https://doi.org/10.26219/heal.aueb.6112

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Οπισθοδρομικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές τους στα Χρηματοοικονομικά

Γεώργιος Ι. Παπαγιάννης

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική

Αθήνα
Μάιος 2011

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η ανάδειξη της χρησιμότητας των οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (BSDE) στα χρηματοοικονομικά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε την θεωρία που έχει αναπτυχθεί για κάθε είδους BSDE . Στην συνέχεια, εμπλέκουμε τις εξισώσεις αυτές στο πεδίο της βελτιστοποίησης στοχαστικής φύσεως προβλημάτων. Μέσω αυτού του πλαισίου εργασίας αναδεικνύουμε κάποιες από τις εφαρμογές τους στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Η εργασία αυτή ολοκληρώνεται με την αναφορά σε ένα αριθμητικό σχήμα για την επίλυση τέτοιου είδους εξισώσεων που θα μας επιτρέπει να παρακάμπτουμε την αναλυτική λύση αυτών των εξισώσεων όταν αυτή είναι δύσκολο ή αδύνατο να υπολογιστεί.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στις αρχές της δεκαετίας του ′90, άρχισε έντονη επιστημονική έρευνα πάνω σε ένα αντικείμενο γνωστό σήμερα ως Οπισθοδρομικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις ή όπως αναφέρεται στην διεθνή βιβλιογραφία *Backward Stochastic Differential Equations*. Σκοπός της μελέτης αυτών των εξισώσεων, ήταν η συχνή εμφάνιση τους σε προβλήματα στοχαστικής βελτιστοποίησης και γενικότερα σε προβλήματα που εμπεριέχουν το στοιχείο της τυχαιότητας. Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται συχνά στα χρηματοοικονομικά, στα ασφαλιστικά, στα οικονομικά, στην φυσική, στην βιολογία αλλά και σε πολλούς ακόμα τομείς. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει και να αναδείξει τις εφαρμογές αυτών των εξισώσεων κυρίως στα χρηματοοικονομικά.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα θεμελιώσουμε την θεωρία των BSDEs δίνοντας βασικά θεωρήματα και αποτελέσματα με τις αποδείξεις τους. Σαν γνήσιο θεωρητικό κομμάτι των μαθηματικών, προϋποθέτει να γνωρίζει κάποια πράγματα από πραγματική ανάλυση, πιθανότητες και θεωρία μέτρου. Ορισμένες βασικές έννοιες και θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν περιέχονται στο παράρτημα. Αρχικά, δίνουμε ένα βασικό θεώρημα που παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην επίλυση των BSDEs, το θεώρημα αναπαράστασης των martingales. Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε τις γραμμικές και μη γραμμικές BSDEs και θα αποδείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα λύσης τους κάτω από κάποιες συνθήκες συνέχειας. Τις βάσεις για αυτή την δουλειά τις έβαλε ο Bismut κάπου στην δεκαετία του ′80 καθώς προσπαθούσε να λύσει κάποια προβλήματα βελτιστοποίησης στοχαστικής φύσεως. Σημαντικό τμήμα της δουλειάς αυτής έκαναν οι E.Pardoux και S.Peng με περίοδο δράσης τους τις αρχές της δεκαετίας του ′90 ενώ την πιο ολοκληρωμένη παρουσιάση της θεωρίας αυτής βασιζόμενη σε όλους τους προηγούμενους την δημοσίευσε η El Karoui το 1997 με τίτλο *"BSDEs in Finance"*.

Στην συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα κομμάτι από την θεωρία κάποιων μεθόδων βελτιστοποίησης. Εισάγουμε αρχικά κάποιες έννοιες που συνθέτουν ένα πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου και τους τρόπους με τους οποίους το ορίζουμε. Έπειτα, παρουσιάζουμε την πιο συνήθη πρακτική όλων των μεθόδων βελτιστοποίησης τουλάχιστον τα τελευταία 40 χρόνια, την Αρχή του Δυναμικού Προγραμματισμού. Δείχνουμε επίσης την κατασκευή της μερικής διαφορικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi-Bellman η οποία αποτελεί το εργαλείο για την αντιμετώπιση των στοχαστικών προβλημάτων. Εναλλάκτικα, μετά αναφερόμαστε στην αρχή του στοχαστικού μεγίστου όπως την διατύπωσε ο Pontryagin κάτι που δίνει βασικό και ενεργό ρόλο στις BSDEs στον τομέα της βελτιστοποίησης μέσω του όρου *"adjoint equations"*.

Στο τρίτο κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε την θεωρία που αναπτύσσουμε στα δύο πρώτα κεφάλαια για να αντιμετωπίσουμε ένα από τα βασικά χρηματοοικονομικά προβλήματα τοποθέτησης σε κίνδυνο. Κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που εμπεριέχει ένα κεφάλαιο με κίνδυνο και ένα χωρίς κίνδυνο. Θέλουμε να επιτύχουμε στην περάτωση του χρονικού ορίζοντα του προβλήματος την μέση τιμή-στόχο ελαχιστοποιώντας παράλληλα την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής. Σε πρώτη φάση, κατασκευάζουμε και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε με πιο απλό τρόπο αυτό το πρόβλημα. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας κάθε μία από τις μεθόδους που αναφέραμε στο δεύτερο κεφάλαιο επιλύουμε βήμα-βήμα το πρόβλημα. Στο τέλος του κεφαλαίου, δείχνουμε την συμπεριφορά των μεθόδων με διαφορε-

τικά δεδομένα και ζητούμενα.

Κλείνουμε με το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζοντας ένα αριθμητικό σχήμα που φέρεται ικανό να προσεγγίσει ως ένα βαθμό την αναλυτική λύση μιας BSDE. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αναδειχθεί η ικανότητα προσεγγιστικής, δηλαδή αριθμητικής, επίλυσης μιας τέτοιας εξίσωσης ακόμα και όταν η αναλυτική της λύση δεν είναι εφικτή ή δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί. Αρχικά, παρουσιάζουμε το αλγοριθμικό σχήμα, δουλειά των Ma, Protter, San Martin και Torres (βλ.[10]). Ακολούθως, αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία σύγκλισης του αλγορίθμου που έχουν αποδειχθεί. Τέλος, παραθέτουμε ένα παράδειγμα μιας BSDE που επιλύουμε με την βοήθεια του αλγόριθμου μας έτσι ώστε να έχουμε και ένα οπτικό αποτέλεσμα.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία των BSDEs

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα δώσουμε μερικά βασικά θεωρήματα και αποτελέσματα. Σε πρώτη φάση θα δούμε ένα πολύ βασικό και σημαντικό θεώρημα που χρησιμοποιείται στην στοχαστική ανάλυση, το θεώρημα αναπαράστασης των διαδικασιών martingale. Λόγω της σημασίας του, παραθέτουμε και την απόδειξη του. Στην συνέχεια, με την βοήθεια αυτού του βασικού θεωρήματος, εξετάζουμε την γραμμική περίπτωση των BSDEs, και δείχνουμε ότι αυτού του τύπου οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση. Τέλος, επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα και στην περίπτωση μη γραμμικής BSDE, υπό κάποιες συνθήκες Lipschitz για τον γεννήτορα της διαδικασίας, με την βοήθεια του θεωρήματος σταθερού σημείου για τους χώρους Banach.

1.1 Το Θεώρημα Αναπαράστασης των Martingales (MRT)

Το θεώρημα στο οποίο αναφερόμαστε, συνδέεται άμεσα με το στοχαστικό ολοκλήρωμα και τις ιδιότητες του. Η γενίκευση του στοχαστικού ολοκληρώματος μας βοηθάει στο να μελετήσουμε ολοκλήρωση επάνω σε οποιαδήποτε martingale. Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την απλή περίπτωση της ολοκλήρωσης επάνω στην κίνηση Brown καθώς έχει πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς την κίνηση Brown είναι το θεώρημα αναπαράστασης των martingale (martingale representation theorem).

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω M_t μια συνεχής τοπική martingale (πιθανόν πολυδιάστατη) η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\ s \leq t)$, όπου B_t μια κίνηση Brown (πιθανόν πολυδιάστατη). Τότε υπάρχει διαδικασία θ_t η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s,\ t \geq 0.$$

Να σημειώσουμε ότι η διάσταση της διαδικασίας θ_t εξαρτάται από την διάσταση της κίνησης Brown και θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει νόημα το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για να το συγκεκριμενοποιήσουμε, έστω ότι η M_t παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$ και η B_t στον $\mathbb{R}^m$, τότε η θ_t παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^{d\times m}$ και οφείλει να ανήκει στον χώρο $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.

Σχόλιο 1.1.1 *Αναφερθήκαμε σε μία κλάση στοχαστικών διαδικασιών που δεν την έχουμε ορίσει. Για να μην δημιουργούνται ασάφειες, παραθέτουμε τον ορισμό αυτής της κλάσης ώστε να κατανοηθούν πλήρως και οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται ώστε να δουλέψει το θεώρημα αναπαράστασης των martingale.*

Ορισμός 1.1.1 *Μια στοχαστική διαδικασία f θα λέμε ότι ανήκει στον χώρο $\mathcal{M}^2([\alpha,b])$ αν είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t=\sigma(B_s,\ s\leq t)$ και ικανοποιεί την συνθήκη*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^2([\alpha,b])}:=\mathbb{E}\left[\int_\alpha^b |f|^2dt\right]<\infty.$$

Επίσης, είναι αναγκαίο να κάνουμε μια παρατήρηση. Έστω η στοχαστική διαδικασία

$$M_t=exp\left[\int_0^t f(t)dB_t-\frac{1}{2}\int_0^t |f(t)|^2dt\right]$$

όπου $f\in L^2([0,T])$. Από τον τύπο του Ito παίρνουμε ότι $dM_t=M_tdB_t$ ή αντίστοιχα σε ολοκληρωτική μορφή ότι $M_t=M_0+\int_0^t M_sdB_s$. Επομένως, η M_t είναι μια martingale. Για την ειδική κατηγορία αυτών των martingale ξέρουμε ότι μπορούν να γραφούν σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα κάποιας στοχαστικής διαδικασίας. Το σημαντικό αποτέλεσμα που θα μας δώσει το θεώρημα (MRT), είναι ότι η αναπαράσταση αυτή μπορεί να επιτευχθεί για οποιαδήποτε martingale που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Να αναφέρουμε ότι στην γενική περίπτωση η υπό ολοκλήρωση ποσότητα δεν είναι απαραίτητα η ίδια η martingale την οποία θέλουμε να αναπαραστήσουμε με το στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Ξεκινάμε την απόδειξη δείχνοντας αρχικά κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Λήμμα 1.1.1 *Ο γραμμικός διανυσματικός χώρος (linear span) που παράγεται από τυχαίες μεταβλητές της μορφής*

$$\exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t(\omega)-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)dt\right\},\tag{1.1}$$

όπου $h\in L^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$ ντετερμινιστική συνάρτηση, είναι πυκνός[1] *στον $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$.*

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε το παραπάνω λήμμα, χρειάζεται πρώτα να δείξουμε ότι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών

$$\phi(B_{t1},...,B_{tn}),\ t_i\in[0,T],\ \phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n}),\ n=1,2,...$$

είναι πυκνό στον $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$. Αφού αποδείξουμε αυτό, για την απόδειξη του λήμματος αρκεί να δείξουμε ότι αν κάποια τυχαία μεταβλητή $g\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές f της μορφής (1.1) με ντετερμινιστικό h, δηλαδή $\mathbb{E}[fg]=0$, τότε $g=0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για να κρατήσουμε τα πράγματα απλά περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου $m=1$.

Δείχνουμε αρχικά τον πρώτο ισχυρισμό. Έστω $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,T]$ και για κάθε $n=1,2,...$ έστω $\mathcal{H}_n$ η σ-άλγεβρα που παράγουν τα $B_{t_1},...,B_{t_n}$. Τότε, είναι προφανές ότι

$$\mathcal{H}_n\subset\mathcal{H}_{n+1}$$

και $\mathcal{F}_T$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα $\mathcal{H}_n$ ($\mathcal{F}_T=\sigma\left(\cup_{n=1}^\infty\mathcal{H}_n\right)$). Επιλέγουμε $g\in L^2(\mathcal{F}_T,\mathrm{P})$ και ορίζουμε την ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale $X_n:=\mathbb{E}[g|\mathcal{H}_n]$. Έτσι, από το θεώρημα σύγκλισης των martingale έχουμε ότι

$$g=\mathbb{E}[g|\mathcal{F}_T]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[g|\mathcal{H}_n]$$

[1] Με αυτό τον όρο εννοούμε ότι κάθε στοιχείο f του $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$ μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία της μορφής $f_n=\sum_n\alpha_n\exp\int_0^T h_n(t)dB_t-\frac{1}{2}\int_0^T|h_n(t)|^2dt$ όπου $h_n\in L^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$ ντετερμινιστική συνάρτηση.

Εκ κατασκευής, η τ.μ. X_n είναι $\mathcal{H}_n$-μετρήσιμη. Έτσι, χρησιμοποιώντας το λήμμα των Doob-Lynkin μπορεί να γραφεί για κάθε n ως $X_n = g_n(B_{t1}, ..., B_{tn})$ για κάποια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Κάθε τέτοια συνάρτηση όμως, μπορεί να προσεγγιστεί στον χώρο $L^2_{\mathcal{F}_T}$ από συναρτήσεις $\phi_n(B_{t1}, ..., B_{tn})$ όπου $\phi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και έτσι καταλήγουμε στον ισχυρισμό μας.
Επικεντρωνόμαστε τώρα στην απόδειξη του λήμματος. Κάνουμε την θεώρηση ότι η g είναι ορθογώνια σε κάθε τ.μ. f της μορφής (1.1), δηλαδή $\mathbb{E}[fg] = 0$. Κάνουμε την επιλογή $h(t) = \sum_{i=1}^n {}_i 1_{[t_i, t_{i+1})}$ όπου ${}_i \in \mathbb{R}$ οποιοιδήποτε ντετερμινιστικοί αριθμοί. Από την ορθογωνιότητα παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}[exp\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\}g] = \int exp\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\}gdP = 0.$$

Αυτό που μπορούμε να δείξουμε από την παραπάνω ισότητα είναι ότι $g = 0$. Για να το κάνουμε αυτό όμως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιες τεχνικές της μιγαδικής ανάλυσης. Ορίζουμε λοιπόν την συνάρτηση

$$G(\lambda) := \mathbb{E}[exp\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\}g]$$

η οποία είναι πραγματική και αναλυτική στο $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με την θεωρία της αναλυτικής επέκτασης, η G θα έχει μια αναλυτική επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο $\in \mathbb{C}^n$ την οποία θα συμβολίζουμε G^*. Για την αναλυτική επέκταση G^* θα ισχύει ότι $G^* = 0$ στο $\mathbb{C}^n$ εφόσον η $G = 0$ στο $\mathbb{R}^n$ και είναι αναλυτική. Συνεπώς

$$G^*(z) := \mathbb{E}[exp\{z_1 B_{t_1} + ... + z_n B_{t_n}\}g] = 0$$

για όλα τα $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ και κάθε $t_1, ..., t_n \in [0, T]$. Επιλέγοντας $z = (i\lambda_1, ..., i\lambda_n),\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι $G(i\lambda_1, ..., i\lambda_n) = 0$.
Έστω τώρα $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε, θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}[\phi(B_{t1}, ..., B_{tn})g] = 0$. Πράγματι, εφόσον $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να δώσουμε μια ολοκληρωτική έκφραση για την $\phi(B_{t1}, ..., B_{tn})$ χρησινοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier $\hat{\phi}$ της ϕ δηλαδή ότι

$$\phi(B_{t1}, ..., B_{tn}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n})} \hat{\phi}(\lambda) d\lambda$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(B_{t1}, ..., B_{tn})g] &= \int_\Omega \phi(B_{t1}, ..., B_{tn})gdP \\
(2\pi)^{-n/2} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n})} \hat{\phi}(\lambda) d\lambda\, gdP &= \\
(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda) \int_\Omega e^{i(\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n})} gdP d\lambda &= \\
(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda) G(i\lambda) d\lambda &= 0
\end{aligned}$$

εφόσον $G(i\lambda_1, ..., i\lambda_n) = 0$ για κάθε $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Έχουμε λοιπόν ότι $\mathbb{E}[\phi(B_{t1}, ..., B_{tn})g] = 0$ για οποιαδήποτε $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Όμως δείξαμε νωρίτερα ότι οι συναρτήσεις της μορφής $\phi(B_{t1}, ..., B_{tn})$ για $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνές στον χώρο $L^2_{\mathcal{F}_T}$. Εφόσον η g είναι ορθογώνια σε ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2_{\mathcal{F}_T}([0, T])$ έχουμε ότι $g = 0$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν κάποια τ.μ. $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής (1.1) με ντετερμινιστικό h, υπό την έννοια ότι $\mathbb{E}[fg] = 0$, τότε $g = 0$. Αυτό το επιχείρημα αρκεί για να δεχτούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές f είναι πυκνές στον $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. ■

Το επόμενο λήμμα μας οδηγεί ένα βήμα πριν την απόδειξη του βασικού μας θεωρήματος.

Λήμμα 1.1.2 *Για κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ υπάρχει μια στοχαστική διαδικασία $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$ τέτοια ώστε*

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T f(s)dB_s$$

όπου $B_t = (B_{1,t},...,B_{m,t})$ είναι μια m-διάστατη κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία f είναι μοναδική υπό την έννοια ότι αν υπάρχει ακόμα μια στοχαστική διαδικασία g για την οποία ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα τότε έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(s)-g(s)|^2 ds\right] = 0$$

.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η ξ έχει την ειδική μορφή

$$\xi = \exp\int_0^T h(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T |h(t)|^2 dt.$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$x(t) = \exp\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h(s)|^2 ds.$$

Τώρα κάνοντας χρήση του λήμματος του Ito στην $x(t)$ παίρνουμε

$$dx(t) = x(t)(h(t)dB_t - \frac{1}{2}h^2(t)dt) + \frac{1}{2}x(t)(h(t)dB_t)^2 = x(t)h(t)dB_t.$$

Ολοκληρώνοντας τώρα από 0 έως T παίρνουμε ότι

$$x_T = \xi = 1 + \int_0^T h(t)x(t)dB_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T h(t)x(t)dB_t.$$

Επομένως, για τυχαίες μεταβλητές της μορφής (1.1) ο ισχυρισμός του λήμματος 1.1.2 ισχύει για την επιλογή $f(t) = h(t)x(t)$. Επιπλέον, λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού ολοκληρώματος ο ισχυρισμός ισχύει ακόμα και αν η τ.μ. ξ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός εκθετικών τυχαίων μεταβλητών της μορφής (1.1). Όπως δείξαμε όμως στο λήμμα 1.1.1, το σύνολο αυτών των τυχαίων μεταβλητών είναι πυκνό στον χώρο $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε τ.μ. $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$.
Μας μένει να δείξουμε την μοναδικότητα της διαδικασίας f. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Ito. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T f_1(t)dB_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T f_2(t)dB_t$$

όπου $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$. Τότε έχουμε ότι

$$0 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (f_1(t)-f_2(t))dB_t\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[(f_1(t)-f_2(t))^2\right]dt$$

και επομένως $f_1(t,\omega) = f_2(t,\omega),\ \forall t \in [0,T]\times\Omega$ $\sigma.\beta$. Έτσι δείξαμε και την μοναδικότητα. ■

Τώρα έχουμε στην διάθεση μας ό,τι χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε στην απόδειξη του βασικού μας θεωρήματος (MRT).

Απόδειξη του θεωρήματος 1.1.1:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας κάνουμε την θεώρηση ότι η M_t είναι μονοδιάστατη, δηλαδή ότι $d = 1$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το λήμμα που μόλις αποδείξαμε (1.1.2) στην τυχαία μεταβλητή $\xi = M(T)$. Υπάρχει λοιπόν μοναδική στοχαστική διαδικασία $\theta \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^{1\times m})$ τέτοια ώστε

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^T \theta(s)dB_s = M_0 + \int_0^T \theta(s)dB_s$$

(όπου υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι M_0 είναι ντετερμινιστικό). Κάνοντας χρήση της ιδιότητας martingale για την M_t καθώς και των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$M_t = \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[M_0 + \int_0^T \theta(s)dB_s|\mathcal{F}_t\right] = M_0 + \int_0^t \theta(s)dB_s.$$

Έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο. ■

1.2 Γραμμικές BSDEs

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την μελέτη των οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (backward stochastic differential equations). Η απλούστερη περίπτωση των προς εξέταση εξισώσεων, είναι η γραμμική BSDE. Λόγος ύπαρξης και εξέτασης των εξισώσεων αυτών είναι πολλά προβλήματα που προκύπτουν σε διάφορες επιστήμες (το βασικό έναυσμα δόθηκε από τα χρηματοοικονομικά) όπου έχοντας μια τελική συνθήκη, θέλουμε να γυρίσουμε πίσω στον χρόνο, στην στιγμή εκκίνησης του προβλήματος για να καταλήξουμε στην ορθότερη επιλογή ή στρατηγική που πρέπει να ακολουθηθεί. Αυτό που προσφέρει αυτή η ιδιαίτερη μορφή εξισώσεων, είναι ότι σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουμε στρατηγική λαμβάνοντας υπόψην την πληροφορία που έχουμε ή θα είχαμε μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή. Αυτό το στοιχείο, μας οδηγεί σε πιο ακριβείς λύσεις από ότι οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις καθώς έτσι λαμβάνεται υπόψη και ο παράγοντας 'πληροφορία'. Ξεκινάμε λοιπόν, εξετάζοντας σε πρώτη φάση την περίπτωση της γραμμικής BSDE.

Αρχικά θέλοντας να δείξουμε την βασική ιδέα, θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας την πιο απλή περίπτωση τέτοιας εξίσωσης. Έστω λοιπόν ότι $d = 1$ (δηλαδή υποθέτουμε ότι η κίνηση Brown είναι μονο-διάστατη), $T > 0$, και $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Έχουμε τότε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση με τελική συνθήκη:

$$\begin{cases} dY_t = 0, & t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{1.1}$$

Σκοπός μας, είναι να βρούμε μια διαδικασία Y προσαρμοσμένη στην διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ η οποία θα λύνει την παραπάνω εξίσωση. Η λύση που προκύπτει αντιμετωπίζοντας την παραπάνω εξίσωση σαν μια συνήθη διαφορική είναι η

$$Y_t = \xi, \qquad \forall t \in [0,T], \tag{1.2}$$

η οποία όμως δεν είναι σχεδόν ποτέ $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη (εκτός από την περίπτωση όπου το ξ είναι σταθερό). Επομένως, η εξίσωση (1.1) δεν έχει τη σωστή μορφή αν κάποιος ψάχνει να βρει μια λύση που να ισχύει γενικά. Επομένως, για να βρούμε μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη λύση πρέπει να τροποποιήσουμε την (1.1).
Η παραπάνω λύση Y (1.2), ικανοποιεί την (1.1) αλλά δεν είναι απαραίτητα $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη. Ένας φυσικός τρόπος να διορθώσουμε αυτό το χαρακτηριστικό είναι να ορίσουμε διαφορετικά την Y ως:

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t], \qquad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Τώρα, η Y είναι πλέον $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη και ικανοποιεί την τελική συνθήκη $Y_T = \xi$. Επίσης, εάν το ξ είναι σταθερά τότε η (1.3) ταυτίζεται με την (1.2). Όμως, η (1.3) πλέον δεν ικανοποιεί την αρχική εξίσωση (1.1). Οφείλουμε επομένως να βρούμε ποια εξίσωση ικανοποιεί η καινούρια λύση μας.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η διαδικασία Y όπως την ορίσαμε στην (1.3), είναι μια τετραγωνικά-ολοκληρώσιμη $\mathcal{F}_t$-martingale. Έτσι, από το θεώρημα αναπαράστασης των martingales (που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο) μπορούμε να βρούμε μια μοναδική $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $Z \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Z_s dW_s, \qquad \forall t \in [0,T], \mathrm{P} - \sigma.\beta. \tag{1.4}$$

Από τις σχέσεις (1.3)-(1.4), προκύπτει ότι (θυμίζουμε ότι η ξ είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη)

$$\xi = Y_T = Y_0 + \int_0^T Z_s dW_s. \tag{1.5}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τώρα τις (1.4)-(1.5), παίρνουμε

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

Και έτσι η διαφορική μορφή της (1.6) δίνεται από

$$\begin{cases} dY_t = Z_t dW_t, & t \in [0,T] \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.7}$$

Έτσι, η (1.7) δείχνει να είναι μια κατάλληλη παραλλαγή της (1.1). Παρατηρούμε ότι σε σχέση με την αρχική εξίσωση, έχει προστεθεί ο όρος $Z_t dW_t$. Να αναφέρουμε ότι η διαδικασία Z δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή και αποτελεί ένα μέρος της λύσης. Ουσιαστικά, αυτή η διαδικασία 'διορθώνει' την μη-προσαρμοστικότητα της αρχικής λύσης $Y(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (1.2). Ως εκ τούτου, όταν μιλάμε για $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη λύση, θα εννούμε ένα ζευγάρι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένων διαδικασιών (Y,Z) που θα ικανοποιούν την σχέση (1.7) (ή ισοδύναμα την (1.6)).
Έτσι, από τα παραπάνω αυτό που μπορούμε να εξάγουμε σαν συμπέρασμα είναι ότι η (1.7) μας δίνει μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη λύση (Y,Z), όπου η Y καθορίζεται από την σχέση (1.3) και η Z καθορίζεται πλήρως από την σχέση (1.4) μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης των martingales.
Και τελειώνοντας με αυτό το απλό παράδειγμα να κάνουμε μια παρατήρηση. Με μια πρώτη ματιά, ίσως κάποιος νομίσει ότι οι (προσαρμοσμένες) λύσεις δεν είναι μοναδικές επειδή η (1.7) είναι μια εξίσωση με δύο αγνώστους, δηλαδή τις διαδικασίες Y και Z. Όμως, η προσαρμογή τους στην $\mathcal{F}_t$ μας δίνει ακόμα έναν περιορισμό ο οποίος μας οδηγεί στην μοναδικότητα της λύσης (Y,Z). Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito στην $|Y_t|^2$, παίρνουμε:

$$\mathbb{E}|\xi|^2 = \mathbb{E}|Y_t|^2 + \int_t^T \mathbb{E}|Z_s|^2 ds, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{1.8}$$

Εφόσον λοιπόν η (1.7) είναι γραμμική, η σχέση (1.8) μας δίνει την μοναδικότητα της $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένης λύσης της (1.7).
Τέλος, στην περίπτωση όπου το ξ είναι μια σταθερά παίρνουμε ότι $Y_t \equiv \xi$ και $Z_t \equiv 0$. Από την μοναδικότητα όμως, είναι η μόνη λύση της (1.7), η οποία σε αυτή την περίπτωση συμπίπτει με την (1.1).

Τώρα θα επικεντρωθούμε στην γενικότερη περίπτωση γραμμικής BSDE. Έστω λοιπόν ότι έχουμε την παρακάτω γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση με τελική συνθήκη:

$$\begin{cases} dY(t) = \{A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^d B_j(t)Z_j(t) + f(t)\}dt + Z(t)dW(t), & t \in [0,T], \\ Y(T) = \xi, \end{cases} \tag{1.9}$$

όπου

- $A, B_1, \ldots, B_d$ είναι φραγμένες $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες διαδικασίες με τιμές στο $\mathbb{R}^{k\times k}$
- $f \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)$
- $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R}^k)$.

Σκοπός μας είναι να βρούμε $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες διαδικασίες Y και $Z \equiv (Z_1,\ldots,Z_d)$, οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^k$ και στο $\mathbb{R}^{k\times d}$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η (1.9) να ισχύει. Οι διαδικασίες (Y,Z) για τις οποίες ψάχνουμε απαιτείται να είναι εμπροσθοδρομικά προσαρμοσμένες, εφόσον η διαδικασία Y καθορίζεται στην τελική χρονική στιγμή $t=T$ (και ως εκ τούτου η εξίσωση πρέπει να λυθεί αναδρομικά). Εξαιτίας αυτού, καλούμε την (1.9) μια γραμμική οπισθοδρομική στοχαστική διαφορική εξίσωση (linear BSDE). Είναι λοιπόν προφανές, ότι η περίπτωση που εξετάσαμε νωρίτερα (1.7) αποτελεί την πιο απλή περίπτωση τέτοιας εξίσωσης (δηλαδή να έχει μηδενικό 'drift').
Ορίζουμε ως $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^k))$ τον χώρο όλων των $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένων συνεχών διαδικασιών Y τέτοιες ώστε $\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2<\infty$. Τώρα μπορούμε να εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 *Ένα ζευγάρι $(Y,Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^k)) \times L^{2,loc}_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$ καλείται μια προσαρμοσμένη λύση της (1.9) εάν ισχύει ότι:*

$$\begin{array}{r} Y(t) = \xi - \int_t^T \{A(s)Y(s) + \sum_{j=1}^d B_j(s)Z_j(s) + f(s)\}ds \\ - \int_t^T Z(s)dW(s),\ \forall t\in[0,T],\ \mathrm{P}-\sigma.\beta. \end{array} \tag{1.10}$$

Η εξίσωση (1.9) θα λέμε ότι έχει μια μοναδική προσαρμοσμένη λύση εάν για οποιεσδήποτε δύο προσαρμοσμένες λύσεις (Y,Z) και $(\tilde{Y},\tilde{Z})$, ισχύει ότι

$$\mathrm{P}\{Y(t)=\tilde{Y}(t),\ \forall t\in[0,T] \,\&\, Z(t)=\tilde{Z}(t),\ \sigma.\pi.\ t\in[0,T]\}=1.$$

Ως συνέπεια του παραπάνω ορισμού, προκύπτει το επόμενο 'καλώς ορισμένο' αποτέλεσμα για την γραμμική BSDE.

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω $A,B_1,\ldots,B_d \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times k})$. Τότε, για κάθε $f\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)$ και $\xi\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^k)$, η BSDE (1.9) είναι μια μοναδική λύση $(Y,Z)\in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^k))\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$ (και προσαρμοσμένη) και υπάρχει μια σταθερά $K>0$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2 + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\int_0^T |Z_j(t)|^2dt \le K\{\mathbb{E}|\xi|^2 + \mathbb{E}\int_0^T |f(t)|^2dt\}. \tag{1.11}$$

Απόδειξη:
Ξεκινάμε την απόδειξη θεωρώντας τις παρακάτω δύο στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} d\Phi(t) = \{A(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^d B_j(t)B_j(t)\Phi(t)\}dt + \sum_{j=1}^d B_j(t)\Phi(t)dW^j(t), \\ \Phi(0)=I, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} d\Psi(t) = -\Psi(t)A(t)dt - \sum_{j=1}^d \Psi(t)B_j(t)dW^j(t), \\ \Psi(0)=I. \end{cases} \tag{1.13}$$

Εφόσον οι (1.12) και (1.13) είναι συνήθεις γραμμικές (forward) στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις με φραγμένους συντελεστές, τότε θα έχουν μοναδικές (ισχυρές) λύσεις Φ και Ψ, οι οποίες θα είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες. Έτσι, από το λήμμα του Ito, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
d[\Psi(t)\Phi(t)] = &-\Psi(t)A(t)\Phi(t)dt - \sum_{j=1}^{d}\Psi(t)B_j(t)\Phi(t)dW^j(t)\\
&+\Psi(t)[A(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^{d}B_j(t)B_j(t)\Phi(t)]dt\\
&+\sum_{j=1}^{d}\Psi(t)B_j(t)\Phi(t)dW^j(t) - \sum_{j=1}^{d}\Psi(t)B_j(t)B_j(t)\Phi(t)dt\\
&= 0. \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

Έτσι, αφού έχουμε και ότι $\Phi(0) = \Psi(0) = I$, θα έχουμε ότι

$$\Psi(t)^{-1} = \Phi(t), \qquad \forall t \in [0,T],\ \mathrm{P}-\sigma.\beta. \qquad (1.15)$$

Στην συνέχεια, υποθέτουμε ότι το ζεύγος (Y,Z) είναι μια προσαρμοσμένη λύση της (1.9). Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito και στην $\Psi(t)Y(t)$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
d[\Psi(t)Y(t)] = &-\Psi(t)A(t)Y(t)dt - \sum_{j=1}^{d}\Psi(t)B_j(t)Y(t)dW^j(t)\\
&+\Psi(t)[A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^{d}B_j(t)Z_j(t) + f(t)]dt\\
&+\sum_{j=1}^{d}\Psi(t)Z_j(t)dW^j(t) - \sum_{j=1}^{d}\Psi(t)B_j(t)Z_j(t)dt\\
&= \Psi(t)f(t)dt + \sum_{j=1}^{d}\Psi(t)[Z_j(t) - B_j(t)Y(t)]dW^j(t). \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Έτσι,

$$
\begin{aligned}
\Psi(t)Y(t) &= \Psi(T)\xi - \int_t^T \Psi(s)f(s)ds - \sum_{j=1}^{d}\int_t^T \Psi(s)[Z_j(s) - B_j(s)Y(s)]dW^j(s)\\
&= \theta + \int_0^t \Psi(s)f(s)ds - \sum_{j=1}^{d}\int_t^T \Psi(s)[Z_j(s) - B_j(s)Y(s)]dW^j(s), \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

όπου

$$\theta \triangleq \Psi(T)\xi - \int_0^T \Psi(s)f(s)ds. \qquad (1.18)$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ και στα δύο μέλη της (1.17) ($\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_t)$), έχουμε

$$\Psi(t)Y(t) = \int_0^t \Psi(s)f(s)ds + \mathbb{E}(\theta|\mathcal{F}_t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (1.19)$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (1.19) εξαρτάται μόνο από το ξ και την f. Επίσης, βλέπουμε ότι για να φτάσουμε στην σχέση (1.19) χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα της αρχικής εξίσωσης.
Επίσης, από την (1.19) και χρησιμοποιώντας και την σχέση (1.15) μπορούμε να γράψουμε

$$Y(t) = \Phi(t)\left\{\int_0^t \Psi(s)f(s)ds + \mathbb{E}(\theta|\mathcal{F}_t)\right\}, \qquad t \in [0,T], \tag{1.20}$$

όπου Φ και Ψ οι λύσεις των (1.12) και (1.13) αντίστοιχα, και το θ καθορίστηκε στην (1.18). Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι η Y όπως την ορίσαμε στην (1.20), μαζί με κάποια Z, θα είναι μια προσαρμοσμένη λύση της (1.9).
Έτσι, από τις (1.18) και (1.20) έχουμε

$$Y(T) = \Phi(T)\left\{\int_0^T \Psi(s)f(s)ds + \theta\right\} = \Phi(T)\Psi(T)\xi = \xi. \tag{1.21}$$

Στην συνέχεια, γνωρίζοντας ότι η $\mathbb{E}(\theta|\mathcal{F}_t)$ είναι μια τετραγωνικά-ολοκληρώσιμη martingale, και κάνοντας χρήση του θεωρήματος αναπαράστασης των martingales μπορούμε να βρούμε μια μοναδική στοχαστική διαδικασία $\eta \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_d) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}(\theta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\theta + \sum_{j=1}^d \int_0^t \eta_j(s)dW^j(s), \qquad \forall t \in [0,T],\ \mathrm{P}-\sigma.\beta. \tag{1.22}$$

Ως συνέπεια του παραπάνω, από τις (1.20) και (1.22) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(t) &= \Phi(t)\left\{\int_0^t \Psi(s)f(s)ds + \sum_{j=1}^d \eta_j(s)dW^j(s) + \mathbb{E}\theta\right\} \\ &\triangleq \Phi(t)r(t), \qquad \forall t \in [0,T],\ \mathrm{P}-\sigma.\beta. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Εφαρμόζοντας ακόμα μια φορά το λήμμα του Ito παίρνουμε

$$\begin{aligned} dY(t) &= \{A(t)\Phi(t)r(t) + \sum_{j=1}^d B_j(t)B_j(t)\Phi(t)r(t)\}dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^d B_j(t)\Phi(t)r(t)dW^j(t) + \Phi(t)\Psi(t)f(t)dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \Phi(t)\eta_j(t)dW^j(t) + \sum_{j=1}^d B_j(t)\Phi(t)\eta_j(t)dt \\ &= \{A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^d B_j(t)[B_j(t)Y(t) + \Phi(t)\eta_j(t)] + f(t)\}dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^d [B_j(t)Y(t) + \Phi(t)\eta_j(t)]dW^j(t). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Άρα, θέτοντας $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$ όπου

$$Z_j(t) \triangleq B_j(t)Y(t) + \Phi(t)\eta_j(t),\ t \in [0,T],\ \mathrm{P}-\sigma.\beta.,\ 1 \le j \le d, \tag{1.25}$$

και χρησιμοποιώντας τις (1.21) και (1.24), καταλήγουμε ότι η

$$(Y,Z) \in L^{2,loc}_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k) \times L^{2,loc}_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$$

ικανοποιεί την (1.9).
Σημειώνουμε ότι μέχρι στιγμής έχουμε δείξει μόνο την τοπική ολοκληρωσιμότητα της (Y,Z). Θέλουμε να το επεκτείνουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα ολικά και όχι μόνο τοπικά. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι στην πραγματικότητα ισχύει ότι

$$(Y,Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R}^k)) \times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}).$$

Αυτό που κάνουμε είναι για κάθε n να ορίσουμε έναν $\{\mathcal{F}\}_{t\ge 0}$-χρόνο στάσης

$$\tau_n \triangleq inf\{t \ge 0 : \int_0^t |Z(s)|^2 ds \ge n\} \wedge T.$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι το τ_n αυξάνει πλησιάζοντας το T $(\mathrm{P}-\sigma.\beta.)$ καθώς $n \to \infty$. Εφαρμόζοντας τώρα το λήμμα του Ito στην $|Y(t\wedge\tau_n)|^2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y(0)|^2 + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} \sum_{j=1}^d |Z_j(s)|^2 ds \\
&= \mathbb{E}|Y(T\wedge\tau_n)|^2 - 2\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} \langle Y(s), A(s)Y(s) + \sum_{j=1}^d B_j(s)Z_j(s) + f(s)\rangle ds \\
&\le \mathbb{E}|Y(T\wedge\tau_n)|^2 + K\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} \{|Y(s)|^2 + |f(s)|^2\} ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} \sum_{j=1}^d |Z_j(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Ως εκ τούτου,

$$\sum_{j=1}^d \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} |Z_j(s)|^2 ds \le K\left\{\mathbb{E}|Y(T\wedge\tau_n)|^2 + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} |f(s)|^2 ds\right\}. \tag{1.27}$$

Αν όμως $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou, καταλήγουμε στην σχέση

$$\sum_{j=1}^d \mathbb{E}\int_0^{T} |Z_j(s)|^2 ds \le K\left\{\mathbb{E}|\xi|^2 + \mathbb{E}\int_0^{T} |f(s)|^2 ds\right\}. \tag{1.28}$$

Έτσι προκύπτει ότι $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k \times d)$.
Μένει τώρα να δείξουμε και ότι $Y \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R}^k))$. Από τις σχέσεις (1.24) και (1.21), έχουμε ότι

$$Y(t) = \xi - \int_t^T h(s)ds - \int_t^T Z(s)dW(s), \qquad t \in [0,T], \tag{1.29}$$

για κάποια $h \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)$. Τέλος κάνοντας χρήση και των ανισοτήτων του Doob και των Burkholder-Davis-Gundy, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2\}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\{\int_0^T |h(s)|ds\}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\mathbb{E}|\int_0^T Z(s)dW(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t Z(s)dW(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\mathbb{E}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T}\left(\mathbb{E}\int_0^T |h(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left(\mathbb{E}\int_0^T |Z(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση καταλήγουμε ότι $Y \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^k))$, και επομένως το ζεύγος (Y,Z) είναι μια προσαρμοσμένη λύση της (1.9). Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.28) και (1.30), εύκολα καταλήγουμε στην σχέση (1.11). Επομένως, δείξαμε και την μοναδικότητα αφού η εξίσωση είναι γραμμική. ■

Παρατήρηση Το ζεύγος (Y,Z) που αποτελεί την λύση που συζητήσαμε, έχει μια πολύ σημαντική ερμηνεία στην συναρτησιακή ανάλυση και στην δυϊκή ανάλυση. Συγκεκριμένα, η λύση αυτή δεν είναι τίποτα διαφορετικό από την αναπαράσταση του Riesz (η οποία είναι μοναδική) ενός συγκεκριμένου συναρτησιακού στον χώρο Hilbert $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$, που ορίζεται μέσω μιας (forward) στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης η οποία είναι δυϊκή στην BSDE (1.9).
Ας καθορίσουμε λοιπόν το συναρτησιακό :

$$\pi(\phi,\psi) \triangleq \mathbb{E}\int_0^T \langle x(t), -f(t)\rangle dt + \langle x(T),\xi\rangle$$

$$\forall(\phi,\psi)\equiv(\phi,\psi_1,\ldots,\psi_d) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}), \qquad (1.31)$$

όπου x είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{cases} dx(t) = (-A(t)^\top x(t) + \phi(t))dt + \sum_{j=1}^d (-B_j(t)^\top x(t) + \psi_j(t))dW^j(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \qquad (1.32)$$

Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι το π είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του χώρου Hilbert $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αναπαράστασης των Riesz-Frechet, δείχνουμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος

$$(\overline{Y},\overline{Z}) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k)\times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{k\times d})$$

τέτοιο ώστε

$$\pi(\phi,\psi) = \mathbb{E}\int_0^T \{\langle\phi(t),\overline{Y}(t)\rangle + \langle\psi(t),\overline{Z}(t)\rangle\}dt. \qquad (1.33)$$

Επιπλέον, εάν το ζεύγος (U,Z) είναι η λύση της (1.9), τότε εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito στην $\langle x(t),Y(t)\rangle$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η σχέση (1.33) ισχύει αντικαθιστώντας όπου $(\overline{Y},\overline{Z})$ το ζεύγος (U,Z). Όμως λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης, θα ισχύει ότι $(\overline{Y},\overline{Z})\equiv(Y,Z)$.
Κάτι ακόμα που μπορούμε να δούμε είναι η δυϊκότητα μεταξύ της εξίσωσης (1.32) και της (1.9). Επίσης, διαφαίνεται η αναγκαιότητα της χρήσης ενός ζεύγους λύσης στην (1.9) δεδομένου ότι η δυϊκή της εξίσωση έχει δύο μέρη: γεννήτορα (drift) και διάχυση (diffusion).

1.3 Μη Γραμμικές BSDEs

Κλείνοντας με τα αποτελέσματα που αφορούν τις BSDEs, θα δείξουμε ότι μια BSDE μπορεί να έχει μοναδική λύση ακόμα και όταν δεν είναι γραμμική (δηλ. δεν είναι της μορφής (1.)). Γενικεύουμε δηλαδή την δυνατότητα επιλυσιμότητας αυτού του είδους των εξισώσεων, αλλά και την ιδιότητα της μοναδικότητας αυτής της λύσης, πέραν της γραμμικής περίπτωσης κάτω από κάποιες σχετικά χαλαρές συνθήκες.

Θέτουμε ξανά το γνωστό πλαίσιο κάτω από το οποίο δουλεύουμε. Έστω $W = (W_t)_{0\le t\le T}$ μια τυπική d-διάστατη κίνηση Brown σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$, όπου $\mathbb{F}$ είναι η φυσική διήθηση που παράγει η κίνηση Brown. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{S}^2(0,T)$ το σύνολο των $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών Y που τιμολογούνται στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\right] < \infty,$$

και με $\mathcal{M}^2([0,T])^d$ το σύνολο των $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών Z που τιμολογούνται στο $\mathbb{R}^d$ και για τις οποίες ισχύει

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty.$$

Ορισμός 1.3.1 *Θεωρούμε ότι μας δίνεται ένα ζεύγος (ξ, f), το οποίο αποτελείται από την τελική συνθήκη και τον γεννήτορα της εξίσωσης, που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:*

- $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathrm{P}; \mathbb{R})$
- $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*
  - η $f(\cdot, t, y, z)$ είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη για όλα τα y, z
  - $f(t,0,0) \in \mathcal{M}^2([0,T])$
  - η f είναι ομοιόμορφα συνεχής κατά Lipschitz ως προς τα (y,z), δηλαδή υπάρχει μια σταθερά C_f τ.ω.

$$|f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)| \le C_f(|y_1-y_2| + |z_1-z_2|),\ \forall y_1,y_2,\ \forall z_1,z_2,\ dt\otimes d\mathrm{P}\ \sigma.\beta.$$

Ένα ζεύγος με τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται ζεύγος standard παραμέτρων.

Σκεφτόμαστε τώρα κάτω από τις παραπάνω συνθήκες την (για ευκολία μονοδιάστατη) BSDE :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t))dt - Z_t dW_t \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.34}$$

Ορισμός 1.3.2 *Μία λύση της εξίσωσης (1.34) είναι ένα ζεύγος $(Y,Z) \in \mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$ που ικανοποιεί*

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_d W_s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια, ένα αποτέλεσμα ύπαρξης και μοναδικότητας για την παραπάνω BSDE.

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω ότι έχουμε ένα ζεύγος standard παραμέτρων (ξ, f). Τότε, η BSDE (1.34) έχει μοναδική λύση (U,Z).*

Απόδειξη:
Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται σε μια μέθοδο σταθερού σημείου. Έστω λοιπόν, ότι έχουμε την συνάρτηση Φ η οποία ανήκει στον χώρο $\mathcal{S}^2(0,T)^m \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$, και απεικονίζει το ζεύγος $(U,V) \in \mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$ στο $(Y,Z) = \Phi(U,V)$ το οποίο καθορίζεται από

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{1.35}$$

Συγκεκριμένα, το ζεύγος (Y,Z) κατασκευάζεται ως εξής: σκεφτόμαστε την martingale $M_t = \mathbb{E}[\xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds|\mathcal{F}_t]$, η οποία είναι τετραγωνικά-ολοκληρώσιμη κάτω από τις προϋποθέσεις που θέσαμε για το ζεύγος (ξ,f). Εφαρμόζουμε το θεώρημα αναπαράστασης των martingale το οποίο μας δίνει την ύπαρξη και την μοναδικότητα μια διαδικασίας $Z \in \mathcal{M}^2([0,T])^d$ τ.ω.

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s. \tag{1.36}$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε την διαδικασία Y ως

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds|\mathcal{F}_t\right] = M_t - \int_0^t f(s,U_s,V_s)ds,\ 0 \le t \le T.$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της M (1.36), και σημειώνοντας ότι $Y_T = \xi$, παρατηρούμε ότι η U ικανοποιεί την σχέση (1.35). Παρατηρούμε επίσης από την ανισότητα του Doob ότι

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_t^T Z_s dW_s\right|^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] \le \infty.$$

Κάτω από τις συνθήκες που ισχύουν για το ζεύγος (ξ,f), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία U ανήκει στον χώρο $\mathcal{S}^2(0,T)$. Άρα, η Φ είναι μια καλώς ορισμένη συνάρτηση που απεικονίζει από τον χώρο $\mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$ στον εαυτό του. Επομένως, βλέπουμε ότι η (U,Z) θα είναι λύση στην (1.34) αν και μόνο αν είναι ένα σταθερό σημείο της Φ.

Έστω τώρα τα ζεύγη

$$(U,V),\ (U',V') \in \mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$$

και τα ζεύγη

$$(Y,Z) = \Phi(U,V),\ (Y',Z') = \Phi(U',V').$$

Θέτουμε

$$(\overline{U},\overline{V}) = (U-U',V-V'), (\overline{Y},\overline{Z}) = (Y-Y',Z-Z'), \overline{f}_t = f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t).$$

Παίρνουμε κάποιο $\beta > 0$ το οποίο θα το καθορίσουμε αργότερα, και εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito στην διαδικασία $e^{\beta s}|\overline{Y}_s|^2$ μεταξύ των χρονικών στιγμών $s=0$ και $s=T$:

$$|\overline{Y}_0|^2 = -\int_0^T e^{\beta s}(\beta|\overline{Y}_s|^2 - 2\overline{Y}_s\overline{f}_s)ds - \int_0^T e^{\beta s}|\overline{Z}_s|^2 ds$$
$$-2\int_0^T e^{\beta s}\overline{Y}'_s\overline{Z}_s dW_s. \tag{1.37}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\beta t}|Y_t|^2|Z_t|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{e^{\beta T}}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2dt\right] < \infty,$$

το οποίο δείχνει ότι η τοπική martingale $\int_0^t e^{\beta s}\overline{Y}'_s\overline{Z}_s dW_s$ είναι στην πραγματικότητα μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale, κάτι που προκύπτει από την ανισότητα των Burkholder-Davis-Gundy.

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στην σχέση (1.37), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\overline{Y}_0|^2 + \mathbb{E}\int_0^T e^{\beta s}\left(\beta|\overline{Y}_s|^2 + |\overline{Z}_s|^2\right)ds &= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}\overline{Y}_s\overline{f}_s ds\right]\\ &\leq 2C_f\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}|\overline{Y}_s|(|\overline{U}_s| + |\overline{V}_s|)ds\right]\\ \leq 4C_f^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}|\overline{Y}_s|^2 ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(|\overline{U}_s|^2 + |\overline{V}_s|^2)ds\right].\end{aligned}$$

Τώρα, επιλέγουμε $\beta = 1 + 4C_f^2$, και επομένως έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(|\overline{U}_s|^2 + |\overline{Z}_s|^2)ds\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(|\overline{U}_s|^2 + |\overline{V}_s|^2)ds\right]. \tag{1.38}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι η Φ είναι μια αυστηρή συστολή στον χώρο Banach $\mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$ εφοδιασμένου με τη νόρμα

$$\|(Y,Z)\|_\beta = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(|Y_s|^2 + |Z_s|^2)ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως, η Φ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, το οποίο θα είναι η λύση της BSDE (1.34). ■

Τώρα θα δείξουμε ότι, αν επιλέξουμε σαν Φ το επαναληπτικό σχήμα του Picard , τότε η ακολουθία που θα οριστεί θα συγκλίνει *σ.β.* στην λύση της BSDE.

Πόρισμα 1.3.1 *Έστω β τέτοιο ώστε $\beta = 1+4C_f^2$. Έστω επίσης, η ακολουθία (Y^n, Z^n) η οποία ορίζεται αναδρομικά από $(Y_0 = 0; Z_0 = 0)$ και*

$$-dY_t^{n+1} = f(t, Y_t^n, Z_t^n)dt - Z_t^{n+1}dW_t, \qquad Y_T^{n+1} = \xi. \tag{1.39}$$

Τότε, το ακολουθιακό ζεύγος (Y^n, Z^n) συγκλίνει στο (Y, Z), $d\mathrm{P}\otimes dt$ σ.β. (και στον χώρο $\mathcal{S}^2(0,T) \times \mathcal{M}^2([0,T])^d$) καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη:
Έστω (Y^n, Z^n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από την σχέση (1.39). Τότε, από την σχέση (1.38) έχουμε,

$$\|Y^{n+1} - Y^n\|_\beta^2 + \|Z^{n+1} - Z^n\|_\beta^2 \leq \rho^n K,$$

όπου $K = \|Y^1 - Y^0\|_\beta^2 + \|Z^1 - Z^0\|_\beta^2$ και $\rho = \frac{1}{2} < 1$. Επομένως,

$$\sum_n \|Y^{n+1} - Y^n\|_\beta^2 + \sum_n \|Z^{n+1} - Z^n\|_\beta^2 < \infty,$$

και έτσι προκύπτει αυτό που θέλαμε. ■

Στην προηγούμενη παράγραφο, δώσαμε μια απόδειξη για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης της BSDE με γραμμικό γεννήτορα. Θα δώσουμε ακόμα μια απόδειξη γι΄ αυτή την περίπτωση καταλήγοντας μάλιστα και στην μορφή που θα έχει η αναλυτική λύση σε αυτή την περίπτωση.

Έστω λοιπόν, ότι ο γεννήτορας f είναι γραμμικός ως προς τα y, z. Τότε, η γραμμική BSDE μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$-dY_t = (A_tY_t + Z_tB_t + C_t)dt - Z_tdW_t, \qquad Y_T = \xi, \tag{1.40}$$

όπου οι A, B είναι φραγμένες και προσαρμοσμένες στην διήθηση $\mathcal{F}_t$ διαδικασίες που τιμολογούνται στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^d$ αντίστοιχα, και C είναι μια διαδικασία του χώρου $\mathcal{M}^2([0,T])$. Η εξίσωση αυτή έχει λύση κλειστού τύπου και μας την δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1 *Η μοναδική λύση (Y, Z) στην γραμμική BSDE δίνεται από την εξίσωση*

$$\Psi_tY_t = \mathbb{E}\left[\Psi_T\xi + \int_t^T \Psi_sC_sds|\mathcal{F}_t\right], \tag{1.41}$$

όπου Ψ είναι η συζυγής (ή δυϊκή) διαδικασία, λύση στην γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\Psi_t = \Psi_t(A_tdt + B_tdW_t), \qquad \Psi_0 = 1.$$

Απόδειξη:
Εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito στην Ψ_tY_t, και παίρνουμε

$$d(\Psi_tY_t) = -\Psi_tC_tdt + \Psi_t(Z_t + Y_tB_t)dW_t,$$

και έτσι, γράφοντας λίγο διαφορετικά την σχέση αυτή έχουμε

$$\Psi_tY_t + \int_0^t \Psi_sC_sds = Y_0 + \int_0^t \Psi_s(Z_s + Y_sB_s)dW_s. \tag{1.42}$$

Εφόσον όμως οι A, B είναι φραγμένες, παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}\sup_t|\Psi_t|^{2^c} \infty$, και συμβολίζοντας με b_∞ το άνω-φράγμα του B, έχουμε

$$\mathbb{E}\int_0^T \Psi_s^2|Z_s + Y_sB_s|ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_t|\Psi_t|^2 + 2\int_0^T|Z_t|^2dt + 2b_\infty^2\int_0^T|Y_t|^2dt\right] < \infty.$$

Από την ανισότητα των Burkholder-Davis-Gundy, αυτό δείχνει ότι η τοπική martingale στην σχέση (1.42) είναι μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale. Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή, έχουμε

$$\begin{aligned}\Psi_tY_t + \int_0^t \Psi_sC_sds &= \mathbb{E}\left[\Psi_TY_T + \int_0^T \Psi_sC_sds|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Psi_T\xi + \int_0^T \Psi_sC_sds|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned} \tag{1.43}$$

η οποία σχέση δίνει την έκφραση (1.41) για την Y. Τέλος, η Z δίνεται μέσω της αναπαράστασης martingale (1.42) της martingale στην σχέση (1.43). ■

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, δίνουμε μια πολύ χρήσιμη αρχή σύγκρισης για τις BSDEs μέσω του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.3.2 *Έστω* (ξ^1, f^1) *και* (ξ^2, f^2) *δύο ζεύγη standard παραμέτρων, και έστω* (Y^1, Z^1), (Y^2, Z^2) *οι λύσεις στις αντίστοιχες BSDEs. Υποθέτουμε ότι:*

- $\xi^1 \leq \xi^2$ *σ.β.*
- $f^1(t, Y_t^1, Z_t^1) \leq f^2(t, Y_t^2, Z_t^2)$ $dt\mathrm{P}$ *σ.π.*
- $f^2(t, Y_t^1, Z_t^1) \in \mathcal{M}^2([0,T])$.

Επιπλέον, εάν $Y_0^2 \leq Y_0^1$, *τότε* $Y_t^1 = Y_t^2$, $0 \leq t \leq T$. *Συγκεκριμένα, εάν* $\mathrm{P}(\xi^1 < \xi^2) > 0$ *ή* $f^1(t,.,.) < f^2(t,.,.)$ *σε ένα σύνολο αυστηρά θετικού μέτρου* $dt \otimes d\mathrm{P}$, *τότε* $Y_0^1 < Y_0^2$.

Απόδειξη:
Για να απλουστεύσουμε λίγο την απόδειξη, υποθέτουμε ότι $d = 1$. Ορίζουμε $\overline{Y} = Y^2 - Y^1$,$\overline{Z} = Z^2 - Z^1$. Τότε, το ζεύγος $(\overline{Y}, \overline{Z})$ ικανοποιεί την γραμμική BSDE

$$-d\overline{Y}_t = (\Delta_t^y \overline{Y}_t + \Delta_t^z \overline{Z}_t + \overline{f}_t)dt - \overline{Z}_t dW_t, \qquad \overline{Y}_T = \xi^2 - \xi^1. \tag{1.44}$$

όπου

$$\Delta_t^y = \frac{f^2(t, Y_t^2, Z_t^2) - f^2(t, Y_t^1, Z_t^2)}{Y_t^2 - Y_t^1} 1_{Y_t^2 - Y_t^1 \neq 0}$$
$$\Delta_t^z = \frac{f^2(t, Y_t^1, Z_t^2) - f^2(t, Y_t^1, Z_t^1)}{Z_t^2 - Z_t^1} 1_{Z_t^2 - Z_t^1 \neq 0}$$
$$\overline{f}_t = f^2(t, Y_t^1, Z_t^1) - f^1(t, Y_t^1, Z_t^1).$$

Εφόσον ο γεννήτορας f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση κατά Lipschitz ως προς τα y, z, οι διαδικασίες Δ^y και Δ^z είναι φραγμένες. Επίσης, η $\overline{f}_t$ είναι μια διαδικασία που ανήκει στον χώρο $\mathbb{M}^2([0,T])$. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.3.1, η $\overline{Y}$ δίνεται από την σχέση

$$\Psi_t \overline{Y}_t = \mathbb{E}\left[\Psi_T(\xi^2 - \xi^1) + \int_t^T \Psi_s \overline{f}_s ds | \mathcal{F}_t\right],$$

όπου η συζυγής διαδικασία Ψ είναι αυστηρά θετική. Από αυτή την σχέση για την Y προκύπτει και η θετικότητα των $\xi^2 - \xi^1$ και $\overline{f}$. ■

Και κλείνουμε το κεφάλαιο με το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.3.2 *Εάν το ζεύγος* (ξ, f) *ικανοποιεί* $\xi \geq 0$ *σ.β. και* $f(t,0,0) \geq 0$ $dt \otimes d\mathrm{P}$ *σ.π., τότε* $Y_t \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ *σ.β. Επιπλέον, εάν* $\mathrm{P}[\xi > 0] > 0$ *ή* $f(t,0,0) > 0$ $dt \otimes d\mathrm{P}$ *σ.π., τότε* $Y_0 > 0$.

Απόδειξη:
Το πόρισμα αυτό προκύπτει ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος σύγκρισης 1.3.2 με $(\xi^1, f^1) = (0,0)$, της οποίας η λύση είναι προφανώς $(Y^1, Z^1) = (0,0)$. ■

Κεφάλαιο 2

BSDEs και στοχαστική βελτιστοποίηση

Σε αυτό το δεύτερο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την στοχαστική θεωρία ελέγχου και συγκεκριμένα με την βελτιστοποίηση προβλημάτων στοχαστικής κυρίως φύσεως. Αρχικά, θα δώσουμε μερικές βασικές έννοιες και ορισμούς ώστε να γίνει σαφές το πλαίσιο κάτω από το οποίο εργαζόμαστε. Θα αναφερθούμε στην κλασσική μέθοδο βελτιστοποίησης, τον δυναμικό προγραμματισμό και θα ορίσουμε ένα βασικό εργαλείο της θεωρίας ελέγχου, την HJB συνάρτηση (Hamilton-Jacobi-Bellman equation). Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε την αρχή του στοχαστικού μεγίστου κατά τον *Pontryagin* και θα αναδείξουμε την σχετικά νέα τάση στην θεωρία της στοχαστικής βελτιστοποίησης, δηλαδή την χρήση BSDEs. Έτσι, θα συνδέσουμε τα αποτελέσματα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και θα δούμε γιατί αυτή η νέα μέθοδος επίλυσης πλεονεκτεί σε πολλές περιπτώσεις έναντι του δυναμικού προγραμματισμού.

2.1 Εισαγωγή - Το γενικό πρόβλημα

Αρχικά, αυτό που θα κάνουμε είναι να δώσουμε μια πρώτη εικόνα ενός προβλήματος στοχαστικής βελτι στοποίησης, ώστε να καταννοήσουμε την φύση του και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του. Να σημειώσουμε ότι θα περιγράψουμε και θα αναφερθούμε στην συνέχεια μόνο σε προβλήματα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα.
Έστω λοιπόν, ότι έχουμε στην διάθεση μας μια διαδικάσία (ή διάχυση) Ito $X_t \in \mathbb{R}_n$ η οποία υπόκειται σε μια διαδικασία ελέγχου $\alpha_t \in \mathbb{R}_k$. Με τον όρο *διαδικασία ελέγχου* θα εννοούμε μια διαδικασία που επιδρά στα δυναμικά $t \to X_t$ του συστήματος, και η τιμή της κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται συναρτήσει της διαθέσιμης πληροφορίας μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή (είναι δηλαδή προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία). Μια τέτοια διαδικασία οφείλει να ικανοποιεί και κάποιους περιορισμούς (κάποιοι επιβάλλονται από την φύση της X_t και άλλοι από την φύση του προβλήματος). Όταν η διαδικασία ικανοποιεί αυτούς τους περιορισμούς ονομάζεται *αποδεκτή διαδικασία ελέγχου*, και το σύνολο αυτών των διαδικασιών το συμβολίζουμε ως $\mathcal{U}$.
Η διαδικασία X_t, θεωρούμε ότι δίνεται σε διαφορική μορφή ως :

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $B_t \in \mathbb{R}^d$ μια κίνηση Brown. Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται *διαδικασία κατάστασης* και ισοδύναμα μπορεί να συμβολίζεται και ως $X_t = X_t^u$ (όπου ο εκθέτης δηλώνει την εξάρτηση της X_t από την επιλογή της διαδικασίας ελέγχου u). Την διαδικασία κατάστασης μπορούμε να την καταλάβουμε σαν την αναπαράσταση εκείνων των ποσοτικών μεταβλητών που χρειάζονται για να περιγραφεί το πρόβλημα.

Σκοπός ενός τέτοιου προβλήματος, είναι συνήθως η μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) ως προς την διαδικασία ελέγχου u κάποιου συναρτησιοειδούς της μορφής

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, u_t)dt + g(X_T),\right]$$

όπου $f(\cdot)$ είναι συνήθως κάποια συνάρτηση χρησιμότητας και $g(X_T)$ μια συνάρτηση της τιμής της διαδικασίας κατάστασης στην περάτωση του χρονικού ορίζοντα. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να γραφεί και ως εξής: Έστω

$$v = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(u).$$

Αν υπάρχει u^* για το οποίο ισχύει ότι $u^* \in \mathcal{U}$ και $J(u^*) = v$, τότε το u^* ονομάζεται *βέλτιστη διαδικασία ελέγχου*. Να αναφέρουμε ότι αυτό το u^* μπορεί να μην υπάρχει (γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε το sup αντί του max).
Εμείς όμως θα ασχοληθούμε με μια ιδιαίτερη κατηγορία διαδικασιών ελέγχου u οι οποίες είναι τέτοιες ώστε $u(t) = u(t, X_t)$. Δηλαδή ο νόμος ελέγχου εξαρτάται και από την κατάσταση του συστήματος X_t την χρονική στιγμή t. Νόμοι ελέγχου αυτής της μορφής ονομάζονται *νόμοι ελέγχου τύπου ανάδρασης* (feedback controls). Έτσι, η αναζήτηση για την βέλτιστη στρατηγική δεν είναι τίποτα άλλο από τον καθορισμό της συνάρτησης $u(t, x)$.

2.2 Η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού

Θα δείξουμε τώρα μια μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων της στοχαστικής θεωρίας ελέγχου η οποία είναι βασισμένη στην τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού. Γενική ιδέα της μεθόδου είναι να μεταφέρουμε το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε σε μια γενικότερη κατηγορία προβλημάτων. Στην συνέχεια, βρίσκουμε κάποια λύση για την γενική αυτή κατηγορία, οπότε η λύση στο πρόβλημα που ζητάμε θα προκύψει σαν κάποια ειδική περίπτωση (αφού θα έχουμε λύσει το πρόβλημα για την γενική κατηγορία). Ένα βασικό εργαλείο που χρησιμοποιεί αυτή η μέθοδος, είναι μια μη γραμμική ντετερμινιστική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η εξίσωση *Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)*.

Έστω λοιπόν, ότι θέλουμε να βρούμε την μέγιστη τιμή του $J(u)$ αν η διαδικασία κατάστασης την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην θέση x. Επομένως, το συναρτησιοειδές που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε θα είναι το

$$v(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^T f(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right] \tag{2.2}$$

όπου οι δείκτες t, x υποδηλώνουν ότι η διαδικασία κατάστασης ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_s = \mu(s, X_s, u_s)ds + \sigma(s, X_s, u_s)dB_s, \ s \leq t$$
$$X_t = x$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι ειδικεύοντας τις συνθήκες για τα t, x προκύπτει οποιοδήποτε πρόβλημα αυτής της μορφής θέλουμε. Η εξίσωση που μπορεί να δώσει λύση σε αυτό το γενικό πρόβλημα, είναι όπως προαναφέραμε η HJB .

Αρχικά θα δούμε την αρχή του δυναμικού προγραμματισμού για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα με μια ποιο γενική μορφή. Εμείς βέβαια δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε αυτή την μορφή, αλλά αποτελεί μια πιο ισχυρή έκφραση. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1 «Αρχή του δυναμικού προγραμματισμού» *Πεπερασμένος χρονικός ορίζοντας: έστω $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Τότε έχουμε:*

$$J(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + J(\theta, X_\theta)\right] \tag{2.3}$$

$$= \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right] \tag{2.4}$$

όπου $\mathcal{T}_{t,T}$ το σύνολο των πιθανών χρόνων στάσης του διαστήματος $[t,T]$.

Σχόλιο 2.2.1 *Αναφέρουμε και τις παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις του δυναμικού προγραμματισμού.*
(α) Για κάθε $u \in \mathcal{U}(t,x)$ και $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:

$$v(t,x) \geq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right]. \tag{2.5}$$

(β) (ε-ορισμός) *Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $u \in \mathcal{U}(t,x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$:*

$$v(t,x) - \epsilon \leq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right]. \tag{2.6}$$

(Οι παραπάνω εκφράσεις είναι εναλλακτικές της αρχής του δυναμικού προγραμματισμού όπως αυτός διατυπώνεται για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.)

Απόδειξη:
Έστω ένας αποδεκτός έλεγχος $u \in \mathcal{U}(t,x)$. Από το νόμο των επαναλαμβανόμενων δεσμευμένων προσδοκιών (law of iterated conditional expectation), προκύπτει ότι:

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + J(\theta, X_\theta, u)\right],$$

και εφόσον $J(.,.,u) \leq v$, αν σταθεροποιήσουμε το ϑ, έχουμε

$$J(t,x,u) \leq \inf_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right]$$
$$\leq \sup_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \inf_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right].$$

Παίρνοντας τώρα το sup ως προς το u και στο αριστερό μέλος, προκύπτει η ανισότητα:

$$v(t,x) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \inf_{\theta \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s, X_s, u_s)ds + v(\theta, X_\theta)\right]. \tag{2.7}$$

Κρατάμε αυτή την ανισότητα και θα επανέλθουμε.
Σταθεροποιούμε τώρα κάποια $u \in \mathcal{U}(t,x)$ και $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$. Από τον ε-ορισμό του $v(t,x)$, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και $\omega \in \Omega$, υπάρχει $u^{\epsilon,\omega} \in \mathcal{U}(\theta(\omega), X^{t,x}_{\theta(\omega)}(\omega))$, το οποίο είναι μια ε-βέλτιστη διαδικασία ελέγχου για την $v(\theta(\omega), X^{t,x}_{\theta(\omega)}(\omega))$, δηλαδή

$$v(\theta(\omega), X^{t,x}_{\theta(\omega)}(\omega)) - \epsilon \leq J(\theta(\omega), X^{t,x}_{\theta(\omega)}(\omega), u^{\epsilon,\omega}). \tag{2.8}$$

Έστω τώρα ότι ορίζουμε την διαδικασία

$$\hat{u}_s(\omega) = \begin{cases} {}_s(\omega), & s \in [0, \theta(\omega)] \\ u_s^{\epsilon,\omega}(\omega), & s \in [\theta(\omega), T]. \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι η διαδικασία $\hat{u}$ είναι προοδευτικά μετρήσιμη και ως εκ τούτου ανήκει στον χώρο $\mathcal{U}(t,x)$. Χρησιμοποιώντας ξανά το νόμο των επαναλαμβανόμενων δεσμευμένων προσδοκιών και από την σχέση (2.8), έχουμε:

$$\begin{aligned} v(t,x) \geq J(t,x,\hat{u}) &= \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s)ds + J(\theta, X_\theta, u^\epsilon)\right] \\ &\geq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s)ds + v(\theta,X_\theta)\right] - \epsilon. \end{aligned}$$

Επειδή όμως τα παραπάνω ισχύουν για οποιαδήποτε $u, \theta, \epsilon > 0$, παίρνουμε την ανισότητα

$$v(t,x) \geq \sup_{u\in\mathcal{U}(t,x)} \sup_{\theta\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\theta f(s,X_s,u_s)ds + v(\theta,X_\theta)\right]. \tag{2.9}$$

Συνδυάζοντας λοιπόν την τελευταία σχέση (2.9) και την σχέση (2.7) προκύπτει το θεώρημα που διατυπώσαμε. ■

Επόμενο μας βήμα τώρα είναι να ορίσουμε την περίφημη εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).Την εξίσωση αυτή, μπορούμε να την καταλάβουμε σαν την απειροδιάστατη εκδοχή της αρχής του δυναμικού προγραμματισμού, δηλαδή περιγράφει την τοπική συμπεριφορά της $v(t,x)$ (δηλαδή του $\sup_{u\in\mathcal{U}} J(t,x,u)$)εάν $\theta \to t$. Εμείς θα ορίσουμε αυτή την συνάρτηση στην περίπτωση μόνο πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα.

Θεωρούμε ότι $\theta = t + h$ και έστω $u_s = u$ μια σταθερή διαδικασία ελέγχου ($u \in \mathcal{U}$). Τότε, η έκφραση του δυναμικού προγραμματισμού γινεται:

$$v(t,x) \geq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h} f(s,X_s,u)ds + v(t+h, X_{t+h})\right]. \tag{2.10}$$

Εάν υποθέσουμε ότι η v είναι αρκετά λεία συνάρτηση, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Ito μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t+h$ και έχουμε

$$\begin{aligned} dv(t,x) &= \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}(dX_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(dX_t)(dX_t) \Rightarrow \\ dv(t,x) &= \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}(\mu(x,u)dt + \sigma(x,u)dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\sigma(x,u)\sigma'(x,u)dt) \Rightarrow \\ v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) &= v(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^{t+h}\frac{\partial v}{\partial x}\sigma(x,u)dW_t \Rightarrow \\ v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) &= v(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s^{t,x})ds + (\text{τοπική}) \text{ martingale}, \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{L}^u$ είναι ο τελεστής που σχετίζεται με την διάχυση (2.1) για κάποια σταθερή διαδικασία ελέγχου u, και ορίζεται ως

$$\mathcal{L}^u v = \mu(x,u)D_x v + \frac{1}{2}tr\left[\sigma(x,u)\sigma'(x,u)D_x^2 v\right].$$

Αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις στην σχέση (2.10), παίρνουμε

$$0 \geq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^u v\right)(s, X_s^{t,x}) + f(s,X_s,u)\right]ds\right].$$

Διαιρώντας με το h και παίρνοντας το όριο $h \to 0$, προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής

$$0 \geq \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u).$$

Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $u \in \mathcal{U}$, προκύπτει η ανισότητα

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \sup_{u \in \mathcal{U}} [\mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)] \geq 0. \tag{2.11}$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι u^* είναι ένας βέλτιστος νόμος ελέγχου. Τότε, η εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού σε αυτή την περίπτωση θα γίνει

$$v(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^*, u^*)ds + v(t+h, X_{t+h}^*)\right],$$

όπου X^* είναι η λύση στην διαδικασία κατάστασης που ξεκινά από το x την χρονική στιγμή t, με το νόμο ελέγχου u^*. Έτσι, με όμοιο τρόπο όπως πριν, παίρνουμε

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u^*} v(t,x) + f(t,x,u_t^*) = 0, \tag{2.12}$$

η οποία σχέση αν συνδυαστεί με την (2.11), προκύπτει ότι η v οφείλει να ικανοποιεί την

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \sup_{u \in \mathcal{U}} [\mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u)] = 0, \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \tag{2.13}$$

εφόσον επιτυγχάνεται το sup. Αυτή η μερική διαφορική εξίσωση συχνότερα την συναντάμε με την μορφή:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{H}(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

όπου για $(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d}$

$$\mathcal{H}(t,x,p,M) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left[\mu(x,u)p + \frac{1}{2} tr[\sigma(x,u)\sigma'(x,u)M] + f(t,x,u)\right].$$

Αυτή η συνάρτηση $\mathcal{H}$ ονομάζεται *Χαμιλτονιανή (Hamiltonian)* του σχετικού προβλήματος ελέγχου. Η εξίσωση (2.14) ονομάζεται *εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού ή εξίσωση HJB*. Η εξίσωση αυτή συνοδεύεται και από την τελική συνθήκη

$$v(T,x) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Να πούμε σε αυτό το σημείο, ότι το βασικό βήμα στην κλασσική προσέγγιση του δυναμικού προγραμματισμού είναι να δείξουμε ότι, δοθέντος μιας λείας λύσης της εξίσωσης HJB, αυτός ο υποψήφιος (η λύση δηλαδή) συμπίπτει με την $v(t,x)$. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται θεώρημα επαλήθευσης, και μας δίνει την δυνατότητα να πάρουμε σαν επακόλουθο του έναν βέλτιστο μαρκοβιανό έλεγχο (ή νόμο ανάδρασης διαφορετικά).

Θεώρημα 2.2.2 (Θεώρημα Επαλήθευσης) *Έστω μια συνάρτηση $F \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, που ικανοποιεί μια συνθήκη τετραγωνικής ανάπτυξης κατά τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει σταθερά C τ.ω.*

$$|F(t,x)| \leq C(1+|x|^2), \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.16}$$

(a). Υποθέτουμε ότι :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}}[L^u F(t,x) + f(t,x,u)] \geq 0, \qquad (t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$$
$$F(T,x) \geq g(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

Τότε, $F \geq v$ στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.
(β). Υποθέτουμε επιπλέον ότι $F(T,.) = g$, και ότι υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $\hat{u}(t,x)$, $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$, τιμολογημένη στο U τ.ω.

$$-\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}}[\mathcal{L}^u F(t,x) + f(t,x,u)] = -\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{\hat{u}(t,x)}F(t,x) - f(t,x,\hat{u}(t,x)) = 0,$$

και η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_s = \mu(X_s,\hat{u}(s,X_s))ds + \sigma(X_s,\hat{u}(s,X_s))dW_s$$

έχει μοναδική λύση την $\hat{X}_s^{t,x}$, δοθέντος αρχικής συνθήκης $X_t = x$, και η διαδικασία

$$\{\hat{u}(s,\hat{X}_s^{t,x}),\ t\leq s\leq T\} \in \mathcal{U}(t,x). \tag{2.17}$$

Τότε, ισχύει ότι $F = v$ στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ και η $\hat{u}$ είναι ένας βέλτιστος μαρκοβιανός έλεγχος.

Απόδειξη:
(α). Εφόσον $F\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$, έχουμε ότι για κάθε $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, $u\in\mathcal{U}(t,x)$, $s\in[t,T)$, και κάθε χρόνο στάσης τ που παίρνει τιμές στο $[t,\infty)$, παίρνουμε από το λήμμα του Ito ότι

$$F(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}) = F(t,x) + \int_t^{s\wedge\tau}\left[\frac{\partial F}{\partial t}(r,X_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{u_r}F(r,X_r^{t,x})\right]dr$$
$$+\int_t^{s\wedge\tau} D_xF(r,X_r^{t,x})'\sigma(X_r^{t,x},u_r)dW_r.$$

Επιλέγουμε $\tau = \tau_n = inf\{s\geq t : \int_t^s |D_xF(r,X_r^{t,x})'\sigma(X_r^{t,x},u_r)|^2dr \geq n\}$, και παρατηρούμε ότι $\tau_n \nearrow \infty$ καθώς το n πηγαίνει στο άπειρο.
Η σταματημένη διαδικασία

$$\{\int_t^{s\wedge\tau_n} D_xF(r,X_r^{t,x})'\sigma(X_r^{t,x},u_r)dW_r,\ t\leq s\leq T\}$$

είναι τότε μια martingale, και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, έχουμε

$$\mathbb{E}[F(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})] = F(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n}\frac{\partial F}{\partial t}(r,X_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{u_r}F(r,X_r^{t,x})dr\right].$$

Εφόσον η F ικανοποιεί την (2.), έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(r,X_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{u_r}F(r,X_r^{t,x}) + f(X_r^{t,x},u_r) \leq 0, \qquad \forall u\in\mathcal{U}(t,x),$$

και έτσι

$$\mathbb{E}[F(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})] \leq F(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_r^{t,x},u_r)dr\right],\ \forall u\in\mathcal{U}(t,x). \tag{2.18}$$

Έχουμε ότι

$$\left| \int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_r^{t,x}, u_r)dr \right| \leq \int_t^T |f(X_r^{t,x}, u_r)|dr,$$

και το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ολοκληρώσιμο από την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο $\mathcal{U}(t,x)$. Εφόσον λοιπόν η F ικανοποιεί μια συνθήκη τετραγωνικής ανάπτυξης, έχουμε

$$|F(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})| \leq C(1+\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x}|^2),$$

και το δεξί μέλος είναι ολοκληρώσιμο, λόγω των προϋποθέσεων που ισχύουν. Εφαρμόζοντας τότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και στέλνοντας το n στο άπειρο στην σχέση (2.), παίρνουμε

$$\mathbb{E}[F(s, X_s^{t,x})] \leq F(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(X_r^{t,x}, u_r)dr\right],\ \forall u \in \mathcal{U}(t,x).$$

Επιπλέον, εφόσον η F είναι συνεχής στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, στέλνοντας το s στο T, εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και από την σχέση (2.), παίρνουμε

$$\mathbb{E}[g(X_T^{t,x})] \leq F(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T f(X_r^{t,x}, u_r)dr\right], \qquad \forall u \in \mathcal{U}(t,x).$$

Λόγω της τυχαιότητας του $u \in \mathcal{U}(t,x)$, εξάγουμε ότι $F(t,x) \leq v(t,x)$, για κάθε $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

(β). Εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito στην $F(r, \hat{X}_r^{t,x})$ μεταξύ των $t\in[0,T)$ και $s\in[t,T)$ και παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[F(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = F(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(r, \hat{X}_r^{t,x}) + L^{\hat{u}(r,\hat{X}_r^{t,x})}F(r, \hat{X}_r^{t,x})dr\right].$$

Τώρα, εξαιτίας του ορισμού του $\hat{u}(t,x)$, έχουμε

$$-\frac{\partial F}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{u}(t,x)}F(t,x) - f(t,x,\hat{u}(t,x)) = 0,$$

και έτσι

$$\mathbb{E}\left[F(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = F(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(\hat{X}_r^{t,x}, \hat{u}(r, \hat{X}_r^{t,x}))dr\right].$$

Στέλνοντας το s στο T, τότε παίρνουμε

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(\hat{X}_r^{t,x}, \hat{u}(r, \hat{X}_r^{t,x})dr + g(\hat{X}_T^{t,x})\right] = J(t,x,\hat{u}).$$

Το τελευταίο, μας δείχνει ότι $F(t,x) = J(t,x,\hat{u}) \leq v(t,x)$, και τελικά ότι $F = v$ με το $\hat{u}$ σαν έναν βέλτιστο μαρκοβιανό έλεγχο. ■

Το παραπάνω θεώρημα μας παρέχει μια αναγκαία και επαρκή συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος, καθώς αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση HJB , η λύση της είναι αυτόματα και ένας υποψήφιος για την βέλτιστη στρατηγική που αναζητούμε (πρώτο σκέλος θεωρήματος). Το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος, μας παρέχει την επάρκεια για την λύση του προβλήματος.
Έχοντας δείξει τα παραπάνω, μπορούμε να αναφέρουμε συνοπτικά μια γενική διαδικασία που ακολουθείται κατά την επίλυση ένος τέτοιου προβλήματος.

- Γράφουμε την εξίσωση HJB για το πρόβλημα (βελτιστοποίησης) που μας ενδιαφέρει να λύσουμε.
- Επιλύουμε το *στατικό* πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\{f(t,x,u)+\mathcal{L}^u v(t,x)\}$$

και βρίσκουμε το u^* για το οποίο επιτυγχάνεται το sup. Σε αυτό το βήμα θεωρούμε γνωστές ποσότητες τα $t,x,\mu,\sigma,v(t,x)$ και λύνουμε ως προς το u^*. Το u^* λόγω της μορφή του τελεστή L^u είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της v και των παραγώγων της ως προς x, $u^*=\Phi(t,x,v,v_x,v_{xx})$.

- Λύνουμε μετά την μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial v}{\partial t}+f(t,x,u^*)+\mathcal{L}^{u^*}v(t,x)\}=0,\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$$
$$v(T,x)=g(x),\ x\in\mathbb{R}^n \tag{2.19}$$

- Έχοντας υπολογίσει την $v(t,x)$ γυρίζουμε πίσω στο δεύτερο βήμα και αντικαθιστούμε στην $u^*=\Phi(t,x,v,v_x,v_{xx})$ την $v(t,x)$ που βρήκαμε στο τρίτο βήμα. Έτσι, παίρνουμε το νόμο ανάδρασης $u^*=u(t,x)$.

Συνήθως, η εξίσωση που καταλήγουμε στο τρίτο βήμα δεν έχει αναλυτική λύση. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η αναλυτική λύση είναι εφικτή (π.χ. το πρόβλημα του Merton).

2.3 BSDEs και η αρχή του στοχαστικού μεγίστου

Δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο πώς λύνουμε ένα πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου με την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού. Τώρα, θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, την αρχή του στοχαστικού μεγίστου κατά τον *Pontryagin*.
Υιοθετούμε ξανά το πλαίσιο του προβλήματος στοχαστικού ελέγχου σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.
Έστω X μια διαδικασία κατάστασης στον $\mathbb{R}^n$ που κυριαρχείται από

$$dX_s=\mu(X_s,u_s)ds+\sigma(X_s,u_s)dW_s, \tag{2.20}$$

όπου W είναι μια d-διάστατη τυπική κίνηση Brown, και $u\in\mathcal{U}$, η διαδικασία ελέγχου.
Το συναρτησιοειδές που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι το

$$J(u)=\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,X_t,u_t)dt+g(X_T)\right],$$

όπου $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο (t,x) για κάθε $u\in\mathcal{U}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι μια κοίλη $\mathcal{C}^1$ συνάρτηση και οι f,g ικανοποιούν μια συνθήκη τετραγωνικής ανάπτυξης ως προς το x.

Ορίζουμε την συνάρτηση $\mathcal{H}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{U}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\to\mathbb{R}$ ως

$$\mathcal{H}(t,x,u,y,z)=\mu(x,u)y+tr[\sigma'(x,u)z]+f(t,x,u), \tag{2.21}$$

η οποία ονομάζεται *γενικευμένη Χαμιλτονιανή*. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{H}$ είναι διαφορίσιμη ως προς το x και συμβολίζουμε την παράγωγο της $D_x\mathcal{H}$. Θεωρούμε για κάθε $u\in\mathcal{U}$, την BSDE, η οποία ονομάζεται συζυγής εξίσωση (adjoint equation):

$$-dY_t=D_x\mathcal{H}(t,X_t,u_t,Y_t,Z_t)dt-Z_tdW_t,$$
$$Y_T=D_xg(X_T). \tag{2.22}$$

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω $\hat{u} \in \mathcal{U}$ και $\hat{X}$ η διάχυση που ελέγχεται από το νόμο που αναφέραμε. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λύση $(\hat{Y}, \hat{Z})$ στην BSDE (2.19) τέτοια ώστε*

$$\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = \max_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, u, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t), \ 0 \leq t \leq T, \ \sigma.\beta. \tag{2.23}$$

και

$$(x, u) \to \mathcal{H}(t, x, u, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) \qquad \text{είναι μια κοίλη συνάρτηση,} \tag{2.24}$$

για όλα τα $t \in [0, T]$.
Τότε το $\hat{u}$ είναι ένας βέλτιστος έλεγχος, δηλαδή

$$J(\hat{u}) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(u).$$

Απόδειξη:
Για κάθε $u \in \mathcal{U}$, μπορούμε να γράψουμε

$$J(\hat{u}) - J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T [f(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t) - f(t, X_t, \alpha_t)]dt + g(\hat{X}_T) - g(X_T)\right]. \tag{2.25}$$

Επειδή η g είναι κοίλη και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito,έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(\hat{X}_T) - g(X_T)\right] &\geq \mathbb{E}\left[(\hat{X}_T - X_T) D_x g(\hat{X}_T)\right] = \mathbb{E}\left[(\hat{X}_T - X_T)\hat{Y}_T\right] \\
= \mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{X}_t - X_t)d\hat{Y}_t + \int_0^T \hat{Y}_t(d\hat{X}_t - dX_t) + \int_0^T tr[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{u}_t) - \sigma(X_t, u_t))'\hat{Z}_t]dt\right] \\
\mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{X}_t - X_t)(-D_x\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t))dt + \int_0^T \hat{Y}_t(\mu(\hat{X}_t, \hat{u}_t) - \mu(X_t, u_t))dt\right. \\
\left. + \int_0^T tr[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{u}_t) - \sigma(X_t, u_t))'\hat{Z}_t]dt.\right.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της Χαμιλτονιανής, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T [f(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t) - f(t, X_t, u_t)]dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, u_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)]dt\right. \\
- \int_0^T [(\mu(\hat{X}_t, \hat{u}_t) - \mu(X_t, u_t))\hat{Y}_t]dt \\
\left. - \int_0^T tr\left[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{u}_t) - \sigma(X_t, u_t))'\hat{Z}_t\right]dt.\right.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Αθροίζοντας τις (2.23) και (2.24) στην (2.22), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
J(\hat{u}) - J(u) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^T [\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, u_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)]dt\right. \\
\left. - \int_0^T (\hat{X}_t - X_t) D_x\mathcal{H}(t, X_t, u_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)dt.\right.
\end{aligned}$$

Κάτω από τις συνθήκες (2.20) και (2.21), ο όρος ανάμεσα στις αγκύλες στην παραπάνω σχέση είναι μη θετικός. Επομένως δείξαμε αυτό που θέλαμε. ■

Αυτό το θεώρημα θα φανεί πολύ χρήσιμο στην συνέχεια, και συγκεκριμένα στην εύρεση στρατηγικής με το ελάχιστο ρίσκο για χαρτοφυλάκιο με δεδομένη μέση απόδοση στην περάτωση του χρονικού ορίζοντα.

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης Μέσης τιμής - Διακύμανσης χαρτοφυλακίου

Θέλουμε τώρα να δούμε κάποιες εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά αυτών των τεχνικών που δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με ένα από τα κλασσικά προβλήματα εύρεσης βέλτιστης στρατηγικής γνωστό ως mean-variance optimization problem. Αρχικά, θα αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα μέσω της πιο διαδεδομένης μέχρι σήμερα, αρχής του δυναμικού προγραμματισμού και στην συνέχεια θα εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα μέσω της αρχής του στοχαστικού μεγίστου με την χρήση BSDE. Έτσι, θα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους και να δούμε τι αλλάζει κάθε φορά στην αντιμετώπιση του προβλήματος. Στο τέλος του κεφαλαίου, με την βοήθεια της προσομοίωσης θα δούμε πως δουλεύουν αυτές οι μέθοδοι με το απλό μοντέλο των Black-Scholes. Έτσι θα αποκτήσουμε μια πλήρη εικόνα του πώς και πότε χρησιμοποιούνται πιο αποτελεσματικά.

3.1 Το πρόβλημα και ένα βασικό αποτέλεσμα

Αρχικά, θέτουμε το πλαίσιο του προβλήματος. Βρισκόμαστε στην θέση κάποιου επενδυτή και έχουμε στα χέρια μας αρχική περιουσία έστω x_0. Σκοπός μας είναι, με αυτό το αρχικό ποσό, να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που να μοιράζει το ποσό αυτό σε κάποιο ή κάποιους σίγουρους τίτλους (συνήθως αυτό είναι κάποιο τραπεζικό κεφάλαιο), και σε κάποιον ή κάποιους τίτλους που εμπεριέχουν κίνδυνο (μπορούμε να σκεφτούμε κάποια μετοχή ή ένα πακέτο μετοχών). Θέλουμε λοιπόν με αυτό το χαρτοφυλάκιο που κατασκευάζουμε, στο τέλος του χρονικού ορίζοντα που θέτουμε να επιτύχουμε κάποιο συγκεκριμένο στόχο (π.χ. η αναμενόμενη αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα να είναι m) φροντίζοντας παράλληλα να ελαχιστοποιήσουμε την απόκλιση από αυτόν τον στόχο (συγκεκριμένα ζητούμε να ελαχιστοποιήσουμε την διακύμανση της τιμής του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή T). Ας διατυπώσουμε όμως πιο μαθηματικά το πρόβλημά μας.

Χάριν απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα εργαστούμε στην περίπτωση όπου ο σίγουρος τίτλος θα είναι ένα τραπεζικό κεφάλαιο $S_0(t)$ και ο αβέβαιος τίτλος μια μετοχή $S(t)$. Τότε η αξία του τραπεζικού κεφαλαίου θα περιγράφεται από την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$dS_0(t) = S_0(t)rdt,\ S_0(0) = 1\ (r > 0) \tag{3.1}$$

όπου r το σταθερό ετήσιο επιτόκιο.
Αντίστοιχα, η τιμή της μετοχής δίνεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_1(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW_t,\ S_1(0) = s \tag{3.2}$$

όπου μ η ετήσια απόδοση της μετοχής, σ η ετήσια πτητικότητα (annual volatility) της μετοχής και W_t η τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Θεωρούμε ότι τα μ, σ είναι σταθερές που έχουν υπολογιστεί από το

πρόσφατο ιστορικό της μετοχής. Χρησιμοποιούμε λοιπόν το πιο απλό μοντέλο των Black-Scholes για να περιγράψουμε την στοχαστική διαδικασία της τιμής της μετοχής και κατ' επέκταση του χαρτοφυλακίου μας.

Έστω λοιπόν ότι σε κάθε χρονική στιγμή, επενδύουμε το ποσό $\alpha(t)$ στον αβέβαιο τίτλο και το ποσό $X(t) - \alpha(t)$ στο τραπεζικό κεφάλαιο. Το χαρτοφυλάκιο μας οφείλει να είναι *αυτοχρηματοδοτούμενο* (self-financing) και επομένως οφείλει να ικανοποιεί την παρακάτω διαδικασία

$$X(t) = \alpha(t)S(t) + (X(t) - \alpha(t))S_0(t), \ \forall t \in [0, T] \tag{3.3}$$

όπου X_t η αξία του χαρτοφυλακίου μας την χρονική στιγμή t.
Περιγράφουμε την διαδικασία του πλούτου μας τώρα σε διαφορική μορφή και έχουμε:

$$\begin{aligned} dX(t) &= (X(t) - \alpha(t))dS_0(t) + \alpha(t)dS(t) \\ &= (X(t) - \alpha(t))S_0(t)rdt + \alpha(t)(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t) \\ &= [(X(t) - \alpha(t))S_0(t)r + \alpha(t)\mu S(t)]dt + \alpha(t)\sigma S(t)dW_t \\ &= X(t)[(1 - u(t))r + u(t)\mu]dt + X(t)u(t)\sigma dW_t \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει $u(t) = \frac{\alpha(t)S(t)}{X(t)}$.
Αυτό που καταφέραμε να κάνουμε, είναι να εκφράσουμε την διαδικασία πλουτισμού μας σε διαφορική μορφή σαν κυρτό συνδυασμό κάποιου $u \in [0, 1]$, το οποίο εκφράζει το ποσοστό της συνολικής μας περιουσίας που επενδύουμε στον κάθε τίτλο σε κάθε χρονική στιγμή. Με λίγα λόγια, είναι το βάρος που δίνουμε στον κάθε τίτλο. Επομένως, η στοχαστική διαφορική εξίσωση που θα μας απασχολήσει στην συνέχεια θα είναι η

$$dX(t) = X(t)[(1 - u(t))r + u(t)\mu]dt + X(t)u(t)\sigma dW_t, \qquad X(0) = x_0. \tag{3.4}$$

Ορίζουμε ως $\mathcal{U}$ το σύνολο των προσαρμοσμένων διαδικασιών u που παίρνουν τιμές στο A, και είναι τέτοιες ώστε να ισχύει ότι

$$\int_0^T |u(s)|^2 ds < \infty \ \sigma.\beta.$$

Αυτή η συνθήκη για τα βάρη είναι πολύ βασικό να ικανοποιείται διαφορετικά η εξίσωση (3.4) δεν θα έχει λύση.

Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε μπορεί να συνοψισθεί μαθηματικά στον υπολογισμό της συνάρτησης

$$V(m) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{Var(X_T) \mid \mathbb{E}[X_T] = m\}, \ m \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Αυτό αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα, το οποίο όμως μπορεί να ευτελιστεί ισοδύναμα, με την βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange και της Πρότασης 3.1.1, στον υπολογισμό της συζυγούς συνάρτησης

$$\tilde{V}(\lambda) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{\mathbb{E}[(X_T - \lambda)^2]\right\}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

όπου λ είναι ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange που απλοποιεί το πρόβλημα.
Έτσι καταφέρνουμε να απλουστεύσουμε αρκετά το πρόβλημα αφού πλέον μας ενδιαφέρει μόνο να ελαχιστοποιήσουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα χωρίς να έχουμε κάποια δέσμευση. Η πρόταση η οποία στηρίζει όλο μας το εγχείρημα είναι η παρακάτω την οποία και θα αποδείξουμε.

Πρόταση 3.1.1 *Έχουμε τις συζυγείς σχέσεις*

$$\tilde{V}(\lambda) = \inf_{m \in \mathbb{R}} \left\{V(m) + (m - \lambda)^2\right\}, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

$$V(m) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{\tilde{V}(\lambda) - (m - \lambda)^2\right\}, m \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Για κάθε $m \in \mathbb{R}$, ο βέλτιστος έλεγχος της $V(m)$ είναι ο ίδιος με τον βέλτιστο έλεγχο $\hat{u}_{\lambda_m}$ της $\tilde{V}(\lambda)$, όπου το λ_m επιτυγχάνει το μέγιστο στην (3.8) και υπολογίζεται ως

$$\lambda_m = \frac{m - exp\left\{\left(r - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)T\right\} x_0}{1 - exp\left\{-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}T\right\}} \tag{3.9}$$

Απόδειξη:
Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{U}$ μπορεί εύκολα να ελέγξει κανείς ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathbb{E}[(X_T - \lambda)^2] = Var(X_T) + (\mathbb{E}[X_T] - \lambda)^2. \tag{3.10}$$

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε κάποιο συγκεκριμένο $m \in \mathbb{R}$.
Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $u^\epsilon \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_T^\epsilon] = m, \\ Var(X_T^\epsilon) \leq V(m) + \epsilon \end{cases} \tag{3.11}$$

Η τελευταία σχέση της (3.11) παρατηρούμε ότι ισχύει από το ακόλουθο επιχείρημα.
Η συνάρτηση $V(m)$, εξ' ορισμού είναι το μέγιστο κάτω φράγμα των $Var(X_T)$ για τα οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}[X_T] = m$. Άρα θα είναι και κάτω φράγμα της $Var(X_T^\epsilon)$. Όμως η ποσότητα $V(m) + \epsilon$ δεν παραμένει κάτω φράγμα της $Var(X_T^\epsilon)$. Έτσι καταλήγουμε στην τελευταία ανισότητα.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (3.10) και (3.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned} Var(X_T^\epsilon) &\leq V(m) + \epsilon \Rightarrow \\ \mathbb{E}[(X_T^\epsilon - \lambda)^2] - (\mathbb{E}[X_T^\epsilon] - \lambda)^2 &\leq V(m) + \epsilon \Rightarrow \\ \mathbb{E}[(X_T^\epsilon - \lambda)^2] &\leq (\mathbb{E}[X_T^\epsilon] - \lambda)^2 + V(m) + \epsilon \Rightarrow \\ \mathbb{E}[(X_T^\epsilon - \lambda)^2] &\leq (m - \lambda)^2 + V(m) + \epsilon \Rightarrow \\ \tilde{V}(\lambda) &\leq V(m) + (m - \lambda)^2, \qquad \forall m, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Αυτός όμως είναι ο ορισμός του μέγιστου κάτω φράγματος της ποσότητας $V(m) + (m - \lambda)^2$. Επομένως, δείξαμε την σχέση (3.7).

Έστω τώρα κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.
Έστω u_λ^* η βέλτιστη πολιτική και αντίστοιχα η βέλτιστη διαδικασία $X^{\lambda *}$. Επίσης, έχουμε ότι $\mathbb{E}[X_\lambda^*(T)] = m_\lambda$. Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\lambda) = \mathbb{E}[(X_T^{\lambda *} - \lambda)^2] &= Var(X_T^{\lambda *}) + (m_\lambda - \lambda)^2 \\ &\geq V(m_\lambda) + (m_\lambda - \lambda)^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Επειδή διαισθητικά μπορεί να φανεί λίγο περίεργη η τελευταία ανισότητα εξηγούμε πως προέκυψε. Το $X^{\lambda *}$ είναι ένα από τα χαρτοφυλάκια για τα οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}[X_\lambda^*(T)] = m_\lambda$. Άρα από τον ορισμό έχουμε

$$Var(X_T^{\lambda *}) \geq V(m_\lambda) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{Var(X_T) \mid \mathbb{E}[X_T] = m_\lambda\}.$$

Παρατηρώ τώρα ότι από την (3.7) ότι η (3.13) μου δίνει κάποιο m_λ τέτοιο ώστε

$$V(m_\lambda) + (m_\lambda - \lambda)^2 \leq \tilde{V}(\lambda).$$

Άρα συμπεραίνω ότι η u^*_λ είναι η βέλτιστη λύση στην $V(m_\lambda)$ και ως εκ τούτου $m_\lambda = m^*$.

Τέλος, παίρνουμε την σχέση (3.12) και κάνουμε λίγες πράξεις. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\lambda) \leq V(m) + (m-\lambda)^2 \Rightarrow \\ \frac{\lambda^2 - \tilde{V}(\lambda)}{2} \geq m\lambda - \frac{V(m)+m^2}{2} \Rightarrow \\ \frac{\lambda^2 - \tilde{V}(\lambda)}{2} = \sup_{m\in\mathbb{R}} \left\{ m\lambda - \frac{V(m)+m^2}{2} \right\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Όμως η συνάρτηση $\lambda \to \frac{\lambda^2 - \tilde{V}(\lambda)}{2}$ είναι ο μετασχηματισμός Fenchel-Lagendre της κυρτής συνάρτησης $m \to \frac{V(m)+m^2}{2}$. Έχουμε έτσι την σχέση δυϊσμού

$$\begin{aligned} \frac{V(m)+m^2}{2} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\{ m\lambda - \frac{\lambda^2 - \tilde{V}(\lambda)}{2} \right\} \Rightarrow \\ V(m) = \sup_{m\in\mathbb{R}} \left\{ \tilde{V}(\lambda) - (m-\lambda)^2 \right\}, \ \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Και η απόδειξη εδώ ολοκληρώνεται. ■

Για να συνοψίσουμε, περιγράψαμε ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου υπό κάποιο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό, ήταν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας υπό συνθήκης ποσότητας. Με την βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange και της προηγούμενης πρότασης καταφέραμε να μετατρέψουμε αυτό το σύνθετο πρόβλημα σε κάτι πιο απλό. Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να ξεκινήσουμε την επίλυση αυτού του προβλήματος.

3.2 Εύρεση βέλτιστης στρατηγικής με την μέθοδο του Δυναμικού προγραμματισμού

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, η συνθήκη της ολοκληρωσιμότητας μας δίνει την ύπαρξη και την μοναδικότητα μιας ισχυρής λύσης της (3.4). Δοθέντος λοιπόν μιας στρατηγικής χαρτοφυλακίου $u \in \mathcal{U}$, συμβολίζουμε με $X^{t,x}$ την αντίστοιχη διαδικασία πλούτου που την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην αρχική θέση $X(t) = x_0 > 0$. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα του τελικού πλούτου μας στο T. Επομένως η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η εξής:

$$v(t,x) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}[U(X_T^{t,x})], \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+. \tag{3.16}$$

Στο πρόβλημα μας, η συνάρτηση που επιλέγουμε σαν συνάρτηση χρησιμότητας (λόγω της συζήτησης που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο) είναι η

$$U(X_T^{t,x}) = -(X_T - \lambda_m)^2. \tag{3.17}$$

Προφανώς η U είναι φθίνουσα και κοίλη στο $\mathbb{R}^+$. Οφείλουμε όμως να τσεκάρουμε και την συμπεριφορά της $v(t,x)$ στο x για κάθε $t \in [0,T]$.

Έστω ότι έχουμε $0 < x \leq y$ και u μια διαδικασία ελέγχου του $\mathcal{U}$.
Ορίζουμε την διαδικασία $Z(s) = X^{t,y}(s) - X^{t,x}(s)$. Η νέα αυτή διαδικασία είναι προφανές ότι ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dZ(s) = Z(s)[u_s\mu + (1-u_s)r]ds + Z(s)u_s\sigma dW_s, \qquad Z(t) = y - x > 0.$$

Επομένως, $Z(s) \geq 0$ αφού $X^{t,y}(s) \geq X^{t,x}(s)$ για κάθε $s \geq t$. Εφόσον η U είναι φθίνουσα, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(X_T^{t,y}) \leq U(X_T^{t,x}) \Rightarrow \\ \mathbb{E}[U(X_T^{t,y})] \leq \mathbb{E}[U(X_T^{t,x})] \leq v(t,x),\ \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow \\ v(t,y) \leq v(t,x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Έστω τώρα, $x_1, x_2 > 0$ και u^1, u^2 δύο διαδικασίες ελέγχου που ανήκουν στο $\mathcal{U}$, και $q \in [0,1]$. Γράφουμε λοιπόν $x_q = qx_1 + (1-q)x_2$, και με X^{t,x_i} συμβολίζουμε την διαδικασία πλούτου που ξεκινά από την θέση x_i την χρονική στιγμή t, και ελέγχεται από την $u^i,\ i = 1, 2$. Έτσι, κατασκευάζουμε τον έλεγχο

$$u^q(s) = \frac{qX^{t,x_1}(s)u^1(s) + (1-q)X^{t,x_2}(s)u^2(s)}{qX^{t,x_1}(s) + (1-q)X^{t,x_2}(s)}. \tag{3.19}$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι το πεδίο τιμών της u^λ το A, θα είναι ένα κυρτό σύνολο και γι΄ αυτό τον λόγο θα ισχύει ότι $u^\lambda \in \mathcal{U}$. Από αυτή την ιδιότητα του συνόλου συμπεραίνω ότι θα υπάρχει βέλτιστος έλεγχος (δηλαδή το sup θα επιτυγχάνεται).
Επιπλέον, από τα γραμμικά δυναμικά της διαδικασίας του πλούτου, βλέπουμε ότι η διαδικασία κατάστασης X^q θα ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX^q(s) = X^q(s)[u^q(s)\mu + (1-u^q(s))r]ds + X^q(s)u^q(s)^\sigma dW_s,\ s \geq t, \\ X^q(t) = x_q. \end{aligned}$$

Επομένως, η $qX^{t,x_1} + (1-q)X^{t,x_2}$ είναι μια διαδικασία πλούτου που ξεκινά από την θέση x_q την χρονική στιγμή t, και ελέγχεται από την διαδικασία u^q. Λόγω όμως του ότι η συνάρτηση χρησιμότητας U είναι κοίλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U(qX_T^{t,x_1} + (1-q)X_T^{t,x_2}) \geq qU(X_T^{t,x_1}) + (1-q)U(X_T^{t,x_2}) \Rightarrow \\ v(qx_1 + (1-q)x_2) \geq q\mathbb{E}[U(X_T^{t,x_1})] + (1-q)\mathbb{E}[U(X_T^{t,x_2})],\ \forall\ u^1, u^2 \in \mathcal{U} \Rightarrow \\ v(qx_1 + (1-q)x_2) \geq qv(x_1) + (1-q)v(x_2). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Δείξαμε επομένως ότι εφόσον η U είναι αυστηρά κοίλη συνάρτηση και υπάρχει βέλτιστος έλεγχος, τότε από την τελευταία σχέση (3.20) φαίνεται ότι και η συνάρτηση $v(t,x)$ είναι επίσης αυστηρά κοίλη στο x.

Επόμενο βήμα είναι να γράψουμε την εξίσωση HJB για το εν λόγω πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου. Ψάχνουμε λοιπόν έναν υποψήφιο F που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$-\frac{\partial F}{\partial t} - \sup_{u \in A}[\mathcal{L}^u F(t,x)] = 0, \tag{3.21}$$

μαζί με την τερματική συνθήκη

$$F(T, x_T) = U(x_T), x_T \in \mathbb{R}^+. \tag{3.22}$$

Εδώ, ο γεννήτορας $\mathcal{L}^u F$ παίρνει την μορφή

$$\mathcal{L}^u F(t,x) = x(u\mu + (1-u)r)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2u^2\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Ένας λογικός υποψήφιος που να ικανοποιεί τις σχέσεις (3.21),(3.22) είναι η

$$F(t,x) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2, \tag{3.23}$$

όπου τα c_0, c_1, c_2 είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις που εξαρτώνται μόνο από το t.

Σε πρώτη φάση, πηγαίνουμε στην σχέση (3.21), και αντικαθιστώντας όπου $F(t,x)$ την υποψήφια συνάρτηση, ερευνούμε το sup θεωρώντας ως μόνη άγνωστη ποσότητα το u. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς u την ποσότητα

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}[x(u\mu+(1-u)r)(c_1(t)+c_2(t)x)+\frac{1}{2}x^2u^2\sigma^2c_2(t)].$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\Phi(u)=x(u\mu+(1-u)r)(c_1(t)+c_2(t)x)+\frac{1}{2}x^2u^2\sigma^2c_2(t).$$

Παίρνοντας λοιπόν την παράγωγο της $\Phi(u)$ ως προς το u και εξισώνοντας την με το 0, λύνουμε ως προς το u και βρίσκουμε ότι

$$u^*=\frac{(r-\mu)(c_1(t)+2c_2(t)x)}{2\sigma^2c_2(t)x}. \tag{3.24}$$

Υπολογίσαμε λοιπόν τον βέλτιστο έλεγχο u^*. Αντικαθιστούμε τώρα, την (3.24) στις σχέσεις (3.21),(3.22) και παίρνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \left[c_2'(t)+\left(2r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)c_2(t)\right]x^2+\left[c_1'(t)+\left(r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)c_1(t)\right]x+c_0'(t)-\frac{c_1^2(t)(\mu-r)^2}{4\sigma^2c_2(t)}=0, \\ (c_0(T)+\lambda_m^2)+(c_1(T)-\lambda_m)X_T+(c_2(T)+1)X_T^2=0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Μία λύση αυτών των εξισώσεων, είναι όλοι οι συντελεστές τους να είναι μηδενικοί. Κάνοντας λοιπόν αυτή την θεώρηση, προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα απλών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dc_1(t)}{dt}+\left(r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)c_1(t)=0, \qquad c_1(T)=2\lambda_m, \tag{3.26}$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt}+\left(2r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)c_2(t)=0, \qquad c_2(T)=-1. \tag{3.27}$$

Λύνουμε λοιπόν τις παραπάνω εξισώσεις, και παίρνουμε τις λύσεις τους

$$c_1(t)=2\lambda_m exp\left\{\left(r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right\}, \tag{3.28}$$

$$c_2(t)=-exp\left\{\left(2r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right\}. \tag{3.29}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις λύσεις των εξισώσεων στην (3.24), βρίσκουμε ότι ο βέλτιστος έλεγχος που ψάχναμε είναι η συνάρτηση

$$u^*(t,x)=\frac{(\mu-r)\left[\lambda_m exp\left\{\left(r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right\}-xexp\left\{\left(2r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right\}\right]}{\sigma^2xexp\left\{\left(2r-\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right\}}. \tag{3.30}$$

3.3 Εύρεση βέλτιστης στρατηγικής με την μέθοδο των BSDEs

Σε αυτή την παράγραφο θα αντιμετωπίσουμε το ίδιο πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιώντας όμως μια εναλλακτική μέθοδο του Δυναμικού προγραμματισμού. Η αρχή του στοχαστικού μεγίστου κατά τον Pontryagin θα μας επιτρέψει να λύσουμε το πρόβλημα που διατυπώσαμε κάνοντας χρήση της θεωρίας που αναπτύξαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια.
Υποθέτουμε ότι η διαδικασία του πλούτου μας περιγράφεται από την εξίσωση

$$dX(t) = [rX(t) + \alpha(t)(\mu - r)]dt + X(t)\sigma\alpha(t)dW_t, \qquad X(0) = x_0. \tag{3.31}$$

(Εδώ δεν θα λύσουμε το πρόβλημα ως προς τον έλεγχο u που εκφράζει ποσοστό αλλά ως προς το α που εκφράζει ποσό. Δεν δημιουργεί πρόβλημα αυτό όμως καθώς μπορούμε να μεταφερθούμε από τον έναν έλεγχο στον άλλο μέσω της σχέσης $u(t) = \frac{S(t)\alpha(t)}{X(t)}$.)

Όπως αναφέραμε, το κριτήριο μέσης τιμής - διακύμανσης για την επιλογή χαρτοφυλακίου, έχει να κάνει με την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της περιουσίας μας υπό τον περιορισμό ότι η αναμενόμενη τιμή της είναι ίση με κάποια δοθείσα σταθερά, δηλαδή

$$V(m) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left[Var(X_T)|\mathbb{E}[X_T]\right], \ m \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Στην αρχή του κεφαλαίου, δείξαμε ότι το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με την επιλύση του προβλήματος εύρεσης βέλτιστου ελέγχου

$$\tilde{V}(\lambda) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left[\mathbb{E}[X_T - \lambda]^2\right], \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Βασιζόμενοι στην αρχή του στοχαστικού μεγίστου που περιγράψαμε νωρίτερα θα επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό. Σκοπός μας, όπως και πριν, είναι να μεγιστοποιήσουμε ως προς τον έλεγχο μας α κάποιο συναρτησοειδές της μορφής

$$J(\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X, \alpha)dt + g(X_T)\right]$$

όπου στην περίπτωση μας $f(t, x, \alpha) = 0$ και $g(x) = (x - \lambda)^2$.

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση του προβλήματος ελέγχου. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, \alpha, y, z) &= \tilde{\mu}(x, \alpha)y + tr[\tilde{\sigma}(x, \alpha)z] + f(t, x, \alpha) \\ &= [rx + \alpha(\mu - r)]y + \sigma\alpha z\end{aligned} \tag{3.33}$$

Αντίστοιχα, η συζυγής εξίσωση (adjoint BSDE) για κάθε α υπολογίζεται ως

$$\begin{cases} dY(t) = D_x\mathcal{H}(t, x, \alpha, y, z)dt - Z(t)dW_t = Y(t)rdt - Z(t)dW_t, \\ Y_T = D_x g(X_T) = 2(X_T - \lambda) \end{cases} \tag{3.34}$$

Έστω τώρα, ότι $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ ένας υποψήφιος βέλτιστος έλεγχος για το χαρτοφυλάκιο και $\hat{X}, (\hat{Y}, \hat{Z})$ οι αντίστοιχες διαδικασίες που τον συνοδεύουν. Τότε, η Χαμιλτονιανή συνάρτηση θα πάρει την μορφή

$$\mathcal{H}(x, \alpha, \hat{Y}, \hat{Z}) = rx\hat{Y}(t) + \alpha[(\mu - r)\hat{Y}(t) + \sigma\hat{Z}(t)]$$

Αναζητούμε λοιπόν το α που μεγιστοποιεί την Χαμιλτονιανή. Με την συνήθη διαδικασία εύρεσης μεγίστου παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= rx\hat{Y} + \alpha[(\mu - r)\hat{Y} + \sigma\hat{Z}] \\ \frac{\partial\Phi(\alpha)}{\partial\alpha} = 0 \ &\Rightarrow \ (\mu - r)\hat{Y} + \sigma\hat{Z} = 0\end{aligned} \tag{3.35}$$

Μια λογική σκέψη είναι να βρούμε κάποιον υποψήφιο της μορφής

$$\hat{Y}_t = \phi(t)\hat{X}_t + \psi(t) \tag{3.36}$$

ώστε η εξίσωση να έχει λύση (όπου $\psi(.), \phi(.)$ ντετερμινιστικές συναρτήσεις).
Ο υπολογισμός αυτών των συναρτήσεων είναι το κλειδί στην λύση του προβλήματος. Αρχικά, εφαρμόζουμε στην συζυγή BSDE (3.34) την μορφή της λύσης που υποθέσαμε και παίρνουμε

$$d\phi(t)\hat{X}(t) + d\psi(t) + \phi(t)d\hat{X}(t) = -r[\phi(t)\hat{X}(t) + \psi(t)] + \hat{Z}(t)dW_t. \tag{3.37}$$

Όμως, λόγω της (3.31) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} d\phi(t)\hat{X}(t) + d\psi(t) + \phi(t)\left[[r\hat{X}(t) + \hat{\alpha}(t)(\mu - r)]dt + \sigma\hat{\alpha}(t)dW_t\right] = \\ -r[\phi(t)\hat{X}(t) + \psi(t)] + \hat{Z}(t)dW_t. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Αυτό που θα κάνουμε τώρα είναι στην παραπάνω σχέση να διαχωρίσουμε το ντετερμινιστικό και το στοχαστικό κομμάτι της. Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω δύο εξισώσεις

$$\phi'(t)\hat{X}(t) + \phi(t)[r\hat{X}(t) + \hat{\alpha}(t)(\mu - r)] + \psi'(t) = -r[\phi(t)\hat{X}(t) + \psi(t)], \tag{3.39}$$

$$\phi(t)\sigma\hat{\alpha}(t) = \hat{Z}(t), \tag{3.40}$$

τις οποίες εφοδιάζουμε με τις τερματικές συνθήκες

$$\phi(T) = 2, \qquad \psi(T) = -2\lambda \tag{3.41}$$

οι οποίες προκύπτουν με απλή αντικατάσταση στην σχέση (3.36).
Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.35),(3.36) και (3.40) προκύπτει η εξής σχέση για το $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{(r-\mu)\hat{Y}(t)}{\sigma^2\phi(t)} = \frac{(r-\mu)(\phi(t)\hat{X}(t) + \psi(t))}{\sigma^2\phi(t)}. \tag{3.42}$$

Επίσης, από την σχέση (3.39) προκύπτει ότι

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{(\phi'(t) + 2r\phi(t))\hat{X}(t) + \psi'(t) + r\psi(t)}{(r-\mu)\phi(t)}. \tag{3.43}$$

Εξισώνοντας λοιπόν τις σχέσεις (3.42) και (3.43) και κάνοντας λίγες πράξεις παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \phi'(t)\hat{X}(t) + 2r\phi(t)\hat{X}(t) - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\phi(t)\hat{X}(t) = \psi'(t) + r\psi(t) - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\psi(t) \Rightarrow \\ \hat{X}(t)\left[\phi'(t) + \big(2r - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\big)\phi(t)\right] = \psi'(t) + \big(r - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\big)\psi(t). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε μια λογική λύση της παραπάνω εξίσωσης την $0x = 0$, και πάρουμε και τις τερματικές συνθήκες που προσθέσαμε παραπάνω, για τον υπολογισμό των ϕ, ψ αρκεί να λύσουμε τις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\phi'(t) + \big(2r - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\big)\phi(t) = 0, \qquad \phi(T) = 2 \tag{3.45}$$

$$\psi'(t) + \big(r - \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\big)\psi(t) = 0, \qquad \psi(T) = -2\lambda \tag{3.46}$$

Αυτές οι δύο διαφορικές εξισώσεις έχουν λύση κλειστού τύπου, και οι λύσεις αυτές είναι οι

$$\phi(t) = 2\exp\left[\left(2r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\right)(T - t)\right], \tag{3.47}$$

$$\psi_\lambda(t) = -2\lambda\exp\left[\left(r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\right)(T - t)\right]. \tag{3.48}$$

Με αυτές τις επιλογές λοιπόν για τις ϕ, ψ_λ το ζεύγος $(\hat{Y}, \hat{Z})$ λύνει την συζυγή BSDE (3.34) και ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος βελτιστοποίησης 2.3.1. Επομένως, ο βέλτιστος έλεγχος δίνεται από την σχέση (3.42), το οποίο όμως μπορεί να γραφεί και στην Μαρκοβιανή μορφή ως

$$\hat{u}_\lambda(t, x) = \frac{(r - \mu)(\phi(t)x + \psi_\lambda(t))}{\sigma^2\phi(t)}. \tag{3.49}$$

3.4 Εφαρμογή των μεθόδων σε δεδομένα και σύγκριση

Σε αυτή την παράγραφο, θα δούμε κατά πόσο είναι αποτελεσματικές οι μέθοδοι του δυναμικού προγραμματισμού και των BSDEs εφαρμόζοντας τες σε πραγματικά δεδομένα. Για να έχουμε και κάποιο μέτρο σύγκρισης, παράλληλα, θα χρησιμοποιήσουμε και κάποιες στρατηγικές που δεν λαμβάνουν υπόψην τους το τι συμβαίνει στην αγορά και είναι προαποφασισμένες.

Σε πρώτη φάση θέτουμε το πλαίσιο στο οποίο εργαζόμαστε. Υποθέτουμε ότι κάποιος ενδιαφέρεται να επενδύσει το πόσο των 10000 σε κάποιο επενδυτικό σχέδιο που σε διάρκεια ενός έτους θα του αποφέρει κάποια συγκεκριμένη απόδοση. Η στρατηγική που θα τον οδηγήσει σε αυτό τον οικονομικό στόχο ελέγχεται καθημερινά, δηλαδή κάθε ημέρα που υπάρχει λειτουργία των αγορών. Ο αριθμός των ημερών που λειτουργούν οι αγορές σε ένα έτος είναι 253. Για να προσομοιώσουμε την κατάσταση στην οποία εξελίσεται η αγορά, υποθέτουμε ότι η κάθε μετοχή θα είναι μια αυτόνομη κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης την τιμή της μετοχής σήμερα. Οι στρατηγικές που θα χρησιμοποιήσουμε θα αναμειγνύουν τραπεζικά κεφάλαια με μετοχές. Κάνοντας την σχετική έρευνα, βρήκαμε ότι αν κάποιος σήμερα ήθελε να κάνει μια προθεσμιακή κατάθεση ενός έτους μέχρι το ύψος του ποσού που αναφέραμε, το καλύτερο ετήσιο επιτόκιο που θα έβρισκε στην ελληνική τραπεζική αγορά είναι 4,32%.

Επιπλέον, έχουμε παρατηρήσει την συμπεριφορά τεσσάρων μετοχών το προηγούμενο έτος έτσι ώστε να έχουμε ιστορικά στοιχεία που να μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου των Black-Scholes με σταθερούς συντελεστές. Οι μετοχές είναι επιλεγμένες έτσι ώστε να μπορέσουμε να δοκιμάσουμε τις στρατηγικές μας σε διαφορετικές συμπεριφορές μετοχών. Να αναφέρουμε βέβαια ότι υποθέτουμε ότι τα κόστη συναλλαγών είναι μηδενικά ώστε να κρατήσουμε τα πράγματα όσο πιο απλά γίνεται.

Με αυτές τις τέσσερις μετοχές λοιπόν, θα κατασκευάζουμε κάθε φορά ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα περιμένουμε να μας δίνει κάποια συγκεκριμένη απόδοση στο πέρας του χρόνου. Η εκάστοτε στρατηγική θα κάνει μια μίξη των βέβαιων και αβέβαιων τίτλων, η οποία θα άλλαζει κάθε μέρα, με σκοπό να επιτευχθεί η απόδοση στόχος. Ρεαλιστική υπόθεση είναι να προσπαθήσει κανείς μέσω των στρατηγικών να αυξήσει τον αρχικό πλούτο του έως και 10% σε ένα έτος. Πέρα των στρατηγικών του δυναμικού προγραμματισμού και των BSDEs θα χρησιμοποιήσουμε και άλλες τρεις στρατηγικές, την ′50-50′, την ′60-40′ και την ′70-30′. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο ποσοστό επί τοις εκατό του πλούτου που την εκάστοτε χρονική στιγμή θα επενδύεται στο τραπεζικό κεφάλαιο ενώ ο δεύτερος στο ποσοστό που επενδύεται στην μετοχή. Σαν στρατηγικές μπορούμε να τις ονομάσουμε ′επιθετική′, ′μετριοπαθής′ και ′συντηρητική′.

Ο τρόπος με τον οποίον θα άξιολογήσουμε′ τις στρατηγικές μας είναι προσομοιώνοντας την πραγματικότητα με την βοήθεια της μεθόδου Monte-Carlo. Συγκεκριμένα, θα προσομοιώσουμε 1000 φορές την εξέλιξη της κάθε μετοχής μέσα σε ένα έτος. Έχοντας έτσι ένα σημαντικό αριθμό πραγματοποιήσεων μιας στρατηγικής, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε στατιστικούς δείκτες που θα μας επιτρέψουν να αξιολογήσουμε και να κρίνουμε την συμπεριφορά της κάθε επενδυτικής πολιτικής. Αρχικά, θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της περιουσίας μας στο τέλος του χρονικού ορίζοντα της επένδυσης καθώς επίσης και την τυπική απόκλιση των τιμών αυτών. Δύο ακόμη ενδιαφέρον δείκτες, που θα υπολογίσουμε, είναι η απόσταση από την τιμή στόχο m σε κάθε περίπτωση η οποία θα υπολογιστεί ως

$$\sqrt{\mathbb{E}(X_T - m)^2}$$

και ο άλλος δείκτης που είναι το πραγματικό σφάλμα του προβλήματος όπως δείξαμε στην παράγραφο 3.1 υπολογίζεται ως

$$\sqrt{\mathbb{E}(X_T - \lambda_m)^2}.$$

Ξεκινάμε λοιπόν, υπολογίζοντας τα στατιστικά μέτρα που αναφέραμε, εφαρμόζοντας τις επενδυτικές στρατηγικές σε κάθε μία από τις μετοχές μας.

ΜΕΤΟΧΗ Α′ : $\mu = 0.08,\ \sigma = 0.10$

Expected Value of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Dynamic Programming	10489.95	10575.83	10655.71	10718.82	10756.38	10775.90
BSDEs	10489.95	10575.83	10655.71	10718.82	10756.38	10775.90
50-50	10610.93	10610.93	10610.93	10610.93	10610.93	10610.93
60-40	10576.29	10576.29	10576.29	10576.29	10576.29	10576.29
70-30	10541.84	10541.84	10541.84	10541.84	10541.84	10541.84

Standard Deviation of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Dynamic Programming	158.77	427.82	691.81	905.18	1023.83	1083.08
BSDEs	158.77	427.82	691.81	905.18	1023.83	1083.08
50-50	549.53	549.53	549.53	549.53	549.53	549.53
60-40	437.88	437.88	437.88	437.88	437.88	437.88
70-30	327.12	327.12	327.12	327.12	327.12	327.12

Κοιτώντας τα απλά περιγραφικά μέτρα για την μετοχή Α′, παρατηρούμε ότι οι στρατηγικές που επιλέγουν οι μέθοδοι του Δυναμικού προγραμματισμού και των BSDEs δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Αυτό το περιμέναμε και αναμένουμε να δούμε το ίδιο και στα αποτελέσματα των δεικτών απόκλισης. Ο ρεαλισμός των στρατηγικών αυτών φαίνεται κυρίως στο δεύτερο πινακάκι όπου λογικά η τυπική απόκλιση της τελικής τιμής της περιουσίας μας ζητώντας απόδοση 10% είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι ζητώντας απόδοση 5%. Αντίθετα, οι υπόλοιπες ντετερμινιστικές στρατηγικές δίνουν σε κάθε κλίμακα απόδοσης το ίδιο νούμερο, κάτι που είναι λογικό αλλά όχι ρεαλιστικό.

Wealth Target Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Dynamic Programming	159.01	428.29	692.88	908.37	1033.35	1105.49
BSDEs	159.01	428.29	692.88	908.37	1033.35	1105.49
50-50	560.34	549.36	556.43	580.88	620.68	673.09
60-40	444.26	438.30	454.81	491.52	544.36	609.16
70-30	329.62	332.09	363.20	416.59	484.95	562.86

Lagrangian Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Dynamic Programming	443.06	1196.36	1953.48	2708.99	3460.21	4216.78
BSDEs	443.06	1196.36	1953.48	2708.99	3460.21	4216.78
50-50	622.37	1213.63	1950.70	2717.42	3494.32	4275.85
60-40	546.52	1199.56	1956.02	2731.27	3512.89	4297.42
70-30	487.63	1196.85	1968.22	2749.93	3535.13	4321.91

Αντίστοιχα τώρα, και στους δείκτες απόκλισης οι ντετερμινιστικές στρατηγικές δε λαμβάνουν υπόψη την απόδοση στόχο που ζητάμε. Γι΄ αυτό και η αύξηση του λάθους στο δείκτη απόκλισης από την απόδοση στόχο, καθώς αυξάνει η απόδοση, είναι μικρή. Οπότε δεν μπορούμε να πούμε ότι ο δείκτης αυτός δείχνει το πραγματικό λάθος κάθε μεθόδου. Το πραγματικό σφάλμα της κάθε μεθόδου δίνεται από την απόκλιση από τον εκάστοτε πολλαπλασιαστή Lagrange , κάτι που υπολογίζει ο δεύτερος δείκτης που εισάγαμε νωρίτερα.

Αν κοιτάξουμε προσεκτικά τις τιμές των σφαλμάτων ως προς τον πολλαπλασιαστή Lagrange για την κάθε στρατηγική, θα παρατηρήσουμε ότι οι πιο μικρές τιμές σε κάθε περίπτωση επιτυγχάνονται από τις μεθόδους που αναπτύξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Αυτό είναι λογικό αφού οι πολιτικές αυτές ακριβώς αυτό το κριτήριο ελαχιστοποιούν. Μάλιστα, εξακριβώνουμε και το ότι οι δύο μέθοδοι ταυτίζονται σε αυτό το πρόβλημα καθώς παράγουν ξανά τις ίδιες ακριβώς τιμές. Από εδώ και στο εξής, επειδή τα αποτελέσματα θα ταυτίζονται θα παραθέτουμε τις τιμές μόνο της μεθόδου των BSDEs.

Με σκοπό να δούμε την συμπεριφορά των μεθόδων σε διάφορες συνθήκες, παραθέτουμε και κάποια αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες μετοχές. Αυτό που έχει ενδιαφέρον να δούμε είναι το πώς αντιδρά η στρατηγική μας κάτω απο υψηλότερες αποδόσεις μετοχών και φυσικά διακυμάνσεις.

ΜΕΤΟΧΗ Β΄ : $\mu = 0.12,\ \sigma = 0.25$

Expected Value of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	10488.38	10571.54	10654.91	10737.96	10814.58	10882.69
50-50	10795.24	10795.24	10795.24	10795.24	10795.24	10795.24
60-40	10722.07	10722.07	10722.07	10722.07	10722.07	10722.07
70-30	10649.95	10649.95	10649.95	10649.95	10649.95	10649.95

Standard Deviation of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	192.03	519.64	845.61	1168.84	1491.28	1794.98
50-50	1407.73	1407.73	1407.73	1407.73	1407.73	1407.73
60-40	1115.25	1115.25	1115.25	1115.25	1115.25	1115.25
70-30	828.96	828.96	828.96	828.96	828.96	828.96

Wealth Target Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	192.29	520.16	846.39	1169.91	1492.98	1797.53
50-50	1437.02	1419.86	1409.59	1406.38	1410.27	1421.19
60-40	1136.59	1121.36	1114.91	1117.41	1128.81	1148.82
70-30	842.01	830.05	830.06	842.03	865.46	899.46

Lagrangian Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	632.85	1711.05	2788.54	3865.51	4948.37	6033.65
50-50	1437.22	1989.08	2883.29	3890.55	4942.21	6015.04
60-40	1174.29	1852.65	2819.88	3864.87	4938.51	6025.49
70-30	938.83	1759.23	2788.28	3862.66	4952.97	6050.60

METOXH Γ′ : $\mu = 0.17,\ \sigma = 0.32$

Expected Value of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	10490.32	10576.71	10663.14	10749.85	10836.21	10920.41
50-50	11038.56	11038.56	11038.56	11038.56	11038.56	11038.56
60-40	10914.22	10914.22	10914.22	10914.22	10914.22	10914.22
70-30	10792.23	10792.23	10792.23	10792.23	10792.23	10792.23

Standard Deviation of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	151.03	408.48	665.69	919.69	1172.83	1424.75
50-50	1854.66	1854.66	1854.66	1854.66	1854.66	1854.66
60-40	1461.74	1461.74	1461.74	1461.74	1461.74	1461.74
70-30	1080.61	1080.61	1080.61	1080.61	1080.61	1080.61

Wealth Target Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	151.03	408.94	666.37	920.60	1173.98	1426.26
50-50	1930.38	1904.91	1884.40	1869.02	1858.91	1854.14
60-40	1518.59	1494.42	1476.63	1465.47	1461.08	1463.52
70-30	1118.90	1097.04	1083.99	1080.09	1085.43	1099.87

Lagrangian Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	403.93	1091.09	1778.11	2463.68	3149.26	3836.39
50-50	1861.84	1933.59	2249.04	2724.81	3292.12	3911.35
60-40	1461.84	1609.11	2022.02	2575.83	3198.17	3856.00
70-30	1082.52	1341.88	1864.53	2489.85	3157.42	3845.29

METOXH Δ′ : $\mu = 0.18,\ \sigma = 0.40$

Expected Value of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	10489.34	10574.08	10658.83	10743.97	10828.76	10912.69
50-50	11097.99	11097.99	11097.99	11097.99	11097.99	11097.99
60-40	10960.09	10960.09	10960.09	10960.09	10960.09	10960.09
70-30	10825.44	10825.44	10825.44	10825.44	10825.44	10825.44

Standard Deviation of X_T by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	171.58	464.19	756.80	1046.65	1335.37	1622.42
50-50	2335.30	2335.30	2335.30	2335.30	2335.30	2335.30
60-40	1835.68	1835.68	1835.68	1835.68	1835.68	1835.68
70-30	1353.84	1353.84	1353.84	1353.84	1353.84	1353.84

Wealth Target Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	171.82	464.68	757.55	1047.63	1336.60	1623.95
50-50	2409.52	2386.67	2367.82	2353.08	2342.52	2336.19
60-40	1891.58	1869.77	1853.11	1841.74	1835.75	1835.20
70-30	1391.75	1371.82	1358.97	1353.41	1355.22	1364.38

Lagrangian Error by Portfolio Return						
Strategy	5%	6%	7%	8%	9%	10%
BSDEs	511.98	1383.69	2255.41	3125.84	3996.21	4866.84
50-50	2337.55	2460.91	2879.15	3487.74	4204.84	4983.81
60-40	1834.80	2051.42	2586.81	3288.82	4072.16	4897.97
70-30	1361.05	1714.14	2380.24	3167.68	4005.54	4867.85

Στην συνέχεια, για να οπτικοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα θα παραθέσουμε μερικά διαγράμματα. Παίρνουμε σαν βάση τις περιπτώσεις των μετοχών για τις οποίες είδαμε σε κάποιες συγκεκριμένες αποδόσεις την συμπεριφορά των μεθόδων. Αυτό που θα κάνουμε τώρα, είναι για κάθε μία από τις μετοχές αυτές, στο διάστημα απόδοσης της επένδυσης 5% με 10%, να δούμε συνεχώς την συμπεριφορά των μεθόδων ως προς κάποιους δείκτες. Πιο απλά, θα κατασκευάσουμε κάποια γραφήματα, που στον οριζόντιο άξονα θα έχουν την απόδοση στόχο της επένδυσης που γίνεται (5% - 10%), και στον κάθετο την τιμή κάποιου δείκτη ανάλογα με την στρατηγική που χρησιμοποιούμε.

Ο ένας δείκτης είναι το πραγματικό σφάλμα της κάθε μεθόδου με τον τρόπο που έχουμε ορίσει το πρόβλημα, το σφάλμα Lagrange. Ο δεύτερος δείκτης που θα υπολογίσουμε, χρησιμοποιείται για την μελέτη της απόδοσης χαρτοφυλακίων και ονομάζεται δείκτης του Sharpe. Ο δείκτης του Sharpe συμβολίζεται με S και υπολογίζεται ως

$$S = \frac{\mathbb{E}[R_M] - r}{\sigma_M}$$

όπου R_M είναι η τυχαία απόδοση του εκάστοτε χαρτοφυλακίου της αγοράς και $\sigma_M^2 = Var(R_M)$. Όσο πιο υψηλή τιμή έχει αυτός ο δείκτης, τόσο καλύτερη η ποιότητα της επένδυσης μας.

Για κάθε μετοχή λοιπόν, κατασκευάζουμε αυτά τα δύο γραφήματα και απεικονίζουμε σε αυτά την συμπερι -φορά των προαναφερόμενων στρατηγικών σε διαφορετικά χαρακτηριστικά αβέβαιου τίτλου. Αυτό που

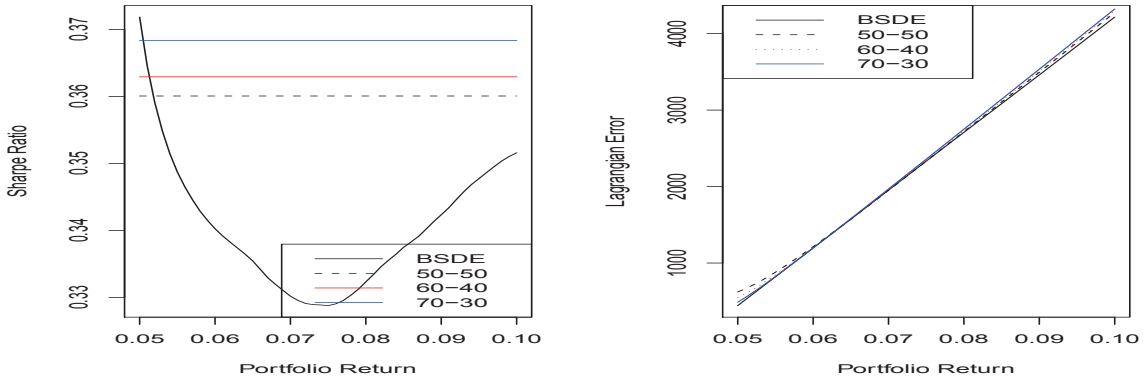


Figure 3.1: $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.10$

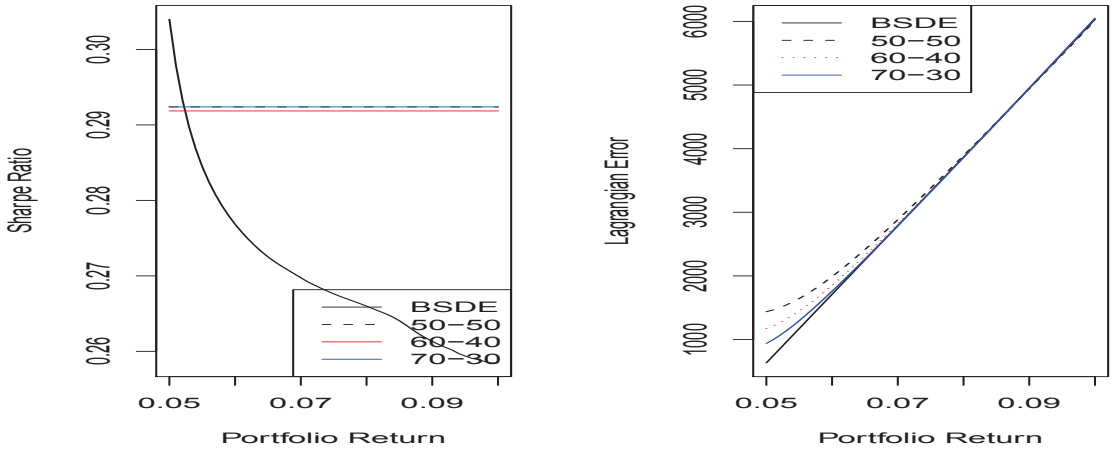


Figure 3.2: $\mu = 0.12$, $\sigma = 0.25$

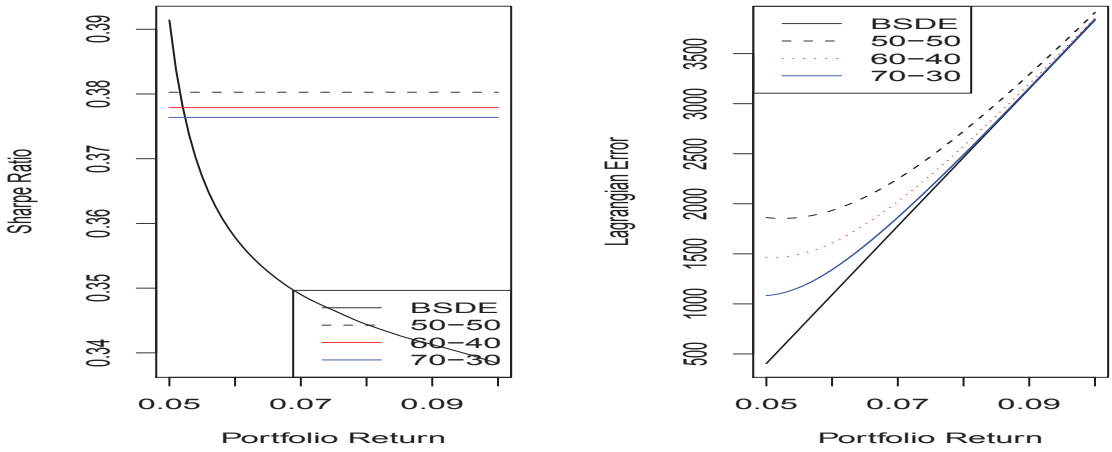


Figure 3.3: $\mu = 0.17$, $\sigma = 0.32$

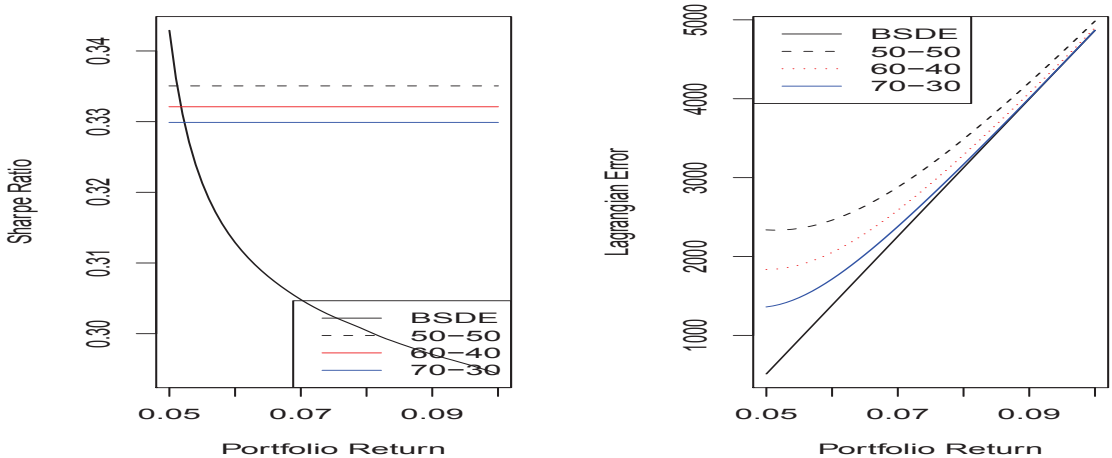


Figure 3.4: $\mu = 0.18$, $\sigma = 0.4$

παρατηρούμε, είναι ότι όσο αυξάνεται η πτητικότητα του αβέβαιου τίτλου, η στρατηγική BSDE μας επιτρέπει να ελέγχουμε καλύτερα το πραγματικό σφάλμα. Βέβαια, όσο αυξάνεται η απόδοση στόχος που θέτουμε τα σφάλματα των μεθόδων συγκλίνουν. Υπενθυμίζουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η πολιτική των BSDE ταυτίζεται με του δυναμικού προγραμματισμού. Οπότε, γίνεται σαφές ότι αυτές οι δύο πολιτικές δίνουν το χαμηλότερο πραγματικό σφάλμα σε αυτό το πρόβλημα. Όπως βλέπουμε στο άλλο γράφημα, το τίμημα του ελάχιστου σφάλματος μας κοστίζει λίγο στην ποιότητα της επένδυσης. Και στις τέσσερις περιπτώσεις, φαίνεται από το πηλίκο του Sharpe, ότι η προτεινόμενη στρατηγική μας αξιολογείται υψηλότερα και λιγό μετά την τελική απόδοση του 5% σε σχέση με τις ντετερμινιστικές στρατηγικές. Βέβαια, ακόμα και όταν είναι χειρότερη σαν επένδυση η διαφορά της από τις υπόλοιπες πολιτικές δεν είναι μεγάλη.

Αυτό που μπορούμε να πούμε με σιγουριά, είναι ότι με τις BSDEs μπορούμε να ελέγξουμε καλύτερα την απόκλιση της επένδυσης μας από τους στόχους που έχουμε θέσει, κυρίως όταν η πτητικότητα των αβέβαιων τίτλων είναι υψηλή. Αυτός βέβαια ήταν και ο σκοπός μας εν μέρει όταν θέσαμε το πλαίσιο του προβλήματος. Οπότε, ίσως είναι λίγο άκυρο να μιλάμε για την ποιότητα της επένδυσης. Σίγουρα είναι κάτι πάντως που χρήζει διερεύνησης ίσως όμως κάτω από άλλα πρίσματα. Αυτό που είναι αρκετά περιοριστικό στις υποθέσεις που έχουμε κάνει, είναι ότι οι συντελεστές των τίτλων μας είναι σταθερές. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα ρεαλιστικό και επομένως μια πιο γενική περίπτωση θα πρέπει να εξετασθεί.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική επίλυση της γραμμικής BSDE

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε έναν αλγόριθμο που λύνει αριθμητικά μια BSDE. Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε αποδεικνύεται στο [10]. Η ιδέα είναι αρκετά απλή. Προσομοιώνουμε μια κίνηση Brown μέσω ενός τυχαίου περιπάτου. Επιπλέον, διακριτοποιούμε την εξίσωση μας στα μέτρα της τυχαίας διαδικασίας μας και μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας λύνουμε αναδρομικά την εξίσωση σαν μια εξίσωση διαφορών. Το σχήμα που προτείνεται μπορεί να λύσει μια BSDE που δεν έχει τον όρο Z στον γεννήτορα της όμως, μπορεί να αντιμετωπίσει και αυτή την περίπτωση (μέχρι την γραμμική μορφή όμως) αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Girsanov.

4.1 Το αριθμητικό σχήμα

Σε πρώτη φάση, για να κρατήσουμε τα πράγματα απλά ας θεωρήσουμε ότι ο γεννήτορας της εξίσωσης μας δεν εξαρτάται από το Z. Έστω λοιπόν, ότι μας ενδιαφέρει να λύσουμε αριθμητικά την εξίσωση:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \tag{4.1}$$

όπου ξ μια $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και f μια συνεχής κατά Lipschitz συνάρτηση. Αρχικά, αυτό που θα κάνουμε είναι να διακριτοποιήσουμε την κίνηση Brown B μέσω του διωνυμικού τυχαίου περιπάτου.

Έστω ότι, $t_i^{(n)} = \frac{1}{n} : \ i = 0, ..., n$. Για να ελαφρύνουμε τον συμβολισμό θα γράφουμε t_i αντί για $t_i^{(n)}$ αλλά η εξάρτηση από το n θα εννοείται. Επίσης, για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε στην μονοδιάστατη περίπτωση $d = 1$. Συμβολίζουμε με $M^{(n)}$ τον κατά προσέγγιση διωνυμικό τυχαίο περίπατο που θα χρησιμοποιήσουμε ο οποίος ξεκινά από το 0, και με πιθανότητα $1/2$ αυξάνεται κατά $1/\sqrt{n}$ και με την ίδια πιθανότητα μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα.

Στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{F}^n$ την φυσική διήθηση που παράγει η διαδικασία $M^{(n)}$. Έστω ένα συναρτησιακό $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Με τον συμβολισμό $F(M^{(n)})$ θα εννοούμε το ίδιο πράγμα με το να γράφαμε $F(M_0^{(n)}, ..., F_T^{(n)})$.

Αυτό που οφείλουμε να σημειώσουμε είναι ότι είναι μάλλον αδύνατο να προσομοιώσουμε τον διωνυμικό τυχαίο περίπατο ακολουθώντας την ευθεία διαδικασία. Αυτό συμβαίνει διότι όσο αυξάνεται το βήμα της διακριτοποίησης, πετυγχαίνουμε ακριβέστερη προσέγγιση αλλά δεν δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε στην δουλειά μας στον υπολογιστή. Συγεκριμένα, αν k τα βήματα της διακριτοποίησης, τότε σε κάθε βήμα θα πρέπει να αποθηκέυουμε 2^k στοιχεία στην μνήμη του υπολογιστή μας. Μια λογική διακριτοποίηση είναι με

$k \geq 100$, όμως το 2^{100} είναι ήδη ένα τεράστιο νούμερο το οποίο θα εμποδίσει την δουλειά μας.

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε για να αντιμετωπίσουμε αυτή την κατάσταση είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo. Δηλαδή, θα προσομοιώσουμε ένα πεπερασμένο αριθμό M (αρκετά μεγάλο, π.χ. 1000) τυχαίων τροχιών διωνυμικού τυχαίου περιπάτου με κάποιον αριθμό βημάτων k που θα ορίσουμε. Το πλεονέκτημα εδώ είναι ότι σε κάθε βήμα δεν αυξάνονται τα μονοπάτια (άρα και οι τιμές που πρέπει να αποθηκεύσουμε), και έτσι μπορούμε να πετύχουμε μια πολύ μεγαλύτερη διακριτοποίηση καθώς πλέον δεν μας αγχώνει το μέγεθος της. Έτσι, με τα δεδομένα μπορούν να υπολογιστούν οι διάφορες αναμενόμενες τιμές που προκύπτουν στην πορεία του αλγορίθμου χωρίς πρόβλημα και μάλιστα παίρνοντας μια αρκετά λογική και καλή προσέγγιση της κίνησης Brown.

Η εξίσωση (4.1) μπορεί να γραφεί σε διακριτή μορφή ως:

$$\tilde{Y}_{t_i}^{(n)} = F(M^{(n)}) + \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^{(n)}) - \sum_{j=i}^{n-1} \tilde{Z}_{t_j}^{(n)} \Delta M_{t_j+1}^{(n)}. \tag{4.2}$$

Η παραπάνω εξίσωση αποδεικνύεται ([3]) ότι έχει μοναδική λύση $(\tilde{Y}^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)})$, εφόσον η martingale $M^{(n)}$ έχει την ιδιότητα της προβλέψιμης αναπαράστασης.
Επομένως, το να λύσει κάποιος την εξίσωση (4.2) είναι ισοδύναμο με το να βρει μια λύση στο πρόβλημα:

$$\tilde{Y}_{t_i}^{(n)} = \mathbb{E}\left\{\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} + \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^{(n)}) | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\},$$

το οποίο όμως, λόγω της δέσμευσης ως προς την $\mathcal{F}_{t_i}^{(n)}$, είναι ισοδύναμο με

$$\tilde{Y}_{t_i}^{(n)} - \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^{(n)}) = \mathbb{E}\left\{\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\}. \tag{4.3}$$

Επιπλέον, αν γνωρίζουμε την $\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}$, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}$ μέσω της (4.3) και με την βοήθεια μιας μεθόδου σταθερού σημείου της μορφής:

$$\begin{cases} X^0 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right] \\ X^{k+1} = X^0 + \frac{1}{n} f(t_i, X^k). \end{cases} \tag{4.4}$$

Συνεπώς, βάσει των προαναφερθέντων, προτείνεται το ακόλουθο αναλυτικό αριθμητικό σχήμα για την επίλυση της BSDE (4.1):

$$\begin{cases} \hat{Y}_T^{(n)} = F(M^{(n)});\ \hat{Z}_T^{(n)} = 0 \\ \hat{X}_{t_i} = \mathbb{E}\left\{\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\} \\ \hat{Y}_{t_i}^{(n)} = \hat{X}_{t_i} + \frac{1}{n} f(t_i, \hat{X}_{t_i}) \\ \hat{Z}_{t_i}^{(n)} = \mathbb{E}\left\{\left[\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} + \frac{1}{n} f(t_i, \hat{Y}_{t_i}^{(n)}) - \hat{Y}_{t_i}^{(n)}\right] (\Delta M_{t_{i+1}}^{(n)})^{-1} | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\}. \end{cases}$$

Έτσι, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε την λύση της (4.2) για κάθε διαμέριση του διαστήματος [0,T]. Να αναφέρουμε τον τρόπο υπολογισμού των υπό συνθήκη μέσων τιμών ως προς την διακριτή διήθηση $\mathcal{F}^{(n)}$. Το πιο απλό που μπορεί να σκεφτεί κάποιος για να υπολογίσει αυτές τις ποσότητες είναι το διωνυμικό δέντρο του τυχαίου περιπάτου που προσομοιώσαμε. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\hat{X}_{t_{n-1}} = \mathbb{E}[\hat{Y}_{t_n}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n-1}}^{(n)}]$. Προφανέστατα, αυτό δεν θα είναι κάτι άλλο από την ποσότητα:

$$\hat{X}_{t_{n-1}} = \frac{1}{2}\left\{F\big(M_{t_{n-1}}^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}}\big) + F\big(M_{t_{n-1}}^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)\right\}.$$

Κάνοντας λοιπόν αυτή την δουλειά για κάθε τέτοια περίπτωση που μπορεί να προκύψει στην κάθε πιθανή θέση κάθε χρονική στιγμή, υπολογίζουμε την μέση τιμή στην κάθε χρονική στιγμή και έτσι παίρνουμε τις υπό συνθήκη μέσες τιμές που χρειαζόμαστε.

4.2 Στοιχεία σύγκλισης του αλγορίθμου

Το αλγοριθμικό σχήμα αυτό που ανέπτυξε ο [10], βασίζεται σε κάποιες συνθήκες για τα f, F. Όλη η επιτυχία του σχήματος, βασίζεται σε ένα θεώρημα που συνοψίζονται όλες οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να παρουσιαστεί το εν λόγω θεώρημα αλλά και να διαπιστωθεί η σύγκλιση ώστε το σχήμα να είναι καλώς ορισμένο. Δεν θα αναφερθούμε σε αποδείξεις θεωρημάτων αλλά θα ασχοληθούμε περισσότερο με την διαισθητική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Σε πρώτη φάση, διατυπώνουμε το θεώρημα το οποίο αποτελεί την βάση του σχήματος.

Θεώρημα 4.2.1 *Υποθέτουμε ότι για την εξίσωση (4.1) ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:*

1. $\xi = F(B)$, *όπου* $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *μια φραγμένη Lipschitz συνάρτηση ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία του* Ω. *Τότε, υπάρχει σταθερά* K *τέτοια ώστε για όλα τα* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ *να ισχύει ότι*

$$|F(\omega_1) - F(\omega_2)| \leq K \sup_{0\leq t\leq T} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|.$$

2. $f : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση κατά Lipschitz. Τότε, υπάρχει μια σταθερά* L *τέτοια ώστε για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|.$$

Έστω τώρα $(\tilde{Y}^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)})$ *η λύση της (4.2), και έστω*

$$U_{t_i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{Z}_{t_j}^{(n)} \Delta M_{t_{j+1}}^{(n)} = \tilde{Y}^{(n)} - F\big(M^{(n)}\big) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^{(n)}).$$

Τότε, η ακολουθία $(\tilde{Y}^{(n)}, U^{(n)})$ *συγκλίνει ασθενώς ως προς την Skorohod τοπολογία στο* $(Y, \int ZdB)$, *όπου* (Y, Z) *είναι η μοναδική λύση της (4.1).*

Επίσης, να αναφέρουμε και ένα λήμμα που βασίζεται στο προηγούμενο θεώρημα.

Λήμμα 4.2.1 *Κάτω από τις υποθέσεις για τα* f, F *του θεωρήματος, η λύση* Y *της (4.1) είναι φραγμένη από την ποσότητα* $(D + R_0)e^L$, *όπου* D *ένα φράγμα της* F *και* $R_0 = \sup_{s\in[0,T]} |f(s,0)|$.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δείξουμε κάποια στοιχεία σύγκλισης του αλγορίθμου. Αρχικά, είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής κατά Lipschitz με σταθερά L, τότε οι επαναλήψεις της διαδικασίας θα συγκλίνουν στην πραγματική λύση της (4.3) με γεωμετρικό ρυθμό L/n. Επομένως, στην περίπτωση όπου το n είναι αρκετά μεγάλο, μια επανάληψη ήδη θα μας έδινε εκτίμηση σφάλματος:

$$|\tilde{Y}_{t_i}^{(n)} - X^1| \leq LR/n^2,$$

παράγοντας έτσι μια καλή προσέγγιση της λύσης της (4.3).

Ενδιαφέρον έχει να αναλύσουμε το λάθος αυτού του σχήματος. Είναι σαφές, ότι το λάθος που παράγεται από αυτή την μέθοδο φράσεται από

$$|\tilde{Y}_{t_i}^{(n)} - \hat{Y}_{t_i}^{(n)}| \leq |\mathbb{E}\{\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} - \hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\}|$$
$$+\frac{1}{n}|f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^{(n)}) - f(t_i, \hat{Y}_{t_i}^{(n)})| + \frac{1}{n}|f(t_i, \hat{Y}_{t_i}^{(n)}) - f(t_i, \hat{X}_{t_i})|,$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\sup_{\omega}|\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}-\hat{Y}_{t_i}^{(n)}|\leq\gamma\left(\sup_{\omega}|\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}-\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}|+\frac{LR}{n^2}\right)\ \sigma.\beta.,$$

όπου $\gamma=(1-L/n)^{-1}$ και με R συμβολίζουμε το φράγμα της f. Επαναλαμβάνοντας αυτή την ανισότητα παίρνουμε

$$\sup_{\omega}|\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}-\hat{Y}_{t_i}^{(n)}|\leq\gamma^{n-i}\sup_{\omega}|\tilde{Y}_{T}^{(n)}-\hat{Y}_{T}^{(n)}|+\frac{LR\gamma}{n^2}\frac{\gamma^{n-i}-1}{\gamma-1}.$$

Για μεγάλες τιμές του n (αρκεί $n\geq 2L$) προκύπτει ότι

$$\left(\frac{1}{1-L/n}\right)^{n-i}\leq\left(1+\frac{2L}{n}\right)^{n-i}\leq e^{2L}.$$

Έτσι, παίρνουμε ότι

$$\sup_{\omega}|\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}-\hat{Y}_{t_i}^{(n)}|\leq\frac{R(e^{2L}-1)}{n}.$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε αυτό το φράγμα που υπολογίσαμε ώστε να εξάγουμε και κάποιο φράγμα αντίστοιχα για την ποσότητα $\tilde{Z}^{(n)}-\hat{Z}^{(n)}$. Δουλεύοντας λοιπόν κατ' αυτό τον τρόπο, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{t_i}^{(n)}-\hat{Z}_{t_i}^{(n)}&=\left[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}+\frac{1}{n}f(t_i,\tilde{Y}_{t_i}^{(n)})-\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}\right](\Delta M_{t_{i+1}}^{(n)})^{-1}\\&-\mathbb{E}\left\{\left[\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}+\frac{1}{n}f(t_i,\hat{Y}_{t_i}^{(n)})-\hat{Y}_{t_i}^{(n)}\right](\Delta M_{t_{i+1}}^{(n)})^{-1}|\mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\},\end{aligned}$$

και από την προσαρμοστικότητα της $\tilde{Z}^{(n)}$ προκύπτει ότι

$$\tilde{Z}_{t_i}^{(n)}-\hat{Z}_{t_i}^{(n)}=\mathbb{E}\left\{\left[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}-\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)}+\frac{1}{n}(f(t_i,\tilde{Y}_{t_i}^{(n)})-f(t_i,\hat{Y}_{t_i}^{(n)}))+\tilde{Y}_{t_i}^{(n)}-\hat{Y}_{t_i}^{(n)}\right](\Delta M_{t_{i+1}}^{(n)})^{-1}|\mathcal{F}_{t_i}^{(n)}\right\}.$$

Τέλος, παίρνουμε την ανισότητα

$$\sup_{\omega}|\tilde{Z}_{t_i}^{(n)}-\hat{Z}_{t_i}^{(n)}|\leq\frac{R(e^{2L}-1)(2+L/n)}{\sqrt{n}},\quad\sigma.\beta.$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι για την σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου αρκεί να επικεντρωθούμε στην λύση της (4.2).

Αποδείξεις των θεωρημάτων και εκτενέστερη θεωρητική μελέτη του σχήματος αυτού μπορεί να βρει κανείς στον [10]. Επίσης, αναφέρουμε μια υπόδειξη για τον τρόπο που μπορεί να αντιμετωπίσει κανείς μια BSDE μέσω αυτού του σχήματος, που εμπεριέχει όμως έναν όρο Z στον γεννήτορα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $H(s)$ είναι μια προβλέψιμη διαδικασία του χώρου L^2 ως προς το μέτρο P. Επίσης, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε αυτή την διαδικασία. Τότε, είμαστε σε θέση να επιλύσουμε αριθμητικά την BSDE

$$Y(t)=\xi+\int_t^T(f(s,Y(s))+H(s)Z(s))ds-\int_t^T Z(s)dB_s,\tag{4.5}$$

λύνοντας πρώτα την εξίσωση

$$Y(t)=\xi+\int_t^T f(s,Y(s))ds-\int_t^T Z(s)dB_s.\tag{4.6}$$

Δοθέντος τώρα της εξίσωσης (4.4) στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, κατασκευάζουμε την εξίσωση

$$M(t) = 1 + \int_0^t M(s)H(s)dB_s \tag{4.7}$$

και ύστερα θέτουμε $\beta = B(t) - \int_0^t H(s)ds$, η οποία είναι μια κίνηση Brown κάτω από το νέο μέτρο πιθανότητας Q που ορίζεται από την σχέση $dQ = M_T dP$. Έτσι, επανερχόμαστε στην (4.5) και λύνουμε αυτή την εξίσωση κάτω από το καινούριο μέτρο όμως αντικαθιστώντας όπου B με β. Τότε, η λύση Y της σχέσης (4.5), είναι επίσης και λύση της (4.4) κάτω από το μέτρο P και χρησιμοποιώντας την αρχική κίνηση Brown B. Τέλος, να σημειώσουμε ότι οι εξισώσεις της μορφής (4.4) χρήζουν μεγάλου ενδιαφέροντος στην χρηματοοικονομική θεωρία τιμολόγησης κεφαλαίων.

4.3 Ένα παράδειγμα αριθμητικής επίλυσης BSDE

Σε αυτή την παράγραφο, σκοπός μας είναι να ελέγξουμε τα αποτελέσματα που δίνει το σχήμα που παρουσιάσαμε και να δούμε πόσο κοντά είναι οι λύσεις που δίνει στις πραγματικές. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό, θα δούμε μια περίπτωση BSDE για την οποία ξέρουμε την αναλυτική της λύση και παράλληλα θα την επιλύσουμε με την βοήθεια του αλγορίθμου μας. Έτσι, θα μπορέσουμε να δούμε κατά πόσο συμφωνούν ή διαφέρουν οι δύο λύσεις σε κάθε περίπτωση.

Η εξίσωση της οποίας την λύση θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε είναι η

$$dY(t) = -\mu Y(t)dt + Z(t)dW_t, \quad Y(T) = K - W_T = \xi. \tag{4.8}$$

Θεωρούμε ότι τα μ, K είναι σταθερές. Σε πρώτη φάση, θέλουμε να υπολογίσουμε την αναλυτική λύση αυτής της εξίσωσης. Παίρνουμε λοιπόν $M = 1000$ τυχαίες τροχιές κινήσεων Brown, ώστε να πετύχουμε μια καλή προσέγγιση του υπολογισμού της αναλυτικής μας λύσης. Η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε εντάσσεται στην κατηγορία των BSDEs με γραμμικό γεννήτορα. Στην παράγραφο 1.3 δείξαμε έναν κλειστό τύπο για την μορφή της λύσης των γραμμικών BSDE. Κάνουμε χρήση λοιπόν αυτής της φόρμουλας ώστε να υπολογίσουμε την άναλυτική λύση στην περίπτωση μας. Η λύση λοιπόν θα είναι η

$$Y(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbb{E}[\Psi(T)Y(t)|\mathcal{F}_t], \tag{4.9}$$

όπου η $\Psi(t)$ υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\Psi(t) = \mu\Psi(t)dt, \quad \Psi(0) = 1. \tag{4.10}$$

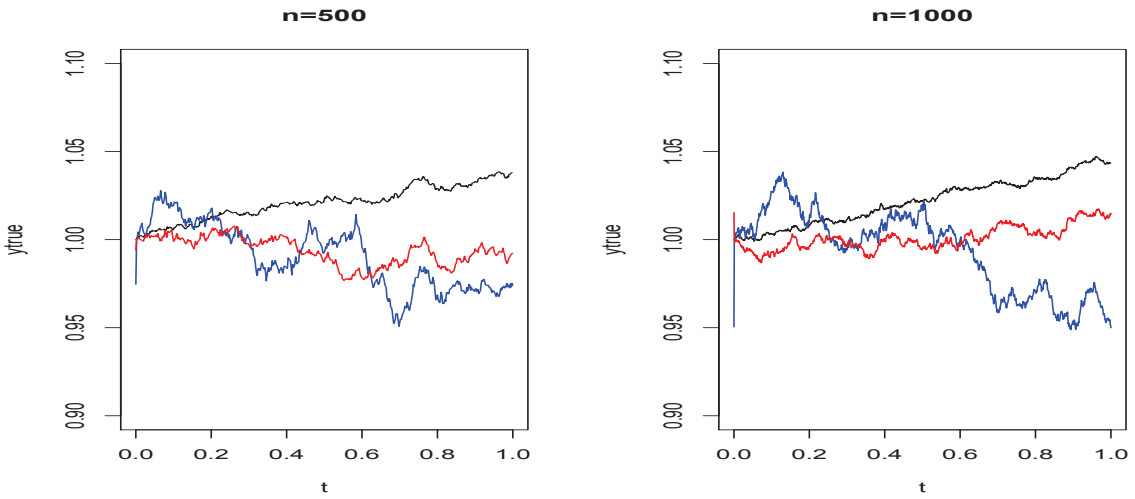
Βρίσκουμε λοιπόν ότι η λύση της δεύτερης συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι η $\Psi(t) = e^{\mu t}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (4.9), η αναλυτική λύση της (4.8) θα είναι

$$Y(t) = e^{-\mu t}\mathbb{E}[e^{\mu T}\xi|\mathcal{F}_t] = e^{\mu(T-t)}\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]. \tag{4.11}$$

Τώρα θα επιλύσουμε την εξίσωση αυτή και με τον αλγόριθμο μας. Για να μπορέσουμε να έχουμε οπτικά αποτελέσματα θα δώσουμε κάποιες τιμές στις παραμέτρους της εξίσωσης. Έστω λοιπόν ότι έχουμε $\mu = 0.05, K = 1$. Το διάστημα του χρόνου που εργαζόμαστε είναι το [0,1]. Οπότε η διακριτοποίηση που θα κάνουμε αφορά αυτό το διάστημα. Θα εφαρμόσουμε δύο διακριτοποιήσεις για $n = 500$ και για $n = 1000$. Είναι προφανές ότι από υπολογιστικής άποψης δεν μπορούμε να υπολογίσουμε 2^500 ή 2^1000 περιπτώσεις ώστε να υπολογίσουμε την ακριβή αναλυτική λύση. Οπότε θα κάνουμε την ακόλουθη θεώρηση. Δημιουργούμε μια βάση από $M = 5000$ τυπικές κινήσεις Brown 500 και 1000 βημάτων αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι αυτές οι M τροχιές είναι ικανές να μας αποδώσουν την πραγματικότητα. Έτσι μέσω αυτής της βάσης δεδομένων υπολογίζουμε την αναλυτική λύση της εξίσωσης.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε πάλι αυτές τις βάσεις ώστε να υπολογίσουμε την αριθμητική λύση της εξίσωσης. Υπολογίζουμε την αριθμητική λύση για 500 και 2000 προσομοιωμένες τροχιές. Αυτές οι τροχιές πρέπει να είναι τυχαία επιλεγμένες από την βάση δεδομένων που δημιουργήσουμε με επανατοποθέτηση ώστε να εξασφαλίσουμε κατά κάποιο τρόπο ότι η βάση δεδομένων μας καλύπτει την πραγματικότητα. Έτσι, υπολογίζουμε και την αριθμητική λύση.

Αφού κάνουμε αυτή την δουλειά, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που δίνει ο κάθε τρόπος υπολογισμού της λύσης από τα ακόλουθα γραφήματα.



Πριν ξεκινήσουμε τον σχολιασμό να πούμε ότι η μαύρη γραμμή είναι η αναλυτική λύση, η μπλε η αριθμητική λύση με βάση δεδομένων 500 τροχιών και η κόκκινη η αριθμητική λύση από 2000 τροχιές. Αξίζει λοιπόν να παρατηρήσουμε κάποια πράγματα. Πρώτον, είναι λογικό και εμφανές ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των προσομοιωμένων τροχιών που χρησιμοποιούμε στην αναλυτική λύση τόσο πιο λεία θα είναι αυτή. Επίσης, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας περισσότερες τροχιές προσεγγίζουμε την πραγματική λύση χωρίς μεγάλες μεταβολές στην απόσταση από αυτήν. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας λιγότερες προσομοιώσεις, η απόσταση από την αναλυτική λύση δεν δείχνει να σταθεροποιείται. Μειώνοντας το βήμα της διακριτοποίησης, παρατηρούμε ότι οι αριθμητικές λύσεις συγκλίνουν προς την αναλυτική με κάπως καλύτερο ρυθμό. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι σχεδόν σε όλο το διάστημα του χρόνου, η αριθμητική λύση δείχνει να υποεκτιμά την αναλυτική. Αυτό είναι μια χρήσιμη παρατήρηση καθώς ακόμα και αν δε μας ικανοποιεί η λύση που μας δίνει ο αλγόριθμος και νιώθουμε ότι δεν μπορούμε να τον εμπιστευτούμε, μας δίνει σίγουρα μια ιδέα για το κάτω φράγμα της λύσης. Βέβαια αυτό χρήζει περαιτέρω διερεύνησης και να διαπιστωθεί και σε πιο σύνθετης μορφής εξισώσεις.

Οπότε αυτό που μπορούμε να πούμε για τον αλγόριθμο είναι τα εξής:

- Προσπαθούμε να χρησιμοποιούμε αρκετά μεγάλο αριθμό προσομοιωμένων τροχιών έτσι ώστε να προσεγγίζουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την γενικότητα.
- Χρησιμοποιούμε διαμέριση του χρονικού διαστήματος που εργαζόμαστε όσο το δυνατόν με πιο μικρό βήμα.
- Δεν εμπιστευόμαστε πλήρως την αριθμητική λύση αλλά την λαμβάνουμε υπόψην σαν κάποιου είδους φράγμα για το πλαίσιο στο οποίο μπορεί να κινηθεί η αναλυτική λύση.

Βιβλιογραφία

[1] C. Bender and R. Denk, *A forward scheme for backward SDEs*, Stochastic Processes and their Applications, 2007

[2] Z. Brzezniak and T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*, Springer-Verlag, 4th edition, 2002

[3] R. Buckdahn, *Backward stochastic differential equations driven by a martingale*, Unpublished preprint, Universite de Provence

[4] N. El Karoui, S. Peng and M. C. Quenez, *Backward stochastic differential equations in finance*, Mathematical Finance, 1997

[5] D. J. Higham, *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, unpublished paper, 2001

[6] J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson Prentice Hall, 7th edition, 2009

[7] P. Jorion, *Financial Risk Manager Handbook*, Wiley, 2nd edition, 2003

[8] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, 1st edition, 1991

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve, Methods of mathematical finance, Springer, 1st edition, 1998

[10] J. Ma, P. Protter, J. San Martin and S. Torres, *Numerical method for backward stochastic differential equations*, Annals of Applied Probability, 2002

[11] H. Markowitz, *Portfolio selection*, Wiley, 1st edition, 1959

[12] B. Oksendal, *Stochastic differential equations - An introduction with applications*, Springer, 5th edition, 1999

[13] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems and Control Letters, 1990

[14] E. Pardoux and D. Talay, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Acta Applicandae Mathematicae, 1985

[15] H. Pham, *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*, Springer, 1st edition, 2004

[16] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I - The Binomial asset pricing model*, Springer, 1st edition, 2003

[17] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II - Continuous time models*, Springer, 1st edition, 2004

[18] J. Xia, *Mean-variance portfolio choice - quadratic partial hedging*, Mathematical Finance, 2005

[19] Αθ. Γιαννακόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, 1η έκδοση, 2001

[20] Αθ. Γιαννακόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος ΙΙ: Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, 1η έκδοση, 2004

[21] J. Yong and X. Y. Zhou, *Stochastic controls - Hamiltonian systems and HJB equations*, Springer-Verlag, 2000

[22] Y. Zhang and W. Zheng, *Discretizing a backward stochastic differential equation*, Unpublished preprint, 2001