https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΟΠΙΣΘΟΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΑΝΘΕΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

Παναγιώτης Κων. Ρηγόπουλος

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής

του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική

Αθήνα

Απρίλιος 2012

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η ανάδειξη της χρησιμότητας των οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στο κριτήριο ανθεκτικού ελέγχου καθώς και στην αρχή στοχαστικής μεγιστοποίησης και στα στοχαστικά διαφορικά παίγνια. Στο πρώτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την επίλυση μιας γενικής μορφής οπισθοδρομικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης καθώς και ενός γενικού συστήματος προδρομικών-οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε το κριτήριο ανθεκτικού ελέγχου και χρησιμοποιούμε τις οπισθοδρομικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις για την εξαγωγή σημαντικών αποτελεσμάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο, αναδεικνύουμε την θεωρία των προδρομικών-οπισθοδρομικων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και την χρησιμοποιούμε για να επιλύσουμε προβλήματα στοχαστικής θεωρίας ελέγχου. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των κεφαλαίων 2 και 3 στο πρόβλημα στοχαστικής μεγιστοποίησης με αβεβαιότητα για το μοντέλο.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Περιεχόμενα

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Κεφάλαιο 1

Επίλυση BSDE's και FBSDE's

1.1 Επίλυση οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (BSDE's)

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και B να είναι μια κίνηση Brown. Εφοδιάζουμε τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με την διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$, όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), t \in [0,T]$ και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Συμβολίζουμε με

$$D \equiv \left\{ x : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}, x_t \in m - \mathcal{F}_t{}^1 \text{ για κάθε } t \in [0,T] \text{ και } \mathbb{E}\left(\int_0^T x_t^2 dt\right) < \infty \right\},$$

με

$$D^+ \equiv \left\{ x : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R},\ x \geq 0,\ x_t \in m - \mathcal{F}_t \text{ για κάθε } t \in [0,T] \text{ και } \mathbb{E}(\int_0^T x_t^2 dt) < \infty \right\}$$

με

$$D_0^{\exp} \equiv \left\{ x \in D : \mathbb{E}\left[\exp\left(ess \sup_t \alpha |x_t| \right)\right] < \infty \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

με

$$D_1^{\exp} \equiv \left\{ x \in D : \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \int_0^T |x_t| dt \right)\right] < \infty \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

και με

$$D^n \equiv D \times D \times \ldots \times D.$$

Θεώρημα 1 [2] *Έστω $U \in D_1^{exp}$ και $\beta \in D^+$ φραγμένες διαδικασίες. Τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος $(V,Z) \in D_0^{exp} \times D^n$ τέτοιο ώστε*

$$dV_t = -\left(U_t - \beta_t V_t + \frac{1}{2}||Z_t||^2 \right) dt + Z_t dB_t,\ V_T = 0 \tag{1.1}$$

Επιπλέον η V είναι φθίνουσα και κυρτή σαν συνάρτηση της U.

Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 1,2 και 3.

[2] Schroder and Skiadas [6]

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Καθώς η U είναι φραγμένη θεωρούμε $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$ ένα άνω φράγμα της διαδικασίας β. Αρχικά θα δουλέψουμε πάνω σε μια αναδιατύπωση του προβλήματος. Έτσι για $(V, Z) \in D_0^{exp} \times D^n$ και χρόνο διακοπής[3] r, θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$V_t = \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds + V_r\right)\right]\right) \text{ στο } \{r \geq t\} \in \mathcal{F} \tag{1.2}$$

και έχουμε :

Πρόταση 1 *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

α) $\exists! Z \in D^n$ τέτοια ώστε η (V, Z) να ικανοποιεί την (1.1)

β) $\exists Z \in D^n$ τέτοια ώστε η (V, Z) να ικανοποιεί την (1.2)

γ) Η V ικανοποιεί την (1.2) για $r = T$ και για $V_T = 0$

δ) Η V ικανοποιεί την (1.2) για κάθε χρόνο διακοπής r και για $V_T = 0$

Απόδειξη:
Οι συνεπαγώγες $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ και $(\delta) \Rightarrow (\gamma)$ είναι τετριμμένες.
((γ) ⇒ (δ))
Έστω ότι ισχύει η (γ). Τότε η (1.2) για $r = T$, μας δίνει

$$V_t = \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T (U_s - \beta_s V_s)\, ds + V_T\right)\right]\right)$$

επομένως

$$\exp(V_t) = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right)\right] = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right)\exp\left(\int_0^T (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right)\right]$$

Όμως $\exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) \in m - \mathcal{F}_t$, επομένως

$$\exp(V_t) = \exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_t, \tag{1.3}$$

όπου $M_t = \mathbb{E}_t[\exp(\int_0^T (U_s - \beta_s V_s) ds)]$ είναι martingale, καθώς για $k \leq t$ έχουμε $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t$ και άρα

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}_k\left[\exp\left(\int_0^T (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right)\right] = M_k.$$

Έστω τώρα ότι r είναι ένας οποιοσδήποτε χρόνος διακοπής. Από το Θεώρημα Επιλεκτικής Διακοπής (optional stopping theorem) έχουμε $M_t = \mathbb{E}_t[M_r]$ στο σύνολο $\{r \geq t\}$. Από την (1.3) (για $t = r$) έχουμε

$$\exp(V_r) = \exp\left(-\int_0^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_r \Leftrightarrow$$

$$\exp\left(\int_t^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds + V_r\right) = \exp\left(\int_t^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds - \int_0^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_r \Leftrightarrow$$

[3]Έστω $r : \Omega \to [0, T]$ μια τυχαία μεταβλητή. Η r λέγεται χρόνος διακοπής (stopping time) αν $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

$$\exp\left(\int_t^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds + V_r\right) = \exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_r$$

επομένως,

$$\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) + V_r\right] = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_r\right]$$

και άρα

$$\exp(V_t) = \exp\left(-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\, ds\right) M_t$$

που ισχύει, άρα δείξαμε το ζητούμενο.
((γ) ⇒ (β))
Έστω ότι ισχύει η (γ). Τότε από το Θεώρημα Αναπαράστασης των martingale έχουμε για το $\{M_t\}$ ότι υπάρχει μοναδική διαδικασία $\hat{Z} \in D^n$ τέτοιο ώστε $dM_t = \hat{Z}_t dB_t$. Θεωρούμε την διαδικασία Z που ορίζεται ως $Z_t = \hat{Z}_t M_t^{-1}$. Αποδεικνύεται ότι $Z \in D^n$. Θέτοντας $W_t = \exp(V_t)$ λογαριθμίζοντας και εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô, έχουμε :

$$\frac{dW_t}{W_t} = -\left(U_t - \beta_t V_t\right) + \frac{dM_t}{M_t} \Rightarrow$$

$$\frac{dW_t}{W_t} = -\left(U_s - \beta_t V_t\right) + Z_t dB_t \Rightarrow dW_t = -W_t\left(U_t - \beta_t V_t\right) + W_t Z_t dB_t \Rightarrow$$

$$\int_0^t dW_s = \int_o^t W_s\left[-\left(U_s - \beta_s V_s\right)\right] ds + \int_0^t W_s Z_s dB_s \Rightarrow$$

$$W_t - W_0 = \int_o^t W_s\left[-\left(U_s - \beta_s V_s\right)\right] ds + \int_0^t W_s Z_s dB_s \Rightarrow$$

$$W_t = W_0 + \int_o^t W_s\left[-\left(U_s - \beta_s V_s\right)\right] ds + \int_0^t W_s Z_s dB_s$$

Τότε η $\{W_s\}$ είναι διαδικασία Itô καθώς :

- $W_0 = \exp(V_0) \in m - \mathcal{F}_0(V \in D)$
- $\int_0^T |W_s\left[-(U_s - \beta_s V_s)\right]| ds < \infty, P - \sigma.\beta.$ και $\int_0^T |W_s Z_s|^2 ds < \infty, P - \sigma.\beta.$
- Οι διαδικασίες $(W_s[-(U_s - \beta_s V_s)])_{0 \le s \le T}$ και $(W_s Z_s)_{0 \le s \le T}$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$, αυτό είναι προφανές αν παρατηρήσουμε στο πως ορίζονται οι εμπλεκόμενες διαδικασίες.

Επίσης $f(x) = \log(x) \in C^2(\mathbb{R}^+)$ Άρα απο το Λήμμα του Itô έχουμε ότι :

$$\log(W_t) = \log(W_0) + \int_0^t \frac{1}{W_s} W_s\left[-\left(U_s - \beta_s V_s\right)\right] ds + \int_0^t \frac{1}{W_s} W_s Z_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{W_s^2} d < W, W >_s,$$

όπου

$$< W, W >_s = \int_0^s W_t^2 Z_t^2 dt,$$

επομένως

$$\log(W_t) = \log(W_0) + \int_0^t \left[-\left(U_s - \beta_s V_s\right)\right] ds + \int_0^t Z_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^2 ds$$

Όμως $V_t = \log(W_t)$, τελικά

$$dV_t = -\left(U_t - \beta_t V_t + \frac{1}{2}||Z_t||^2\right) dt + Z_t dB_t$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο •
((β) ⇒ (γ))
Έστω ότι το $(V, Z) \in D_0^{\exp} \times D^n$ ικανοποιεί την (1.1) και έστω $(W_t)_{0 \le t \le T}$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Τότε η W ικανοποιεί την

$$\frac{dW_t}{W_t} = -(U_s - \beta_t V_t) + Z_t dB_t.$$

Έστω M το στοχαστικό εκθετικό της Z (δηλαδή $M_t = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}[Z]_t\right)$, το M είναι το μοναδικό τοπικό martingale που ικανοποιεί την σχέση

$$dM_t = M_t Z_t dB_t, M_0 = 1,$$

έτσι ολοκληρώνοντας κατα μέλη την

$$\frac{dW_t}{W_t} = -(U_s - \beta_t V_t) + Z_t dB_t$$

προκύπτει η (1.3). Για κάθε χρόνο διακοπής r θέτουμε

$$M_t^r = M_t 1_{\{t \le r\}} + M_r 1_{\{t > r\}}.$$

Θεωρούμε (r_n) μια αύξουσα ακολουθία από χρόνους διακοπής με $r_n \to T,$ καθώς $n \to \infty$, τέτοια ώστε η διαδικασία M_{r_n} να είναι martingale για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λειτουργώντας όπως στην απόδειξη της ((γ) ⇒ (δ)) έχουμε ότι

$$\exp(V_t) = \exp\left(\int_t^{r_n} U_s - \beta_s V_s ds + V_{r_n}\right) \text{στο} \{r_n \ge t\}.$$

Έστω τώρα $f_n : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(s) = \exp\left(\int_t^{r_n} U_s - \beta_s V_s ds + V_{r_n}\right).$$

Έχουμε ότι

$$f_n \stackrel{\sigma.\beta}{\to} f \equiv \exp\left(\int_t^{T} U_s - \beta_s V_s ds + V_T\right).$$

Επίσης λόγω των πεδίων τιμών των U, V και β έχουμε $|f_n(s)| \le M \in \mathbb{R}$ και επομένως απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε το ζητούμενο.
((β) ⇒ (α))
Έστω ότι ισχύει η (β) και έστω $W_t = \exp(V_t)$ τότε η Z αντιπροσωπεύει την διαδικασία διάχυσης της Itô decomposition της $\frac{dW_t}{W_t}$ και για αυτό τον λόγο είναι και μονοσήμαντα ορισμένη στο D και άρα έχουμε το ζητούμενο.
Αποδείχθηκε •

Ένα ενδιαφέρον πόρισμα απο την Πρόταση 1 είναι ότι για $\beta = 0$ η (1.2) με $r = T$ δίνει σε κλειστή μορφή την $V \in D_0^{exp}$ που είναι μέρος της λύσης της (1.1). Για $\beta \neq 0$ δεν είναι εμφανής μια κλείστη μορφή της V και επομένως καταφεύγουμε στην λύση του ¨σταθερού σημείου¨. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε την απεικόνιση $F_U : D_0^{exp} \to D_0^{exp}$ με

$$F_U(V)_t = \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s V_s ds\right)\right]\right),\ t \in [0, T]$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε μοναδικό σταθερό σημείο της F_U και να ελέγξουμε την μονοτονία του ως προς την U. Υποθέτοντας προσωρινά ότι υπάρχει σταθερό σημείο, η μοναδικότητά του και η μονοτονία του ως προς U είναι συνέπειες της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 2 *Υποθέτουμε ότι για κάποια* $U \in D_1^{exp}$ *ισχύουν τα εξής :*

α) Για $V \in D_0^{exp}, V = F_U(V)$.

β) Για συνεχή $\tilde{V} \in D_0^{exp}, \tilde{V}_T \geq 0$ *και για χρόνο διακοπής* r

$$\tilde{V}_t \geq \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r U_s - \beta_s \tilde{V}_s ds\right)\right]\right), \sigma\tau o\{r > t\}, t \in [0,T].$$

Τότε $\tilde{V}_t \geq V_t, P - \sigma.\beta.t \in [0,T]$ *(Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε και για την* $' \leq '$*)*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει t τέτοιο ώστε το σύνολο $A = \{\tilde{V}_t < V_t\}$ να μην είναι $P-$μηδενοσύνολο. Θεωρούμε χρόνο διακοπής r με $r = \inf\{s \geq t : \tilde{V}_s \geq V_s\}$. Καθώς $\tilde{V}$ και V είναι σχεδόν παντού συνεχείς,ως προς t (από τον ορισμό τους) και $\tilde{V}_T \geq 0 = V_T$ έχουμε $\tilde{V}_r = V_r$ στο A, καθώς $\tilde{V}_s \leq V_s$ στο $A \cup \{t \leq s < r\}$. Επομένως από την υπόθεσή μας και από την Πρόταση 1 έχουμε

$$0 > \exp(\tilde{V}_t) - \exp(V_t) \geq \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r U_s - \beta_s \tilde{V}_s ds + \tilde{V}_r\right) - \exp\left(\int_t^r U_s - \beta_s V_s ds + V_r\right)\right] \geq 0$$

που είναι άτοπο, άρα δείξαμε ότι το A είναι $P-$μηδενοσύνολο και επομένως αποδείξαμε το ζητούμενο. (Εντελώς ανάλογη απόδειξη έχουμε και για την $' \leq '$) •

Έστω $U^i \in D_1^{exp}$ και $V^i \in D_0^{exp}$, $i = 1,2$ με $F_U(V^i) = V^i$. Τότε από τις Προτάσεις 1 και 2 έχουμε ότι αν $U^1 \geq U^2$ τότε $V^1 \geq V^2$ αποδεικνύοντας έτσι ότι η V είναι φθίνουσα ως προς την U. Επιπλέον, αν $U^1 = U^2 = U, V^1 \geq V_2$ (καθώς, $U^1 \geq U^2$) και ταυτόχρονα $V^1 \leq V_2$ (καθώς, $U^1 \leq U^2$). Επομένως $V^1 = V^2$ και επομένως δείξαμε ότι η F_U έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Τώρα θα δείξουμε την ύπαρξη σταθερού σημείου της F_U Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για την διαδικασία U.

1) Η διαδικασία U είναι φραγμένη.

Έστω σύνολο

$$\mathcal{B} \equiv \{U; U \in D_0^{exp}, U \text{φραγμένη}\}$$

εφοδιασμένο με την μετρική

$$d(x,y) = ess \sup_{(w,t)} |x(w,t) - y(w,t)|,$$

τότε $(\mathcal{B}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι διατεταγμένο με την εξής διάταξη : $x \geq y$ αν $P[x_t \geq y_t] = 1 \,\text{για κάθε}\, t \,\text{στο} [0,T]$ •

Πρόταση 3 *Αν* $U \in \mathcal{B}$ *τότε* $F_U(V) = V$ *για κάποιο* $V \in \mathcal{B}$.

Απόδειξη: Μέσω το θεωρήματος σταθερού σημείου συστολής του Blackwell δείχνουμε ότι η F_U είναι συστολή αν $\bar{\beta}T < 1$. Το μερικό αυτό αποτέλεσμα θα γενικευθεί διαμερίζοντας το $[0,T]$ και δημιουργώντας την λύση οπισθοδρομικά στον χρόνο. Εναλλακτικά για κάθε T η $F^{\{k\}}$[4] είναι συστολή για επαρκώς μεγάλο κ. Ορίζουμε Id να είναι η ταυτοτική απεικόνιση $Id : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}$ με $Id(x) = x$. Έχουμε ότι

$$\beta_s \leq \bar{\beta}, s \in [0,T] \Rightarrow \int_t^T \beta_s ds \leq \bar{\beta}(T-t) \leq \bar{\beta}T \overset{x \geq 0}{\Longrightarrow} x\int_t^T \beta_s ds \leq \bar{\beta}Tx \Rightarrow \int_t^T -\beta_s Id(x) ds \geq -\bar{\beta}Tx \Rightarrow$$

$$\int_t^T U_s - \beta_s\left(V_s + Id(x)\right) ds \geq \int_t^T U_s - \beta_s V_s ds - \bar{\beta}Tx$$

[4] $F^{\{k\}}$ είναι η σύνθεση της F με τον εαυτό της κ το πλήθος φορές.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Όμως η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα, επομένως

$$\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s \left(V_s + Id(x)\right) ds\right) \geq \exp(\int_t^T U_s - \beta_s V_s ds) \exp(-\bar{\beta} T x)$$

και άρα

$$\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s \left(V_s + Id(x)\right) ds\right)\right] \geq \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s V_s ds\right)\right] \exp(-\bar{\beta} T x)$$

Όμως η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα, επομένως

$$F_U\left(V + Id(x)\right) \geq F_U(V) - \bar{\beta} T x.$$

Έστω τώρα $V, W \in \mathcal{B}$. Καθώς $V \leq W + d(V, W)$

$$\left(P\left[V_t \leq W_t + d(V,W)\right] = P\left[V_t \leq W_t + ess \sup_{(u,t)} |V_t(u) - W_t(u)|\right] = 1\right)$$

και καθώς η F_U είναι φθίνουσα, έχουμε

$$F_U(V) \geq F_U\left(W + d(V,W)\right) \geq F_U(W) - \bar{\beta} T d(V,W).$$

Όμοια, καθώς $W \leq V + d(W,V)$ έχουμε

$$F_U(W) \geq F_U\left(V + d(W,V)\right) \geq F_U(V) - \bar{\beta} T d(W,V)$$

και επομένως

$$d\left(F_U(V), F_U(W)\right) \leq \bar{\beta} T d(V,W)$$

Αποδεικνύοντας έτσι ότι η F_U είναι συστολή αν $\bar{\beta} T < 1$.

Αν $\bar{\beta} T \geq 1$ παίρνουμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $N > \bar{\beta} T$. Αρχικά, θέτουμε $k = N - 1$, από τα παραπάνω έχουμε ότι υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ που να ικανοποιεί την (1) για κάθε $t \geq \frac{kT}{N}$. Προχωράμε επαγωγικά, υποθέτοντας ότι τα παραπάνω ισχύουν για $k \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Έστω $V \in \mathcal{B}$ να είναι λύση της (1) στο χρονικό διάστημα $[\frac{Tk}{N}, T]$ και εφαρμόζοντας, όπως πριν, το ίδιο επιχείρημα με την συστολή στο χρονικό διάστημα $[\frac{T(k-1)}{N}, \frac{Tk}{N}]$, με συνοριακή τιμή $V_{\frac{Tk}{N}}$ εύκολα προκύπτει το ζητούμενο. Εναλλακτικά, ορίζοντας την μετρική

$$d_t(x,y) = ess \sup_{\{(w,s); s \geq t\}} |x(w,s) - y(w,s)|$$

και λειτουργώντας όπως παραπάνω, έχουμε

$$d_t(F_U(V), F_U(W)) \leq \bar{\beta}(T-t) d_0(V,W).$$

Λειτουργώντας επαναλαμβανόμενα με την ίδια λογική k φορές, έχουμε

$$d_t({F_U}^{\{k\}}(V), {F_U}^{\{k\}}(W)) \leq \frac{(\bar{\beta}(T-t)^k}{k!} d_0(V,W)$$

Επομένως για επαρκώς μεγάλο k, η ${F_U}^{\{k\}}$ είναι συστολή και υπάρχει μοναδική διαδικασία $V \in \mathcal{B}$ με

$${F_U}^{\{k\}}(V) = V \Rightarrow {F_U}^{\{k+1\}}(V) = F_U(V)$$

όμως ${F_U}^{\{m\}}(V) = V$ για $n \geq k$ άρα και για $m = k+1$. Επομένως δείξαμε ότι $F_U(V) = V$, δηλαδή η V είναι σταθερό σημείο της F_U.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

2) Η διαδικασία U δεν είναι φραγμένη.

Από τις προτάσεις 4 και 5 θα δείξουμε ότι για κάθε $U \in D_1^{exp}$, η F_U έχει σταθερό σημείο στο D_0^{exp}. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

2.1) Η διαδικασία $U \in D_1^{exp}$ είναι κάτω φραγμένη .
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την $U_t^n = \min\{U_t, n\}$ και έστω $V^n \in \mathcal{B}$ με $F_U^{\{m\}}(V^n) = V^n$. Όπως προηγουμένως αποδεικνύεται ότι η V^n υπάρχει και προφανώς είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς n, επομένως

$$V_t^n \leq \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s V_s^1 ds\right)\right]\right).$$

Καθώς $V^1 \in D_0^{exp}$ η ακολουθία $\{V^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη σχεδόν βέβαια και ως εκ τούτου, υπάρχει V τέτοια ώστε $V^n \nearrow V \sigma.\beta.$ καθώς $n \to \infty$. Μέσω της Doob's maximal inequality[5] και καθώς

$$V_t^n \leq \log\left(\mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^T U_s - \beta_s V_s^1 ds\right)\right]\right)$$

προκύπτει ότι $V \in D_0^{exp}$. Καθώς $n \to \infty$ στην $F_U^{\{n\}}(V^n) = V_n$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $F_U(V) = V$ που αποδυκνείει την ύπαρξη σταθερού σημείου της F_U για U που δεν είναι κάτω φραγμένη.

2.2) Η διαδικασία $U \in D_1^{exp}$ είναι κάτω φραγμένη .
Για να επεκτείνουμε την απόδειξη της ύπαρξης στην περίπτωση όπου U δεν είναι κάτω φραγμένη, χρησιμοποιούμε ένα ανάλογο επιχείρημα με $U^n = \max(U, -n)$ δείχνοντας ότι η αντίστοιχη V^n συγκλίνει μονότονα, από πάνω, σε ένα σταθερό σημείο της F_U. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ύπαρξης και της μονοτονίας του σταθερού σημείου της F_U.

Τέλος, θα αποδείξουμε την κυρτότητα της V σαν συνάρτηση της U.
Έστω διαδικασιές $U^1, U^2 \in D_1^{exp}$ και $(V^i, Z^i) \in D_0^{exp} \times D^n$, $i \in \{a, b\}$ με

$$dV_t^i = -\left(U_t^i - \beta_t^i + \frac{1}{2}||Z_t^i||^2\right)dt + Z_t^i dB_t, V_T^i = 0.$$

Σταθεροποιώντας ένα $\epsilon \in (0,1)$, ορίζουμε

$$(V^\epsilon, Z^\epsilon) = \epsilon(V^a, Z^a) + (1-\epsilon)(V^b, Z^b)$$

και υποθέτουμε ότι η $(V, Z) \in D_0^{exp} \times D^n$ είναι η λύση της (1) που αντιστοιχεί στην

$$U \equiv \epsilon U^a + (1-\epsilon)U^b.$$

Αν δείξουμε ότι $V_0^\epsilon \geq V_0$ τότε είναι προφανές ότι η V θα είναι κυρτή ως προς U. Θέτουμε διαδικασία Δ με

$$\Delta_t = \left[\epsilon||Z_t^a||^2 + (1-\epsilon)||Z_t^b||^2 - ||Z_t^\epsilon||^2\right]/2 > 0$$

(από ανισότητα Jensen) και έχουμε

$$dV_t^\epsilon = -\left(U_t + \Delta_t - \beta_t V_t^\epsilon + \frac{1}{2}||Z_t^\epsilon||^2\right)dt + Z_t^\epsilon dB_t,\ V_T^\epsilon = 0.$$

[5] Αν $\{x_n\}$ είναι θετικό submartingale και $1 < p < \infty$ τότε για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $||x_n^*||_p \leq C_p||x_n||_p$, όπου $x_n^* \equiv \max_{0\leq k\leq n} x_k$ και $C_p \equiv \frac{p}{p-1}$.

 https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Αγνοώντας προς το παρόν τον οποιοδήποτε απαιτούμενο περιορισμό της Δ ως προς την ολοκληρωσιμότητα, η Πρόταση 1 μας δίνει το εξης: για κάθε χρόνο διακοπής r,

$$exp(V_t^\epsilon) = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r U_s + \Delta_s - \beta_s V_s^\epsilon ds + V_r^\epsilon\right)\right] > \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^r U_s - \beta_s V_s^\epsilon ds + V_r^\epsilon\right)\right]$$

Μέσω της Πρότασης 2 προκύπτει ότι $V_0^\epsilon \geq V_0$.
Τέλος, πρέπει να βάλουμε περιορισμούς ως προς την ολοκληρωσιμότητα της Δ ώστε η απόδειξή μας να είναι πλήρης:

A) Διαφοροποιώντας την Πρόταση 1 ως εξής : Στην απόδειξή της Πρότασης 1 $((\beta) \Rightarrow (\gamma))$ αντί να πάρουμε $r_n \to T$, παίρνουμε $x_n \to r$, όπου r είναι χρόνος διακοπής και $x_n = \min\{r_n, r\}, n \in \mathbb{N}$ και

B) Αντικαθιστώντας το Δ με το $\min\{\Delta, 1\}$ παίρνουμε

$$\exp(V_t^\epsilon) \geq \mathbb{E}_t\left[\exp\left(\int_t^{r_n} U_s + \min\{\Delta_s, 1\} - \beta_s V_s^\epsilon ds + V_{r_n}^\epsilon\right)\right], n \in \mathbb{N}$$

και παίρνοντας το όριο, καθώς $n \to \infty$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη όπως πριν •

Θεώρημα 2 [6] *Έστω F μια προοδευτικά μετρήσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Έστω επίσης β και ξ φραγμένες και προβλέψιμες διαδικασίες και φ μια προβλέψιμη διαδικασία, τέτοια ώστε $\mathbb{E}[\int_0^T \varphi_t^2 dt] < \infty$. Τότε η οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση (BSDE) :*

$$dY_t = -[U_t + \beta_t Y_t + \xi_t Z_t]dt + Z_t dB_t,\ Y_T = F \tag{1.4}$$

έχει μοναδική λύση την

$$Y_t = \mathbb{E}\left[F\Psi(t,T) + \int_t^T \Psi(t,s)U_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right],\ t \in [0,T] \tag{1.5}$$

όπου

$$\Psi(t,s) = \exp\left[\int_t^s (\beta_u - \frac{1}{2}\xi_u)du + \int_t^s \xi_u dB_u\right] \tag{1.6}$$

ή ισοδύναμα

$$d\Psi(t,s) = \Psi(t,s)[\beta_s ds + \xi_s dB_s],\ s \in [t,T]\ \mu\epsilon\ \Psi(t,t) = 1 \tag{1.7}$$

Απόδειξη: Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης αποδεικνύονται όμοια με την περίπτωση όπου $Y_T = 0$ στο Θεώρημα 1 επομένως το μόνο πού μένει να αποδείξουμε είναι ότι η λύση της (1.4) είναι της μορφής (1.5). Έχουμε λοιπόν, καταρχήν για την Ψ ότι $\Psi(t,s) = \frac{\Psi(0,s)}{\Psi(0,t)}$ και συμβολίζουμε με $\Psi_s \equiv \Psi(0,s)$. Για την διαδικασία $(\Psi Y)_t$ ολοκληρώνουμε (κατά Itô) κατά μέλη και έχουμε ότι

$$d(\Psi_t Y_t) = \Psi_t dY_t + Y_t d\Psi_t + d < \Psi, Y >_t$$

όπου

$$< \Psi, Y >_t = \int_0^t Z_t \Psi_t \xi_t.$$

Όμως ισχύουν οι (1.4) και (1.7), επομένως

$$\Psi_t\left[-\left(U_t + \beta_t Y_t + \xi_t Z_t\right)dt + Z_t dB_t\right] + Y_t \Psi_t\left(\beta_t dt + \xi_t dB_t\right) + \Psi_t \xi_t Z_t dt =$$

$$-\Psi_t U_t dt + \left(Z_t + \xi_t Y_t\right)\Psi_t dB_t,$$

[6] Skiadas [7]

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

άρα η διαδικασία $\left(\Psi_t Y_t + \int_0^t \Psi_s U_s ds\right)$ είναι $P-$martingale και συνεπώς

$$\Psi_t Y_t + \int_0^t \Psi_s U_s ds = \mathbb{E}\left[F\Psi_T + \int_0^T \Psi_s U_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t = \mathbb{E}\left[F\frac{\Psi_T}{\Psi_t} + \int_t^T \frac{\Psi_s}{\Psi_t} U_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t = \mathbb{E}\left[F\Psi(t,T) + \int_t^T \Psi(t,s) U_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right],\ t \in [0,T].$$

Αποδείχθηκε •

1.2 Επίλυση Προδρομικών-οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (FBSDE's)

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και B να είναι μια κίνηση Brown. Εφοδιάζουμε τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με την διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$, όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), t \in [0,T]$ και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Θεωρούμε σύστημα Προδρομικών Οπισθοδρομικών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων (FBSDE's) :

$$\left\{\begin{array}{c} X_t = x + \int_o^t b(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)dB_s \\ Y_t = g(X_t) - \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{array}\right. \tag{1.8}$$

με $t \in [0,T]$. Οι διαδικασίες X, Y και Z παίρνουν τιμές στα $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^{n\times d}$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1 *Ορίζουμε*

$$M^2(0,T;\mathbb{R}^n) = \left\{u : u_t \in \mathbb{R}^n\, t \in [0,T], u \text{ είναι } \mathcal{F}_t - \text{προσαρμοσμένη και } \mathbb{E}\left[\int_0^T |u_s|^2 ds\right] < \infty\right\}$$

Ορισμός 2 *Η διαδικασία $(X,Y,Z) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ λέγεται προσαρμοσμένη λύση του συστήματος (1.8) αν $(X,Y,Z) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d})$ και ικανοποιεί το σύστημα (1.8) $P-\sigma.\beta.$*

Σχόλιο 1 *Το σύστημα (1.8)γράφεται ισοδύναμα σε διαφορική μορφή :*

$$\left\{\begin{array}{c} dX_t = b(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t, Z_t)dB_t\,,\ X_0 = x \\ dY_t = h(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t\,,\ Y_T = g(X_T) \end{array}\right. \tag{1.9}$$

Υπόθεση 1 (Ολική συνθήκη Lipschitz) *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}, f(\cdot, u) \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}), x \in \mathbb{R}^n$ και $g(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T;\mathbb{R}^n)$ υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(t,u^1) - f(t,u^2)| \leq c_1|u^1 - u^2|\, P-\sigma.\beta. \text{ σχεδόν παντού στο } \mathbb{R}^n$$

για κάθε $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ και

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c_1|x_1 - x_2| P-\sigma.\beta.$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

 https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Υπόθεση 2 (Μονοτονία) *Υπάρχει σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε*

$$[f(t,u^1) - f(t,u^2), u^1 - u^2] \leq -c_2|u^1 - u^2|^2 P - \sigma.\beta.\sigma\chi\epsilon\delta\acute{o}\nu\ \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\, \mathbb{R}^+$$

για κάθε $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$ και

$$[g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2] \geq c_2|x_1 - x_2|^2 P - \sigma.\beta.$$

για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, (όπου

$$[a,b] = (a_1,b_1) + (a_2,b_2) + tr(b_3^T a_3)$$

για $a = (a_1,a_2,a_3), b = (b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$.)

Λήμμα 1 *Έστω $b_0(), h_0(), \sigma_0() \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}), g_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathbb{R}^n)$, τότε το παρακάτω σύστημα Προδρομικών - Οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων :*

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t (-Y_s + b_0(s))\, ds + \int_0^t (-Z_s + \sigma_0(s))\, dB_s \\ Y_t = (X_T + g_o) - \int_t^T (-X_s + h_0(s))\, ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{cases} \tag{1.10}$$

έχει μοναδική προσαρμοσμένη λύση (X,Y,Z).

Απόδειξη: Αρχικά θεωρούμε την ακόλουθη οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$\bar{Y}_t = g_0 - \int_t^T \left[\bar{Y}_s + h_0(s) - \beta_0(s)\right] ds - \int_t^T \left[2\bar{Z}_s - \sigma_0(s)\right] dB_s$$

ή ισοδύναμα

$$d\bar{Y}_t = \left[\bar{Y}_t + h_0(t) - b_0(t)\right] dt + \left[2\bar{Z}_t - \sigma_0(t)\right] dB_t,\ Y_T = g_0 + X_T \tag{1.11}$$

η οποία αποδεικνύεται ότι έχει μοναδική προσαρμοσμένη λύση $(\bar{Y}, \bar{Z})$. (Η απόδειξη είναι ανάλογη του Θεωρήματος 1). Τώρα η ακόλουθη οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$X_t = x + \int_0^t \left(-X_s - \bar{Y}_s + \beta_0(s)\right) ds + \int_0^t \left(-\bar{Z}_s + \sigma_0(s)\right) dB_s$$

ή ισοδύναμα

$$dX_t = \left[-X_t - \bar{Y}_t + b_0(t)\right] dt + \left[-\bar{Z}_t + \sigma_0(t)\right] dB_t,\ X_0 = x \tag{1.12}$$

έχει προφανώς λύση και θέτοντας $Y = X + \bar{Y}, Z = \bar{Z}$, έχουμε

$$dY_t = d\bar{Y}_t + dX_t$$

και χρησιμοποιώντας τις (1.11) και (1.12) έχουμε ότι :

$$dY_t = \left[\bar{Y}_t + h_0(t) - b_0(t) - X_t - \bar{Y}_t + b_0(t)\right] dt + \left[2Z_t - \sigma_0(t) - Z_t + \sigma_0(t)\right] dB_t,\ Y_T = g_0 + X_T$$

άρα

$$Y_t = (X_T + g_o) - \int_t^T (-X_s + h_0(s))\, ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

και επομένως δείξαμε ότι το σύστημα (1.10) έχει λύση την (X,Y,Z). Για την μοναδικότητα της λύσης (X,Y,Z) εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3 και έχουμε το ζητούμενο •

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Τώρα για δεδομένο $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τις εξής διαδικασίες

$$b^a(t,x,y,z) = ab(t,x,y,z) + (1-a)(-y)$$

$$\sigma^a(t,x,y,z) = a\sigma(t,x,y,z) + (1-a)(-z)$$

$$h^a(t,x,y,z) = ah(t,x,y,z) + (1-a)(-x)$$

και

$$g^a(x) = ag(x) + (1-a)x$$

και θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t \left[b^a(s,u_s) + b_o(s)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma^a(s,u_s) + \sigma_0(s)\right] dB_s \\ Y_t = (g^a(X_T) + g_0) - \int_t^T \left[h^a(s,u_s) + h_0(s)\right] ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{cases} \tag{1.13}$$

όπου $U = (X,Y,Z)$.

Λήμμα 2 *Υποθέτουμε ότι για δεδομένο $a_0 \in [0,1]$ και για κάθε $b_0(), h_0(), \sigma_0() \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d})$ και $g_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n)$ το σύστημα εξισώσεων (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση, τότε υπάρχει $\delta_0 \equiv \delta_0(c_1,c_2,T) \in (0,1)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $a \in [a_0, a_0+\delta_0]$, για κάθε $b_0(), h_0(), \sigma_0() \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d})$ και για κάθε $g_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T;\mathbb{R}^n)$ το σύστημα εξισώσεων (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση.*

Η λογική εδώ είναι, ότι έχοντας την προσρεμοσμένη λύση U^0 για το α_0 παίρνουμε ακολουθία διαδικασιών $(U^i)_{i\in\mathbb{N}}$ όπως ορίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3, όπου οι $U^i - U^{i-1}$ θα φράσσονται στον $\mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d})$ από μια $\delta_0 c^i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου δ_0 είναι το ζητούμενο και c μια σταθερά στο $(0,1)$ και καθώς το $i \to \infty$ έχουμε ότι η U^∞ θα είναι προσαρμοσμένη λύση του (1.13).

Θεώρημα 3 [7] *Έστω ότι ισχύουν οι Υποθέσεις 1 και 2. Τότε υπάρχει μοναδική λύση (X,Y,Z) του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.8) (ισοδύναμα του (1.9)).*

Απόδειξη: (Ύπαρξη Λύσης) Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$b^{\alpha_0+\delta}(t,x,y,z) = b^{\alpha_0}(t,x,y,z) + \delta\left(y + b(t,x,y,z)\right)$$

$$\sigma^{\alpha_0+\delta}(t,x,y,z) = \sigma^{\alpha_0}(t,x,y,z) + \delta\left(z + \sigma(t,x,y,z)\right)$$

$$h^{\alpha_0+\delta}(t,x,y,z) = h^{\alpha_0}(t,x,y,z) + \delta\left(x + h(t,x,y,z)\right)$$

$$g^{\alpha_0+\delta}(x) = g^{a_0}(x) + \delta\left(-x + g(x)\right)$$

Θέτουμε $U^0 = (X^0, Y^0, Z^0) = 0$ και επιλύουμε επαναληπτικά τις παρακάτω εξισώσεις :

$$X_t^{i+1} = x + \int_0^t \left[b^{\alpha_0}(s, U_s^{i+1}) + \delta\left[Y_s^i + b(s,U_s^i)\right] + b_0(s)\right] ds$$
$$+ \int_0^t \left[\sigma^{\alpha_0}(s, U_s^{i+1}) + \delta\left[Z_s^i + \sigma(s,U_s^i)\right] + \sigma_0(s) dB_s\right]$$

και

$$Y_t^{i+1} = \left[g^{\alpha_0}(X_T^{i+1}) + \delta[-X_T^i + g(X_T^i)] + g_0\right]$$
$$- \int_t^T \left[h^{\alpha_0}(s, U_s^{i+1}) + \delta\left[X_s^i + h(s,U_s^i)\right] + h_0(s)\right] ds - \int_t^T Z_s^{i+1} dB_s,$$

[7] Hu and Peng [3]

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

όπου $U^i = (X^i, Y^i, Z^i)$. Θέτουμε

$$\hat{U}^{i+1} = (\hat{X}^{i+1}, \hat{Y}^{i+1}, \hat{Z}^{i+1}) = U^{i+1} - U^i$$

Από το λήμμα 1 είναι προφανές ότι το σύστημα εξισώσεων (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση, έστω U_0, για κάθε $b_0(), h_0(), \sigma_0() \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d})$ και για κάθε $g_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n)$. Από λήμμα 2 υπάρχει $\delta_0 \in [0,1]$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in [0,\delta_0]$ το σύστημα εξισώσεων (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση, έστω $U^1 = (X^1, Y^1, Z^1)$ με X και Y όπως ορίστηκαν παραπάνω. Εφόσον έχει λύση για κάθε $a \in [0,\delta_0]$ θέτουμε $a_1 = \delta_0$, και τότε από το λήμμα 2 υπάρχει $\delta_2 \in [\delta_1, 1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \in [\delta_1, \delta_2]$ το σύστημα (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση, έστω $U^2 = (X^2, Y^2, Z^2)$ και ούτω καθεξής. Γενικά, για $n > 2$ θέτουμε $a_n = \delta_{n-1}$ και από το λήμμα 2 υπάρχει $\delta_n \in [\delta_{n-1}, 1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \in [\delta_{n-1}, \delta_n]$ το σύστημα εξισώσεων (1.13) έχει προσαρμοσμένη λύση, έστω U^{n+1}. Επίσης για κάθε $i \in \{1, 2, ..., m\}$ (με m είτε πεπερασμένο, είτε άπειρο) παίρνουμε τις $\hat{U}^i = U^i - U^{i-1}$ και θέτοντας $\hat{U} \equiv \lim_{a\to 1}\left(U^0 + \sum_{i=1}^m a^i \hat{U}^i\right)$ έχουμε ότι $\hat{U} = U^m$ που είναι προσαρμοσμένη λύση του (1.13) και εφόσον το σύστημα (1.13) έχει λύση τότε προκύπτει άμεσα ότι και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.8) έχει λύση.

Απόδειξη: (Μοναδικότητα Λύσης) Έστω $U^1 = (X^1, Y^1, Z^1)$ και $U^2 = (X^2, Y^2, Z^2)$ να είναι δύο λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.8). Τότε θέτουμε

$$(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) = (X^1 - X^2, Y^1 - Y^2, Z^1 - Z^2)$$

$$\hat{b}(t) = b(t, U_t^1) - b(t, U_t^2)$$

$$\hat{\sigma}(t) = \sigma(t, U_t^1) - \sigma(t, U_t^2)$$

και

$$\hat{h}(t) = h(t, U_t^1) - h(t, U_t^2)$$

Από την Υπόθεση 1 προκύπτει ότι $\{\hat{X}_t\}$ και $\{\hat{Y}_t\}$ είναι συνεχείς και

$$\mathbb{E}\left[sup_{t\in[0,T]}|\hat{X}_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[sup_{t\in[0,T]}|\hat{Y}_t|^2\right] < \infty$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στην διαδικασία $((\hat{Y}_t, \hat{X}_t))$ έχουμε ότι

$$d(\hat{Y}_t, \hat{X}_t) = \left[f(t, U_t^1) - f(t, U_t^2), U_t^1 - U_t^2\right] dt + \left(\hat{X}_t^T \hat{Z}_t + \hat{Y}_t^T \hat{\sigma}(t)\right) dB_t$$

Έστω τώρα χρόνος διακοπής $r \in [0,T]$ τέτοιος ώστε $\mathbb{E}\left[\int_0^r |\hat{X}_t^T \hat{Z}_t + \hat{Y}_t^T \hat{\sigma}(t)|^2 dt\right] < \infty$ τότε

$$\mathbb{E}\left((\hat{Y}_r, \hat{X}_r)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^r \left[f(t, U_t^1) - f(t, U_t^2), U_t^1 - U_t^2\right] dt\right]$$

Θεωρούμε μια ακολουθία χρόνων διακοπής $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $r_n \in [0,T], n \in \mathbb{N}$ και $r_n \nearrow T, P - \sigma.\beta.$ τότε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(g(X_T^1) - g(X_T^2), X_T^1 - X_T^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left[f(t, U_t^1) - f(t, U_t^2), U_t^1 - U_t^2\right] dt\right)$$

και λόγω των υποθέσεων 1 και 2 έχουμε τελικά

$$c_2|X_T^1 - X_T^2| \leq \mathbb{E}\left(g(X_T^1) - g(X_T^2), X_T^1 - X_T^2\right) \leq -c_2\mathbb{E}\left[\int_0^T |U_t^1 - U_t^2|^2 dt\right]$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

όμως $c_2 > 0$ επομένως

$$0 \leq c_2 \mathbb{E}\left[\int_0^T |U_t^1 - U_t^2| dt\right] \leq -c_2 |X_T^1 - X_T^2|^2 \leq 0$$

Άρα έχουμε τελικά ότι $U^1 = U^2$.

Αποδείχθηκε●

Σχόλιο 2 *Στην Αρχή Στοχαστικής Μεγιστοποίησης, η ύπαρξη λύσης του συστήματος Προδρομικών-Οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων προκύπτει από την ύπαρξη της βέλτιστης διαδικασίας ελέγχου.*

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Κεφάλαιο 2

Κριτήριο ανθεκτικού ελέγχου και σύνδεσή του με BSDE's

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα εύρεσης του μοντέλου εκείνου που μεγιστοποιεί ένα συναρτησιακό, το οποίο εξαρτάται από μια διαδικασία διάχυσης, με δεδομένη την διαδικασία ελέγχου.

2.1 Αβεβαιότητα Για Το Μοντέλο Μας - Σχετική Εντροπία Μοντέλων

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $t \in [0,T]$, $T < \infty$ και θεωρούμε $B_t : \Omega \to \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$ μια n-διάστατη κίνηση Brown . Θεωρούμε την διήθηση στο $\mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t; t \in [0,T]\}$ με $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Επίσης θεωρούμε τα εξής :

1) Μία δεδομένη διαδικασία ελέγχου U η οποία είναι συνάρτηση μιας στοχαστικής διαδικασίας

$$C = \{c_t; t \in [0,T]\}$$

την οποία καλούμε διαδικασία κατανάλωσης. Υποθέτουμε ότι

$$U \in D_1^{\exp} \equiv \{x; \mathbb{E}[\exp(a \int_0^T |x_t| dt)] < \infty, \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}^+\},$$

όπου με $\mathbb{E}$ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή κάτω άπο ένα μέτρο πιθανότητας P στόν χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$.

2) Μία φραγμένη διαδικασία β τέτοια ώστε $\beta_t \geq 0$ $\sigma.\beta.$, για κάθε $t \in [0,T]$, η οποία καλείται διαδικασία αποπληθωρισμού (discount function).

Το πρόβλημά μας είναι το εξής: Έχουμε ένα μοντέλο (μέτρο πιθανότητας) P το όποιο είμαστε πεπεισμένοι ότι είναι εκείνο το μοντέλο που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή:

$$\mathbb{E}[\int_0^T \exp(-\int_0^t \beta_s ds) U(c_t) dt].$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Όμως, δεν είμαστε απολύτως σίγουροι για το μοντέλο μας, καθώς μπορεί να έχει προκύψει π.χ. από μια προσομοίωση η οποία να μην ήταν απόλυτα ακριβής (ή τουλαχιστόν αυτό να πιστεύουμε). Επομένως αυτή η αβεβαιότητά μας, μας επιβάλει να βρούμε εκείνο το μοντέλο (σ.σ. το μέτρο πιθανότητας P^x) το οποίο θα μοιάζει με το αρχικό μας μοντέλο P (με την έννοια ότι είναι ισοδύναμο[1] με το P) και για το οποίο ισχύει :

$$\mathbb{E}^{P^x}[\int_0^T \exp(-\int_0^T \beta_s ds)U(c_t)dt] = \inf_{P^*\in\mathcal{P}} \mathbb{E}^{P^*}[\int_0^T \exp(-\int_0^T \beta_s ds)U(c_t)dt],$$

όπου $\mathcal{P} \equiv \{P^* : P^* \sim P\}$
Μάλιστα, θέλουμε το μοντέλο μας P^x να είναι τέτοιο ώστε να μοιάζει όσο περισσότερο γίνεται στο αρχικό μας μοντέλο P (καθώς έχουμε σχετική και όχι απόλυτη βεβαιότητα για το αρχικό μοντέλο). Ένα μέτρο ομοιότητας μοντέλων είναι η σχετική εντροπία (relative entropy)που αντιστοιχεί στο μέτρο P^x , $\mathcal{R}_t^x$.

Σημείωση 1
Συμβολίζουμε με $\mathbb{E}_t$ την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, δοθείσης της $\mathcal{F}_t$, με $\mathbb{E}^x$ την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο P^x και με $\mathbb{E}_t^x$ την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας P^x, δοθείσης της $\mathcal{F}_t$.

Ορισμός 3 *Για κάθε $P^x \in \mathcal{P}$ ορίζουμε την δεσμευμένη Radon-Nikodym παράγωγο*

$$\xi_t^x = \mathbb{E}_t\left[\frac{dP^x}{dP}\right], t \in [0,T]$$

Λήμμα 3 *Η $(\xi_t^x)_{0\le t\le T}$ είναι $P-$martingale.*

Απόδειξη: Έστω $s<t, W$ να είναι $P-$standard κίνηση Brown και έστω $\lambda(W)$ να είναι μια φραγμένη $\mathcal{F}_s^W-$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_t, t\le s)$. Τότε

$$\mathbb{E}[\lambda(W)\xi_t^x(W)] = \int \lambda(u)\frac{dP^x}{dP}|_{\mathcal{F}_t^W}(u)dP(u) = \int \lambda(u)dP^x|_{\mathcal{F}_t^W}(u)$$

$$= \int \lambda(u)dP^x|_{\mathcal{F}_s^W}(u) = \int \lambda(u)\xi_s^x(u)dP|_{\mathcal{F}_s^W}(u)$$

Επομένως (για $\lambda\equiv 1$)

$$\mathbb{E}[\xi_t^x(W)|\mathcal{F}_s^W] = \xi_s^x(W)$$

και άρα δείξαμε το ζητούμενο •

Καθώς η $(\xi_t^x)_{0\le t\le T}$ είναι $P-$ martingale,από το θεώρημα Αναπαράστασης των martingale, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n-$διάστατη διαδικασία $x_t \in \mathcal{L}^2$ με $\int_0^T x_s' x_s ds < \infty$ $\sigma.\beta.$ τέτοια ώστε

$$\xi_t^x = \exp(\int_0^t x_s' dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t x_s' x_s ds)\ , t\in[0,T]$$

ενώ από το θεώρημα του Girsanov προκύπτει ότι η $B_t^x = B_t - \int_0^t x_s ds$ είναι τυπική κίνηση Brown κάτω απο το μέτρο πιθανότητας P^x.

[1] Δύο μέτρα P και Q ορισμένα σε έναν χώρο $(\Omega,\mathcal{F})$ λέγονται ισοδύναμα, όταν για $A\in\mathcal{F}, P(A)=0 \Leftrightarrow Q(A)=0$.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Λήμμα 4 *Θεωρούμε $P^x \in \mathcal{P}$ και Y μια προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ (δηλ. Y_t μετρήσιμη ως προς $\mathcal{F}_t$, (συμβολικά $Y_t \in m - \mathcal{F}_t$)), τότε*

$$\mathbb{E}^x[\int_0^T Y_s^- ds + Y_T^-] < \infty \text{ αν και μόνο αν } \mathbb{E}[\int_0^T Y_s^- \xi_s^x ds + Y_T^- \xi_T^x] < \infty$$

όπου $\mathbb{E}_t^x[\int_t^T Y_s ds + Y_T] = \frac{1}{\xi_t^x}\mathbb{E}_t[\int_t^T Y_s \xi_s^x ds + Y_T \xi_T^x]$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\mathbb{E}^x[\int_0^T Y_s^- ds + Y_T^-] = \mathbb{E}_0^x[\int_0^T Y_s^- ds + Y_T^-] = \frac{1}{\xi_0^x}\mathbb{E}_0[\int_0^T Y_s^- \xi_s^x ds + Y_T^- \xi_T^x]$$

$$= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\frac{dP^x}{dP}\right]}\mathbb{E}[\int_0^T Y_s^- \xi_s^x ds + Y_T^- \xi_T^x]$$

Όμως $\frac{1}{\mathbb{E}[\frac{dP^x}{dP}]} > 0$, άρα $\frac{1}{\mathbb{E}[\frac{dP^x}{dP}]} \neq 0$ και επομένως

$$\mathbb{E}^x[\int_0^T Y_s^- ds + Y_T^-] < \infty \text{ αν και μόνο αν } \mathbb{E}[\int_0^T Y_s^- \xi_s^x ds + Y_T^- \xi_T^x] < \infty$$

Αποδείχθηκε •

Ορισμός 4 *Θέτοντας $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(a) = a\log(a)$ ορίζουμε την διαδικασία σχετικής εντροπίας, που αντιστοιχεί στο $P^x \in \mathcal{P}$ ως εξής :*

$$\mathcal{R}_t^x = \mathbb{E}_t[\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds + e^{-\int_t^T \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right)]$$

$$= \mathbb{E}_t^x[\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s \beta_u du}\log\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds + e^{-\int_t^T \beta_u du}\log\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right)]$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του Λήμματος 2 υποθέτοντας ότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο.

Πρόταση 4 *Η $\mathcal{R}_t^x$ είναι καλά ορισμένη με σύνολο τιμών το $[0, \infty]$ σ.β.*

Απόδειξη: Η φ είναι κυρτή και $\varphi(1) = 0, \varphi'(1) = 1$ επομένως $\varphi(a) \geq a - 1$ άρα το

$$\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds$$

είναι φραγμένο από μια ολοκληρώσιμη διαδικασία. Άρα η $\mathcal{R}_t^x$ είναι καλά ορισμένη.
Επίσης αν θέσουμε

$$S_t = e^{-\int_0^t \beta_u du}$$

και χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2 έχουμε

$$S_t\mathcal{R}_t^x = e^{-\int_t^s \beta_u du}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds + e^{-\int_t^T \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right)\right]$$

Όμως S_t ντετερμινιστική ως προς $\mathcal{F}_t$ επομένως

$$S_t\mathcal{R}_t^x = \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s e^{-\int_0^s \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds + e^{-\int_0^T \beta_u du}\varphi\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right)\right] = \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s S_s\varphi\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right)ds + S_T\varphi\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right)\right]$$

Όμως $\varphi(a) \geq a - 1$, άρα

$$S_t\mathcal{R}_t^x \geq \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s S_s \frac{\xi_s^x}{\xi_t^x} ds + S_T \frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right] - \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_t S_s ds + S_T\right]$$

Αλλά ξ_t^x ντετερμινιστική ως προς $\mathcal{F}_t$, επομένως

$$S_t\mathcal{R}_t^x \geq \frac{1}{\xi_t^x}\mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s S_s \xi_s^x ds + S_T \xi_T^x\right] - \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_t S_s ds + S_T\right]$$

$$= \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T \beta_s S_s ds + S_T\right] - \mathbb{E}_t\left[\int_t^T \beta_s S_s ds + S_T\right]$$

$$= \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T -dB_s + S_T\right] - \mathbb{E}_t\left[\int_- dB_s + S_T\right] = \mathbb{E}_t^x[S_t] - \mathbb{E}_t[S_t]$$

Όμως S_t είναι ντετερμινιστική ως προς $\mathcal{F}_t$ άρα

$$\mathbb{E}_t^x\left[S_t\right] - \mathbb{E}_t\left[S_t\right] = 0$$

επομένως

$$S_t\mathcal{R}_t^x \geq 0$$

που είναι και το ζητούμενο •

2.2 Κριτήριο Ανθεκτικού Ελέγχου

Τώρα ορίζουμε το κριτήριο ανθεκτικού ελέγχου (robust control criterion) για όλες τις χρονικές t στο $[0, T]$:

$$\hat{V}_t = ess\inf\{V_t^x : P^x \in \mathcal{P}_U\}$$

όπου

$$V_t^x \equiv \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_r dr} U_s ds\right] + \theta\mathcal{R}_t^x$$

με

$$U_s \equiv U(c_s), \mathcal{P}_U \equiv \left\{P^x \in \mathcal{P}\ \mu\epsilon\ \mathbb{E}^x\left[\int_0^T |U_t| dt\right] < \infty\right\}, \theta \in \mathbb{R}^+$$

Παράδειγμα 1 *Αν U φραγμένη τότε $\mathcal{P}_U = \mathcal{P}$*

Τα παρακάτω προέρχονται από το άρθρο του Κωστή Σκιαδά: *Robust control and recursive utility* [7]

Πρόταση 5 *Για κάθε $x \in \mathcal{X} \equiv \{x \in \mathcal{L}^2; \xi^x \text{είναι martingale}\}$ έχουμε*

$$\mathcal{R}_t^x = \frac{1}{2}\mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T \exp(-\int_t^u \beta_r dr) x_u' x_u du\right], t \in [0, T]$$

Απόδειξη: Σταθεροποιώντας $x \in \mathcal{X}$ και για $t < T$ θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$F = \left\{\mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T x_u' x_u du\right] < \infty\right\}.$$

Έστω $\xi_{t,s}^x = \xi_s^x \xi_t^x$ και $S_{t,s} = \exp(-\int_t^s \beta_u du)$. Παρατηρώντας ότι ισχύει η σχέση

$$S_{t,s} = S_{t,T} + \int_s^T \beta_u S_{t,u} du$$

και καθώς

$$\mathcal{R}_t^x = \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s \beta_u du} \log\left(\frac{\xi_s^x}{\xi_t^x}\right) ds + e^{-\int_t^T \beta_u du} \log\left(\frac{\xi_T^x}{\xi_t^x}\right) \right]$$

προκύπτει εύκολα ότι

$$S_{t,s}\left(\mathcal{R}_s^x + \log\left(\xi_{t,s}^x\right)\right) = -\int_t^s \beta_u S_{t,u} \log\left(\xi_{t,u}^x\right) du + M_s \text{ στο } F, s \geq t,$$

όπου

$$M_s = \mathbb{E}_s^x \left[1_F \left(\int_t^T \beta_u S_{t,u} \log\left(\xi_{t,u}^x\right) du + S_{t,T} \log(\xi_{t,T}^x) \right) \right].$$

Όμως

$$\xi_t^x = \exp\left(\int_0^t x_s' dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t x_s' x_s ds \right), t \in [0, T] \tag{2.1}$$

και

$$F = \left\{ \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T x_u' x_u du \right] < \infty \right\},$$

επομένως η διαδικασία $\{M_s; s \geq t\}$ είναι P^x-martingale. Παραγωγίζοντας κατά μέλη ως προς y, έχουμε στο F για $s \geq t$ ότι

$$-\beta_s S_{t,s}\left(\mathcal{R}_s^x + \log\left(\xi_{t,s}^x\right)\right) ds + S_{t,s} d\left(\mathcal{R}_s^x + \log\left(\xi_{t,s}^x\right)\right) = -\beta_s S_{t,s} \log(\xi_{t,s}^x) ds + dM_s.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1) έχουμε

$$d\mathcal{R}_s^x = -(\frac{1}{2} x_s' x_s - \beta_s \mathcal{R}_s^x) ds + dM_s \, \sigma\tau o \, F, s \geq t$$

όπου M είναι $P^x - martingale$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε τελικά

$$\mathcal{R}_t^x = \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T e^{-\int_t^u \beta_r dr} x_u' x_u du \right] \text{ στο } F.$$

Τι γίνεται όμως στο F^c;
Θα δείξουμε ότι $\mathcal{R}_t^x = \infty$ στο F^c.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε χρόνους διακοπής (stopping times)

$$r_n = \min\left\{ \left\{ s \geq t : \int_t^s x_u' x_u du = n, s < T \right\} \bigcup \{s = T\} \right\}.$$

Ο ορισμός της σχετικής εντροπίας και ο Νόμος των Επαναλαμβανόμενων Προσδοκιών (law of iterated expectations) δίνουν το εξής:

$$\mathcal{R}_t^x = \mathbb{E}_t^x \left(\int_t^{r_n} \beta_u S_{t,u} \log\left(\xi_{t,u}^x\right) du + S_{t,r_n} \left[\log\left(\xi_{t,r_n}^x\right) + \mathcal{R}_{r_n}^x \right] \right)$$

καθώς $\mathcal{R}^x \geq 0$,

$$\mathcal{R}_t^x \geq \mathcal{R}_t^n \equiv \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^{r_n} \beta_u S_{t,u} \log\left(\xi_{t,u}^x\right) du + S_{t,r_n} \log\left(\xi_{t,r_n}^x\right) \right]$$

Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και βάζοντας όπου T το r_n έχουμε

$$\mathcal{R}_t^x \geq \mathcal{R}_t^n \equiv \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^{r_n} e^{-\int_t^u \beta_r dr} x_u' x_u du \right]$$

Όμως

$$\int_t^{r_n} e^{-\int_t^u \beta_r dr} x_u' x_u du \nearrow \int_t^T e^{-\int_t^u \beta_r dr} x_u' x_u du \text{ καθώς } r_n \to T$$

Επομένως από το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε τελικά ότι

$$\mathcal{R}_t^x \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T e^{-\int_t^u \beta_r dr} x_u' x_u du\right] = \infty, \text{ στο } F^c$$

Επομένως, δείξαμε το ζητούμενο. •

Θέτοντας τώρα

$$X_U = \left\{x \in \mathcal{X} : \mathbb{E}^x \left[\int_0^T |U_t| dt\right] < \infty\right\}$$

ορίζουμε την ανθεκτική συνάρτηση ωφελιμότητας

$$\hat{V}_t = ess \inf \{V_t^x : x \in X_U\}$$

όπου

$$V_t^x = \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_u du} \left(U_s + \frac{\theta}{2} x_s' x_s\right) ds\right].$$

Παρατηρούμε ότι η ανθεκτική συνάρτηση ωφελιμότητας δίνεται από την λύση μιας οπισθοδρομικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 4 *Υπάρχει μοναδικό ζεύγος $(V, Z) \in D_0^{exp} \times D^n$ τέτοιο ώστε*

$$dV_t = \left(U_t - \beta_t V_t - \frac{1}{2\theta}||Z_t||^2\right) dt + Z_t' dB_t, V_T = 0$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 1.

Θεώρημα 5 *Για κάθε $x \in X_U$ έχουμε,*

$$V_t^x = V_t + \frac{\theta}{2}\mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_u du} \left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)' \left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)\right]$$

Όπου V_t τέτοια ώστε να ικανοποιεί τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 4. Αν επιπλέον $\hat{x} = -\theta^{-1}Z$, τότε $\hat{x} \in X_U$ και $\hat{V} = V_{\hat{x}} = V$

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε μια διαδικασία $x \in X_U$ με $\mathcal{R}_t^x < \infty$ $\left(\Leftrightarrow \mathbb{E}^x \left[\int_0^T x_t' x_t\right] < \infty\right)$. Δοθείσης μιας διαδικασίας X ορίζουμε την

$$\bar{X} = \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right) X_s,$$

όμοια ορίζουμε την

$$\bar{\theta}_t = \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds)\right) \theta$$

Έχουμε :

$$dV_t = \left(U_t - \beta_t V_t - \frac{1}{2\theta} Z_t' Z_t\right) dt + Z_t' dB_t, V_T = 0 \Rightarrow$$

$$V_t = V_0 + \int_0^t -(U_s - \beta_s V_s) - \frac{1}{2\theta} Z_s' Z_s ds + \int_0^t Z_s' dB_s$$

από το Λήμμα του Itô (με χρήση της $f(x) = xe^{-\int_0^t \beta_s ds}$) έχουμε

$$d\bar{V}_t = -\left(\bar{U}_t - \frac{1}{2\bar{\theta}_t}\bar{Z}'_t\bar{Z}_t\right)dt + \bar{Z}'_t dB_t = -\left(\bar{U}_t - \frac{1}{2\bar{\theta}_t}\bar{Z}'_t\bar{Z}_t - \bar{Z}'_t x_t\right)dt + \bar{Z}'_t dB_t^x$$

Για $x \in X_U$ έχουμε

$$V_t^x = \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_u du}\left(U_s + \frac{\theta}{2}x_s' x_s\right)ds\right].$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης των martingale έχουμε ότι υπάρχει διαδικασία $Z^x \in \mathcal{L}^2$ (δηλαδή η Z^x είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κατά $It\hat{o}$) τέτοια ώστε

$$dV_t^x = -\left(U_t + \frac{\theta}{2}x_t' x_t - \beta_t V_t^x\right)dt + Z_t'^x dB_t^x \Rightarrow d\bar{V}_t^x = -\left(\bar{U}_t + \frac{\bar{\theta}_t}{2}x_t' x_t\right)dt + \bar{Z}_t'^x dB_t^x$$

Επομένως,

$$d\left(\bar{V}_t^x - \bar{V}_t\right) = -\frac{\bar{\theta}_t}{2}\left(x_t + \frac{1}{\theta}Z_t\right)'\left(x_t + \frac{1}{\theta}Z_t\right)dt + dM_t, \tag{2.2}$$

όπου

$$M_t = \int_0^t \left(\bar{Z}_s^x - \bar{Z}_s\right)' dB_s^x.$$

Σταθεροποιώντας t στο $[0, T]$ και καθώς η διαδικασία M είναι P^x-τοπικό martingale θεωρούμε αύξουσα ακολουθία $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από χρόνους διακοπής στο $[t, T]$ με $r_n \to T$, καθώς $n \to \infty$ και παίρνουμε την διαδικασία $\{M_{s\wedge r_n} : s \geq t\}$ που είναι $P^x - martingale$. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (2.2) αντικαθιστώντας όπου T το r_n και εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη τον τελεστή $\mathbb{E}_t^x$, παίρνουμε

$$\bar{V}_t^x - \bar{V}_t = \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^{r_n}\frac{\bar{\theta}_s}{2}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)ds\right] + \mathbb{E}_t^x\left[\bar{V}_{r_n}^x - \bar{V}_{r_n}\right]$$

Έστω

$$f_n = \int_t^{r_n}\frac{\bar{\theta}_s}{2}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)ds$$

τότε

$$f_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} f \equiv \int_t^T \frac{\bar{\theta}_s}{2}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)ds$$

ενώ από τον ορισμό των $\{x_t\}$ $\{\bar{\theta}_s\}$ και $\{Z_s\}$ έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}^+$ τέτοιο ώστε $|f_n| < M,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για τις f_n έχουμε

$$\bar{V}_t^x - \bar{V}_t = \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T\frac{\bar{\theta}_s}{2}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)ds\right] + \lim_n \mathbb{E}_t^x\left[\bar{V}_{r_n}^x - \bar{V}_{r_n}\right]$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $V \in D_0^{exp}$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε ότι $\mathbb{E}_t^x\left[\bar{V}_{r_n}\right] \to 0\,\sigma.\beta.$, ενώ $\mathbb{E}_t^x\left[\bar{V}_{r_n}^x\right] \to 0\,\sigma.\beta.$ καθώς $\mathbb{E}_t^x\left[\bar{V}_{r_n}^x\right] = \mathbb{E}_t^x\left[\int_{r_n}^T\left(\bar{U}_s + \frac{\bar{\theta}_s}{2}x_s' x_s\right)ds\right] \to 0$ ($x \in X_U \Rightarrow \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T|\bar{U}_s|\right]ds < \infty$ και $\mathbb{R}^x < \infty \Rightarrow \mathbb{E}_t^x\left[\int_{r_n}^T x_s' x_s ds\right] < \infty$) και έχουμε

$$\bar{V}_t^x - \bar{V}_t = \mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T\frac{\bar{\theta}_s}{2}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)ds\right]$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

και διαιρώντας με το $\exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right)$, έχουμε τελικά

$$V_t^x = V_t + \frac{\theta}{2}\mathbb{E}_t^x\left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_u du}\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)'\left(x_s + \frac{1}{\theta}Z_s\right)\right]$$

που είναι και το ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι για $x = -\theta^{-1}Z, V_t^x = V_t$ που είναι και το ελάχιστο και επομένως $\hat{V} = V_t^x = V_t$. Το μόνο που απομένει να αποδείξουμε είναι ότι $x \in X_U$, το οποιο οποίο αποδεικνύεται ως εξής:
Έχουμε

$$dV_t = \left(U_t - \beta_t V_t - \frac{1}{2\theta}Z_t' Z_t\right)dt + Z_t' dB_t$$

Ολοκληρώνοντας κατα μέλη από 0 μέχρι t και καθώς $Z = -\theta x$, έχουμε

$$V_t - V_0 = -\int_0^t \left(U_s - \beta_s V_s - \frac{1}{2\theta}Z_s' Z_s\right)ds + \int_0^t Z_s' dB_s =$$
$$-\int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\,ds - \theta\left(\int_0^t x_s' dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t x_s' x_s ds\right).$$

Όμως

$$\xi_t^x = \exp\left(\int_0^t x_s' dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t x_s' x_s ds\right), t \in [0,T].$$

Τελικά παίρνουμε,

$$\xi_t^x = \exp\left(\frac{1}{\theta}\left(V_0 - V_t - \int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\,ds\right)\right).$$

Επίσης ξέρουμε ότι το ξ_t^x είναι τοπικό martingale . Έστω λοιπόν $\{r_n\}$ να είναι αύξουσα ακολουθία από χρόνους διακοπής, τέτοια ώστε η $\{\xi_{r_n}^x\}$ να είναι martingale . Τότε $\mathbb{E}[\xi_{r_n}^x] = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το τελευταίο λήμμα είναι προφανές ότι

$$\xi_{r_n}^x \leq \exp(A + B\sup_t V_t + C\int_0^T |U_s|ds)\, n \in \mathbb{N}$$

για A, B, C πραγματικές σταθερές. Καθώς $U \in D_1^{exp}$ και $V \in D_0^{exp}$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για την ακολουθία $\{\xi_{r_n}^x\}$ έχουμε ότι $\mathbb{E}[\xi_T^x] = 1$ και συνεπώς ξ^x είναι martingale[2]. Τελικά, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε :

$$\mathbb{E}^x\left[\int_0^T |U_s|ds\right] = \mathbb{E}\left[\xi_T^x\int_0^T |U_s|ds\right] \leq \mathbb{E}\left[(\xi_T^x)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |U_s|ds\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $U \in D_1^{exp}$, $V \in D_0^{exp}$ και από το ότι για $x = -\theta^{-1}Z, V_t^x = V_t$ έχουμε

$$\xi_t^x = \exp\left(\frac{1}{\theta}\left(V_0 - V_t - \int_0^t (U_s - \beta_s V_s)\,ds\right)\right).$$

Άρα δείξαμε ότι $x \in X_U$, που είναι και το ζητούμενο. •

[2] Karatzas and Shreve [2]

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Το θ στον τύπο

$$V_t^x \equiv \mathbb{E}_t^x \left[\int_t^T e^{-\int_t^s \beta_r dr} U_s ds \right] + \theta \mathcal{R}_t^x,$$

εκφράζει την αβεβαιότητά μας ως προς το αρχικό μας μοντέλο P. Το θ μπορεί να είναι σταθερά, αλλά και συνάρτηση του V_t^x , καθώς όσο προχωράμε στον χρόνο (δηλαδή όσο μεγαλώνει το t) τόσο περισσότερη πληροφορία παίρνουμε από το V_t και επομένως μπορούμε να είμαστε είτε περισσότερο βέβαιοι, είτε λιγότερο για το μοντέλο P και άρα να πειράζουμε το θ αναλόγως.

Παράδειγμα 2
Αν την χρονική στιγμή $s \in (0, T]$ έχουμε την πληροφορία ότι η V_t είναι φθίνουσα ως προς t στο $[0, s)$ τότε είναι εύλογο να πάρουμε $\theta_s < \theta s - \epsilon$, όπου $\theta_t \equiv \theta(V_t^x)$ και ϵ όσο μικρό θέλουμε.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Κεφάλαιο 3

Αρχή στοχαστικής μεγιστοποίησης - Στοχαστικά διαφορικά παίγνια

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με προβήματα έυρεσης της διαδικασίας ελέγχου που μεγιστοποιεί ένα συναρτησιακό, το οποίο εξαρτάται από μια διαδικασία διάχυσης, κάτω από ένα γνωστό μοντέλο.

Έστω $X \equiv X^{(a)}$ μια διαδικασία διάχυσης στον $\mathbb{R}^n$, που υπόκειται σε μια διαδικασία ελέγχου a με

$$dX_t = b(X_t, a_t)dt + \sigma(X_t, a_t)dB_t \tag{3.1}$$

όπου B είναι μια $d-$διάστατη κίνηση Brown και $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία ελέγχου, b, σ είναι μετρήσιμες διαδικασίες με $b : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ και $\sigma : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^{n\times d}$ και οι οποίες είναι ολικά Lipschitz διαδικασίες :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall a \in A\, \exists k \geq 0 \text{ τέτοιο ώστε } |b(X, a) - b(Y, a)| + |\sigma(X, a) - \sigma(Y, a)| \leq k|X - Y|$$

Στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το εξης συναρτησιακό :

$$J(a) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, a_t)dt + g(X_T)\right]$$

όπου $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως πρός t και x, για κάθε $a \in A$, η $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κοίλη, συνάρτηση και f είναι της μορφής $f(t, x, a) = cx^2 + q(t, a)$ και $g(x) = d\,x^2$ οπου $x^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

Ο Pham στο βιβλίο του *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications(Stochastic Modelling and Applied Probability)* [15] χρησιμοποιεί την δ·υ·ική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος στοχαστικής μεγιστοποίησης ως εξής :
Η διαφορική εξίσωση (3) μπορεί να αναδιατυπωθεί στην μορφή:

$$dX_t = a_t dS_t, X_0 = x \tag{3.2}$$

όπου

$$dS_t = b_t d_t + \sigma_t dB_t \tag{3.3}$$

Συμβολίζουμε με

$$\mathcal{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P) = \{x : x \geq 0, x \in m - \mathcal{F}_t\}$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

και με

$$\mathcal{C}(x)=\left\{X_T\in\mathcal{L}^0_+(\Omega,\mathcal{F}_t,P):\exists\,\alpha\in A\,\text{με}\,x+\int_0^T\alpha_t dS_t\geq X_T\,\sigma.\beta\right\}$$

Αν X_T δεδομένη τυχαία μεταβλητή, θεωρούμε το

$$V_0=\inf\left\{x\in\mathbb{R}:\exists\,\alpha\in A\,\text{με}\,x+\int_0^T\alpha_t dS_t\geq X_T\,\sigma.\beta\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $X_T\in\mathcal{L}^0_+(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ τότε

$$V_0=\sup_{Q\in M(S)}\mathbb{E}^Q[X_T]=\sup_{Q\in M(S)}\mathbb{E}[Z_T^Q X_T]$$

όπου Z_T^Q είναι η Radon-Nikodym παράγωγος του Q ως προς το P και

$$M(S)=\{Q:Q\sim P\text{ και }S\text{ είναι }Q-\text{τοπικό }martingale\}.$$

Επομένως για $x>0$ έχουμε

$$\mathcal{C}(x)=\left\{X_T\in\mathcal{L}^0_+(\Omega,\mathcal{F}_t,P):\sup_{Q\in M(S)}\mathbb{E}^Q[X_T]\leq x\right\}.$$

Πρόταση 6 *Το $\mathcal{C}(x)$ είναι κλειστό ως προς την τοπολογία της σχεδόν βέβαιης σύγκλισης, δηλαδή αν $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}(x)$ και $X_n\to X\,\sigma.\beta.$ τότε $X\in\mathcal{C}(x)$.*

Θεώρημα 6 *Έστω $int\,(dom(U))=(0,+\infty)$[1], $v(x)<\infty$ για κάποια $x\in(0,+\infty)$ και $\limsup_{x\to\infty}\frac{v(x)}{x}\leq 0$. Τότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ υπάρχει μοναδική τυχαία μεταβλητή $\hat{X}_T^x\in\mathcal{C}(x)$ τέτοια ώστε*

$$U(\hat{X}_T^x)=\sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)}\mathbb{E}\left[U(X_T)\right].$$

Σκοπός μας είναι να λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$v(x)=\sup_{\alpha\in A}\mathbb{E}\left[g(X_T)\right]=\sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)}\mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$$

όπου U συνάρτηση χρησιμότητας, τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες Inada.
Είναι προφανές ότι αν $\hat{X}_T^x\in\mathcal{C}(x)$ είναι τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}\left[g(\hat{X}_T^x)\right]=\sup_{X_T\in\mathcal{C}(x)}\mathbb{E}\left[g(X_T)\right]$$

τότε υπάρχει έλεγχος $\hat{\alpha}\in A$ τέτοιος ώστε

$$\hat{X}_T^x=x+\int_0^T\hat{\alpha}_t dS_t.$$

Θεωρούμε τώρα τον Fenchel-Legendre μετασχηματισμό της g, $\tilde{g}$ με

$$\tilde{g}(y)=\sup_{x\geq 0}\left[g(x)-xy\right],\ y\geq 0 \tag{3.4}$$

[1] $int\,(dom(U))=$ το εσωτερικό του συνόλου $\{x:U(x)<\infty\}$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Η $\tilde{g}$ είναι προφανώς διαφορίσιμη, φθίνουσα και κοίλη στο $(0, +\infty)$ με $\tilde{g}(0) = g(\infty)$ και $-\tilde{g}' = (g')^{-1} \equiv I$.
Επίσης η (3.4) μεγιστοποιείται στο $y = g'(x)$.
Από τον ορισμό της $\tilde{g}$ και από την ισοδυναμία

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \mathbb{E}[Z_T^Q X_T] \leq x,\ Q \in M(S), \tag{3.5}$$

έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[g(X_T)\right] \leq \mathbb{E}\left[\tilde{g}(yZ_T^Q)\right] + \mathbb{E}\left[yZ_T^Q X_T\right] \leq \mathbb{E}\left[\tilde{g}(yZ_T^Q)\right] + xy$$

Πλεον μας είναι φανερό ότι μπορούμε να ορίσουμε το δυϊκό πρόβλημα (του αρχικού μας προβλήματος $v(x)$) ως εξής:

$$\tilde{v}(y) = \inf_{Q \in M(S)} \mathbb{E}\left[\tilde{g}(yZ_T^Q)\right],\ y > 0,$$

ενώ η σχέση που συνδέει το αρχικό πρόβλημα με το δυϊκό πρόβλημα είναι η εξής:

$$v(x) = \sup_{X_T \in \mathcal{C}(x)} \mathbb{E}\left[g(X_T)\right] \leq \inf_{y>0, Q \in M(S)} \left(\mathbb{E}\left[\tilde{g}(yZ_T^Q)\right] + xy\right) = \tilde{v}(y) + \inf_{y>0, Q \in M(S)} xy.$$

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη:
Λύνουμε το δυϊκό πρόβλημα δείχνοντας την ύπαρξη και την μοναδικότητα της βέλτιστης λύσης $(\hat{Y}, \hat{Z}_T)$.
Στην συνέχεια θέτουμε

$$\hat{X}_T^x = I(\hat{Y}\hat{Z}_T)\ (\mathcal{D}_x U(\hat{X}_T^x) = \hat{Y}\hat{Z}_T)$$

και αποδεικνύεται ότι το $\hat{X}_T^x$ που προκύπτει είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού μας προβλήματος.
Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{D} \equiv \{Y_T \in \mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P) : \exists (Z^n)_{n \in \mathbb{N}} \in M(S), Y_T \leq \lim_{n \to \infty} Z^n\}.$$

Από την (3.5) χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou έχουμε την αντίστοιχη σχέση

$$X_T \in \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_T X_T] \leq x,\ \forall\ Y_T \in D \tag{3.6}$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 7 *Έστω g μια διαδικασία χρησιμότητας, τέτοια ώστε $int\,(dom(g)) = \mathbb{R}_+$, $v(x) < \infty$ για κάποια $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(0+) = \infty, g'(\infty) = 0$ και $\limsup \frac{xg'(x)}{g(x)} < 1$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1) *Η v είναι διαφορίσιμη και αυστηρά κοίλη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^+$ και υπάρχει μοναδική λύση $\hat{X}_T^x$ του αρχικού μας προβλήματος στο $\mathcal{C}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.*

2) *Η $\tilde{v}$ είναι πεπερασμένη, διαφορίσιμη και αυστηρά κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}^+$ και υπάρχει μοναδική λύση $\hat{Y}_T^y$ του δυϊκού προβλήματος στο $\mathcal{D}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^+$.*

3) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ έχουμε $\hat{X}_T^x = I(\hat{y}\hat{Y}_T)$ όπου η $\hat{Y}_T \in \mathcal{D}$ είναι η λύση του δυϊκού προβλήματος $\hat{v}(\hat{y})$ και $\hat{y} = g'(x)$ είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την παράσταση*

$$\tilde{v}(y) + xy$$

με $\mathbb{E}[\hat{Y}_T \hat{X}_T^x] = x$.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

4) Αν επιπλέον υπάρχει $y > 0$ τέτοιο ώστε $\inf_{Z_T \in M(S)} \mathbb{E}[\tilde{g}(yZ_T)] < \infty$ τότε

$$\tilde{v}(y) = \inf_{Y_T \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[\hat{g}(yY_T)] = \inf_{Z_T \in M(S)} \mathbb{E}[\tilde{g}(yZ_T)].$$

Επομένως βρίσκοντας την τυχαία μεταβλητή $\hat{X}_T^x$ που μεγιστοποιεί το αρχικό μας πρόβλημα $v(x)$ το μόνο που απομένει είναι να βρούμε την διαδικασία ελέγχου a που να μας δίνει την $((3.2),(3.3))$. Άρα έχουμε να λύσουμε μια οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση της $\{Y_t\}$, η οποία Y λέγεται συζυγής διαδικασία της X. Συνδέσαμε λοιπόν την αρχή στοχαστικής μεγιστοποίησης με την θεωρία των οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Τώρα ορίζουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση

$$\mathcal{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}$$

με

$$\mathcal{H}(t,x,y,a,z) = b(x,a)y + tr(\sigma^T(x,a)z) + f(t,x,a), \tag{3.7}$$

και υποθέτουμε ότι η $\mathcal{H}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως πρός x. Θεωρούμε επίσης την οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση που προκύπτει από την H

$$-dY_t = \mathcal{D}_x\mathcal{H}(t,X_t,a_t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, Y_T = \mathcal{D}_x g(X_T). \tag{3.8}$$

Η διαδικασία Y είναι η συζυγής της X.

Θεώρημα 8 [2] *Έστω $\hat{a} \in A$ και $\hat{X} \equiv \hat{X}^{(a)}$ η αντίστοιχη διαδικασία διάχυσης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση $(\hat{Y},\hat{Z})$ της (3.8) τέτοιοα ώστε*

$$\mathcal{H}(t,\hat{X}_t,\hat{a}_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t) = \max_{a\in A}\mathcal{H}(t,\hat{X}_t,a_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t)\ P-\sigma.\beta.\ 0 \le t \le T \tag{3.9}$$

και

$$\eta\ (x,a) \to \mathcal{H}(t,x,a,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t)\ \text{να είναι κοίλη συνάρτηση για κάθε}\ t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

Τότε η $\hat{a}$ είναι βέλτιστη διαδικασία ελέγχου, δηλαδή $J(\hat{a}) = \sup_{a\in A} J(a)$

Απόδειξη: Για κάθε $a \in A$, έχουμε

$$J(\hat{a}) - J(a) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\hat{X}_t,\hat{a}_t) - f(t,X_t,a_t)dt + g(\hat{X}_T) - g(X_T)\right] \tag{3.11}$$

Καθώς η g είναι κοίλη συνάρτηση έχουμε

$$\mathbb{E}[g(\hat{X}_T) - g(X_T)] \ge \mathbb{E}[(\hat{X}_T - X_T)\mathcal{D}_x g(\hat{X}_T)] = \mathbb{E}[((\hat{X}_T - X_T),\hat{Y}_T)]$$

Για την διαδικασία $\left((\hat{X}_t - X_t),\hat{Y}_t\right)$ ολοκληρώνουμε (κατά Itô) κατά μέλη και έχουμε ότι

$$\left((\hat{X}_t - X_t),\hat{Y}_t\right) = \left((\hat{X}_0 - X_0),\hat{Y}_0\right) + \int_0^t \left(\hat{X}_s - X_s\right)d\hat{Y}_s + \int_0^t \hat{Y}_s d\left(\hat{X}_s - X_s\right) + <\hat{X} - X,\hat{Y}>_s =$$

$$\left((0-0),\hat{Y}_0\right) + \int_0^t \left(\hat{X}_s - X_s\right)d\hat{Y}_s + \int_0^t \hat{Y}_s\left(d\hat{X}_s - dX_s\right) + \int_0^t tr\left[\left(\sigma(\hat{X}_s,\hat{a}_s) - \sigma(X_s,a_s)\right)^T \hat{Z}_s\right]ds$$

άρα

$$\mathbb{E}\left[g(\hat{X}_T) - g(X_T)\right] \ge$$

[2] Οκσενδαλ ανδ Συλεμ [11]

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\hat{X}_s - X_s\right) d\hat{Y}_s + \int_0^T \hat{Y}_s \left(d\hat{X}_s - dX_s\right) + \int_0^T tr\left[\left(\sigma(\hat{X}_s, \hat{a}_s) - \sigma(X_s, a_s)\right)^T \hat{Z}_s\right] ds\right]$$

επομένως

$$\mathbb{E}\left[g(\hat{X}_T) - g(X_T)\right] \geq$$
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\hat{X}_t - X_t\right)\left(-\mathcal{D}_x\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)\right) dt + \int_0^T \hat{Y}_t \left(b(\hat{X}_t, \hat{a}_t) - b(X_t, a_t)\right) dt\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T tr\left[\left(\sigma(\hat{X}_s, \hat{a}_s\right) - \sigma(X_s, a_s))^T \hat{Z}_s\right] ds\right]$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της $\mathcal{H}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t) - f(t, X_t, a_t) dt\right] =$$
$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, a_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)\right] dt$$
$$-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[b(\hat{X}_t, \hat{a}_t) - b(X_t, a_t)\right] \hat{Y}_t + \int_0^T tr\left[\sigma(\left(\hat{X}_t, \hat{a}_t) - \sigma(X_t, a_t)\right)^T \hat{Z}_t\right] dt\right]$$

Από την (3.11) και από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$J(\hat{a}) - J(a) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, a_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) dt - \int_0^T \left(\hat{X}_t - X_t\right) \mathcal{D}_x\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)\right]$$

Όμως κάτω από τις υποθέσεις (3.9) και (3.10) έχουμε τελικά ότι $J(\hat{a}) \geq J(a)$ για κάθε $a \in A$.
Αποδείχθηκε •

3.1 Στοχαστικά διαφορικά παίγνια δύο παικτών (FBSDE Games)

Έστω $X \equiv X^{(a)}$ μια διάχυση στον $\mathbb{R}$ η οποία υπόκειται στην διαδικασία ελέγχου α με

$$dX_t = b\left(t, X_t, a(t)\right) dt + \sigma\left(t, X_t, a(t)\right) dB_t, \;\; X_0 = x \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

όπου B είναι μια κίνηση Brown και $a = (a_1, a_2)$ είναι διαδικασία ελέγχου με $a_i(t)$ να είναι η διαδικασία ελέγχου το παίκτη $i, (i = 1, 2)$ την χρονική στιγμή $t, (t \in [0, T])$ με $a_i \in A_i \subset \mathbb{R}, i = 1, 2$ και $A = A_1 \times A_2, b : [0, T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ και $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$. Τώρα, όμοια με προηγουμένως παίρνουμε τις οπισθοδρομικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dY_i(t) = -g_i\left(t, X_t, Y_i(t), Z_i(t), a(t)\right) dt + Z_i(t) dB_t, t \in [0, T] \text{ και } Y_i(T) = h_i(X_T)\, (i = 1, 2) \tag{3.13}$$

όπου $g_i(t, x, y, z, a) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ και $h_i(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τέτοιες ώστε οι εξισώσεις (16) να έχουν μοναδικές λύσεις.
Θεωρούμε $f_i(t, x, a) : [0, T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ να είναι η στρατηγική του παίκτη i, $\varphi_i(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση της μορφής $cx^k, k \in \mathbb{N}$ και $\psi_i(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση που εκφράζει την αβεβαιότητα του παίκτη i,ως προς την στρατηγική του. $(i = 1, 2)$
Ορίζουμε

$$J_i(a) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_i\left(t, X_t, a(t)\right) dt + \varphi_i(X_T) + \psi_i\left(Y_i(0)\right)\right] \tag{3.14}$$

να είναι η συνάρτηση πληρωμής του παίκτη $i, (i = 1, 2)$.
Ένα Σημείο Ισορροπίας κατα Nash για το παίγνιο $((3.12), (3.13), (3.14))$ είναι ένα ζευγάρι $(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in A$ τέτοιο ώστε

$$J_1(a_1, \hat{a}_2) \leq J_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \text{ για κάθε } a_1 \in A_1 \tag{3.15}$$

$$J_2(\hat{a}_1, a_2) \leq J_2(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \text{ για κάθε } a_2 \in A_2 \tag{3.16}$$

Στόχος μας είναι να βρούμε το σημείο $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ μέσω της Αρχής Στοχαστικής Μεγιστοποίησης που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.
Ορίζουμε επομένως τις Χαμιλτονιανές συναρτήσεις

$$\mathcal{H}_i : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A_1 \times A_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

με

$$\mathcal{H}_i(t, x, y, z, a_1, a_2, \lambda, p, q) = f_i(t, x, a_1, a_2) + \lambda g_i(t, x, y, z, a_1, a_2) + pb(t, x, a_1, a_2) + q\sigma(t, x, a_1, a_2), \ \ i = 1, 2 \tag{3.17}$$

και θεωρούμε ότι οι $\mathcal{H}_i$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ως πρός τις μεταβλητές x, y, z, a_1, a_2 (ι=1,2).

Συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}(t, X_t, Y_i(t), Z_i(t), a_1(t), a_2(t), \lambda_i(t), p_i(t), q_i(t))$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial y}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial y}(t, X_t, Y_i(t), Z_i(t), a_1(t), a_2(t), \lambda_i(t), p_i(t), q_i(t))$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial z}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial z}(t, X_t, Y_i(t), Z_i(t), a_1(t), a_2(t), \lambda_i(t), p_i(t), q_i(t))$$

Για κάθε $a \in A$ θεωρούμε τις βοηθητικές (ως προς τις Χαμιλτονιανές) προδρομικές οπισθοδρομικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (στις μεταβλητές λ_i, p_i, q_i):

A) Προδρομικές Διαφορικές Εξισώσεις στις λ_i:

$$d\lambda_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial y}(t)dt + \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial z}(t)dB_t, \ 0 \leq t \leq T, \ \ \lambda_i(0) = \psi_i^{'}(Y_i(0)) \tag{3.18}$$

B) Οπισθοδρομικές Διαφορικές Εξισώσεις στις p_i, q_i:

$$dp_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}(t)dt + q_i(t)dB_t, \ 0 \leq t \leq T, \ \ p_i(T) = \varphi_i^{'}(X(T)) + h_i^{'}(X(T))\lambda_i(T) \tag{3.19}$$

Θεώρημα 9 *Έστω $\mathcal{E}_t^i$ να συμβολίζει την πληροφορία που έχει διαθέσιμη ο παίκτης $i, (i = 1, 2)$ την χρονική στιγμή t, $(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in A$ με αντίστοιχες λύσεις $\hat{X}_t, \hat{Y}_i(t), \hat{Z}_i(t), \hat{\lambda}_i(t), \hat{p}_i(t), \hat{q}_i(t)$ των εξισώσεων (3.12),(3.13),(3.18) και (3.19) για $i = 1, 2$ και έστω ότι ισχύουν οι εξής υποθέσεις:*

1) Οι h_i, φ_i, ψ_i είναι κοίλες συναρτήσεις

2)

$$\max_{a_1 \in A_1} \left\{ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}_1(t, \hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t), a_1, \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}_1(t), \hat{p}_1(t), \hat{q}_1(t)) \middle| \mathcal{E}_t^{(1)} \right] \right\} =$$
$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_1(t, \hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t), \hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}_1(t), \hat{p}_1(t), \hat{q}_1(t)) \middle| \mathcal{E}_t^{(1)} \right]$$

 https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

και

$$\max_{a_2\in A_2}\left\{\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_2(t,\hat{X}_t,\hat{Y}_2(t),\hat{Z}_2(t),\hat{a}_1(t),a_2,\hat{\lambda}_2(t),\hat{p}_2(t),\hat{q}_2(t))\Big|\,\mathcal{E}_t^{(2)}\right]\right\}=$$
$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_2(t,\hat{X}_t,\hat{Y}_2(t),\hat{Z}_2(t),\hat{a}_1(t),\hat{a}_2(t),\hat{\lambda}_2(t),\hat{p}_2(t),\hat{q}_2(t))\Big|\,\mathcal{E}_t^{(2)}\right]$$

3) Οι συναρτήσεις

$$\hat{h}_1(x,y,z)=\max_{a_1\in A_1}\left\{\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_1(t,x,y,z,a_1,\hat{a}_2(t),\hat{\lambda}_1(t),\hat{p}_1(t),\hat{q}_1(t))\Big|\,\mathcal{E}_t^{(1)}\right]\right\}\ \textit{και}$$
$$\hat{h}_2(x,y,z)=\max_{a_2\in A_2}\left\{\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_2(t,x,y,z,\hat{a}_1(t),a_2,\hat{\lambda}_2(t),\hat{p}_2(t),\hat{q}_2(t))\Big|\,\mathcal{E}_t^{(2)}\right]\right\}$$

είναι κοίλες ως προς t, $P-\sigma.\beta.$

4) $\mathbb{E}\left(\int_0^T\left[\hat{p}_i^2(t)\left[\hat{\sigma}(t)-\sigma(t)\right]^2+\hat{q}_i^2(t)\left(\hat{X}_t-X_t\right)^2+\hat{\lambda}_i^2(t)\left[\hat{Z}_i(t)-Z_i(t)\right]^2+\frac{\theta\hat{\mathcal{H}}_i}{\theta z}(t)\left[\hat{Y}_i(t)-Y_i(t)\right]^2\right]dt\right)<\infty,\ (i=1,2)$

τότε το $(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ είναι Σημείο Ισορροπίας κατα Nash του παιγνίου $((3.12),(3.13),(3.14))$.

Απόδειξη: Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $J_1(a_1,\hat{a}_2)\le J_1(\hat{a}_1.\hat{a}_2)$ για κάθε $a_1\in A_1$ (εντελώς όμοια αποδεικνύεται και ότι $J_2(\hat{a}_1,a_2)\le J_2(\hat{a}_1.\hat{a}_2)$ για κάθε $a_2\in A_2$)
Έστω λοιπόν $a_1\in A_1$ και έστω

$$J_1(a_1,\hat{a}_2)-J_1(\hat{a}_1,\hat{a}_2)=I_1+I_2+I_3 \tag{3.20}$$

όπου

$$I_1=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left[f_1\left(t,X_t,a_1(t),\hat{a}_2(t)\right)-f_1\left(t,\hat{X}_t,\hat{a}_1(t),\hat{a}_2(t)\right)\right]dt\right] \tag{3.21}$$

$$I_2=\mathbb{E}\left[\varphi_1\left(X(T)\right)-\varphi_1\left(\hat{X}(T)\right)\right] \tag{3.22}$$

$$I_3=\mathbb{E}\left[\psi_1\left(Y_1(0)\right)-\psi_1\left(\hat{Y}_1(0)\right)\right] \tag{3.23}$$

Η (3.17) μας δίνει:

$$I_1=\mathbb{E}\left[\int_0^T\mathcal{H}_1(t)-\hat{\mathcal{H}}_1(t)-\hat{\lambda}_1(t)\left[g_1(t)-\hat{g}_1(t)\right]-\hat{p}_1(t)\left[b(t)-\hat{b}(t)\right]-\hat{q}_1(t)\left[\sigma(t)-\hat{\sigma}(t)\right]dt\right]. \tag{3.24}$$

Η φ_1 είναι κοίλη συνάρτηση. Επομένως

$$I_2\le\mathbb{E}\left[(X_T-\hat{X}_T)\varphi_1'(\hat{X}_T)\right].$$

Όμως από την (3.19) ισχύει ότι

$$p_i(T)=\varphi_i'\left(X(T)\right)+h_i'\left(X(T)\right)\lambda_i(T),$$

επομένως

$$I_2\le\mathbb{E}\left[\hat{p}_1(T)(X_T-\hat{X}_T)\right]-\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_1(T)h_1'\left(\hat{X}_T\right)\left(X_T-\hat{X}_T\right)\right].$$

Ολοκληρώνοντας τώρα (κατά Itô) κατά μέλη (Integration by parts formula) την διαδικασία $\left(\hat{p}_1(t)(X_t-\hat{X}_t)\right)$ έχουμε

$$\hat{p}_1(T)(X_T-\hat{X}_T)=\hat{p}_1(0)(X_0-\hat{X}_0)+\int_0^T\hat{p}_1(t)\left[d(X_t)-d(\hat{X}_t)\right]+\int_0^T(X_t-\hat{X}_t)d\hat{p}_1(t)+<\hat{p}_1,X-\hat{X}>_T$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

με

$$< \hat{p}_1, X - \hat{X} >_T = \int_0^T \hat{q}_1(t) \left[\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)\right] dt \,\text{και}\, X_0 - \hat{X}_0 = x - x = 0$$

Άρα

$$\hat{p}_1(T)(X_T - \hat{X}_T) = \int_0^T \hat{p}_1(t) \left[d(X_t) - d(\hat{X}_t)\right] + \int_0^T (X_t - \hat{X}_t) d\hat{p}_1(t) + \int_0^T \hat{q}_1(t) \left[\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)\right] dt$$

Επομένως,

$$I_2 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}_1(t) \left[d(X_t) - d(\hat{X}_t)\right] + \int_0^T (X_t - \hat{X}_t) d\hat{p}_1(t) + \int_0^T \hat{q}_1(t) \left[\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)\right] dt\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_1(T) h_1'(\hat{X}_T)(X_T - \hat{X}_T)\right]$$

Τελικά,

$$I_2 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}_1(t) \left[b(t) - \hat{b}(t)\right] dt + \int_0^T (X_t - \hat{X}_t) \left(-\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_1}{\partial x}(t)\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_)^T \hat{q}_1(t) \left[\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)\right] dt - \hat{\lambda}_1(T) h_1'(\hat{X}_T)(X_T - \hat{X}_T)\right] \tag{3.25}$$

Η ψ_1 είναι κοίλη συνάρτηση, επομένως

$$I_3 = \mathbb{E}\left[\psi_1\left(Y_1(0)\right) - \psi_1\left(\hat{Y}_1(0)\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\psi_1'\left(\hat{Y}_1(0)\right)\left[Y_1(0) - \hat{Y}_1(0)\right]\right].$$

Όμως από την (3.18) ισχύει ότι

$$\lambda_1(0) = \psi_1'\left(Y_1(0)\right),$$

επομένως

$$I_3 \leq \mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_1(0)\left[Y_1(0) - \hat{Y}_1(0)\right]\right].$$

Ολοκληρώνοντας τώρα (κατά Ιτô) κατά μέλη την διαδικασία $\left(\hat{\lambda}_1(t)\left[Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right]\right)_{t \in [0,T]}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\hat{\lambda}_1(T)\left[Y_1(T) - \hat{Y}_1(T)\right] = \\
&\hat{\lambda}_1(0)\left[Y_1(0) - \hat{Y}_1(0)\right] + \int_0^T \left[Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right] d\hat{\lambda}_1(t) \\
&+ \int_0^T \hat{\lambda}_1(t) d\left[Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right] + < \hat{\lambda}_1, Y_1 - \hat{Y}_1 >_T = \\
&\hat{\lambda}_1(0)\left[Y_1(0) - \hat{Y}_1(0)\right] + \int_0^T \left[Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right] d\hat{\lambda}_1(t) + \int_0^T \hat{\lambda}_1(t) d\left[Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right] \\
&+ \int_0^T \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)\left[Z_1(t) - \hat{Z}_1(t)\right] dt
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Άρα

$$
\begin{aligned}
I_3 \leq \mathbb{E}&\left[\hat{\lambda}_1(T)\left[Y_1(T)-\hat{Y}_1(T)\right]-\int_0^T\left[Y_1(t)-\hat{Y}_1(t)\right]d\hat{\lambda}_1(t)\right]\\
-\mathbb{E}&\left[\int_0^T\hat{\lambda}_1(t)\left[dY_1(t)-d\hat{Y}_1(t)\right]+\int_0^T\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)\left[Z_1(t)-\hat{Z}_1(t)\right]dt\right]=\\
\mathbb{E}&\left[\left[h_1(X_T)-h_1(\hat{X}_T)\right]\hat{\lambda}_1(T)-\int_0^T\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial y}(t)\left[Y_1(t)-\hat{Y}_1(t)\right]dt\right]\\
-\mathbb{E}&\left[\int_0^T\hat{\lambda}_1(t)\left[-g_1(t)+\hat{g}_1(t)\right]dt+\int_0^T\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)\left[Z_1(t)-\hat{Z}_1(t)\right]dt\right]
\end{aligned}
$$

Όμως η h_1 είναι κοίλη συνάρτηση, επομένως

$$
\begin{aligned}
I_3 \leq \mathbb{E}&\left[\hat{\lambda}_1(T)h_1^{'}(\hat{X}_T)(X_T-\hat{X}_T)-\int_0^T\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial y}(t)\left[Y_1(t)-\hat{Y}_1(t)\right]dt\right]\\
-\mathbb{E}&\left[\int_0^T\hat{\lambda}_1(t)\left[-g_1(t)+\hat{g}_1(t)\right]dt+\int_0^T\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)\left[Z_1(t)-\hat{Z}_1(t)\right]dt\right]
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Από τις σχέσεις (3.24),(3.25) και (3.26) έχουμε ότι

$$J_1(a_1,\hat{a}_2)-J_1(\hat{a}_1,\hat{a}_2)\leq$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left[\mathcal{H}_1(t)-\hat{\mathcal{H}}_1(t)-\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial x}(t)(X_t-\hat{X}_t)-\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial y}(t)\left[Y_1(t)-\hat{Y}_1(t)\right]-\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)\left[Z_1(t)-\hat{Z}_1(t)\right]\right]dt\right]$$

Καθώς $\hat{h}_1(x,y,z)$ είναι κοίλη συνάρτηση υπάρχει διαφορικό $a=(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$ για την $\hat{h}_1(x,y,z)$ στο $x=\hat{X}(t), y=\hat{Y}_1(t), z=\hat{Z}_1(t)$ τέτοια ώστε αν ορίσουμε

$$\varphi_1(x,y,z)=\hat{h}_1(x,y,z)-\hat{h}_1\left((\hat{X}_t),\hat{Y}_1(t),\hat{Z}_1(t)\right)-\left[a_0(X_t-\hat{X}_t)+a_1\left(y-\hat{Y}_1(t)\right)+a_2\left(z-\hat{Z}_1(t)\right)\right]$$

θα έχουμε $\varphi_1(x,y,z)\leq 0$ για κάθε x,y,z. Επίσης έχουμε (προφανώς) ότι $\varphi_1\left(\hat{X}_t,\hat{Y}_1(t),\hat{Z}_1(t)\right)=0$ καθώς και

$$\hat{h}_1(x,y,z)=\max_{a_1\in A_1}\left\{\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_1\left(t,x,y,z,a_1,\hat{a}_2(t),\hat{\lambda}_1(t),\hat{p}_1(t),\hat{q}_1(t)\right)\middle|\mathcal{E}_t^{(1)}\right]\right\}$$

επομένως,

$$\hat{h}_1(x,y,z)=\mathbb{E}\left[\hat{\mathcal{H}}_1\left(t,x,y,z,a_1,\hat{a}_2(t),\hat{\lambda}_1(t),\hat{p}_1(t),\hat{q}_1(t)\right)\middle|\mathcal{E}_t^{(1)}\right]$$

και άρα

$$\frac{\partial\hat{h}_1}{\partial k}(x(t),y(t),z(t))=\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial k}(t), k=x,y,z$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\tfrac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial x}(t)=\tfrac{\partial\hat{h}_1}{\partial x}\left(\hat{X}_t,\hat{Y}_1(t),\hat{Z}_1(t)\right)=a_0$$

$$\tfrac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial y}(t)=\tfrac{\partial\hat{h}_1}{\partial y}\left(\hat{X}_t,\hat{Y}_1(t),\hat{Z}_1(t)\right)=a_1$$

$$\tfrac{\partial\hat{\mathcal{H}}_1}{\partial z}(t)=\tfrac{\partial\hat{h}_1}{\partial z}\left(\hat{X}_t,\hat{Y}_1(t),\hat{Z}_1(t)\right)=a_2.$$

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Έτσι, η τελευταία ανισότητα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&J_1(a_1, \hat{a}_2) - J_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \leq \\
&\hat{h}_1\left(X_t, Y_1(t), Z_1(t)\right) - \hat{h}_1\left(\hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t)\right) - \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial x}\left(\hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t)\right)(X_t - \hat{X}_t) \\
&-\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial y}\left(\hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t)\right)\left(Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)\right) - \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial z}\left(\hat{X}_t, \hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(t)\right)\left(Z_1(t) - \hat{Z}_1(t)\right)
\end{aligned}
$$

Όμως η $\hat{h}_1$ είναι κοίλη συνάρτηση, επομένως έχουμε τελικά

$$J_1(a_1, \hat{a}_2) \leq J_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$$

που είναι και το ζητούμενο •

3.2 Στοχαστικά διαφορικά παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$J(a_1, a_2) \equiv J_1(a_1, a_2) = -J_2(a_1, a_2) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(t, X_t, a_1(t), a_2(t)\right) dt + \varphi(X_T) + \psi\left(Y(0)\right)\right] \tag{3.27}$$

όπου $f = f_1 = -f_2, h = h_1 = h_2, \varphi = \varphi_1 = -\varphi_2, \psi = \psi_1 = -\psi_2, Y = Y_1 = Y_2$ και $(a_1, a_2) \in A$ και θεωρούμε την οπισθροδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY(t) = -g\left(t, X_t, Y(t), Z(t), a(t)\right) dt + Z(t)dBt, t \in [0, T] \text{ και } Y(T) = h(X_T) \tag{3.28}$$

όπου τώρα $g = g_1 = g_2, Z = Z_1 = Z_2$ και θέλουμε να βρούμε το σαγματικό σημείο του παιγνίου $((3.12), (3.27), (3.28))$, ορίζουμε επομένως την Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H}(t, x, y, z, a_1, a_2, \lambda, p, q) = f(t, x, a_1, a_2) + \lambda g(t, x, y, z, a_1, a_2) + pb(t, x, a_1, a_2) + q\sigma(t, x, a_1, a_2)$$

και λειτουργώντας όπως στην παράγραφο 3.1 έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 10 *Έστω Χαμιλτονιανή συνάρτηση $\mathcal{H}(t, x, y, x, a_1, a_2, \lambda, p, q)$ τέτοιοα ώστε να ισχύει*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\mathcal{H}\left(t, X_t, Y(t), Z(t), u_1, a_2(t), \lambda(t), p(t), q(t)\right)\middle| \mathcal{E}_t^{(1)}\right]_{u_1 = a_1(t)} \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\mathcal{H}\left(t, X_t, Y(t), Z(t), a_1(t), u_2, \lambda(t), p(t), q(t)\right)\middle| \mathcal{E}_t^{(2)}\right]_{u_2 = a_2(t)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

*με $(Y(t) = Y_1(t) = Y_2(t), Z(t) = Z_1(t) = Z_2(t), \lambda(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t), p(t) = p_1(t) = p_2(t),$
$q(t) = q_1(t) = q_2(t))$ Έστω $(\hat{a}_1, \hat{a_2}) \in A_1 \times A_2$ με αντίστοιχες λύσεις $\hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)$ των εξισώσεων (3.12), (3.13), (3.18) και (3.19), με $g_1 = g_2 = g, h_1 = h_2 = h, f_1 = f_2 = f$ και $\psi_1 = \psi_2 = \psi$*

Υποθέτουμε τα εξής :

- *Οι συναρτήσεις h, φ και ψ είναι αφινικές* [3].

[3] Μια συνάρτηση f λέγεται αφινική αν για $x, y \in \mathbb{R}, a \in (0, 1)$ έχουμε ότι $f(ax + (1-a)y) = af(x) + (1-a)f(y)$.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

-

$$\max_{a_1 \in A_1} \left\{ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), a_1, \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(1)} \right] \right\} =$$
$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), \hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(1)} \right]$$

  και

$$\min_{a_2 \in A_2} \left\{ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), \hat{a}_1(t), a_2, \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(2)} \right] \right\} =$$
$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, \hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), \hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(2)} \right]$$

- *Η συνάρτηση*

$$\hat{h}(x, y, z) = \max_{a_1 \in A_1} \left\{ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, x, y, z, a_1, \hat{a}_2(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(1)} \right] \right\}$$

  είναι κοίλη συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση

$$\min_{a_2 \in A_2} \left\{ \mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t, x, y, z, \hat{a}_1(t), a_2, \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)\right) \middle| \mathcal{E}_t^{(2)} \right] \right\}$$

  είναι κυρτή, για κάθε $t \in [0, T]$, $P - \sigma.\beta.$

- *Για κάθε* $a, b \in A$ *με* b *φραγμένη, υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε η διαδικασία ελέγχου* $\tilde{a}(t) = a(t) + sb(t)$ *να ανήκει στο* A *για κάθε* $s \in (-\delta, \delta)$.

Τότε η $\hat{a}(t) = (\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t))$ *είναι σαγματικό σημείο για την* $J(a_1, a_2)$. *Δηλαδή η* $\hat{a}(t) = (\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t))$ *είναι Σημείο Ισορροπίας κατά Nash για το παίγνιο* $((3.12), (3.27), (3.28))$.

Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος για παίγνια 2 παικτών και γι΄ αυτό παραλείπεται.

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Κεφάλαιο 4

Στοχαστική μεγιστοποίηση με αβεβαιότητα για το μοντέλο μας

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιλύσουμε το πρόβλημα στοχαστικής μεγιστοποίησης όταν είμαστε αβέβαιοι για το μοντέλο μας. Το πρόβλημα αυτό είναι η γενίκευση του προβλήματος στην παράγραφο 3.1, καθώς τώρα το μοντέλο, κάτω από το οποίο μεγιστοποιούμε το συναρτησιακό μας, δεν μας είναι γνωστό, αλλά θα προκύψει από την θεωρία των παραγράφων 2.1 και 3.3.

Έστω $X \equiv X^{(a)}$ μια διάχυση στον $\mathbb{R}$ που υπόκειται σε μια διαδικασία ελέγχου α με

$$dX_t = b\left(t, X_t, a(t)\right) dt + \sigma\left(t, X_t, a(t)\right) dB_t,\ X_0 = x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

όπου B είναι μια $P-$κίνηση Brown. και έστω ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς τον έλεγχο a το εξής συναρτησιακό :

$$J(u) = \mathbb{E}^P\left[\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T)\right]$$

όπου $U_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ και $U_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, αύξουσες και κοίλες συναρτήσεις. Όμως τώρα είμαστε σχεδόν βέβαιοι ότι το μοντέλο μας (μέτρο πιθανότητας) P είναι εκείνο το μέτρο κάτω από το οποίο μεγιστοποιείται η αναμενόμενη τιμή της $\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T)$ δηλαδή η

$$\mathbb{E}^P[\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T)]$$

Όμως αυτή η αβεβαιότητά μας, μας επιβάλει να βρούμε εκείνο το μοντέλο ($\sigma.\sigma.$ το μέτρο πιθανότητας P^θ) το οποίο θα μοιάζει με το αρχικό μας μοντέλο P και για το οποίο ισχύει :

$$\mathbb{E}^{P^\theta}\left[\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T)\right] = \inf_{Q \in P^*} \mathbb{E}^Q\left[\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T)\right].$$

με $P^* \equiv \{Q : Q \sim P\}$ Επομένως, επιδιώκουμε να βρούμε το Σημείο Ισορροπίας κατά Nash του παιγνίου

$$\sup_{a \in A} \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}^\theta\left[\int_0^T U_1(t, X_t, a_t)dt + U_2(X_T) + \int_0^T \psi(\theta_t)dt\right] \tag{4.2}$$

όπου,

με $\mathbb{E}^\theta$ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας $P\theta$

με θ συμβολίζουμε την σχετική εντροπία του μοντέλου P^θ ως πρός το μοντέλο P,

$\Theta = \{\mathcal{R}, \mathcal{R}$ είναι η σχετική εντροπία του μοντέλου P^θ με $\mathcal{P}^\theta \sim P\}$

η συνάρτηση $\psi(\theta_t)$ εκφράζει την αβεβαιότητά μας ως προς το αρχικό μας μοντέλο P την χρονική στιγμή t [1] και έστω

$$F(t,x,u) = U_1(t,x,a) + \psi(\theta_t), u = (a,\theta) \in A \times \Theta \tag{4.3}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}^\theta \left[\int_0^T U_1(t,X_t,a_t)dt + U_2(X_T) + \int_0^T \psi(\theta_t)dt \right] = \mathbb{E}\left[\xi_T^\theta U_2(X_T) + \int_0^T \xi_t^\theta F(s,X_s,u_s)ds \right]. \tag{4.4}$$

Ορίζουμε τώρα μια διαδικασία $Y_t \equiv Y_t^{(u)}$ με

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\frac{\xi_T^\theta}{\xi_t^\theta} U_2(X_T) + \int_t^T \frac{\xi_s^\theta}{\xi_t^\theta} F(s,X_s,u_s)ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \, t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

Παρατηρούμε ότι η Y είναι η λύση της οπισθοδρομικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης [2] :

$$dY_t = -\left[F(t,X_t,u_t) + \theta_t Z_t\right]dt + Z_t dB_t, \;\; Y_T = U_2(X_T). \tag{4.6}$$

Η (4.5) είναι η συζυγής διαφορική εξίσωση της (4.1) και παρατηρούμε ότι

$$Y_0 \equiv Y_0^{(u)} = \mathbb{E}^\theta \left[\int_0^T U_1(t,X_t,a_t)dt + U_2(X_T) + \int_0^T \psi(\theta_t)dt \right] \tag{4.7}$$

Επομένως το παίγνιο (4.2) μπορεί να γραφτεί ως :

$$Y_0^{(\hat{u})} = \sup_{a\in A} \inf_{\theta\in\Theta} Y_0^{(a,\theta)} = \inf_{\theta\in\Theta} \sup_{a\in A} Y_0^{(a,\theta)} \tag{4.8}$$

όπου $Y_0^{(a,\theta)}$ δίνεται από το σύστημα προδρομικών-οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων $((4.1),(4.5))$.
Παρατηρούμε ότι το παίγνιο (4.8) είναι ένα στοχαστικά διαφορικό παίγνιο, από προδρομικές-οπισθοδρομικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, μηδενικού αθροίσματος της μορφής (3.27) όπου τώρα $J(a,\theta) = \mathbb{E}[Y(0)]$

Επομένως λειτουργώντας όμοια με την παράγραφο (2.3) ορίζουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση

$$\mathcal{H} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A \times \Theta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

με

$$\mathcal{H}(t,x,y,z,a,\theta,\lambda,p,q) = \left[F(t,x,u) + \theta z\right]\lambda + b(t,x,a)p + \sigma(t,x,a). \tag{4.9}$$

Για κάθε $(a,\theta) \in A \times \Theta$ θεωρούμε τις βοηθητικές (ως προς την Χαμιλτονιανή) προδρομικές οπισθοδρομικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (στις μεταβλητές λ, p, q):

A) Προδρομική Διαφορική Εξίσωση στη λ :

$$d\lambda(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(t)dt + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}(t)dB_t = \lambda(t)\theta_t dB_t, \;\; \lambda(0) = 1 \tag{4.10}$$

[1] Βλέπε παράγραφο 1.2 - για το ϑ .
[2] Βλέπε παράγραφο 1.3 .

B) Οπισθοδρομική Διαφορική Εξίσωση στις p και q :

$$dp(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t)dt + q(t)dB_t = -\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t) + p(t)\frac{\partial b}{\partial x}(t) + q(t)\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t)\right]dt + q(t)dB_t$$
$$\text{όπου } p(T) = \lambda(T)U_2'(X_T) \tag{4.11}$$

Θεώρημα 11 *Έστω $(\hat{a}, \hat{\theta}) \in A \times \Theta$ με αντίστοιχες λύσεις $\hat{X}_t, \hat{Y}(t), \hat{Z}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)$ των (4.1), (4.6), (4.10) και (4.11), έστω επίσης ότι ισχύει η (4.8) και έστω ότι ισχύουν τα εξής για $A_1 \times A_2 \equiv A \times \Theta$:*

Για κάθε $t_0 \in [0, T]$ και για κάθε φραγμένη $\mathcal{E}_t^{(i)}-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $a_i(w)$ η ελεγχοσυνάρτηση $\beta_i(t) \equiv I_{(t_0,T)}(t)a_i(w) \in A_i,\ i = 1, 2.$

Για κάθε $u_i, \beta_i \in A_i$ με β_i φραγμένη υπάρχει $\delta_i > 0$ τέτοιο ώστε η ελεγχοσυνάρτηση $\tilde{u}_i(t) \equiv u_i(t) + s\beta_i(t),\ t \in [0, T]$ ανήκει στο A_i για κάθε $s \in (-\delta_i, \delta_i),\ i = 1, 2.$

Οι παρακάτω παραγόμενες διαδικασίες υπάρχουν και ανήκουν στο $\mathcal{L}^2([0, T] \times \Omega)$:

$$x_1(t) = \tfrac{d}{ds}X_t^{(u_1+s\beta_1,u_2)}|_{s=0}$$
$$y_1(t) = \tfrac{d}{ds}Y^{(u_1+s\beta_1,u_2)}(t)|_{s=0}$$
$$z_1(t) = \tfrac{d}{ds}Z^{(u_1+s\beta_1,u_2)}(t)|_{s=0}$$
$$x_2(t) = \tfrac{d}{ds}X_t^{(u_1,u_2+s\beta_2)}|_{s=0}$$
$$y_2(t) = \tfrac{d}{ds}Y^{(u_1,u_2+s\beta_2)}(t)|_{s=0}$$
$$z_2(t) = \tfrac{d}{ds}Z^{(u_1,u_2+s\beta_2)}(t)|_{s=0}$$

τέλος υποθέτουμε ότι ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T \hat{p}^2(t)\left[\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)\right]^2 + (X_t - \hat{X}_t)^2\hat{q}^2(t) + \left[Y(t) - \hat{Y}(t)\right]^2(\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial z})^2(t) + \hat{\lambda}^2(t)\left[Z(t) - \hat{Z}(t)^2\right]\right\} < \infty\,. \tag{4.12}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}(t)\frac{\partial U_1}{\partial a}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t) + \hat{p}(t)\frac{\partial b}{\partial a}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t) + \hat{q}(t)\frac{\partial \sigma}{\partial a}(t, \hat{X}_t, \hat{a}_t)\middle|\,\mathcal{E}_t^1\right] = 0 \text{ και}$$

$$\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}(t)\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\left(\hat{\theta}(t)\right) + \hat{Z}(t)\right)\middle|\,\mathcal{E}_t^{(2)}\right] = 0$$

όπου το $(\hat{a}, \hat{\theta})$ είναι σαγματικό σημείο του παιγνίου (4.8).

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

Βιβλιογραφία

[1] Robert S. Liptser and Albert N. Shiryaev, *Statistics of random processes I. General Theory*, Springer 2001

[2] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 2nd edition-1991

[3] Y.Hu, S. Peng, *Solution of forward-backward stochastic differential equations*,Probability theory and related fields Volume 103, Number 2, 273-283, Springer-Verlag 1995

[4] Lars Peter Hansen, Thomas J. Sargent, Gauhar A. Turmuhambetova and Noah Williams, *Robustness and uncertainty aversion*, 2001

[5] Lars Peter Hansen, Thomas J. Sargent, Gauhar A. Turmuhambetova and Noah Williams, *Robust control and model misspecification*,Journal of Economic Theory 128 (2006) 45-90

[6] Mark Schroder and Costis Skiadas, *Optimal Consumption and Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility*, Journal of Economic Theory 89, 68-126 (1999)

[7] Costis Skiadas, *Robust control and recursive utility*, Finance Stochast. 7, 475-489, Springer-Verlag 2003

[8] Alexander Schied, *Optimal investments for robust utility functionals in complete market models*, pre-printed edition, 2004

[9] Andrzej Ruszczynski and Alexander Shapiro, *Optimization of risk measures*, Risk and Insurance 0407002, EconWPA, 2004

[10] N.El. Karoui, S.Peng and M.C.Quenez, *Backward stochastic differential equations in finance*, Mathematical Finance, Vol 7, No. 1 (January 1997), 1-71

[11] Bernt Oksendal and Agnes Sulem, *Forward-backward stochastic differential games and stochastic control under model uncertainty*, Inria-00635520, version 1 - 25 Oct 2011

[12] Wahid Faidi, Anis Matoussi and Mohamed Mnif, *Maximization of recursive utilities : A dynamic maximum principle approach*, Society for Industrial and Applied Mathematics 2011

[13] Ying Hu and Martin Schweizer, *Some new BSDE results for an infinite-horizon stochastic control problem*,MSC 2000 Classification Numbers: 60H10, 60H20, 60G44, 91B16, JEL Classification Numbers: G10, C60, D80

[14] Giuliana Bordigoni, Anis Matoussi and Martin Schweizer, *A stochastic control approach to a robust utility maximization problem*, MSC 2000 Classification Numbers: 93E20, 91B16, 60H10, 46N10, JEL Classification Numbers: C60, G10, 2007

https://doi.org/10.26219/heal.aueb.1977

[15] Huyên Pham, *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications(Stochastic Modelling and Applied Probability)*, Springer, 1st edition-2004

[16] Ji Huan He, *Homotopy Perturbation Technique*, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Volume 178, Issues 3-4, August 1999, Pages 257-262

[17] Jin Ma and Jiongmin Yong, Forward-backward stochastic differential equations and their applications, Springer 2007