την μεταβλητότητα. Στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές γενικά βρίσκουμε ότι το *α είναι αρνητικό και στατιστικά σημαντικό.*

- Ο δεσμευμένος μέσος είναι ο ίδιος όπως στο GARCH

$$E(y_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E[E(u_t|I_{t-1})] = \mu + E(0) = \mu$$

- Το μοντέλο ***δεν*** απαιτεί ***positive constraints*** στις παραμέτρους για να εξασφαλίσουμε θετική δεσμευμένη διακύμανση(αφού η διακύμανση είναι σε λογάριθμο και ικανοποιείται αυτόματα). Αυτό αποτελεί ένα από τα πλεονεκτήματα του μοντέλου.

- Για στασιμότητα θέλουμε $|\beta| < 1$, σημειώνεται ότι αυτό είναι δύσκολο να επιτευχθεί.

Η εκτίμηση γίνεται όπως και στα προηγούμενα με μεγιστοποίηση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας.

GJR (Glosten,Jagannathan, Runkle):

Το μοντέλο των GJR μπορεί να πιάσει την αρνητική δυναμική ασυμμετρία που προκαλείται από αρνητικά και θετικά τυχαία σοκ. Το μοντέλο για την δεσμευμένη διακύμανση που προτάθηκε από τους Glosten,Jagannathan, Runkle (1989) έχει την παρακάτω μορφή:

$$GJR - GARCH(1,1):\ y_t = \mu + u_t\ ,\ \text{όπου}\quad u_t|I_{t-1} \sim N(0,\sigma_t^2)\ \ \text{και}$$

$$\sigma_\tau^2 = c + (a + \gamma I_{t-1})u_{t-1}^2 + \beta ln\sigma_{t-1}^2$$

Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. E. Runkle, 1993. On The Relation between The Expected Value and The Volatility of Nominal Excess Return on stocks. Journal of Finance 48: 1779-1801.

Όπου $$I_{t-1} = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ y_{t-1} \geq \mu \\ 1, \alpha\nu\ y_{t-1} < \mu \end{cases}$$

Στην παραπάνω ο παράγοντας I_{t-1} είναι μια ψευδομεταβλητή(dummy variable) με τιμές 0 ή 1.

- Για να εξασφαλίσουμε ότι η έκφραση για την variance είναι θετική **(positive constraints)** θέλουμε $\beta > 0\ \kappa\alpha\iota\ \alpha + \gamma > 0$.

- Για τον μη δεσμευμένο μέσο της y_t έχουμε ότι

$$E(y_t) = E(\mu + u_t) = \mu + E(u_t) = \mu + E[E(u_t|I_{t-1})] = \mu + E(0) = \mu$$

και για την μη δεσμευμένη πιθανότητα ισχύει:

$$Var(y_t) = Var(\mu + u_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{\omega}{1 - a - \frac{\gamma}{2} - \beta}$$

- Ο παράγοντας που συσχετίζεται με ένα αρνητικό σοκ είναι ο α +γ. Στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές γενικά βρίσκουμε ότι το γ είναι στατιστικά σημαντικό.

Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται όπως στα προηγούμενα μοντέλα με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Επιλογή μοντέλου και τάξης:

Θα αναφέρουμε δύο κριτήρια που μας βοηθούν στην επιλογή του μοντέλου και της τάξης του.

- Το **Akaike's Information Criterion**(Hirotugu Akaike ,1927-2009) ορίζεται ως εξής:

$$AIC = -2lnL + 2k$$

Όπου το lnL είναι η μεγιστοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας και το k ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου.

Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Second International Symposium on Information Theory, ed. B. N. Petrov and F. Csaki, 267–281

- **Schwarz's Bayesian Information Criterion** ορίζεται:

$$BIC = -2lnL + klnN$$

Όπου το *N* είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής που προσδιορίζει το κ είναι ο lnN.

Ο κανόνας που επιλέγουμε το κατάλληλο μοντέλο χρησιμοποιώντας τα παραπάνω κριτήρια είναι «το μικρότερο είναι το καλύτερο», δηλαδή ανάμεσα σε δύο μοντέλα αυτό με το μικρότερο AIC μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα μας. Αντίστοιχα και για το BIC.

Για παράδειγμα στο GARCH Model χρησιμοποιούμαι συνήθως το GARCH(1,1) γιατί είναι αυτό που ταιριάζει καλύτερα σε χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές, όπως συμβαίνει και στο EGARCH και στο GJR-GARCH.

4.Ανάλυση δεδομένων

Στο παρών ενδιαφερόμαστε για την μελέτη τα μεταβλητότητας σε χρηματιστηριακούς δείκτες των Ηνωμένων Πολιτειών και της Ευρώπης. Για αυτό τον σκοπό συλλέξαμε δεδομένα για δύο δείκτες της Αμερικής και δύο της Ευρώπης. Επιλέξαμε να είναι διάρκειας 6 χρονών και συγκεκριμένα μηνιαία δεδομένα από 1/02/2008 μέχρι 31/12/2013.

Η επιλογή αυτή έγινε για τους εξής τρείς λόγους:

i. Ο χρονικός ορίζοντας των δεδομένων είναι 6 χρόνων γιατί επιλέγοντας μικρότερο ορίζοντα θα είχαμε απώλειά κρίσιμης πληροφορίας για τον πληθυσμό και μεγαλύτερος θα έκανε λιγότερο επίκαιρη μια ανάλυση

ii. Η συγκεκριμένη εξαετία επιλέχθηκε όχι τυχαία αλλά θέλαμε να αναφέρεται και στην περίοδο της κρίσης και μετά από αυτήν αφού ενδιαφερόμαστε για την μελέτη της

iii. Η χρήση μηνιαίων δεδομένων μας εξασφαλίζει περισσότερη κρίσιμη πληροφορία σε σχέση με εβδομαδιαία ή ετήσια δεδομένα

Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics 6: 461–464.

Οι τιμές των δεικτών στα δεδομένα μας αναφέρονται στην τιμή κλεισίματος της εκάστοτε ημέρας και οι αποδόσεις έχουν υπολογιστεί με την διαφορά των λογαρίθμων δηλαδή, $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$, *όπου* P_t η τιμή κλεισίματος. Χρησιμοποιούμε λογάριθμο γιατί μας δίνει ένα κοινό μέτρο μέτρησης και ακόμα δεν μας δημιούργει προβλήματα στους υπολογισμούς αφού ο πολλαπλασιασμός στους λογαρίθμους εξάγεται με πρόσθεση.

Γενικά σκοπός μας είναι τα δεδομένα να αναλυθούν υπό το πρίσμα των Stylized facts που αναφέραμε στα προηγούμενα και έπειτα να εντοπίσουμε την συμπεριφορά των δεικτών στην οικονομική κρίση και πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητότητα για να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα. Για να ικανοποιήσουμε τον παραπάνω στόχο θα μελετήσουμε τους δείκτες NYSE και NASDAQ στην Αμερική και τους FTSE 100 και DAX στην Ευρώπη κάνοντας χρήση των οικονομετρικών μοντέλων για την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας που αναφέραμε.

Όπως αναλύσαμε στα προηγούμενα λόγω της ιδιαίτερης συμπεριφοράς που παρουσιάζουν τα δεδομένα από χρηματοοικονομικές σειρές τα καταλληλότερα μοντέλα για αυτό είναι τα conditional heteroscedasticity models δηλαδή τα ARCH,GARCH,EGARCH.
Όλα τα δεδομένα για τους δείκτες έχουν συλλεχθεί από τα ιστορικά δεδομένα που διαθέτει στο κοινό η βάση δεδομένων yahoo finance και έχουν αναλυθεί στο στατιστικό πακέτο του STATA.

Ας δούμε αναλυτικά κάθε δείκτη :

Ανάλυση στον NYSE:

Ο δείκτης NYSE,γνωστός και ως Big Board,είναι ένα Αμερικάνικο χρηματιστήριο το οποίο εδρεύει στην Wall Street ,New York City.Αποτελεί το μεγαλύτερο χρηματιστήριο στον κόσμο του οποίου η κεφαλαιοποίηση των εταιρειών που περιλαμβάνει τον Σεπτέμβριο του 2015 ήταν 18,9 τρισεκατομμύρια δολάρια. Καθημερινά η αξία των συναλλαγών ξεπερνά τα 169 δισεκατομμύρια δολάρια. Ενδεικτικά εταιρείες που περιλαμβάνονται στον πίνακά του είναι η A&T,General Electric,Johnson &Johnson,Pfizer,Wels Fargo & Company.

Αρχικά ας δούμε τα περιγραφικά στατιστικά του δείκτη Nyse για την εξαετία.

Summary Statistics 1

Mean	-.0000422
Sd	.0163242
Skewness	.3556609
Kurtosis	10.60194

Πίνακας 1: Περιγραφικά στατιστικά των αποδόσεων του δείκτη Nyse

Στον πίνακα βλέπουμε μια ελαφρώς αρνητική μέση απόδοση και η κύρτωση είναι πολύ υψηλή. Η υψηλή κύρτωση δείχνει το πάχος των ουρών της κατανομής και

όπως αναφέραμε οι παχιές ουρές είναι χαρακτηριστικό των χρηματοοικονομικών σειρών. Ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή που έχει κύρτωση 3.

Παρακάτω παρουσιάζουμε γραφικά τις αποδόσεις και το ιστόγραμμα συχνοτήτων του δείκτη για την εξαετία που μελετούμε.

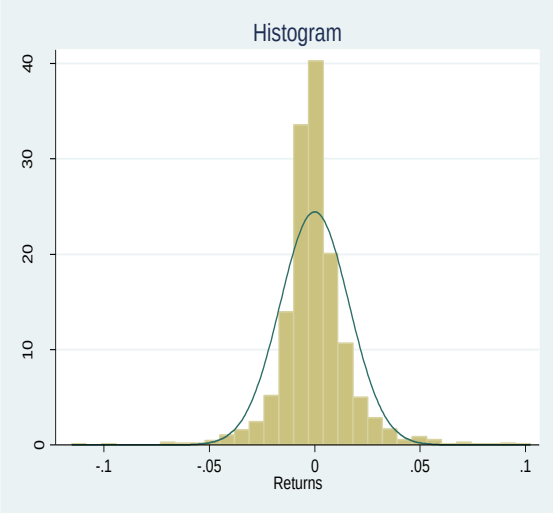


Fig 4.1: Ιστόγραμμα των αποδόσεων και σύγκριση με την κανονική κατανομή.

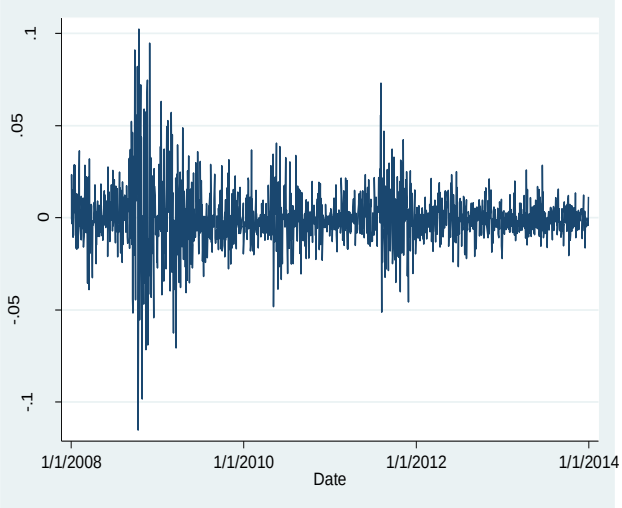


Fig 4.2: Οι αποδόσεις του Nyse

Στο Fig 4.1 βλέπουμε ότι οι αποδόσεις έχουν πιο παχιές ουρές(heavy tails)και είναι πιο υψηλές σε σχέση με την κανονική. Στο fig 4.2 παρατηρούμε το φαινόμενο του volatility clustering, περίοδοι μεγάλης μεταβλητότητας τείνουν να ακολουθούνται από επίσης μεγάλη μεταβλητότητα. Συγκεκριμένα μετά τα μέσα του 2008 και μέχρι το 2009 όπου και ξέσπασε η κρίση διακρίνουμε πολύ υψηλή μεταβλητότητα των αποδόσεων.

Skewness/Kurtosis test for Normality 1 ---------- joint----------

Variable	Obs	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	adj chi2(2)	Prob>chi2
ret	1.5e+03	0.0000	0.0000	.	0.0000

Πίνακας 4.2: Τεστ για κανονικότητα των αποδόσεων

Από το τέστ του Stata για την κανονικότηταντων αποδόσεων βλέπουμε ότι το p-value<0.05 και έτσι απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0:normality.Οπότε διαπιστώνουμε και από το τέστ ότι δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.

Πριν προχωρήσουμε στην χρήση διαφόρων μοντέλων είναι σημαντικό να ελέγξουμε αν στα δεδομένα μας υπάρχει στασιμότητα. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε το Augmented Dickey –Fuller test για unit roots.

Dickey, D. A., and W. A. Fuller. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. Journal of the American Statistical Association 74: 427–431

Augmented Dickey-Fuller test for unit roots 1

---------- Interpolated Dickey-Fuller ----------

	Test Statistic	1% Critical	5% Critical	10% Critical
Z(t)	-11.913	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000

Πίνακας 4.3: Augmented Dickey-Fuller test for unit roots 2

Από την τιμή στατιστικού τεστ -11.913 και τις κριτικές τιμές όπως φαίνονται στον πίνακα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ακόμα και σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 1% H_0: unit roots άρα έχουμε στασιμότητα στην χρονολογική σειρά μας. Εξάλλου το p-value για το Z(t) είναι 0.

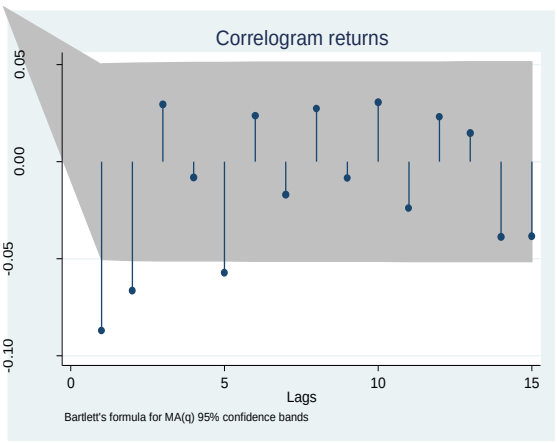


Fig 4.3: Γρ.παράσταση των αποδόσεων των

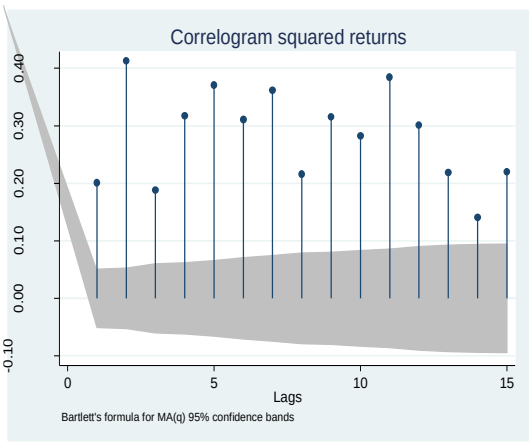


Fig 4.4: Γρ.παράσταση των τετραγώνων αποδόσεων

Στο όπως Fig 3 παρουσιάζεται δείχνει μια ασθενής συσχέτιση των αποδόσεων σε 15 lags αντίθετα στο Fig 4 η συσχέτιση των αποδόσεων των τετραγώνων(15 lags)είναι θετική και ιδιαίτερα σημαντική. Αυτό μας δείχνει ότι έχουμε arch effects στα δεδομένα μας.

Portmanteau test for white noise 1

Portmanteau (Q) statistic =	1423.9729
Prob > chi2(10) =	0.0000

Πίνακας 4.4: Portmanteau test τετραγώνων αποδόσεων

Portmanteau test for white noise 2

Portmanteau (Q) statistic=	28.5095
Prob > chi2(10) =	0.0015

Πίνακας 4.5: Portmanteau test αποδόσεων

Ljung, G. M., and G. E. P. Box. 1978. On a measure of lack of fit in time series models. Biometrika 65: 297–303.

Και από τους πίνακες 4,5 με τα Portmanteau test συμπεραίνουμε ότι έχουμε μεγάλη συσχέτιση των τετραγώνων των αποδόσεων αφού απορρίπτουμε την $H_0: \rho_1 = \cdots = \rho_m = 0$ σε 10 lags. Το Stata χρησιμοποιεί το τεστ των Ljung Box.
Οι αποδόσεις έχουν επίσης συσχέτιση αλλά είναι μικρή και μπορούμε να την αγνοήσουμε ,αν είναι υψηλή ή θέλουμε να την αφαιρέσουμε συνήθως ένα ARMA(1,1) είναι αρκετό.

Αφού εντοπίσαμε τα χαρακτηριστικά των δεδομένων μας τώρα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τα μοντέλα για την διαχείριση της μεταβλητότητας.
Τρέξαμε τα μοντέλα ARCH(6) ,GARCH(1,1),EGARCH(1,1).Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

NYSE INDEX

ARCH(6)			GARCH(1,1)			EGARCH(1,1)		
	Coef.	P>|z|		Coef.	P>|z|		Coef.	P>|z|
μ	-0.0006565	0.008	μ	-0.000652	0.013	μ	-0.0003441	0.361
a_1	0.0314951	0.083	α	0.1130218	0.000	α	-0.0061491	0.013
a_2	0.2185322	0.000	β	0.8754092	0.000	γ	0.1027295	0.000
a_3	0.1380883	0.000	c	2.93e-06	0.000	β	-0.9036798	0.000
a_4	0.1059014	0.000	AIC	-8986.914		c	-15.73721	0.000
a_5	0.1892984	0.000	BIC	-8965.632		AIC	-8203.8	
a_6	0.1813859	0.000	α+ β	0,9856		BIC	-8177.198	
c	0.0000397	0.000						
AIC	-8946.714							
BIC	-8904.149							

Πίνακας 4.6: Εκτιμήσεις συντελεστών και τα αντίστοιχα p-value Akaike , Schwarz's των ARCH(6),GARCH(1,1),EGARCH(1,1) για τον NYSE Index.

Τώρα ας προχωρήσουμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στον παραπάνω πίνακα..

Από το μοντέλο **ARCH(6)** έχουμε:
Η επιλογή να πάρουμε το ARCH model 6ης τάξης βασίστηκε στην πληροφορία που μας δίνουν για την καταλληλόλητα του μοντέλου τα Akaike και Schwarz's κριτήρια. Έτσι επιλέξαμε το ARCH με 6 lags αφού δίνει AIC= -8946.714 έναντι AIC= -8837.149 που μας δίνει το ARCH με 4 lags (το μικρότερο Akaike είναι και το καλύτερο).
Παρατηρούμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί και στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% εκτός από τον πρώτο α_1 που έχει p-value 0,083<0,05 και δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση $H_0: a_1 = 0$.
Επίσης έχουμε στασιμότητα αφού ισχύει $|\alpha_i| < 1 \; για \; i = 1 \dots 6$.

Model ARCH(6): $r_t = -0.000656 + u_t$

$\sigma_t^2 = 0.0000397 + 0.031495u_{t-1}^2 + 0.2185322u_{t-2}^2 + 0.1380883u_{t-3}^2 + 0.1059014u_{t-4}^2 + 0.1892984u_{t-5}^2 + 0.1813859u_{t-6}^2$.

Από το μοντέλο **GARCH(1,1)** έχουμε:

Επιλέξαμε το GARCH(1,1) γιατί αυτό το μοντέλο εμπειρικά και από την σχετική βιβλιογραφία είναι το καταλληλότερο.
Και εδώ όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί (positive constraints) και στατιστικά σημαντικοί σε α=5%.
Για το άθροισμα των συντελεστών α, β έχουμε $\alpha + \beta = 0{,}9856$ δηλαδή ισχύει ότι $|\alpha + \beta| < 1$. Αυτό μας εξασφαλίζει την στασιμότητα της χρονολογικής μας σειράς και μας δείχνει ότι παρόλο που απαιτεί αρκετό χρόνο η μεταβλητότητα γυρνάει στον μέσο (mean reverting).

Model GARCH(1,1): $r_t = -.000652 + u_t$

$$\sigma_t^2 = 2.93\text{e} - 06 + 0.1130218\, a_{t-1}^2 + 0.8754092\sigma_{t-1}^2$$

Από το μοντέλο **EGARCH(1,1)** έχουμε:

Για να εξηγήσουμε την αρνητική δυναμική ασσυμετρία(leverage effect) χρησιμοποιούμε το EGARCH(1,1). Ο συντελεστής που μας δίνει πληροφορία για το leverage effect είναι ο α. Παρατηρούμε από τον πίνακα 8 ότι είναι αρνητικός ($\alpha = -0.0061491$) και είναι στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%.Ο συντελεστής βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο -1 που σημαίνει ότι ένα αρνητικό σοκ(ξαφνική πτώση των τιμών) επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό την μεταβλητότητα των αποδόσεων από ότι ένα θετικό σοκ(ξαφνική άνοδος των τιμών).

Model EGARCH(1,1):

$$r_t = -0.0003441 + u_t$$

$$ln\sigma_\tau^2 = -15.73721 - 0.0061491 z_{t-1} + 0.1027295(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) - 0.9036798 ln\sigma_{t-1}^2,$$

Συνολικά από τα 3 μοντέλα από το Akaike's information criterion και Bayesian information criterion όπως φαίνονται στους σχετικούς πίνακες βλέπουμε ότι το GARCH(1,1) έχει τις μικρότερες τιμές AIC και BIC οπότε αυτό ερμηνεύει με τον πιο κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα που απαρτίζουν την χρονολογική μας σειρά.

Παρακάτω παρουσιάζουμε την δεσμευμένη διακύμανση όπως μοντελοποιήθηκε από τα τρία μοντέλα

Figure 4.5

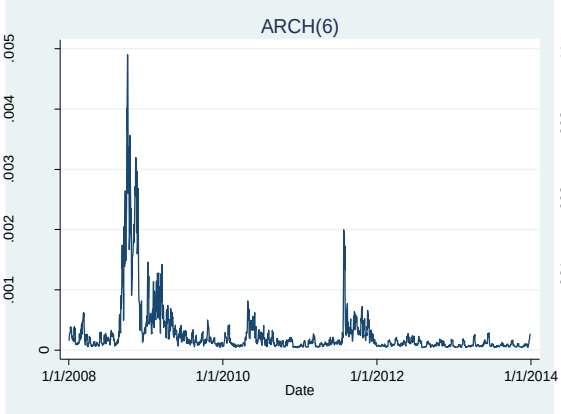


Figure 4.6

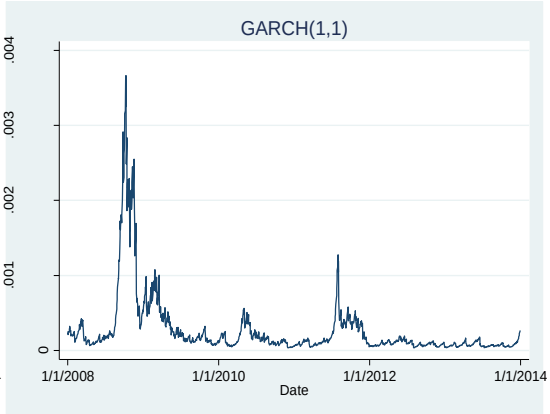


Figure 4.7

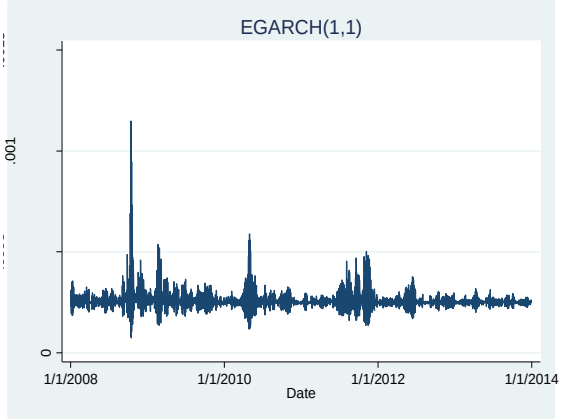


Figure 4.5: Δεσμευμένη διακύμανση για ARCH(6), 1/2/2008- 31/12/2013.
Figure 4.6: Δεσμευμένη διακύμανση για GARCH(1,1), 1/2/2008- 31/12/2013.
Figure 4.7: Δεσμευμένη διακύμανση για EGARCH(1,1), 1/2/2008- 31/12/2013.

Στα παραπάνω φαίνεται πως κυμάνθηκε η μεταβλητότητα των αποδόσεων για την υπο μελέτη εξαετία.
Διακρίνουμε περιόδους πολύ υψηλής μεταβλητότητας και περιόδους πολύ μικρής μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα στα μέσα του 2008 και ως τα μέσα του 2009 η μεταβλητότητα βρίσκεται σε τρομερά υψηλά επίπεδα αντίθετα από το 2012 και μετά η μεταβλητότητα των αποδόσεων ήταν πάρα πολύ χαμηλή. Στην περίοδο της υψηλής βρισκόμασταν στην καρδιά της οικονομικής κρίσης στις Ηνωμένες πολιτείες η οποία από ότι φαίνεται δημιούργησε τεράστια μεταβλητότητα στις χρηματαγορές(η ευαισθησία της μεταβλητότητας στα κακά νέα). Από την άλλη η οικονομία από το 2012 και ύστερα σταθεροποιήθηκε και αυτό αντανακλάστηκε στην μεταβλητότητα των δεικτών.

Ανάλυση στον DAX INDEX:

Ο DAX(γερμ. **D**eutscher **A**ktienind**ex**), είναι ένας Γερμανικός Χρηματιστηριακός δείκτης «blue chip» εταιρειών, οι οποίος αποτελείται από τις 30 μεγαλύτερες γερμανικές εταιρίες που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης σε όρους όγκους συναλλαγών και κεφαλαιοποίησης.
Ιδρύθηκε την 1η Ιουλίου του 1988 και ξεκίνησε από τις 1000 μονάδες βάσης, την μέγιστη τιμή του την σημείωσε στις 10 Απριλίου 2015.Γενικά μοιάζει με τον Dow Jones Industrial Average αλλά λόγω του μικρού μεγέθους του δεν αντικατοπτρίζει πλήρως την εικόνα της οικονομίας.
Χαρακτηριστικές εταιρίες που τον απαρτίζουν είναι:Adidas,BMW,Daimler ,Volkswagen,Bayer,Siemens.

Με τρόπο ανάλογο όπως στον δείκτη Nyse θα ακολουθήσει η ανάλυση της μεταβλητότητας των αποδόσεων του δείκτη.

Από τα περιγραφικά στατιστικά του δείκτη παρατηρούμε και εδώ μια πολύ υψηλή κύρτωση (kurtosis= 8.735782) όπου υποδηλώνει παχιές ουρές και υψηλότερη κορυφή σε σχέση με την κανονική που έχει κύρτωση 3 επίσης έχει αρνητικό συντελεστή λοξότητας (skewness= -.0972543)

Από τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης και της μερικής αυτοσυσχέτισης σε 15 lags όπως και από τα αντίστοιχα γραφήματα υπάρχει πολύ μεγάλη θετική συσχέτιση στα τετράγωνα των αποδόσεων και μια ασθενής συσχέτιση στις αποδόσεις που μπορούμε να την αγνοήσουμε. Εξάλλου το Portmanteau test για τα τετράγωνα των αποδόσεων σε 10 lags μας δίνει Q(10)= 603.9396 και άρα δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση H_0: $\rho_1 = \cdots = \rho_{10} = 0$,δηλαδή υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα τετράγωνα των αποδόσεων.

Από τα παραπάνω (αναμενόμενα για χρονολογική σειρά με αποδόσεις μετοχών) αντιλαμβανόμαστε ότι έχουμε ARCH effects στα δεδομένα μας και θα χρειαστούμε τα μοντέλα που αναφέρονται στην κλάση Conditional Heteroskedastic Models.

Θα χρησιμοποιήσουμε όπως πριν τα ARCH(6) ,GARCH(1,1),EGARCH(1,1). Η επιλογή της τάξης για το κάθε μοντέλο έγινε με βάση το μικρότερο Akaike και από μελέτη της βιβλιογραφίας όπου χρησιμοποιούνται για την ανάλυση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών τα μοντέλα τάξης 1.
Τα αποτελέσματα από το STATA παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα 8:

Για το ARCH(6) όλοι οι συντελεστές της μεταβλητότητας είναι θετικοί (positive constaints του μοντέλου) και στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α=5%.Το Akaike και Scwarrz κριτήρια είναι AIC= -8782.148 και BIC=-8739.442 έναντι AIC= -8658.87 και BIC= -8626.84 για το ARCH(4) .Έτσι ακολουθώντας τον κανόνα το μικρότερο είναι το καλύτερο επιλέξαμε το ARCH τάξης 6 μοντέλο.
Επίσης στην χρονολογική μας σειρά υπάρχει στασιμότητα αφού $|\alpha_\iota| < 1\,, \iota = 1, \dots, 6$.

Model ARCH(6):

$$r_t = -0.0009887 + u_t$$
$$\sigma_t^2 = 0.0000595 + 0.0522549u_{t-1}^2 + 0.1136188u_{t-2}^2 + 0.1645065u_{t-3}^2 + 0.1403383\, u_{t-4}^2 + 0.2173933u_{t-5}^2 + 0.1269533u_{t-6}^2$$

DAX INDEX

ARCH(6)			GARCH(1,1)			EGARCH(1,1)		
	Coef.	P>|z|		Coef.	P>|z|		Coef.	P>|z|
μ	-0.0009887	0.001	μ	-0.0008488	0.010	μ	-0.0014616	0.000
a_1	0.0522549	0.000	α	0.0879803	0.000	α	-0.1518573	0.000
a_2	0.1136188	0.000	β	0.9023341	0.000	γ	0.1387491	0.000
a_3	0.1645065	0.000	c	2.99e-06	0.000	β	0.9965668	0.000
a_4	0.1403383	0.000	AIC	-8833.686		c	-0.017205	0.425
a_5	0.2173933	0.000	BIC	-8812.333		AIC	-8916.63	
a_6	0.1269533	0.000	α+ β	0,9903144		BIC	-8889.938	
c	0.0000595	0.000						
AIC	-8782.148							
BIC	-8739.442							

Πίνακας 4.7: Εκτιμήσεις συντελεστών και τα αντίστοιχα p-value Akaike , Schwarz's των ARCH(6),GARCH(1,1),EGARCH(1,1) για τον DAX Index.

Στις εκτιμήσεις για το GARCH(1,1) πάλι όλοι οι συντελεστές της μεταβλητότητας είναι θετικοί και στατιστικά σημαντικοί σε α=5%.
Το άθροισμα των συντελεστών α, β δίνει $\alpha + \beta = 0{,}9903144$,έτσι πέρα από την στασιμότητα που υποδηλώνει αφού $|\alpha + \beta| < 1$, η μεταβλητότητα στα δεδομένα μας επιμένει και παρόλο που θέλει πολύ χρόνο γυρίζει στο μέσο.Επίσης από τα AIC,BIC κριτήρια όπως φαίνονται στον πίνακα το GARCH(1,1) ταιριάζει καλύτερα σα δεδομένα μας αφού έχουν μικρότερες τιμές.

Model GARCH(1,1):

$$r_t = -0.0008488 + u_t$$
$$\sigma_t^2 = 2.99\text{e} - 06 + 0.0879803\, a_{t-1}^2 + 0.9023341\sigma_{t-1}^2$$

Το φαινόμενο του leverage effect το «πιάνει» το EGARCH(1,1) και εκφράζεται από τον συντελεστή α. Η τιμή του α είναι - 0.0133961 και είναι στατιστικά σημαντικό σε α=5%.Αφού είναι ανάμεσα στο -1,0 διαπιστώνουμε ότι τα αρνητικά σοκ αυξάνουν την μεταβλητότητα περισσότερο από ότι τα θετικά σοκ.

Model EGARCH(1,1):

$$r_t = -0.0014616 + u_t$$
$$ln\sigma_\tau^2 = -0.017205 - 0.1518573 z_{t-1} + 0.1387491(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) + 0.9965668\, ln\sigma_{t-1}^2.$$

Συνολικά βλέπουμε ότι το μοντέλο που ταιριάζει καλύτερα στα αποτελέσματά μας σύμφωνα με τα AIC, BIC κριτήρια είναι το EGARCH(1,1) αφού έχει το μικρότερο αριθμό AIC και BIC σε αντιδιαστολή με τον Nyse στον οποίο το GARCH(1,1) είχε μικρότερους αριθμούς στα κριτήρια.

Πάμε να δούμε γραφικά πως κυμαίνονται η απόδοση και η δεσμευμένη διακύμανση στον χρόνο(1/2/2008- 31/12/2013) για τον δείκτη DAX και για κάθε μοντέλο ξεχωριστά**.**

Figure (a)

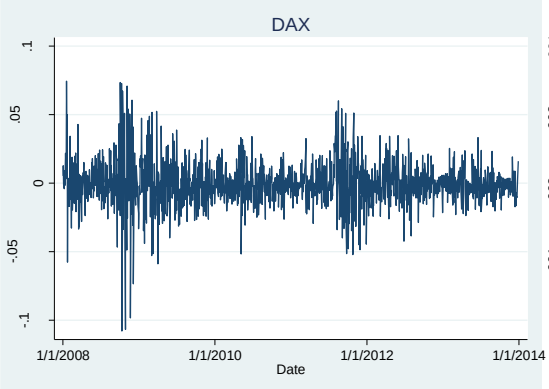


Figure (b)

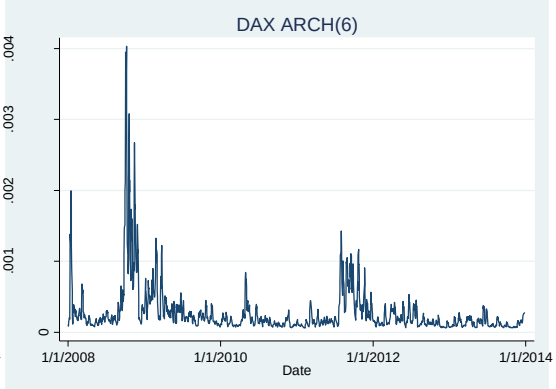


Figure (c)

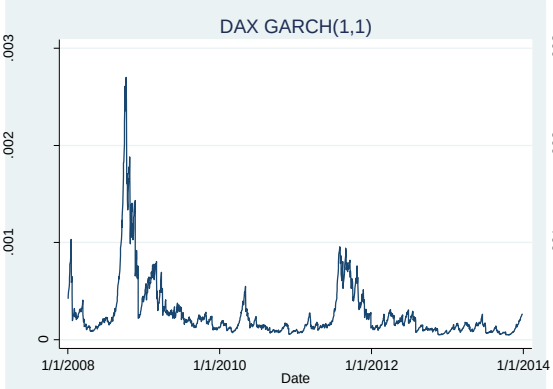


Figure (d)

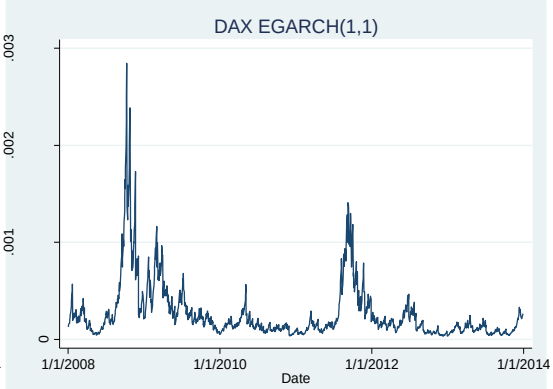


Figure (a):Οι αποδόσεις του δείκτη DAX, 1/2/2008- 31/12/2013
Figure (b): Δεσμευμένη διακύμανση για ARCH(6), 1/2/2008- 31/12/2013.
Figure (c): Δεσμευμένη διακύμανση για GARCH(1,1), 1/2/2008- 31/12/2013.
Figure (d): Δεσμευμένη διακύμανση για EGARCH(1,1), 1/2/2008- 31/12/2013

Φαίνεται και εδώ ξεκάθαρα όπως στον NYSE ότι η μεταβλητότητα είναι πολύ υψηλή στην περίοδο της οικονομικής κρίσης(επίδραση αρνητικών σοκ) και χαμηλή μετά το 2012 όπου η οικονομία σταθεροποιήθηκε. Στον DAX η μεταβλητότητα είναι μικρότερη από τον NYSE αφού η κρίση ήταν πιο έντονη στις Ηνωμένες πολιτείες.

Μελέτη οικονομικής κρίσης:

Θα προσπαθήσουμε να δούμε πως η οικονομική κρίση του 2008 στις Ηνωμένες Πολιτείες επηρέασε την μεταβλητότητα στις χρηματαγορές ,ποιους κλάδους επηρέασε περισσότερο, και την σχέση της με δείκτες της πραγματικής οικονομίας.

Η οικονομική κρίση του 2008 στις ΗΠΑ η όποια σημαδεύτηκε από την κατάρρευση της Lehmann Brothers χαρακτηρίστηκε ως η μεγαλύτερη κρίση μετά από την Μεγάλη Ύφεση του 1929.

Πως επηρεάστηκαν όμως οι χρηματαγορές;

Επηρεάστηκαν όλοι οι κλάδοι της οικονομίας;

Ας δούμε…

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της δεσμευμένης διακύμανσης όπως μοντελοποιήθηκε από το GARCH(1,1) για τον S&P 500 ,και για τους επιμέρους δείκτες S&P 500 Finance Sector (εταιρίες του S&P που δραστηριοποιούνται σε χρηματοοικονομικό περιβάλλον) και για τον S&P 500 Consumer Staple(εταιρίες του S&P που σχετίζονται με την κατανάλωση).

Figure I

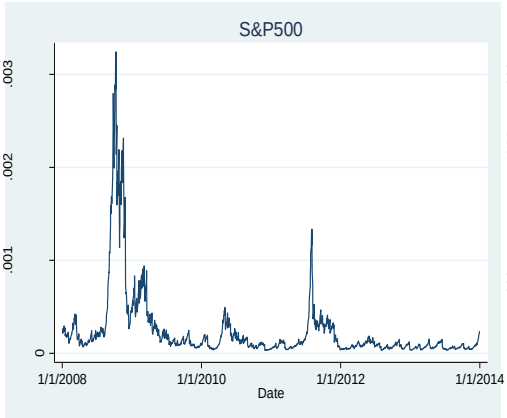


Figure II

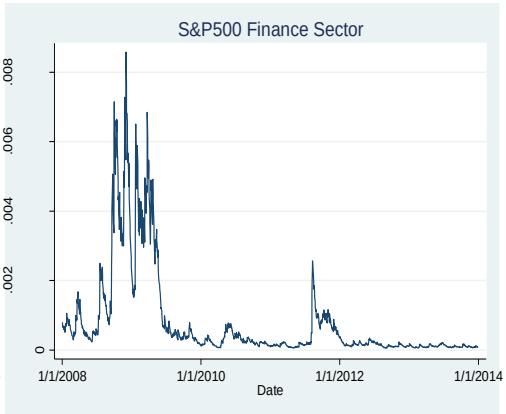


Figure III

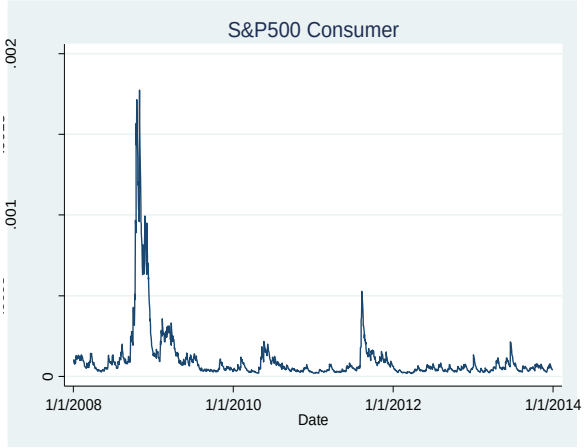


Figure (I): Δεσμευμένη διακύμανση για S%P 500, 1/2/2008- 31/12/2013.
Figure (II): Δεσμευμένη διακύμανση για S&P 500 Finance sector, 1/2/2008-31/12/2013.
Figure (II): Δεσμευμένη διακύμανση για S&P 500 Consumer Staples, 1/2/2008-31/12/2013.

Στο Figure I φαίνεται η μεταβλητότητα του S&P 500 ,όπως και στον NYSE την περίοδο της οικονομικής κρίσης εμφανίζεται πολύ ανεβασμένη.
Το σημαντικότερο είναι στο Figure II που δείχνει την μεταβλητότητα από τον δείκτη που περιλαμβανει εταιρίες χρηματοικονομικου ενδιαφέροντος, παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα την περίοδο της κρίσης είναι πολύ υψηλότερη σε σχέση με τον S&P 500 αλλά και για μεγαλύτερο διάστημα παραμένει σε υψηλά επίπεδα.
Από την άλλη στο Figure III που αφορά εταιρίες που σχετίζονται με την κατανάλωση βλέπουμε ότι η μεταβλητότητα είναι πολύ μικρότερη και από τους άλλους δύο δείκτες και παραμένει υψηλή για μικρότερο χρονικό ορίζοντα.

Έτσι και από τα τρία διαγράμματα συνολικά μπορούμε να πούμε ότι κατά την διάρκεια της οικονομικής κρίσης του 2008 η μεταβλητότητα ήταν αισθητά μεγαλύτερη και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα υψηλή στο χρηματοοικονομικό τομέα της οικονομίας. Η κρίση αν και επηρέασε ολόκληρη την οικονομία τελικά ήταν πολυ πιο έντονη σ αυτό το τμήμα. Εξάλλου μια από τις αιτλιες της ήταν η φούσκα στα στεγαστικά δάνεια και η αλόγιστη πιστωτική επέκταση χρηματοοικονομικών οργανισμών.

Figure 8: US GDP Growth rate, πηγή: US bureau of labor statistics

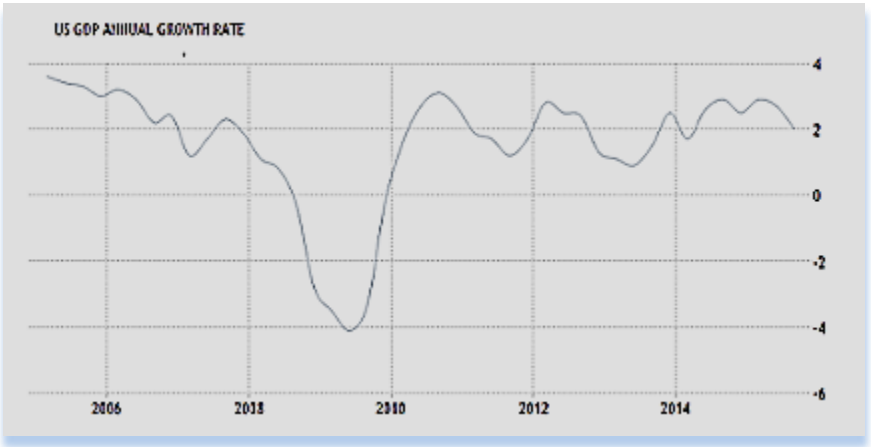


Figure 9: US Unemployment rate, πηγή: US bureau of labor statistics



Στα Figure 9,10 δείχνουμαι την πορεία του ΑΕΠ και της ανεργείας στις ΗΠΑ για τις περιόδους πρίν,κατά την διάρκεια και μετά την κρίση του 2008.Παρατηρούμε ότι το ΑΕΠ της χώρας είχε και αυτό μεγάλη πτώση αλλά ήταν αρκετά σύντομη ,κιόλας από το 2010 έχει ανακτήσει τις απωλειές του. Η ανεργία επίσης αύξανεται διαρκώς κατά την διάρκεια της κρίσης ,από 5% τον Ιανουάριο του 2008 έφτασε στην μέγιστη τιμή της τον Οκτώβριο του 2009 με 10% ,σε λιγότερο από δύο χρόνια διπλασιάστηκε. Σε αντίθεση με το ΑΕΠ που επανήλθε σχετικά γρήγορα η ανεργία εμαφανίζεται πολύ επίμονη και 6 χρόνια μετά το 2014 δεν έχει επιστρέψει στα προ κρίσης επίπεδα.

Εν τέλει αν λάβουμε μόνο υπόψιν την τεράστια μεταβλητότητα που παρατηρήθηκε εκείνη την περίοδο στους χρηματιστηριακούς δείκτες και ιδιαίτερα στον χρηματοοικονομικό κλάδο καταλαβαίνουμε γιατί οδήγησε πολλους να πουν ότι η κρίση του 2008 είναι ίδιας έντασης με την μεγάλη ύφεση του 1929. Στον απόηχο της κρίσης όμως δεν είναι ακριβώς έτσι αφού οι δείκτες της πραγματικής οικονομίας πολύ γρήγορα επανήλθαν στα προηγούμενα επίπεδα ,και παρόλο που η ανεργια εκτοξεύτηκε παρέμεινε σε σημαντικά μικροτερα επίπεδα από ότι θα δικαιολογόυσε η μεταβλητότητα των χρηματιστηρίων το 2008-2009.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είδαμε ότι οι αποδόσεις των διαφόρων δεικτών που μελετήσαμε όταν δημιουργούνται από ιστορικά δεδομένα που διαθέτουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που δεν μπορούν να αναλυθούν από βασικά μοντέλα των χρονολογικών σειρών(AR,ARMA).

Τα χαρακτηριστικά αυτά τα ονομάσαμε Stylized facts και μας προβλημάτισαν στο παρών κείμενο κυρίως τα εξής 3:

1. Αυτό που στην διεθνή βιβλιογραφία ονομάζεται volatility clustering , δηλαδή μεγάλες αλλαγές στις αποδόσεις ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές ,και οι μικρές αλλαγές ακολουθούνται από μικρές. Έτσι παρατηρείται η μεγάλη μεταβλητότητα στις αποδόσεις να εμφανίζεται κατά συστάδες.

2. Το δεύτερο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό είναι αυτό που αποκαλούμε leverage effect. Είναι παρατηρίσιμο στις αποδόσεις μέτα από «κακά» νέα για τις χρηματαγορές- μια πτώση των τιμών στις μετοχές , να δημιουργεί εξαιρετικά αυξημένη μεταβλητότητα. Από την άλλη πλευρά «καλά» νέα δεν επιδρούν έντονα στην μεταβλητότητα. Έχουν δοθεί, όπως είδαμε κάποιες εξηγήσεις για αυτό το φαινόμενο αλλά είναι ελλιπής.

3. Η κατανομή των αποδόσεων των δεικτών εμφανίζει λεπτοκύρτωση ,δηλαδή πιο παχιές ουρές σε σχέση με την κανονική κατανομή.

Σ όλα αυτά τα χαρακτηριστικά απαντάνε και μοντελοποιούν κατάλληλα τα μοντέλα που ανήκουν στην κλάση conditional heteroscedasticity models **.**
Τέτοια μοντέλα είναι το ARCH, GARCH και άλλα που ανήκουν σε αυτήν την οικογένεια**.** Όλα αυτά τα μοντέλα προσπαθούν να υπολογίσουν κατάλληλα την μεταβλητότητα αντιμετωπίζοντάς την ακριβώς σαν ένα πρόβλημα που μπορεί κυρίως να ποσοτικοποιηθεί και όχι να μετρηθεί.

Εδώ εφαρμόσαμε τα μοντέλα για την μεταβλητότητα, τα ARCH(6),GARCH(1,1), EGARCH(1,1) για τον δείκτη του χρηματιστηρίου NYSE και τον υποδείκτη του χρηματιστηρίου της Φρανκφούρτης DAX.Ο χρονικός ορίζοντας των δεδομένων μα ήταν 1/1/2008 εως 31/12/2013.Με τα δύο πρώτα μοντέλα προσπαθήσαμε να πιάσουμε το volatility clustering των δεδομένων μας, είδαμε ότι και στους δύο δείκτες οι συντελεστές α, β ήταν μικρότεροι του ένα που σημαίνει ότι η μεταβλητότητα είναι επιμονή στα δεδομένα μας και κάποια στιγμή επιστέφει στο μέσο**.**
Με το τρίτο μοντέλο πιάσαμε το leverage effect, ο συντελεστής γ που μας το δείχνει ήταν και στους δύο δείκτες αρνητικός και στατιστικά σημαντικός. Έτσι καταφέραμε να εκφράσουμε στον τρόπο εκτίμησης της μεταβλητότητας το φαινόμενο αρνητικά σοκ να επιδρούν αθλητικά στην μεταβλητότητα.
Επίσης είδαμε ότι για τον NYSE ότι το πιο κατάλληλο μοντέλο για τα δεδομένα μας είναι το GARCH και για τον δείκτη DAX το EGARCH στηριζόμενοι στα μικρότερα AIC,BIC που δίνουν σε σχέση με τ ’άλλα.
Τέλος είδαμε ότι η μεταβλητότητα όπως εκτιμήθηκε και από τα τρία μοντέλα ήταν πάρα πολύ υψηλή στην αρχή της υπό μελέτης περιόδου και το συνδέσαμε με τη οικονομική κρίση του 2008 -2009. Διαπιστώσαμε ότι γεγονότα όπως η κρίση που δημιουργούν αρνητικά σοκ αυξάνουν την μεταβλητότητα την μετοχών.

Στην συνέχεια μελετήσαμε τον δείκτη S&P 500 και τον S&P 500 Financial Sector ο οποίος περιέχει εταιρίες που δραστηριοποιούνται στον χρηματοοικονομικό τομέα και τον S&P 500 Consumer που οι εταίρες που περιλαμβάνει σχετίζονται με την κατανάλωση. Εξάγαμε την μεταβλητότητα και για τους τρεις δείκτες όπως εκτιμήθηκε από το μοντέλο GARCH(1,1).

Παρατηρήσαμε ότι η μεταβλητότητα στον δείκτη που αφορά μόνο εταρίες του χρηματοοικονομικού κλάδου είναι μεγαλύτερης έντασης αλλά και μεγαλύτερης διάρκειας από τον συνολικό δείκτη. Από την άλλη στον δείκτη S&P 500 Consumer η μεταβλητότητα είναι χαμηλότερη αλλά και αρκετά μικρότερης διάρκειας συγκρινόμενη με τον συνολικό και με τον Financial Sector.

Συμπεράναμε ότι η οικονομική κρίση δεν επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο όλους τους τομείς και η μεταβλητότητα μπορεί να είναι διαφορετικής έντασης σε κάθε τομέα της οικονομίας.
Καταλήξαμε ότι παρόλο που εκείνη την εποχή η οικονομική κρίση χαρακτηρίστηκε ως η νέα Μεγάλη Ύφεση του 1929 τελικά περιορίστηκε στον χρηματοοικονομικό τομέα ο οποίος τη πυροδότησε κιόλας .Είδαμε ότι σχετικά γρήγορα οι δείκτες της πραγματικής οικονομίας άρχισαν να επανέρχονται και σε καμία περίπτωση οι τιμές τους δεν αντιστοιχούσαν στις τεράστιες διαστάσεις που είχε εκείνη την περίοδο η μεταβλητότητα.

Με λίγα λόγια μελετώντας την μεταβλητότητα των δεικτών και την συμπεριφορά δεικτών της πραγματικής οικονομίας μπορούμε να πούμε ότι η οικονομική κρίση του 2008 ήταν καθαρά μια χρηματοοικονομική κρίση.

6.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Lamoureux, G. C., and Lastrapes, W. D. (1990), "Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects," Journal of Finance, 45, 221-229.

[2] Mizrach, B. (1990), "Learning and Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns," Mimeo, Department of Finance, The Warthon School, University of Pennsylvania.

[3] Stock, J. H. (1988), "Estimating Continuous-Time Processes Subject to Time Deformation," Journal of the American Statistical Association (JASA), 83, 77-85.

[4] Bollerslev T.P (1986). ' Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity' ,Journal of Econometrics ,31: 309-28

[5] Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. E. Runkle, 1993. On The Relation between The Expected Value and The Volatility of Nominal Excess Return on stocks. Journal of Finance 48: 1779-1801.

[6] Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Second International Symposium on Information Theory, ed. B. N. Petrov and F. Csaki, 267–281

[7] Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach Daniel B. Nelson Econometrica ,Vol.59,No.2,(Mar.1991),347-370

[8] Christopher G. Lamoureux ,William D.Lastrapes (1990),Journal of Finance ,Volume45, Issue1(Mar.1990), 221-229

[9] Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics 6: 461–464

[10] Engle ,R. (2001).The use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics. Journal of Economic Perspectives 15: 157-168

[11] Robert F Engle and Andrew J Patton, "What good is a volatility model?" Received 15 October 2000

[12] Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation Robert F. Engle Econometrica, Vol. 50, No. 4. (Jul., 1982), pp. 987-1007.

[13] NEW FRONTIERS FOR ARCH MODELS Robert Engle Professor of Finance, NYU Professor of Economics, UCSD

[14] Taylor, S.J., 1986. Modelling Financial Time Series. Wiley, New York.

[15] ARCH modeling in finance* A review of the theory and empirical evidence Tim Bollerslev Northwestern University, Eranston, IL 60208, USA Ray Y. Chou Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA Kenneth F. Kroner University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA, Journal of Econometrics 52 (1992) 5-59. North-Holland

[16] Andersen, T., Bollerslev, T., Diebold, F.X. and Labys, P. (2003), "Modeling and Forecasting Realized Volatility," Econometrica, 71, 529-626.

[17] Conditional Heteroscedasticity in time Series of Stock returns: Evidence and Forecasts Vedat Akgiray The Journal Of business, Vol 62, No. 1(1 Jan.1989), 55-80

[18] Analysis of Financial Time series ,second Edition ,Ruey S.Tsay ,Wiley Series in Probability and Statistics

[19] Christian Gourieroyx ,ARCH models and Financial applications ,1997 Springer

[20] Hull,J. Options ,Futures and Other Derivatives (2006) , USA: Pearson Prentice Hall

[21] The Basics of Financial Econometrics: Tools, Concepts, and Asset Management Applications Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, Svetlozar T. Rachev, Bala G. Arshanapalli withMarkus Hoechstoetter

[22] Applied Econometric Time Series Walter Enders,Iowa State University John Willey and Sons.

[23] Introductory Econometrics A Modern Approach Fifth Edition , Jeffrey Wooldridge Michigan State University

[24] Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές Χ.Α Χαραλαμπίδη Καθηγητή Πανεπιστημίου Αθηνών Εκδόσεις Συμμετρία

[25] Εισαγωγή στην Στατιστική Μέρος 1 ,Χαράλαμπος Δαμιανού , Μάρκος Κούτρας Εκδόσεις Συμμετρία ΑΘΗΝΑ 2003

[26] STATA USER'S GUIDE RELEASE 13 A Stata Press Publication StataCorp LP College Station, Texas

[27] NYU Volatility Institute http://vlab.stern.nyu.edu/

[28] Sentana ,E . "Quantaryic Arch modelas " ,(1995) Review of Economic Studies 62, 639-661

[29] Hamilton J.D.(1994) "Time Series Analysis" ,Princeton University Press

[30] Engle R.F and V.K.Ng (1993) "Measuring and Testing the Impact of News on volatility" Journal of Finance 48 ,1749-1178